

波動理論に基づく任意多孔質型吸音構造の吸音率推定に関する研究

広沢, 邦一

<https://doi.org/10.15017/458908>

出版情報 : Kyushu University, 2004, 博士 (芸術工学), 課程博士
バージョン :
権利関係 :

付録A 境界要素法における数値積分の処理

第2章において、Helmholtz-Huygens 積分方程式に境界要素法を適用し、解析音場内の境界表面上の音圧および粒子速度を求めるための代数方程式の導出を説明したが、そのままでは実際の数値計算を実行できない。さらに、境界表面上の音圧を求める連立一次方程式（例えば(2.27)式、または(2.32)式）は、要素節点番号 m, i の全ての組み合わせについて積分することを表しているが、 $m = i$ となる場合は被積分要素 S_j に共通の要素節点 r_m とソース点 r_i が同じものとなり、被積分関数はそれらの間の距離を分母に持つため積分が収束せず、特異積分として扱う必要がある。また $m = i$ ではない場合でも、 r_m と r_i が隣り合うときにはやはり特異積分となることがある。

ここでは、2.2.1 節の単一領域に対する境界要素法における(2.29)、(2.30)式を例に、被積分要素 S_j 上にソース点 r_i が無く通常の積分を行うことによって数値計算が可能な場合と、被積分要素 S_j 上にソース点 r_i が存在し特異積分として扱う場合に別けて局所座標への変数変換、および特異積分の処理について説明する。なお、領域結合型境界要素法における(2.42)、(2.43)式および(2.61)、(2.62)式は領域が異なるために法線方向が反対向きの関係にあるが、数値積分の上では等価なものとして扱えるため、以下に述べる方法で計算可能である。

また、本論文における境界要素には一貫して線形要素を仮定してきたが、この境界要素に関するまとめと線形要素について簡単に述べる。

A.1 境界要素について

一般に、境界を離散化するという事は、分割された境界要素上の任意の点における値を、その境界要素のある代表値、すなわち要素節点から補間して決定するという事である。この要素節点を境界要素の頂点に設定する適合要素とする場合、その要素節点においては隣り合う境界要素の値が共通となり、補間される境界要素上の値が要素境界で連続になる。逆に要素節点を頂点に設定しない非適合要素の場合、要素節点が隣り合う境界要素に共通ではないので、要素境界上の補間された値は連続にはならない。しかし非適合要素の場合、分割された境界要素上の任意の点における値の補間を何次の多項式で行うかにかかわらず、境界要素は滑らかな曲面であることから要素節点の法線は常に一意に決定するという利点がある。これが適合要素では、2.2.2 節の末尾に述べたように、その要素節点における法線方向は一意に定まらないことがあるため、粒子速度のようなベクトル量を求めるときには不利になる。

この非適合要素のうち、その境界要素上の値をある一点で代表する一定要素は、離散化が非常

に簡単で補間する必要もないため、最もよく用いられる。しかし、最も荒い近似となるため解析値の精度が必要である場合には、分割を細かくしなければならず、要素数が多くなる。このように、離散化する際に要素節点の設定や要素数の制限などから、どの補間を用いるかによって要素を決定することが多いが、本論文では、離散化する場合に線形要素を仮定する。これは、三角形要素を用いた場合、要素分割の対象となる物体の形状によっては、一定要素よりも要素節点数が少なくなり、また精度も高いためである。また、2次以上の境界要素による離散化によってより精度の高い近似も考えられるが、連立一次方程式における係数行列を求める際に必要な境界要素上の面積分が繁雑になる傾向にあり、特異積分に至ってはそれを回避するには数値積分によって値を求めねばならず[40]、以下に述べるような線形要素や一定要素のように解析的に求められないという欠点がある。さらに要素の形状として、面を分割するときには三角形要素と四角形要素が考えられるが、四角形という形は、分割する物体が直方体のような単純な形以外はその分割が困難になることがあり汎用性に乏しいという性格がある。それに比べて、三角形は原理的にはどんな形状でもそれに分割することが可能である。以上に述べた理由から、本論文では境界要素に三角形線形要素を採用した。

