

A constitutive representation on the production of glottal waves

田部, 洋祐

<https://doi.org/10.15017/459601>

出版情報 : 九州大学, 2006, 博士 (芸術工学), 課程博士
バージョン :
権利関係 :

第3章

境界層近似に基づく声門流の構成的表現

3.1 はじめに

第2章では、声門波の生成モデルを構築する際の基本的な考え方を明らかにするために、代表的な声門波の生成モデルである声帯の2質量モデル [14] の説明を行った。声門波の生成過程は、声帯の振動部分の現象と、声門部における流れの現象に分けてモデル化される。2質量モデルでは、声帯の振動部分の現象に関しては、2自由度の機械振動系として表した。一方、声門部での流れの現象に関しては、1次元流と仮定し、さらに、流れの剥離位置を声門出口に固定して考える。これにより、声門流を電気・流体系のアナロジーに基づいて等価回路として表した。

しかし、声門部における流れの現象をより詳細に検討すると、境界層の剥離や渦流の形成を表現可能な声門流モデルが必要であることが分かる。発声時、声門を呼気流が通過する。Reynolds 数の大きい声門流は、声帯表面から離れたところでは粘性のない流れのようにふるまい、声帯表面のごく近くに粘性のために薄い境界層ができる。境界層は、声門形状に応じて声帯表面から剥離して、渦流を形成する。境界層の剥離の現象は流れの損失をもたらし、声帯表面に働く圧力分布に影響を与える。また、渦流は音源としての効果を有している [21,23,24]。このことから、声門形状に応じた剥離位置の変動を適応的に予測可能な声門流モデルが必要とされている。

そこで本章では、境界層の挙動を陽に組み込んだ声門流モデルを構築する。このようなモデルは、1994年に Pelorson ら [26] によって初めて提案された。彼らは、声門流の Reynolds 数が 10^3 に達するという事実から、境界層の理論 [25] を用いて、剥離の現象を陽に組み込んだ1次元声門流モデルを構築した。本章で提案する声門流のモデル表現は、Pelorson らの声門流モデルを改良したものである。彼らは声門流を1次元流れと仮定したが、本論文では渦流を表現できるように、声門流を2次元流れと仮定する。境界層の理論に基づき、本論文では、声門

流の領域を主流・境界層・渦流の3つの要素から構成する。多様な発声条件の下で生成させる声門波は、これらの流れの要素によって柔軟かつ安定に表現できると期待される。

本章ではまず、声門流の無次元特徴量の考察を行う。これにより、声門流の領域を主流・境界層・渦流の3つの要素によってモデル化する根拠が示される。次に、個々の流れの領域の具体的な定式化を行う。境界層に関しては、粘性流体の支配方程式を変形して、声帯表面に沿う境界層の積分方程式 [25] を導出する。自由な声門形状において境界層の積分方程式を解くには、境界層の外縁の主流速を知る必要がある。そこで本論文では、等角写像の手法 [29] を用いることで、自由な声門形状における主流の表現を得る。これにより、声帯振動に呼応した境界層の挙動の変化を、適応的に予測することが可能となる。渦流の領域に関しては、離散渦法 [28] を用いて、離散的な渦糸を境界層の剥離位置より時々刻々と放出・対流させることで表現する。この方法では、乱流状態となる渦流領域においては、渦糸の存在密度が高くなるだけで、領域全体に渡る計算格子を作成する必要がなくなる。代表的な数値シミュレーション手法である差分法 [28] や有限要素法 [28] では、声帯振動による境界の移動のために、数値的に安定な計算格子を作成することは、大変な困難を伴う。一方、本論文で提案する手法はそのような問題と無縁である。本手法を安定と述べた理由はこの点に由来する。

3.2 声門流の無次元特徴量

本論文では、声門流を2次元の非圧縮流れと仮定する。その上で、流れの領域を主流・境界層・渦流の3つの要素によって表現する。さらに、境界層の挙動の解析に際して、声門形状を擬似的に定常と考える。本節では、声門流の無次元特徴量の考察を通じて、これらのモデル化の根拠を示す。

ここではまず、声門の形状比の考察より、2次元流れと仮定する根拠を示す。次に、流れの Mach 数の考察より、非圧縮流れと仮定する根拠を明らかにする。それから、流れの Reynolds 数の考察より、境界層の理論 [25] を採用し、声門流の領域を主流・境界層・渦流の3つの要素によってモデル化する根拠を示す。最後に、流れの Strouhal 数の考察により、声門形状を擬似的に定常と仮定する根拠を示す。

3.2.1 声門形状比

まず、声門の形状比率に関する考察を基に、2次元流れの仮定を採用する根拠を示す。

水平面から見た声門形状の模式図を、図 3.1 に示す。中央のスリットが声門を表している。発声時、声帯振動により声門の開口幅 d は変化するが、これは $0 \sim 0.3$ cm の程度である [26]。また、1.2 節で述べたように、声帯の長さ l_g は成人男性でおよそ $l_g = 1.5$ cm の程度である。これらの比率

$$\frac{d}{l_g} \quad (3.1)$$

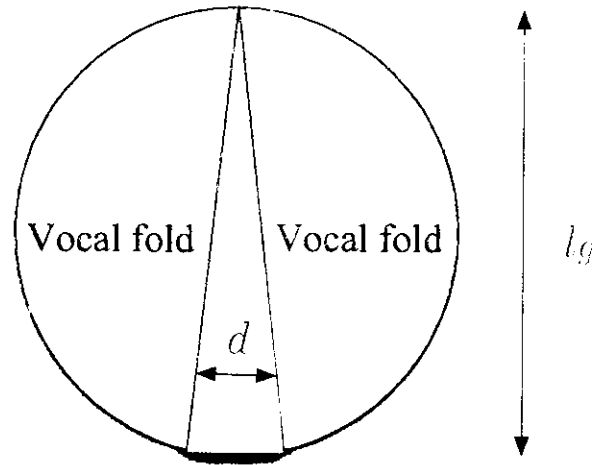


図 3.1 水平面からみた声門形状

は、 l_g に対する d の優位性を示している。上式に具体的な数字を代入すると、そのオーダーは 10^{-1} の程度であることが分かる。これより、 l_g の長さは d に比べて大きいため、声門流における l_g 方向の流れ成分の挙動は無視できると考えられる。

Miki ら [33] は、3次元の喉頭形状における声門流の数値シミュレーションより、声門流がほぼ2次元的であると結論している。また、2次元声門流のシミュレーション結果との比較より、3次元の効果は、流れの粘性抵抗を増大させるとしている。この点に注意を払えば、流れを近似的に2次元的と仮定することは、声門流の解析に際して有効である。よって、本論文では、人体の前額面を考え、声門流を2次元的と仮定する。

3.2.2 Mach 数

次に、声門流を非圧縮流れと仮定する根拠について検証する。

式 (2.6) で見たように、本論では声門波の生成過程において熱量の交換が何ら影響しないと仮定する。すると、圧力 p と密度 ρ には次の関係が成立する。

$$p = p(\rho, s), \quad s = \text{const.}$$

ここで密度を $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ とおき、 $p(\rho, s)$ を平均密度 ρ_0 の周辺でテイラー展開をすると

$$\begin{aligned} p &= p(\rho_0, s) + \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 \delta\rho + \mathcal{O}(\delta\rho^2) \\ &\approx p_0 + c_0^2 \delta\rho \end{aligned} \quad (3.2)$$

を得る。 p_0 は大気圧を表し、 c_0 は音速である。また、音声の音圧変化 $p - p_0$ は線形の範囲であると考え、 $\mathcal{O}(\delta\rho^2)$ の項を省略した。

流れが非圧縮性であるとは、具体的には、密度 $\rho = \rho_0$ ということである。以下、この関係を式 (3.2) より導く。式 (3.2) は、発話系全体に有効な方程式である。そこで、声門流を中心とした視点で式 (3.2) を検討するために

$$\tilde{p} = \frac{p - p_0}{\rho \bar{U}^2}$$

の変数変換を利用する。ここで \bar{U} は発声時における声門流の平均主流速度であり、おおよそ $\bar{U} = 10 \sim 40$ m/sec とされている [26]。上式を式 (3.2) に代入すると、

$$\rho = \rho_0 + \tilde{p} \rho M^2 \quad (3.3)$$

の関係が得られる。ここで M は Mach 数であり、次式で定義される。

$$M \equiv \frac{\bar{U}}{c_0} \quad (3.4)$$

式 (3.4) に声門流の平均主流速 $\bar{U} \approx 10 \sim 40$ m/sec と音速 $c_0 \approx 340$ m/sec の具体的な数値を代入すると、そのオーダーはおおよそ 10^{-1} であることが分かる。したがって、式 (3.3) の第2項は、第1項に比べて非常に小さくなる。これより $\rho = \rho_0$ の関係が成立し、声門流は密度一定、すなわち、非圧縮性流れであると仮定することができる。なお、この仮定の妥当性に関しては、声門波の生成シミュレーションにおける Mach 数の変動に基づいて検討を行う。

3.2.3 Reynolds 数

ここでは、声門流における慣性力と粘性力の釣り合いについて論じる。この釣り合いを示す無次元数が、Reynolds 数である [34]。本節では声門流の Reynolds 数を概算する。そして、その結果に基づき、流れの大部分は非粘性的であることを示す。また、粘性の表れる領域は、声帯表面に沿って生じる境界層と、その剥離によって生じる渦流に限定されることを示す。

今、流れの軸方向に沿う声門流に着目し、流れの代表的長さとして流速をそれぞれ L , U とする。ここで L は声門の開口幅 $d \approx 0 \sim 0.3$ cm, U は流れの軸方向の平均主流速 $\bar{U} \approx 10 \sim 40$ m/sec で与える [26]。これらの代表的スケールにより、運動方程式 (2.8) の各項を無次元化する。

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i}{L}, \quad \tilde{v}_i = \frac{v_i}{U}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{L/U}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{\rho_0 U^2}, \quad \frac{\tilde{D}}{Dt} = \frac{1}{U/L} \frac{D}{Dt}, \quad \tilde{\nabla} = L \nabla$$

ここで、チルダは無次元量であることを示す。これより、運動方程式 (2.8) は次のようになる [34]。

$$\frac{\tilde{D}\tilde{v}_i}{Dt} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i} + \frac{1}{Re} \tilde{\nabla}^2 \tilde{v}_i \quad (3.5)$$