A.2 被積分要素 S_j 上にソース点 r_i が無い場合

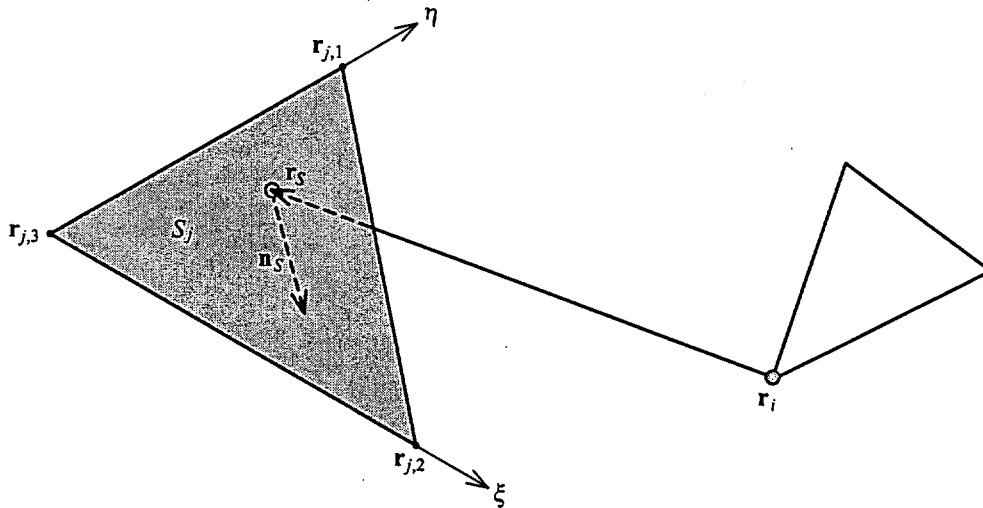


Fig. A.1: Local coordinates for calculations of $g_{S_{j,k}}(r_i)$, $h_{S_{j,k}}(r_i)$

A.2.1 $g_{S_{j,k}}(r_i)$ の計算

(2.29) 式を再掲すると、

$$g_{S_{j,k}}(r_i) = jk \iint_{S_j} N_k q(r_s, r_i) dS(r_s) = jk \iint_{S_j} N_k \frac{e^{-jk|r_s - r_i|}}{4\pi|r_s - r_i|} dS(r_s) \quad (\text{A.1})$$

これは、要素 S_j 上の任意の点 r_s に関する面積分である。

いま, Fig.A.1 のように局所座標を設定し, 三角形要素の各要素節点 $\mathbf{r}_{j,1}$, $\mathbf{r}_{j,2}$, $\mathbf{r}_{j,3}$ の座標を次のようにおく。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_{j,1} &= (x_{j,1}, y_{j,1}, z_{j,1}) \\ \mathbf{r}_{j,2} &= (x_{j,2}, y_{j,2}, z_{j,2}) \\ \mathbf{r}_{j,3} &= (x_{j,3}, y_{j,3}, z_{j,3}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.2})$$

このとき, 要素内の任意の点 \mathbf{r}_S が 3 節点の座標 $\mathbf{r}_{j,k}$ ($k = 1, 2, 3$) と内挿関数 $N_k(\eta, \xi)$ ($k = 1, 2, 3$) の線形結合として, 次のように与えられるとする [40]。

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_S &= \sum_{k=1}^3 N_k(\eta, \xi) \mathbf{r}_{j,k} \\ \Rightarrow \begin{cases} x_S = \sum_{k=1}^3 N_k x_{j,k} = (x_{j,1} - x_{j,3})\eta + (x_{j,2} - x_{j,3})\xi + x_{j,3} \\ y_S = \sum_{k=1}^3 N_k y_{j,k} = (y_{j,1} - y_{j,3})\eta + (y_{j,2} - y_{j,3})\xi + y_{j,3} \\ z_S = \sum_{k=1}^3 N_k z_{j,k} = (z_{j,1} - z_{j,3})\eta + (z_{j,2} - z_{j,3})\xi + z_{j,3} \end{cases} \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

ここに, $N_1 = \eta$, $N_2 = \xi$, $N_3 = 1 - \eta - \xi$ であり, η と ξ の値のとり範囲は $[0 \leq \eta \leq 1]$, $[0 \leq \xi \leq 1 - \eta]$ である。なお, この内挿関数 $N_k(\eta, \xi)$ は要素 S_j 上の任意の点における音圧 $p(\mathbf{r}_S)$ を 3 節点での音圧 $p(\mathbf{r}_{j,1})$, $p(\mathbf{r}_{j,2})$, $p(\mathbf{r}_{j,3})$ で内挿する場合に用いられる関数と同じものである。

また, ソース点 \mathbf{r}_i はある三角形要素の 1 つの節点に位置するので, その座標を (x_i, y_i, z_i) であるとすれば, (A.3) 式よりベクトル $\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i$ は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i &= (x_S - x_i, y_S - y_i, z_S - z_i) \\ &= \left((x_{j,1} - x_{j,3})\eta + (x_{j,2} - x_{j,3})\xi + x_{j,3} - x_i, \right. \\ &\quad (y_{j,1} - y_{j,3})\eta + (y_{j,2} - y_{j,3})\xi + y_{j,3} - y_i, \\ &\quad \left. (z_{j,1} - z_{j,3})\eta + (z_{j,2} - z_{j,3})\xi + z_{j,3} - z_i \right) \quad (\text{A.4}) \end{aligned}$$

ここで, 要素 S_j 上の微小面積 $dS(\mathbf{r}_S)$ は, 点 \mathbf{r}_S における η , ξ 方向の微分係数 (接線ベクトル) $\partial \mathbf{r}_S / \partial \eta$, $\partial \mathbf{r}_S / \partial \xi$ を用いて, 次式で与えられる [79]。

$$dS(\mathbf{r}_S) = \left| \frac{\partial \mathbf{r}_S}{\partial \eta} \times \frac{\partial \mathbf{r}_S}{\partial \xi} \right| d\eta d\xi = |G(\eta, \xi)| d\eta d\xi \quad (\text{A.5})$$

ただし, 記号 \times はベクトルの外積, $||$ はベクトルの大きさを表すものとする。また, (A.3) 式から

$$G(\eta, \xi) = \frac{\partial \mathbf{r}_S}{\partial \eta} \times \frac{\partial \mathbf{r}_S}{\partial \xi} \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_S}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} (x_S, y_S, z_S) = (x_{j,1} - x_{j,3}, y_{j,1} - y_{j,3}, z_{j,1} - z_{j,3}) \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_S}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} (x_S, y_S, z_S) = (x_{j,2} - x_{j,3}, y_{j,2} - y_{j,3}, z_{j,2} - z_{j,3}) \quad (\text{A.8})$$

(A.7), (A.8) 式より (A.6) 式は,

$$G(\eta, \xi) = \begin{vmatrix} y_{j,1} - y_{j,3} & z_{j,1} - z_{j,3} \\ y_{j,2} - y_{j,3} & z_{j,2} - z_{j,3} \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} z_{j,1} - z_{j,3} & x_{j,1} - x_{j,3} \\ z_{j,2} - z_{j,3} & x_{j,2} - x_{j,3} \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_{j,1} - x_{j,3} & y_{j,1} - y_{j,3} \\ x_{j,2} - x_{j,3} & y_{j,2} - y_{j,3} \end{vmatrix} k \quad (\text{A.9})$$

よって,

$$|G(\eta, \xi)| = \sqrt{\begin{aligned} & \left\{ (y_{j,1} - y_{j,3})(z_{j,2} - z_{j,3}) - (z_{j,1} - z_{j,3})(y_{j,2} - y_{j,3}) \right\}^2 \\ & + \left\{ (z_{j,1} - z_{j,3})(x_{j,2} - x_{j,3}) - (x_{j,1} - x_{j,3})(z_{j,2} - z_{j,3}) \right\}^2 \\ & + \left\{ (x_{j,1} - x_{j,3})(y_{j,2} - y_{j,3}) - (y_{j,1} - y_{j,3})(x_{j,2} - x_{j,3}) \right\}^2 \end{aligned}} \quad (\text{A.10})$$

以上の変数変換から, (A.1) 式は次のように書き換えられる。

$$g_{S_j, k}(\mathbf{r}_i) = jk \int_0^1 \int_0^{1-\eta} N_k \frac{e^{-jk|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i|}}{4\pi|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i|} |G(\eta, \xi)| d\xi d\eta \quad (\text{A.11})$$