ここで Re は次式で定義される Reynolds 数である。

$$Re = \frac{UL}{\nu}, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho_0} \quad (3.6)$$

式 (3.5) の方程式としての性質は、Reynolds 数により決定される。Reynolds 数が大きい場合、式 (3.5) 右辺第 2 項の影響が弱まり、流れは非粘性的にふるまう。今、式 (3.6) に具体的数値を代入すると、Reynolds 数 R_e のオーダーは 10^3 に達すると予想される。これより、流れの大部分の領域では、粘性の影響を無視できると考えられる。この領域のことを主流と呼ぶ。

一方で、粘性の影響は、声帯表面のごく近くの境界層にのみ表れると考えられる。境界層とは、粘性によって壁面付近に付着する流れの層である。声帯表面に沿って生じる境界層は、声門形状に応じて声帯表面から剥離して、渦流を形成する。したがって、粘性の表れる流れの領域は、境界層と渦流に限定されると考える。

以上の考察に基づいて、本論では、声門流の領域を、主流・境界層・渦流の要素により表現する。したがって本論では、粘性流体の支配方程式 (2.8) を直接取り扱うのではなく、それぞれの領域に適合した方程式を用いて流れを表現する。なお、個々の領域の表現の詳細については 3.3 節以降で述べる。

3.2.4 Strouhal 数

最後に、声門形状を擬似的に定常と仮定する根拠について検討する。発声時には、声帯の振動周波数 f_0 は、成人男性でおよそ 100 ~ 200 Hz となる。また、図 3.1 の奥ゆきにあたる声帯の厚さ l_t は約 0.3 cm の程度である。これより、流れの軸方向の平均主流速 \bar{U} に対する声帯振動による流れの非定常の効果は、次式の Strouhal 数によって検討される。

$$S_t = \frac{f_0 l_t}{\bar{U}} \quad (3.7)$$

Strouhal 数は、声帯振動による流れの非定常性の影響を表す。上式に具体的な数値を代入すると、そのオーダーは 10^{-2} の程度になる。この値は十分小さいため、声帯振動に基づく流れの非定常性の影響は無視できると考えられる。これは、声門形状が擬似的に定常であると仮定することと等価である [26]。

3.3 声門流の構成

本論における声門流の構成を図 3.2 に示す。本論では、声門流の領域を主流 (main flow)・境界層 (boundary layer)・渦流 (vortical flow) の 3 つの要素によって構成する。したがって、本論では粘性流体の支配方程式 (2.8) を直接取り扱うのではなく、それぞれの領域に適合した方程式を用いて流れを表現する。本節以降では、個々の領域の表現法について、具体的に説明を行う。

表 3.1 に、それぞれの流れの領域に対する解析法の概要を示す。まず、主流に関しては、非圧縮・非粘性・渦なしの流れとみなして、Laplace 方程式 (3.11) を用いて表す。Laplace 方程

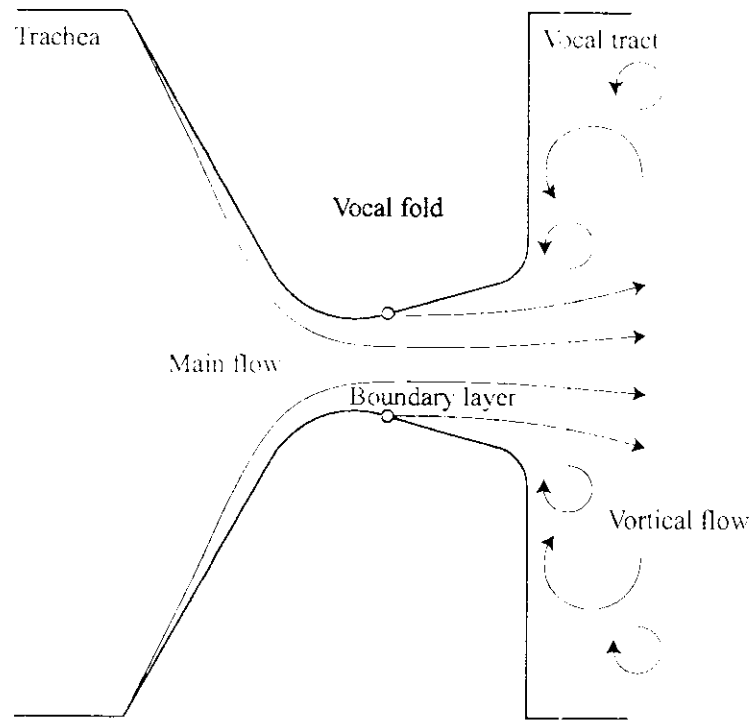


図 3.2 本論における声門流のモデル表現。流れの領域を主流 (main flow)・境界層 (boundary layer)・渦流 (vortical flow) の3つの要素を元に構成する。なお、○印は境界層の剥離位置である。

流れの領域	主流	境界層	渦流
流れの特性	非粘性・渦なし	粘性流	粘性流
支配方程式	Laplace 方程式 (3.11)	境界層の積分方程式 (3.53)	渦度方程式 (3.80)
解法のあらまし	声門形状に対して等角写像を用いて主流を算出 (3.5 節)	境界層の速度分布に相似性を仮定して境界層の挙動を推定 (3.6 節)	境界層の剥離と渦流の生成を離散的な渦糸の放出と対流により表現 (3.7 節)

表 3.1 流れの領域に対する解析法の概要

式は、流れの境界条件を満足するスカラーポテンシャルを解を持つ。ここで、声門形状は声帯振動によって時々刻々と変動するため、境界条件も同時に変化する。そこで、任意の声門形状においてポテンシャルを導出するため、等角写像の手法 [29, 35] を用いる。この手法では、声門閉鎖を含む種々の声門形状における流れは、トポロジー的に等価な帯領域における流れとして統一的に取り扱うことが可能となる。詳細は 3.5 節で述べる。

次に、境界層に関しては、主流と異なり、粘性流の特性を持つ。ここでは境界層の厚さを、声帯表面の曲率半径に比べて十分薄いと仮定する。これにより、粘性流体の支配方程式 (2.8) から境界層の積分方程式を導く [34]。さらに、速度の急勾配である境界層を数値的に安定に解析するために、Kármán-Pohlhausen の方法にしたがって、境界層の内部における速度分布に相似性を仮定する [25]。これにより、境界層の積分方程式を、速度分布の形状を決定する形状因子の関数として表す。この方程式は、境界層の外側の主流速を境界条件として解くことができる。したがって、主流の表現と組合せることで、任意の声門形状における境界層の挙動を推定することができる。詳細は 3.6 節で述べる。

最後に、渦流に関しては、境界層の剥離により生じることから、境界層と同様に粘性流の特性を持つ。渦流の支配方程式は、粘性流体の支配方程式 (2.8) から導かれる渦度方程式である。ここでは、その解法として離散渦法 [36] の考え方を採用する。離散渦法では、連続的な渦度場を離散的な渦糸の集合として表す。また、渦流の生成に関しては、境界層の剥離位置から時々刻々と渦糸を放出・対流させることでモデル化する。この方法では、渦による乱流領域は、渦糸の密度が高くなるだけで、数値的には常に安定した解析が可能である。詳細は 3.7 節で述べる。

3.4 声門流の支配方程式

本論では、声門流の領域を主流・境界層・渦流の 3 つの要素によって構成する。本節以降では、それぞれの領域の支配方程式を導き、その解法を示すのであるが、ここではまず、声門流の支配方程式について述べる。主流・境界層・渦流の領域の支配方程式は、声門流の支配方程式を適切に式変形することで得られる。

本論では、3.2.1 節の議論より、声門流を 2 次元性と仮定する。つまり、位置 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ に存在する流れの流速を 2 次元速度ベクトル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ で表す。また、3.2.2 節の議論より、声門流を非圧縮性と仮定する。したがって本論では、声門流の物理的な運動を、2 次元非圧縮性流体の Navier-Stokes 方程式を用いて表す [34]。

$$\rho_0 \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 v_i \quad (3.8)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.9)$$

ここで、添え字「 i 」は流れの各軸の成分を表し、 $i = 1, 2$ である。上式が声門流の支配方程式である。

3.5 非粘性の主流域の表現

3.5.1 はじめに

本節では、主流域の表現について述べる。3.2.3節の議論より、本論では、主流域を非粘性で渦なしの流れと仮定する。

ここではまず、非粘性・渦なしの仮定を基に声門流の支配方程式を変形して、主流域の支配方程式である Laplace 方程式を導く。次に、2次元流れを効果的に表すために、複素数による表現を導入する。これにより、Laplace 方程式の解は、複素平面における解析関数の実数部として表される。さらに、任意の声門形状において Laplace 方程式を解く手法として、等角写像の手法を導入する。

3.5.2 主流域の支配方程式

ここでは、主流域の支配方程式として、Laplace 方程式を導出する。仮定より、主流域は非粘性で渦のない流れである。したがって

$$\boldsymbol{v} = \nabla\phi \quad (3.10)$$

なる速度ポテンシャル ϕ により速度場を表現することができる [35]。上式を連続の式 (3.9) に代入すると、次式の Laplace 方程式を得る。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \nabla^2\phi = 0 \quad (3.11)$$

上式が主流の支配方程式である。主流域の流速場は、上式を満足するポテンシャル ϕ により表される。なお、境界条件は、声帯表面における法線ベクトルを \boldsymbol{n} とおくと

$$\nabla\phi \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad (3.12)$$

で与えられる。

3.5.3 2次元流速場の複素表現

前節では、主流の支配方程式として、Laplace 方程式 (3.11) を導出した。Laplace 方程式は、スカラーポテンシャル ϕ を解に持つ。ここでは、2次元流れを効果的に表すために、主流域を複素平面上で表現する。これにより、Laplace 方程式の解は、複素平面における解析関数の実数部として与えられることを示す。

いま、2次元平面上で取られている声門形状を複素 z 平面上に取る。ここで $z = x_1 + ix_2$ である。2次元速度ベクトル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ の成分は式 (3.10) より

$$v_1 = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \quad v_2 = \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \quad (3.13)$$