ここに, (A.4) 式から,

$$|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i| = \sqrt{\begin{aligned} & \left\{ (x_{j,1} - x_{j,3})\eta + (x_{j,2} - x_{j,3})\xi + x_{j,3} - x_i \right\}^2 \\ & + \left\{ (y_{j,1} - y_{j,3})\eta + (y_{j,2} - y_{j,3})\xi + y_{j,3} - y_i \right\}^2 \\ & + \left\{ (z_{j,1} - z_{j,3})\eta + (z_{j,2} - z_{j,3})\xi + z_{j,3} - z_i \right\}^2 \end{aligned}} \quad (\text{A.12})$$

A.2.2 $h_{S_j, k}(\mathbf{r}_i)$ の計算

(2.30) 式を再掲すると,

$$\begin{aligned} h_{S_j, k}(\mathbf{r}_i) &= \iint_{S_j} N_k \frac{\partial q(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}_i)}{\partial n_S} dS(\mathbf{r}_S) \\ &= - \iint_{S_j} N_k \frac{(1 + jk|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i|)}{4\pi|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i|^2} \frac{(\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n}_S}{|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i|} e^{-jk|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i|} dS(\mathbf{r}_S) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Fig.A.1 のように局所座標を設定すると, 要素 S_j 上の任意の点 \mathbf{r}_S における外向き単位法線ベクトル \mathbf{n}_S は, 次式で与えられる [79]。

$$\mathbf{n}_S = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}_S}{\partial \eta} \times \frac{\partial \mathbf{r}_S}{\partial \xi}}{|G(\eta, \xi)|} \quad (\text{A.14})$$

ここに, $\partial \mathbf{r}_S / \partial \eta$ は (A.7) 式, $\partial \mathbf{r}_S / \partial \xi$ は (A.8) 式, $|G(\eta, \xi)|$ は (A.10) 式で定義される。したがって, A.2.1 節の $g_{S_j, k}(\mathbf{r}_i)$ で考えたような変数変換をここでも行くと, (A.13) 式は次のようになる。

$$\begin{aligned} h_{S_j, k}(\mathbf{r}_i) &= - \int_0^1 \int_0^{1-\eta} N_k \frac{(1 + jk|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i|) e^{-jk|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i|}}{4\pi|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i|^2} \frac{(\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n}_S}{|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i|} |G(\eta, \xi)| d\xi d\eta \\ &= - \int_0^1 \int_0^{1-\eta} N_k \frac{(1 + jk|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i|) e^{-jk|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i|}}{4\pi|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i|^2} \frac{(\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i|} \frac{\frac{\partial \mathbf{r}_S}{\partial \eta} \times \frac{\partial \mathbf{r}_S}{\partial \xi}}{|G(\eta, \xi)|} |G(\eta, \xi)| d\xi d\eta \\ &= - \int_0^1 \int_0^{1-\eta} N_k \frac{(1 + jk|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i|) e^{-jk|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i|}}{4\pi|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}_S}{\partial \eta} \times \frac{\partial \mathbf{r}_S}{\partial \xi} \right) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

ここに、 $|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i|$ は (A.12) 式で定義される。また、 $\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i$ は (A.4) 式、 $(\partial \mathbf{r}_S / \partial \eta) \times (\partial \mathbf{r}_S / \partial \xi)$ は (A.9) 式で定義されるので、各成分毎に計算を行うと、

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}_S}{\partial \eta} \times \frac{\partial \mathbf{r}_S}{\partial \xi} \right) \\
&= \{ (x_{j,1} - x_{j,3})\eta + (x_{j,2} - x_{j,3})\xi + x_{j,3} - x_i \} \{ (y_{j,1} - y_{j,3})(z_{j,2} - z_{j,3}) - (z_{j,1} - z_{j,3})(y_{j,2} - y_{j,3}) \} \\
&+ \{ (y_{j,1} - y_{j,3})\eta + (y_{j,2} - y_{j,3})\xi + y_{j,3} - y_i \} \{ (z_{j,1} - z_{j,3})(x_{j,2} - x_{j,3}) - (x_{j,1} - x_{j,3})(z_{j,2} - z_{j,3}) \} \\
&+ \{ (z_{j,1} - z_{j,3})\eta + (z_{j,2} - z_{j,3})\xi + z_{j,3} - z_i \} \{ (x_{j,1} - x_{j,3})(y_{j,2} - y_{j,3}) - (y_{j,1} - y_{j,3})(x_{j,2} - x_{j,3}) \}
\end{aligned} \tag{A.16}$$