で表される。また、任意の解析関数 $\psi(x_1, x_2)$ をとり

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad (3.14)$$

とおけば、連続の式 (3.9) は自動的に満足される。 ψ は

$$\psi(x_1, x_2) = \text{const.} \quad (3.15)$$

が流線を表すため、流れの関数と呼ばれる。

式 (3.13) と式 (3.14) とをまとめると、2次元速度ベクトルの各成分を

$$v_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad (3.16)$$

のように表すことができる [35]。式 (3.16) は ϕ , ψ に対する Cauchy-Riemann の関係式であり

$$f(z) = \phi + i\psi \quad (3.17)$$

とおくとき、 f が z の解析関数であるための条件を表している。すなわち、 z 平面上の任意の解析関数は、その実部に Laplace 方程式 (3.11) の解 ϕ を持つ。解析関数 f を複素速度ポテンシャルという。式 (3.17) を x_1 について微分し、式 (3.16) を考慮すると

$$\frac{df}{dz} = v_1 - iv_2 = q(\cos \theta - i \sin \theta) = qe^{-i\theta} \quad (3.18)$$

という関係が得られる。 q は流速の大きさであり、 θ は速度ベクトルが x_1 軸となす角度である。したがって、複素速度ポテンシャル f が具体的に定まれば、2次元の渦なしの声門流の挙動を知ることができる。ただし、複素速度ポテンシャル f は、境界条件 (3.12) を満たす必要がある。

3.5.4 等角写像を用いた複素速度ポテンシャルの導出

前節では、2次元流速場を複素速度ポテンシャルの形でモデル化した。流速場を複素平面上で定義すると、解析関数である複素速度ポテンシャルの実数部は Laplace 方程式 (3.11) を満足した。しかし、喉頭内部のような複雑な境界形状を持つ流速場では、境界条件 (3.12) を満足する複素速度ポテンシャルを直接導出することは難しい。さらに、声帯振動に伴い、声門形状は時々刻々と変動するという問題がある。そこで本節では、等角写像を用いて、複素速度ポテンシャルの導出を行う [35]。声門部の実際の形状を表す物理領域に対して、より簡潔な形状をもつ標準領域を考え、両者の間の写像関数を等角写像として求める。標準領域では、一様流や渦流を表す解析関数は既知であり、これらを写像関数を用いて物理領域に写像したものが、声門流を表す複素速度ポテンシャルとなる。

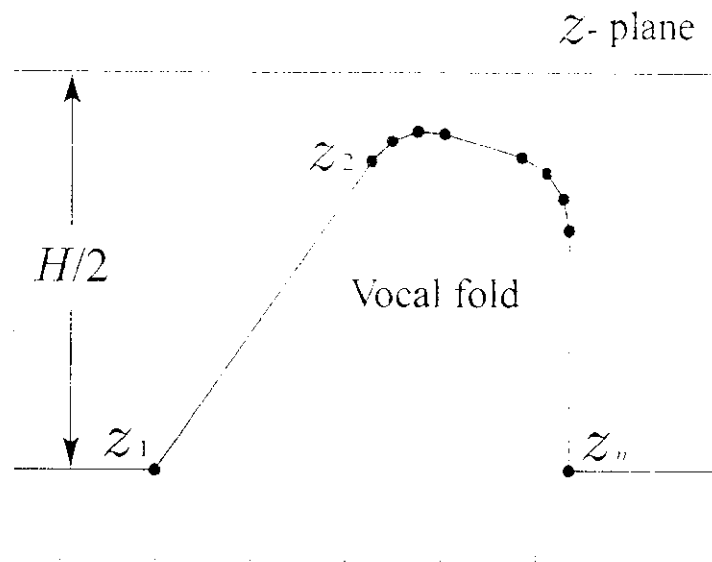


図 3.3 喉頭内部の物理領域と境界の多角形近似

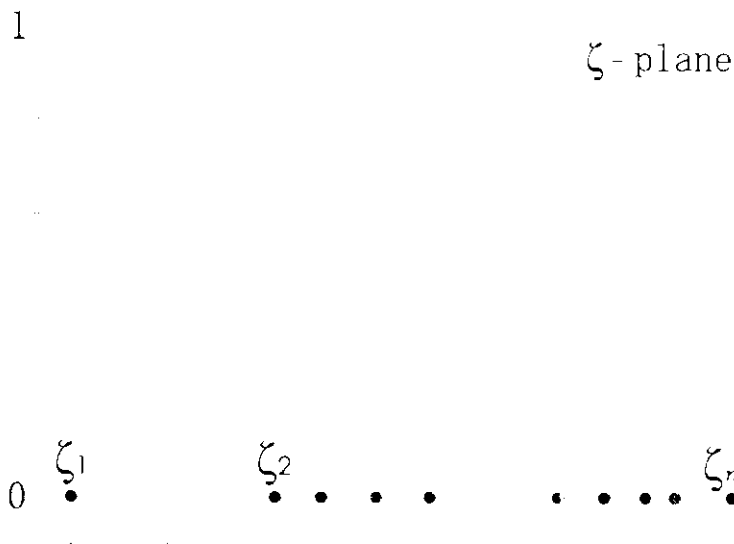


図 3.4 図 3.3 の物理領域に対応する帯領域

自由な声門形状に対して等角写像を適用するために、図 3.3 のように声門を n 節点の多角形で近似する。なお、本論では声門流を流れの軸に対称と仮定して、流路の下半分の領域のみを考える。ここで、節点 z_1 の左方と z_n の右方では、平行な境界が無限遠まで延びているとする。また、 H は喉頭管の幅である。一方、標準領域として、無限帯領域 $S = \{0 < \text{Im } \zeta < 1\}$ を表す ζ 平面をとる (図 3.4)。物理領域と標準領域とは、等角写像関数

$$z = g(\zeta) \quad (3.19)$$

で一对一に結ばれている。なお、写像関数の決定法については、3.5.5 節で述べる。

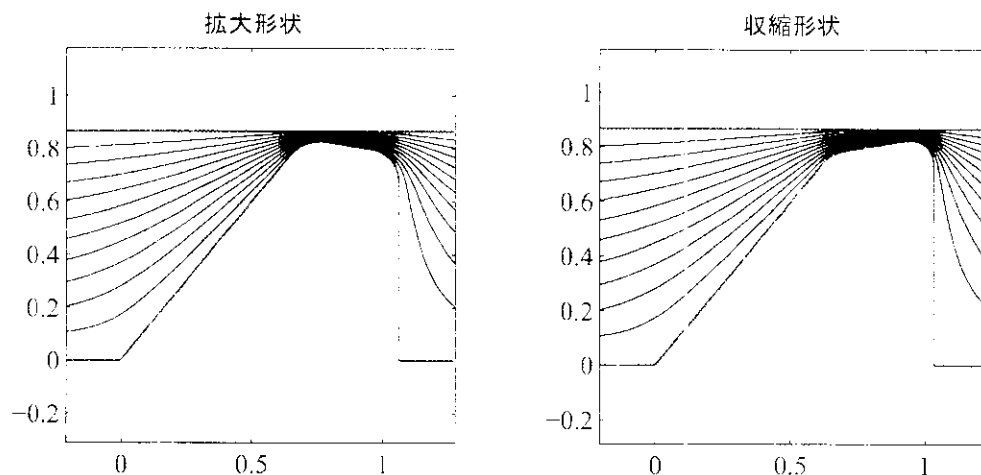


図 3.5 拡大形状と収縮形状の声門を流れる非粘性流の流線

式 (3.19) を式 (3.17) に代入すると、呼気流を表す一様流の複素速度ポテンシャルを、帯領域において表すことができる。

$$f(g(\zeta)) = V\zeta \quad (3.20)$$

ここで、 V は呼気流量を表現する変数であり、後に式 (4.3) により定義される。

物理領域における複素速度 $v_1 - iv_2$ は、式 (3.18)(3.19)(3.20) より次式で求められる。

$$v_1 - iv_2 = \frac{df}{dz} = \frac{df}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = V \frac{1}{g'(\zeta)} \quad (3.21)$$

図 3.5 は、拡大形状と収縮形状の声門を流れる非粘性の一様流を示したものである。式 (3.20) の虚部で表される流れの関数を一定値とする曲線を示すと、図 3.5 の流線を得ることができる。発声時、声門は種々の形状を取るが、その形状の変化は写像関数 (3.19) に集約され、複素速度ポテンシャルは一定のままである。

3.5.5 等角写像関数の決定

前節では、任意の声門形状における主流の表現を得るために、等角写像を利用する方法について述べた。物理領域と帯領域で表された標準領域は、等角写像関数 $z = g(\zeta)$ によって結ばれた。本節では、写像関数 $z = g(\zeta)$ を、Schwarz-Christoffel 変換 [29.35] に基づいて求める方法について述べる。

Schwarz-Christoffel 変換では、図 3.3 の節点 z_p ($p = 1, \dots, n$) の位置情報を利用して、写像関数の具体的な形を求める。まず、式 (3.18) より対数速度 Λ を定義する。

$$\Lambda = \log \frac{df}{dz} = \log q - i\theta \quad (3.22)$$

Λ の虚数部は

$$\text{Im}\Lambda = \begin{cases} -\theta_p, & z_p z_{p+1} \quad 1 \leq p \leq n-1 \\ -\theta_n = 0, & \end{cases} \quad (3.23)$$

のように屈折線上で与えられている。 Λ は z の解析関数であるから、 Λ を複素速度ポテンシャルとする流れを考えると、式 (3.23) はその流れに対して流れの関数がとるべき条件と見なすことができる。すなわち、流れの関数は屈折線の各辺の傾きであり、その値は各辺について一定であるので、式 (3.15) より Λ の表す流れは屈折線に沿う流れである。また、辺 $z_{p-1}z_p$ から辺 $z_p z_{p+1}$ に移るとき、流れの関数が $(-\theta_p) - (-\theta_{p-1}) = \theta_{p-1} - \theta_p$ だけ飛躍するが、これに対しては節点 z_p から流量 $Q_p = \theta_p - \theta_{p-1}$ のわき出しがあると見なすことができる。

標準領域における位置 ζ_p 、流量 m_p のわき出しを表す複素速度ポテンシャルは

$$f = m_p \log \left\{ \sinh \frac{\pi}{2} (\zeta - \zeta_p) \right\} \quad (3.24)$$

という形で与えられるので (付録 B 参照)、 Λ は、式 (3.24) を節点の数だけ重ね合わせた

$$\Lambda = \sum_{p=1}^n m_p \log \left\{ \sinh \frac{\pi}{2} (\zeta - \zeta_p) \right\} \quad (3.25)$$

のように表される。ここで、 m_p は等角写像に際する流量の保存より

$$\pi m_p = Q_p = \theta_p - \theta_{p-1} \equiv \beta_p \quad (3.26)$$

のような関係をもつ。なお、 β_p は節点 z_p での外角である。さらに、式 (3.20) で表される標準領域での一様流の強さ V は、物理領域での単位強さの一様流による流量を保存するようにとると

$$V = \frac{H}{2}$$

となることから、式 (3.20)(3.25)(3.26) より、物理領域と標準領域を結ぶ写像関数 $z = g(\zeta)$ を以下のように定めることができる。

$$g(\zeta) = \int^{\zeta} \frac{dz}{df} \frac{df}{d\zeta} d\zeta = \frac{H}{2} \int^{\zeta} \prod_{p=1}^n \sinh \frac{\pi}{2} (\zeta - \zeta_p)^{\frac{-\beta_p}{\pi}} d\zeta \quad (3.27)$$

ここで ζ_p は、図 3.4 で示す節点であり、上の議論からは決定されない不定量である。なお、式 (3.27) は、解析的に積分をすることが困難なため、文献 [29] に従って、Gauss 積分を行う。

3.5.6 等角写像における節点位置の決定法

前節では、物理領域と標準領域を結ぶ写像関数 $z = g(\zeta)$ の具体的な形を式 (3.27) として求めた。式 (3.27) において、 β_p は、図 3.3 に示した物理領域の節点 z_p での外角であり、声門形

状より決定することができた。しかし、式 (3.27) の ζ_p に関しては、前節の議論からは決定されない不定量である。本節では、その具体的な決定法について述べる。

等角写像においては、標準領域の節点の配置に関して自由度が1つある。これより、図 3.3 の節点 z_p に対応する、図 3.4 の節点 $\zeta_p (p = 1, \dots, n)$ の位置に関して、 $\zeta_1 = 0$ と固定すると、未知の節点数は $n - 1$ 個になる。これらの不定量は、等角写像における線分比不変の関係を考慮して、次の非線形問題

$$h_i(\eta_1, \dots, \eta_{n-1}) = 0, \quad i = 1, \dots, n - 1 \quad (3.28)$$

を解くことで得られる [29]。ここで

$$\eta_i = \log(\zeta_{i+1}^* - \zeta_i^*) \quad (3.29)$$

$$h_i = \Re \left(\log \frac{z_{i+1}^* - z_i^*}{z_{i+1} - z_i} \right) \quad (3.30)$$

である。式 (3.30) で、 \Re は複素数の実部を返す関数である。また、 ζ_i^* は z_i に対応する節点位置の推定値を表し、 $z_i^* = g(\zeta_i^*)$ である。

式 (3.28) は、非線形連立方程式に対する Newton-Raphson 法より、解ベクトルに補正を

$$\eta_i^{new} = \eta_i^{old} - J_{ij}^{-1} h_j \quad (3.31)$$

のように加え、この過程を収束するまで繰り返すことで解くことができる [37]。ここで J_{ij} は

$$J_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial \eta_j} \quad (3.32)$$

で与えられるヤコビアンである。なお、解ベクトルの初期値の決定法については、文献 [8] を参考にした。

3.6 境界層の表現

3.6.1 はじめに

前節では、2次元的な声門形状を通過する非粘性の主流をポテンシャル流として定式化した。そして、多様な声門形状におけるポテンシャル流を、等角写像を利用して導出する方法について述べた。声門流がもし完全に非粘性であるならば、流れはポテンシャル流として表すことができる。しかし、3.2.3 節の議論より、声門流の Reynolds 数は 10^3 のオーダーであり、声帯表面には粘性のために薄い境界層ができる。境界層は声門の出口付近で剥離して、下流側に渦流を形成する。また、声帯振動に伴い、剥離位置は時々刻々と変動する。したがって、声門流を解析する際には、境界層の発達とその剥離の現象を知る必要がある。そこで本節では、声帯表面に沿う境界層の表現を導出する。

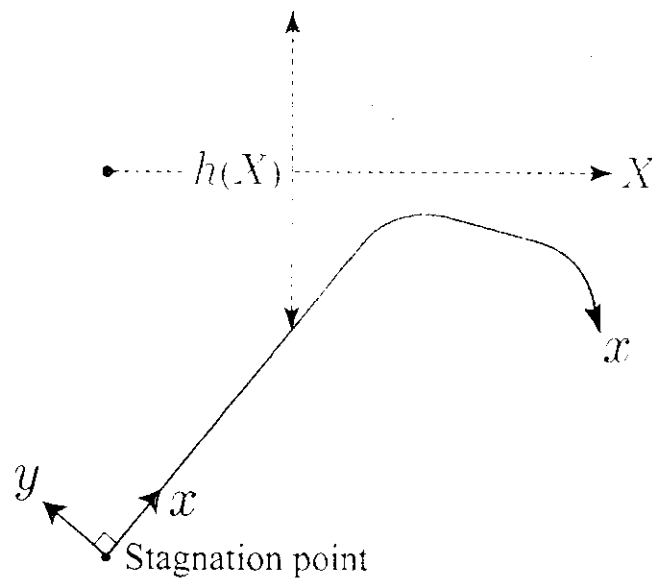


図 3.6 本論で境界層の表現の際に用いる座標系。X 軸は声門の中心対称軸である。なお、 xy 軸、X 軸ともによどみ点 (stagnation point) を原点とする。

図 3.6 に、境界層の表現を得る際に本論で用いた座標系を示す。本論では、図 3.6 の x 軸に沿う境界層の解析を行う。Kármán-Pohlhausen の方法 [25] に従えば、境界層の特性は、境界層の外縁の主流速 $U_s(x)$ が既知の条件で推定することができる。 U_s は前節の式 (3.21) より次式で求められる。

$$U_s(x) = V \frac{1}{g'(\zeta)} \Big|_{\zeta=\zeta_s(x)} \quad (3.33)$$

ここで、 $\zeta_s(x)$ は声帯表面に沿う x 曲線を帯領域の複素 ζ 平面に写像したものである。また、 $g'(\zeta)$ は写像関数の導関数である。

ここではまず、声門流の支配方程式 (3.8)(3.9) を変形して、境界層の支配方程式を導く。つぎに、境界層の支配方程式を、境界層の厚さ方向に積分して、境界層の積分方程式を得る。境界層の積分方程式は、排除厚さ δ_1 、運動量厚さ δ_2 、粘性応力 τ といった、境界層の特性量に関する関係式である。それから、Kármán-Pohlhausen の方法 [25] を用いて、境界層の積分方程式を、境界層の外縁の主流速 U_s 既知の条件で解く方法について述べる。

結局、境界層の特性量は、次式に基づいて推定される。

$$\frac{dZ}{dx} = 2f_2(H) - (3 + 2H)f_1(H) \quad (3.34)$$

$$\frac{Z}{U_s + U_{\delta_1}} \frac{d(U_s + U_{\delta_1})}{dx} = f_1(H) \quad (3.35)$$

$$U_{\delta_1} = \frac{2V}{h} \frac{2\delta_1}{h + 2\delta_1} \quad (3.36)$$

ここで,

$$f_1(H) = \frac{-2.4\{1 - \exp[0.43(2.59 - H)]\}}{H^2} \quad (3.37)$$

$$f_2(H) = \left(\frac{4}{H^2} - \frac{1}{H}\right) \quad (3.38)$$

である。式(3.34)(3.35)(3.36)は、境界層の外縁の主流速 U_s 既知の条件で、未知数 Z, H, U_{δ_1} を決定する方程式である。得られた未知数より、境界層の特性量は次式で算出される。

$$\delta_2 = \sqrt{\frac{\nu Z}{U_s + U_{\delta_1}}} \quad (3.39)$$

$$\delta_1 = \delta_2 H \quad (3.40)$$

$$\tau = \frac{\mu(U_s + U_{\delta_1})H}{\delta_1} f_2(H) \quad (3.41)$$

境界層の剥離位置は $\tau = 0$ 、すなわち $f_2(H)$ が零となる $H = 4$ の位置で与えられる。

3.6.2 境界層の支配方程式

本節では、声門流の支配方程式(3.8)(3.9)を変形して、声帯表面に沿う境界層の支配方程式を導く。まず、式(3.8)(3.9)を、声帯表面の直交曲線座標系に座標変換する。つぎに、3.2.3節の議論より、座標変換した式(3.8)(3.9)に境界層近似を適用して、境界層の支配方程式を導く。

図3.6に示す (x, y) 軸により、声帯表面に直交曲線座標系をとる。ここで、声帯表面の曲率を κ とし、表面が流れに向かって凸のとき $\kappa > 0$ 、凹のとき $\kappa < 0$ とする。 κ は一般に x の関数である。これより、流れの場の代表的な長さは $1/\kappa$ で与えられる。また、流れの代表的な速度は、境界層の外縁の主流速 U_s で与えられる。このとき、曲面に沿う流れの Reynolds 数は

$$R_e = \frac{U_s}{\kappa \nu} \quad (3.42)$$

で定義される。いま、曲面に沿う境界層の厚さを δ とおくと、

$$\delta \kappa \propto R_e^{-1/2} \quad (3.43)$$

であることが知られている [34]。3.2.3節の議論より、Reynolds 数 R_e は $\mathcal{O}(10^3)$ と考えられるので、

$$\delta \ll \frac{1}{\kappa} \quad (3.44)$$

の状況が想定される。上の関係を利用した近似を行うのが、境界層近似である。

曲線座標 (x, y) で表した支配方程式 (3.8)(3.9) に、式 (3.44) より $O(\delta)$ の量を見捨てる境界層近似を行えば、それぞれ

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.45)$$

$$-\kappa u^2 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.47)$$

となる [34]。これが、曲面に沿う境界層を支配する方程式である。これらの方程式を導く際、境界層の厚さ δ は曲面の曲率半径 $1/\kappa$ に比べて十分薄く、 $\kappa\delta \ll 1$ 、 $\delta^2 \partial\kappa/\partial x \ll 1$ が成り立つものと仮定している。

なお、式 (3.45)(3.46)(3.47) は、式 (3.46) を除いて、Prandtl(1904) によって導かれた平面壁に沿って生じる境界層方程式と同一である。式 (3.46) は、平面壁の場合とは違って、流れによる遠心力 κu^2 につり合うだけの圧力勾配が、厚さの方向に働くことを示している。しかし、この場合でも、式 (3.46) を $0 \leq y \leq \delta$ にわたって積分すれば

$$p = P + O(\rho_0 \kappa \delta U_s^2)$$

となるが、これは $O(\delta)$ を見捨てる近似のもとでは

$$p = P(x) \quad (3.48)$$

に帰着する。ここで P は境界層の外縁 $y = \delta$ における非粘性流の圧力である。これより式 (3.45) は次式で表される。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (3.49)$$

ここで、右辺の圧力項は未知数ではなく、外から与えられた変数になっている。右辺は更に、主流速 U_s を用いて表すことができる。 U_s は非粘性流体の運動方程式

$$U_s \frac{\partial U_s}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (3.50)$$

に従う。上式を式 (3.49) に代入すれば

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = U_s \frac{\partial U_s}{\partial x} \quad (3.51)$$

が得られる。上式が、本論で採用する、曲面に沿う境界層の支配方程式である。なお、式 (3.51) の境界条件は

$$\left. \begin{aligned} u = v = 0 & \quad (y = 0) \\ u = U_s & \quad (y = \delta) \end{aligned} \right\} \quad (3.52)$$

で与えられる。

3.6.3 境界層の積分方程式

前節では、式(3.8)(3.9)を変形して、境界層の支配方程式(3.51)を導いた。式(3.51)は、式(3.8)(3.9)に比べて簡略化されてはいるものの、依然としてこれを厳密に解くことは難しい。そこで本節では、式(3.51)を境界層の厚さ方向に積分して、境界層の積分方程式を導出する。境界層の積分方程式は、排除厚さ・運動量厚さ・粘性応力の3つの境界層の特性量を関係付ける式である。これより、境界層の発達に関しては、排除厚さにより知ることができる。また、境界層の剥離位置に関しては、粘性応力が零となる位置で推定することができる。

式(3.51)を $0 \leq y \leq \delta$ まで積分して、境界層の積分方程式を導く。左辺第三項の積分は、連続の式(3.47)を考慮して

$$\begin{aligned} \int_0^\delta v \frac{\partial u}{\partial y} dy &= [uv]_0^\delta - \int_0^\delta u \frac{\partial v}{\partial y} dy = U_s \int_0^\delta \frac{\partial v}{\partial y} dy + \int_0^\delta u \frac{\partial u}{\partial x} dy \\ &= - \int_0^\delta (U_s - u) \frac{\partial u}{\partial x} dy \end{aligned}$$

と変形されるから、式(3.51)は

$$\frac{\partial}{\partial x} (U_s^2 \delta_2) + \delta_1 U_s \frac{\partial U_s}{\partial x} = \frac{\tau}{\rho_0} \quad (3.53)$$

となる。上式は、Kármán(1921)とPohlhausen(1921)によって導かれたもので、境界層の積分方程式という。ここで、 δ_1 は排除厚さ、 δ_2 は運動量厚さ、 τ は壁面粘性応力とよばれる境界層の特性量である。境界層の諸特性は、以下の3つの平均量により推定される。

$$\text{排除厚さ: } \delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_s}\right) dy \quad (3.54)$$

$$\text{運動量厚さ: } \delta_2 = \int_0^\delta \frac{u}{U_s} \left(1 - \frac{u}{U_s}\right) dy \quad (3.55)$$

$$\text{壁面粘性応力: } \tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \quad (3.56)$$

3.6.4 Kármán-Pohlhausenの方法

前節では、境界層の支配方程式を境界層の厚さ方向に積分して、境界層の積分方程式(3.53)を導いた。式(3.53)は一見簡単な形をしているが、境界層の特性量 δ_1, δ_2, τ には未知数 $u(x, y)$ が含まれており、このままでは何も決定しない。しかし、もし速度分布 $u(x, y)$ を適当な形に仮定するならば、各種の特性量が互いに関係付けられるから、これらの方程式を解いて境界層の特性量 δ_1, δ_2, τ を x の関数として求めることができる。このような考えのもと、

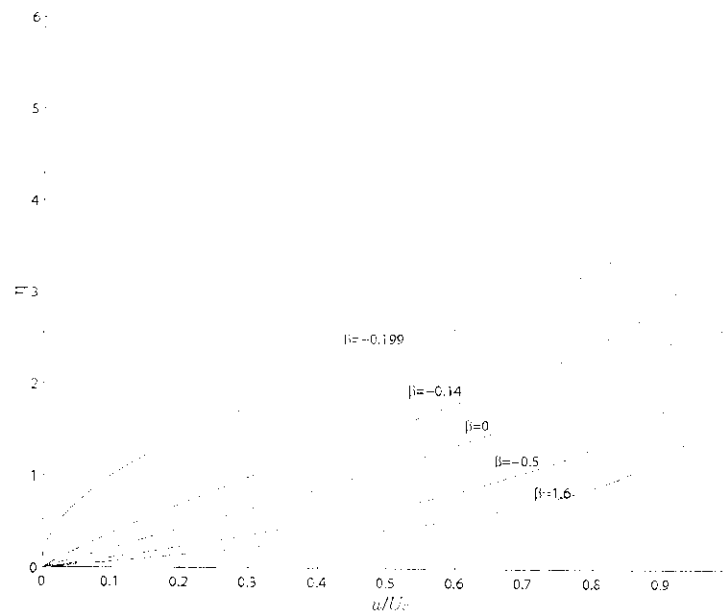


図 3.7 Falkner-Skan 方程式 (3.57) の解に基づく境界層の速度分布。加速流の場合

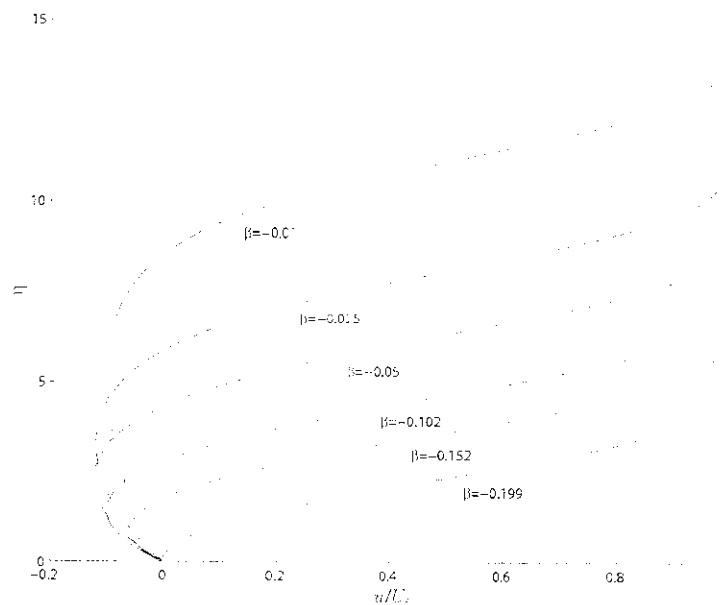


図 3.8 Falkner-Skan 方程式 (3.57) の解に基づく境界層の速度分布。逆流の場合

Kármán と Pohlhausen(1921) は式 (3.53) の近似解法を求めた。本論ではこの手法により境界層の積分方程式を解く。

Kármán-Pohlhausen 法では、速度分布 $u(x, y)$ を相似性の仮定のもとに 1 変数の関数として表す。速度分布に関しては多項式など、様々なものが提案されているが、ここでは Walz の手法にしたがって、Falkner-Skan 方程式により表されるとする [25]。

$$f''' - f f'' - \beta(1 - f'^2) = 0 \quad (3.57)$$

ここで f は

$$\eta = \frac{y}{\delta_N(x)}, \quad \delta_N = \sqrt{\frac{\mu x(2-\beta)}{\rho_0 U_s}} \quad (3.58)$$

で表される η の関数である。式 (3.57) を式 (3.52) に対応する境界条件

$$\eta = 0: f = f' = 0, \quad \eta \rightarrow \infty: f' = 1 \quad (3.59)$$

のもとで解くと、 f の微分

$$\frac{df}{d\eta} = f' = \frac{u}{U_s} \quad (3.60)$$

は、図 3.7 に示す境界層の速度分布を与える。なお、式 (3.57) は解析的に解くことが困難なため、狙い打ち法 [38] により数値計算を行なう。図 3.7 より、物体表面 ($\eta = 0$) では流れの滑りがなく、境界層の外側 ($\eta \rightarrow \infty$) では流速が主流速 U_s に一致することがわかる。また、 β はさまざまな速度分布を決定することから形状パラメータとよばれ、 $\beta = -0.199$ のときに壁面での剪断応力 τ が 0 となり、境界層の剥離位置における速度分布を与える。

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = 0 \quad (3.61)$$

Falkner-Skan 方程式は、剥離位置より下流側の流速分布も計算することができる。図 3.8 は剥離位置より下流側で生じる境界層内部の速度分布を示している。実際は、剥離位置より渦度が放出されて乱流的な様相を示すため、もはや境界層の理論は適応できないと考えられるが、剥離後の流れの逆流領域の近似として図 3.8 の速度分布を用いることができると考えられる。

声門流における境界層の速度分布として式 (3.57) を与えると、境界層の特性量 δ_1, δ_2, τ はそれぞれ

$$\delta_1 = \beta_1 \delta_N, \quad \beta_1 = \int_0^\infty (1 - f') d\eta \quad (3.62)$$

$$\delta_2 = \beta_2 \delta_N, \quad \beta_2 = \int_0^\infty (1 - f') f' d\eta \quad (3.63)$$

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\mu U_s}{\delta_N} f''_{\eta=0} \quad (3.64)$$

の形で表される。 β_1, β_2, f'' はすべて β の関数であり、したがって形状パラメータ β は、声門流における境界層の特性量を決定する。ここではさらに、次の関数を導入する。

$$Z(x) = \frac{\rho_0 \delta_2^2}{\mu} U_s \quad (3.65)$$

$$\Gamma(x) = -\frac{\delta_2^2}{U_s} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \beta \beta_2^2 \quad (3.66)$$

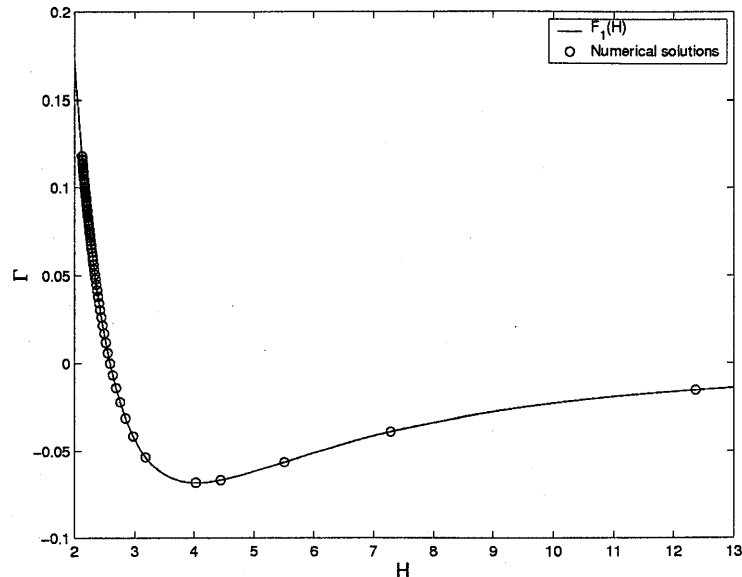


図 3.9 Γ の式 (3.57) に基づく数値解 (○印) と式 (3.70) による近似解 (実線) の比較

式 (3.66) の関係は、式 (3.50) と、境界層方程式 (3.49) で、 $y = 0$ とおいたときに得られる壁面での一致条件

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \frac{dP}{dx} \quad (3.67)$$

を用いて導出される。式 (3.62)~(3.66) より、境界層の積分方程式 (3.53) は以下のように書き直すことができる。

$$\frac{dZ}{dx} = 2\beta_2 f''_{\eta=0} - (3 + 2H)\Gamma, \quad H \equiv \frac{\beta_1}{\beta_2} \quad (3.68)$$

$$\frac{Z}{U_s} \frac{dU_s}{dx} = \Gamma \quad (3.69)$$

ここで、 Γ や $\beta_2 f''_{\eta=0}$ は、Falkner-Skan 方程式の数値解により算出することができるのだが、これを予め補完関数として与えると、上式は簡単に計算することができる。ここでは、文献 [39] に提案されている補完関数を用いる。

$$\Gamma \approx \frac{-2.4\{1 - \exp[0.43(2.59 - H)]\}}{H^2} \equiv f_1(H) \quad (3.70)$$

$$\beta_2 f''_{\eta=0} \approx \left(\frac{4}{H^2} - \frac{1}{H} \right) \equiv f_2(H) \quad (3.71)$$

図 3.9 と図 3.10 は式 (3.70) (3.71) の補完関数を、式 (3.57) の数値解と比較したものである。これより、補完関数は良好に数値解を近似することが分かる。

結局、補完関数 (3.70)(3.71) より、式 (3.68)(3.69) は

$$\frac{dZ}{dx} = 2f_2(H) - (3 + 2H)f_1(H) \quad (3.72)$$

$$\frac{Z}{U_s} \frac{dU_s}{dx} = f_1(H) \quad (3.73)$$

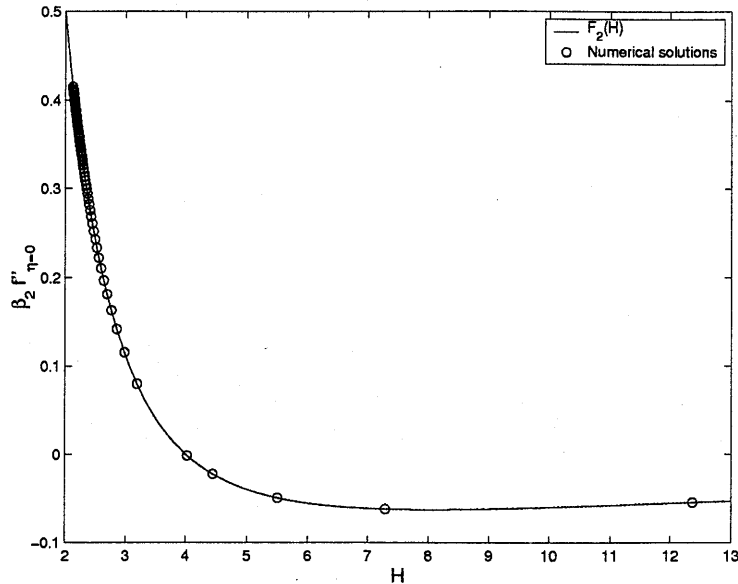


図 3.10 $\beta_2 f''_{\eta=0}$ の式 (3.57) に基づく数値解 (○印) と式 (3.71) による近似解 (実線) の比較

と表される。上式は境界層の外縁の主流速 U_s が既知の条件で、未知数 Z と H を求める式となる。得られた Z, H より、境界層の特性量はそれぞれ次式で与えられる。

$$\delta_2 = \sqrt{\frac{\nu Z}{U_s}} \quad (3.74)$$

$$\delta_1 = \delta_2 H \quad (3.75)$$

$$\tau = \frac{\mu U_s H}{\delta_1} f_2(H) \quad (3.76)$$

3.6.5 境界層の排除厚さの考慮

前節では、Kármán-Pohlhausen の方法を用いて、境界層の積分方程式 (3.53) を、境界層の外縁の主流速 U_s 既知の条件で計算する手法について述べた。境界層の積分方程式を解くことで、境界層の特性量が求められる。本節では、境界層の排除厚さ δ_1 が主流に与える影響について考慮する。

境界層では粘性の影響により、主流の速度に比べて流速が遅くなる。このような流量の欠損は、外縁の流線を壁から排除厚さ δ_1 だけ押し上げるのと同じ効果がある。今、声門流は管路の流れであり、そのような効果は両側の管路が δ_1 だけ狭まることとなり、主流の速度増加として表れる。

いま、近似的に流れを 1 次元的とし、流速は図 3.6 の X 軸に沿って測定されると仮定する。声門流の体積速度を U_g [cm³/sec]、声帯の幅を l_g [cm]、流路の幅を $h(X)$ [cm] とすると、排除厚さを考慮したときの流路の幅は $h - 2\delta_1$ で与えられる。これより、排除厚さを考慮した主

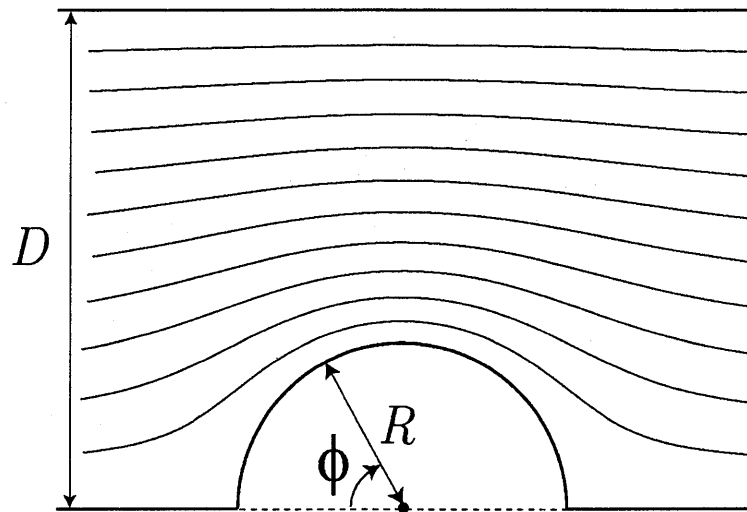


図 3.11 円柱まわりの流れ場の表現

流の速度 $U_s + U_{\delta_1}$ は次式で与えられる。

$$U_s + U_{\delta_1} = \frac{U_g}{(h - 2\delta_1)l_g} = \frac{U_g}{hl_g} \left(1 + \frac{2\delta_1}{h - 2\delta_1} \right) \quad (3.77)$$

ここで、上式括弧内の第一項は、排除厚さを考慮しないときの主流の速度 U_s に対応し、第二項は排除厚さにより増加した主流速の増加分 U_{δ_1} を表す。この考察より、声門流のような管路の流れにおいて境界層の解析を行なう際は、式 (3.73) の主流 U_s に排除厚さを考慮した速度 $U_s + U_{\delta_1}$ を代入して得た

$$\frac{Z}{U_s + U_{\delta_1}} \frac{d(U_s + U_{\delta_1})}{dx} = f_1(H) \quad (3.78)$$

を用いる必要がある。さらに、 U_{δ_1} という未知数が増えたため、それに関する制約条件として、式 (3.77) より

$$U_{\delta_1} = \frac{2V}{h} \frac{2\delta_1}{h - 2\delta_1} \quad (3.79)$$

を得る。なお、上式の導出において $U_g/l_g = 2V$ の関係を用いた。結局、声門流の境界層を分析するときは、主流 U_s が既知という条件の元で、式 (3.72)(3.78)(3.79) を解けば良い。

3.6.6 境界層解析の精度検証

本論文では、境界層の外縁の主流速 U_s が既知という条件で式 (3.72)(3.78)(3.79) を解き、声帯表面付近に生じる境界層の解析を行なう。主流速 U_s は式 (3.33) より与えられる。ここでは、その妥当性を検証するために、円柱まわりの境界層の推定結果を厳密解と比較する。

定常な流速 U_∞ の一様流に対して垂直に置かれた、半径 R の円柱を考える。ここでは、図 3.11 に示す帯領域により、近似的に円柱まわりの流れ場を表現する。円柱の半円部分の切

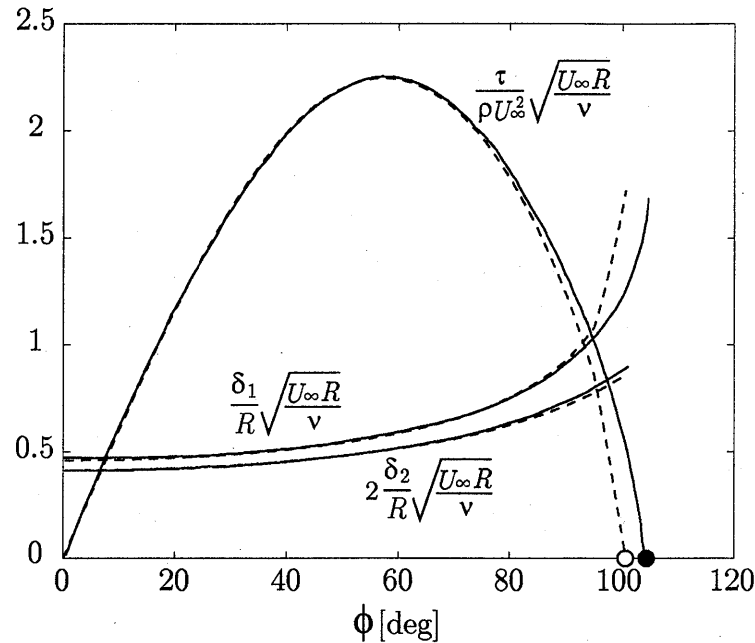


図 3.12 円柱まわりの境界層の特性量。実線は W. Schonauer による厳密解 [25] を，破線は本手法の結果を表す。

り口が帯領域の境界に接しているとし，図中の幅 D が円柱の半径 R よりも十分に大きい場合，この流れ場は十分な精度で円柱まわりの場を表すことができると考えられる。ここでは $D = 10R$ に設定する。

円柱の中心まわりの回転角を ϕ [deg] としたとき， $\phi = 0^\circ$ のよどみ点より計算した特性量 δ_1 ， δ_2 ， τ を図 3.12 に示す。ここで，実線は W. Schonauer による厳密解 [25] を表し，破線は本手法による推定値を表している。また，図中の●印，○印はそれぞれ厳密解と本手法による境界層の剥離位置を示している。剥離位置は厳密解では $\phi = 104.5^\circ$ ，本手法では $\phi = 100.8^\circ$ の方向で生じ，推定誤差は約 3.5% であった。この誤差は，流速モデルとして使用した Hartree 分布の表現能力に主として起因するものと考えられ，その他の特性量についても最大 4% の誤差の範囲内で推定が可能であることがわかった。

3.7 渦流の表現

3.7.1 はじめに

前節では声帯表面に沿って生じる境界層の表現について述べた。境界層は声帯表面から剥離して，下流側に渦流を生成する。このとき，流れの剥離位置は，声帯振動による境界の移動のために，時々刻々と変化する。これが声門流の解析を大変難しいものにする。なぜならば，このような流れ場を，差分法や有限要素法 [28] でシミュレーションするには，速度の急勾配を伴う境界層や，乱流状態となる渦流領域において，計算格子を細かく設定する必要が生じるから

である。適応的に計算格子を設定することは、一般に、大変な困難を伴う。そこで本論では、計算格子を用いない離散渦法 [36] を利用して、渦流を表現する。

本節ではまず、渦流の支配方程式である、渦度方程式の導出を行う。つぎに、渦度方程式を計算格子を用いずに解く方法として、離散渦法 [36] の考え方について述べる。離散渦法では、離散的な渦糸を有限個重ね合わせることで、渦度場を表現する。ここで渦糸は、境界層の剥離位置より、時々刻々と放出される。このようにして放出された渦糸を、渦度方程式に従って対流させることで、渦流の時間的な運動を数値計算する。

3.7.2 渦流の支配方程式

本節では、渦流の支配方程式の導出を行う。式 (3.8) の両辺で rot をとると、以下の渦度方程式を得る。

$$\frac{D\omega}{Dt} = \nu \nabla^2 \omega \quad (3.80)$$

上式の左辺は渦度の移流を、右辺は粘性の影響により渦度場の拡散が生じることを示している。上式が、渦流の支配方程式である。

3.7.3 境界層の剥離の表現

前節では、渦流の支配方程式を導出した。声門流中の渦流は、境界層の剥離によって生じる。境界層の剥離位置に関しては、3.6 節で述べた手法によって推定することができる。本節では、境界層の剥離を、境界層の剥離位置からの渦糸の放出としてモデル化する手法について述べる。

図 3.13 は、声帯表面から境界層が剥離して、声門流に渦が流入するまでを描いた模式図である。図 3.13 では、図 3.6 と同様に、声帯表面に x 軸を、その直交する方向に y 軸を取る。また、 u は境界層の速度分布を、 U_s は境界層の外縁の主流速を表している。いま、3.6 節に基づく解析手法により、境界層の剥離位置 (separation point) z_{sep} が既知であるとする。

まず、図 3.13 に示す境界層 (boundary layer) に関して、声帯表面での流速は零に等しいので、境界層の内部は、非常に大きな速度勾配 $\partial u / \partial y$ を持つ。2次元流れの渦度 ω が

$$\omega = \nabla \times \mathbf{v} = \left(0, 0, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad (3.81)$$

であることを考慮すると、境界層は、図 3.13 では時計回りの回転成分を持つ渦層であることが分かる。

ここで、境界層を図 3.14 に示すようにモデル化する。図 3.14 の左図は、図 3.13 に示す境界層を拡大した図である。3.6 節の議論より、境界層の厚さ δ は十分に小さいと仮定している。したがって、図 3.14 の左図に示す境界層は、その厚さ δ を無視して、右図の厚さのない非粘

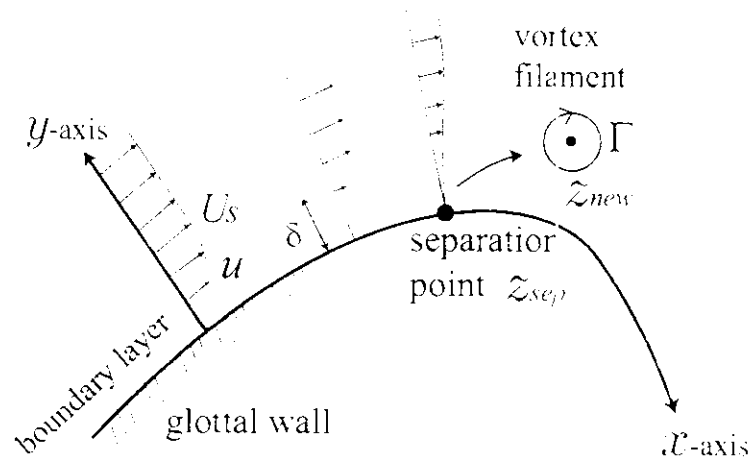


図 3.13 声帯表面での境界層の剥離と渦の生成

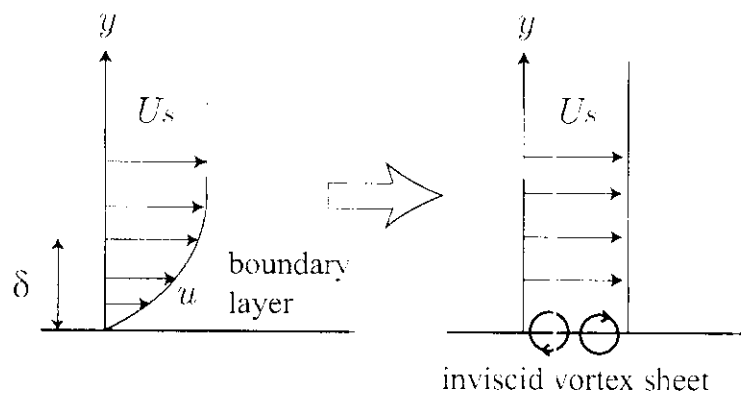


図 3.14 境界層のモデル化

性渦層 (inviscid vortex sheet) とモデル化することができる。これより、渦層の単位長さあたりの渦度分布は次式で与えられる。

$$\int_0^{\delta} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) dy \approx -U_s \quad (3.82)$$

ここで、 U_s は渦層の外縁の主流速である。

境界層の剥離は、循環 Γ の渦糸 (vortex filament) を図 3.13 の境界層の剥離位置 z_{sep} から放出させることで表現する。今井 [31] によれば、非粘性渦層はその両側の速度の平均値、したがってここでは主流速の半分の速度 $U_s/2$ で運動する。したがって、渦糸を新しく導入する位置 z_{new} は、シミュレーションの時間の刻み幅を Δt とおくと、一次精度の Euler 陽解法により

$$z_{new} = z_{sep} - \frac{1}{2} U_s \Delta t \quad (3.83)$$

で与えられる。また、渦糸の循環 Γ は、剥離点 z_{sep} に単位長さあたりに式 (3.82) の渦度分布

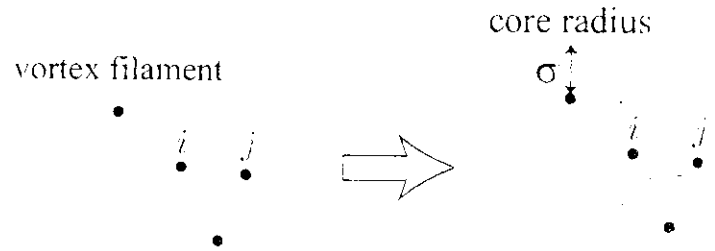


図 3.15 コア半径付きの離散渦

があることから

$$\Gamma = -\frac{1}{2}U_*^2 \Delta t \quad (3.84)$$

で与えられる。

3.7.4 渦流の運動の表現

前節では、境界層の剥離を、渦糸の放出としてモデル化する手法について述べた。本節では、放出された渦糸を、渦度方程式 (3.80) に従って運動させる手法について述べる。

いま、渦糸の放出によって、図 3.3 に示した物理領域 $z = x_1 + ix_2$ に n 個の離散渦がある状況を考える。

$$\omega(z) = \sum_{i=1}^n \Gamma_i f_{\sigma_i}(z, z_i) \quad (3.85)$$

ここで Γ_i と z_i は、それぞれ、 i 番目の渦糸の循環と位置を表している。また、 f_{σ_i} はコア関数であり、図 3.15 のように、渦糸 (vortex filament) にコア半径 (core radius) σ を設けて、渦度場を空間的に分布させる関数である。本論では、 f_{σ_i} は次式の分散 σ_i のガウス分布関数で与える。

$$f_{\sigma_i}(z, z_i) = \frac{1}{2\pi\sigma_i^2} \exp\left(-\frac{z - z_i}{2\sigma_i^2}\right) \quad (3.86)$$

離散渦法 [36] では、式 (3.85) の渦糸群を渦度方程式 (3.80) に従って運動させる際、

1. 非粘性流の渦度方程式に基づいた渦度の対流
2. 粘性を考慮した渦度の拡散

の過程に分けて計算を行う [40]。まず、1. の過程について説明を行う。

1. 非粘性流の渦度方程式に基づいた渦度の対流

ここでは、離散的な渦糸群を非粘性流の渦度方程式

$$\frac{D\omega}{Dt} = 0 \quad (3.87)$$

にしたがって対流させる手法について述べる。上式は、各渦糸が、その位置における流速に乗って運動することを示している。したがって、上式を評価するには、渦糸群が誘起する流速場について知る必要がある。ここでは、等角写像を適用して、任意の声門形状における渦度 ω が誘起する流速場を導出する。

いま、簡単のために、図 3.3 の位置 z_1 に、循環 Γ_1 の渦糸がある場合を考える。渦糸の誘起する複素速度ポテンシャル $f_v = \phi + i\psi$ は、式 (3.19) の写像関数 $z = g(\zeta)$ を導入すれば、帯領域において表すことができる。

$$f_v(g(\zeta)) = \Gamma_1 G_S(\zeta, \zeta_1) \quad (3.88)$$

ここで

$$G_S(\zeta, \zeta_i) = -i \frac{1}{2\pi} \log \frac{\sinh \frac{\pi}{2}(\zeta - \zeta_i)}{\sinh \frac{\pi}{2}(\zeta - \bar{\zeta}_i)} \quad (3.89)$$

である (付録 B 参照)。上式において、 $\zeta_i = g^{-1}(z_i)$ は、物理領域上の渦糸の位置に対応する、帯領域上の渦糸の位置である。また、式 (3.89) の導関数は次式で与えられる。

$$\frac{dG_S(\zeta, \zeta_i)}{d\zeta} = -i \frac{1}{4} \left\{ \coth \frac{\pi}{2}(\zeta - \zeta_i) - \coth \frac{\pi}{2}(\zeta - \bar{\zeta}_i) \right\} \equiv K(\zeta, \zeta_i) \quad (3.90)$$

ここで K は速度カーネルと呼ばれる。これにより、式 (3.85) で表される物理領域中の渦度 ω が誘起する複素流速場 $v_1 - iv_2$ は、コア関数の影響を考慮して、次式で与えられる。

$$v_1 - iv_2 = \left[\sum_{i=1}^n \Gamma_i K(\zeta, \zeta_i) \left(1 - \exp \frac{-|\zeta - \zeta_i|^2}{2\sigma^2} \right) \right] \frac{1}{g'(\zeta)} \quad (3.91)$$

位置 z_k にある各渦糸の運動速度 $w_k = v_{1k} + iv_{2k}$ を求めるには、式 (3.91) に $\zeta = g^{-1}(z_k) = \zeta_k$ を代入すれば良い。その際、発散する式 (3.90) の第一項の影響を無視して、

$$\begin{aligned} \bar{w}_k = v_{1k} - iv_{2k} = & \left[-i \frac{\Gamma_k}{4} \left\{ -\coth \frac{\pi}{2}(\zeta_k - \bar{\zeta}_k) \right\} + \right. \\ & \left. \sum_{i=1, i \neq k}^n \Gamma_i K(\zeta_k, \zeta_i) \left(1 - \exp \frac{-|\zeta_k - \zeta_i|^2}{2\sigma^2} \right) \right] \frac{1}{g'(\zeta_k)} \end{aligned} \quad (3.92)$$

で与えられる。上式が各渦糸の運動速度である。

結局、本論では、式 (3.92) を $k = 1, \dots, n$ まで評価して、 n 個の渦糸の運動速度を算出した後に、常微分方程式

$$\frac{dz_k}{dt} = w_k, \quad (k = 1, \dots, n) \quad (3.93)$$

を一斉に数値積分することで、渦度の対流を表現する。その際、2次精度の時間差分スキームであるアダムス・バッシュフォース法 [41] を用いて数値積分を行う。

$$z_k(t + \Delta t) = z_k(t) + 0.5 \{ 3w_k(t) - w_k(t - \Delta t) \} \Delta t \quad (3.94)$$

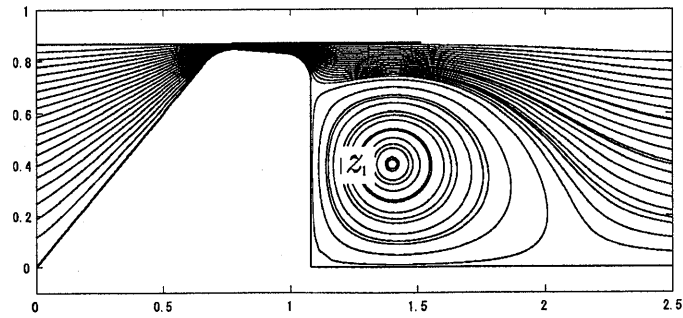


図 3.16 物理領域の渦糸と一様流が誘起する流速場の流線

2. 粘性を考慮した渦度の拡散

前節では、非粘性流の渦度方程式に基づいて渦度を対流させる手法について述べた。本節では、2. の粘性を考慮した渦度の拡散の表現について述べる。

渦度の拡散に関しては、非定常の円形流である減衰渦をモデルとして表現する。初期状態で循環 Γ の渦が原点に集中していたとすると、円柱座標系で表した渦度方程式の解は、半径 r の位置では

$$\omega(r, t) = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t} \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \quad (3.95)$$

となる [34]。渦度の広がりを表す目安として、同心円方向の速度分布

$$v(r, t) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) \right\} \quad (3.96)$$

の $dv/dr = 0$ となる半径をとり、これをコア関数の分散 σ として与える。

$$\sigma = 2.242\sqrt{\nu t} \quad (3.97)$$

すなわち、渦の半径は時間とともに広がり、その程度は動粘性係数の平方根に比例する。これにより、粘性拡散の効果を表現する。

3.7.5 声門流の表現例

前節までに、離散渦法 [36] に基づく渦流の表現法について述べた。ここでは、離散渦法を用いた声門流の表現例として、一様流と渦糸を重ね合わせた流速場を示す。流速場を表す複素速度ポテンシャルは、式 (3.20) と式 (3.89) を重ね合わせた次式で与えられる。

$$f = \phi + i\psi = V\zeta + \Gamma_1 G_S(\zeta, \zeta_1) \quad (3.98)$$

上式の虚部をとり、 $\psi = \text{const.}$ とおいて得られる曲線は、流れの流線を表す。また、物理領域の流速場は、等角写像関数 (3.19) と組み合わせて

$$v_1 - iv_2 = \frac{df}{dz} = \frac{df}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = [V + \Gamma_1 K(\zeta, \zeta_1)] \frac{1}{g'(\zeta)} \quad (3.99)$$

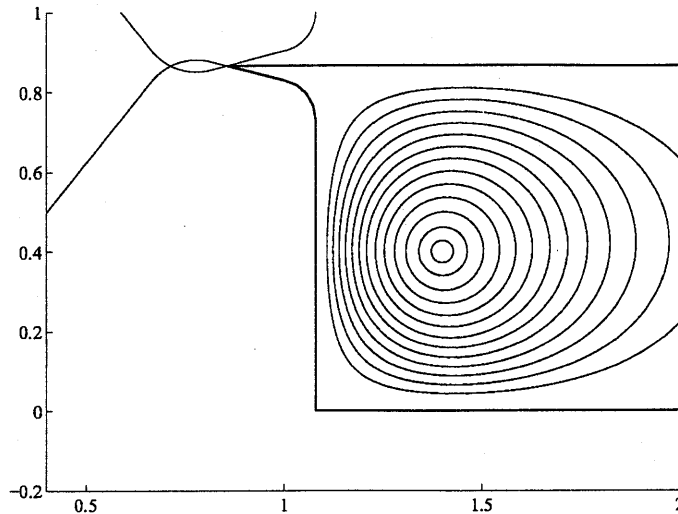


図 3.17 声門閉鎖の状態で渦糸が存在する流速場の流線

で得ることができる。図 3.16 に物理領域の渦糸と一様流が誘起する流速場の流線を示す。この流速場は、声門出口で剥離した渦が巻き上がり、声門後ろに集積した渦を形成した様子を模擬している。また、渦糸の影響により、声門出口にジェット的な流れが形成されることがわかる。

図 3.17 では、声門が閉鎖した状態で渦糸が存在するときの流速場の流線を示している。このような流速場を表現する際にも、本法は等角写像関数 (3.27) の β_p や ζ_p といった変数が声門形状に応じて変化するだけで、式 (3.99) の数学的な表現は不変である。したがって、本法は、多様な声門形状における流速場を、等角写像関数を用いて統一的に表すことができる。これは、境界の移動が本質的な現象である声門波の生成過程を表現する上で、有効であると考えられる。

3.8 まとめ

本章では、境界層近似に基づいて、声門流の領域を主流・境界層・渦流の 3 つの要素から構成した。これにより、多様な声門形状における境界層の剥離や渦流の形成を表現可能な声門流モデルを構築した。

本章ではまず、声門流の無次元特徴量の考察を通じて、声門流の領域を主流・境界層・渦流の 3 つの要素によってモデル化する根拠を示した。つぎに、個々の流れの領域の具体的な定式化を行った。主流に関しては、非粘性・渦なしと仮定することで、Laplace 方程式として表した。ここでは、任意の声門形状において Laplace 方程式を解く手法として、等角写像の手法を適用した。境界層に関しては、粘性流体の支配方程式を変形して、境界層の積分方程式として表した。ここでは、境界層の速度分布に相似性の仮定をおき、1 変数の関数として表すことで、

速度の急勾配を持つ流れの領域を安定に解くことを可能にした。渦流に関しては、境界層の剥離によって生じる渦流の運動を、渦度方程式として表した。ここでは、離散渦法に基づいて、離散的な渦糸を境界層の剥離位置より時々刻々と放出・対流させることで表現した。この方法では、有限要素法や境界要素法のように、計算格子を作成する必要がない。これにより、声帯振動に伴う移動の境界や、境界層の剥離位置の変動、渦流の形成などを柔軟に表現することが可能となった。