となる。

A.3 被積分要素 S_j 上にソース点 \mathbf{r}_i が存在する場合

A.3.1 $g_{S_j,k}(\mathbf{r}_i)$ の計算

ここでは、境界要素 S_j の要素節点 $\mathbf{r}_{j,k}$ にソース点 \mathbf{r}_i が位置する場合を考える。このとき、(A.1) 式の $|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i|$ において $\mathbf{r}_S = \mathbf{r}_i$ で被積分関数が発散してしまうという特異性を有する。このため、特異点を取り除き要素内の面積分を正しく評価できるように座標変換を行う。

要素節点 $\mathbf{r}_{j,k}$ ($k = 1, 2, 3$) にはその3つの節点それぞれに対応した内挿関数 $N_k(\eta, \xi)$ ($k = 1, 2, 3$) が存在する。したがって、本節ではソース点 \mathbf{r}_i が境界要素 S_j の3要素節点それぞれに位置する場合を考え、それぞれの場合について座標変換を行い積分に関して説明する。

\mathbf{r}_i が $\mathbf{r}_{j,1}$ に位置するとき ($N_1 = \eta$ ($k = 1$) のとき)

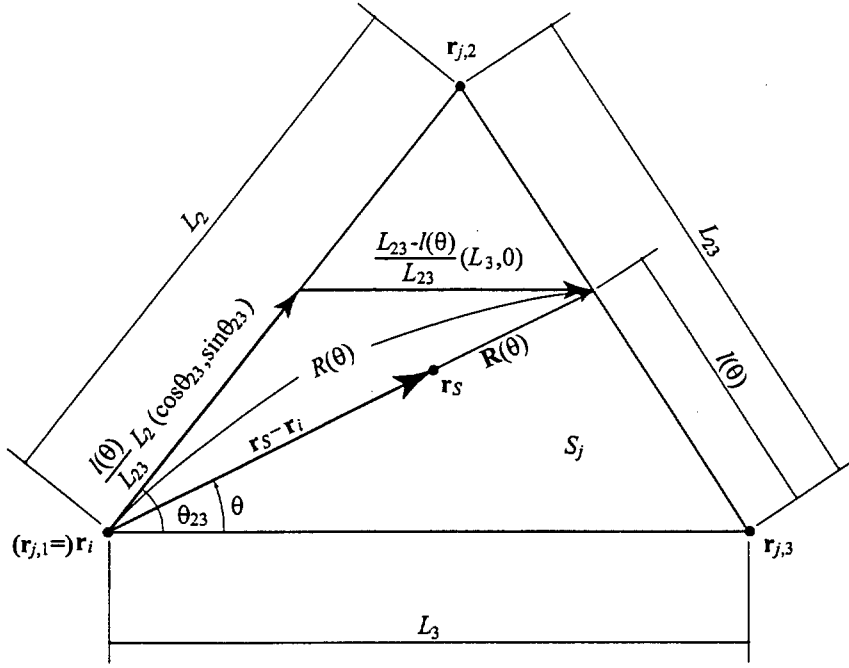
ここでは、Fig.A.2のようにソース点 \mathbf{r}_i が要素節点 $\mathbf{r}_{j,1}$ に位置するときを考える。すなわち、 $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{j,1}$ である。

いま、Fig.A.2のように、 $\mathbf{r}_{j,2} - \mathbf{r}_i$ と $\mathbf{r}_{j,3} - \mathbf{r}_i$ がなす角を θ_{23} 、 $\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i$ と $\mathbf{r}_{j,3} - \mathbf{r}_i$ がなす角を θ とする。また、 $\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i$ が直線 $\mathbf{r}_{j,2} - \mathbf{r}_{j,3}$ と交わるまでの長さを $R(\theta)$ 、そのベクトル表示を $\mathbf{R}(\theta)$ とする。さらに、図中の各長さは次の通りである。

$$\left. \begin{aligned}
l(\theta) &= |\mathbf{R}(\theta) - (\mathbf{r}_{j,3} - \mathbf{r}_i)| \\
L_{23} &= |\mathbf{r}_{j,2} - \mathbf{r}_{j,3}| \\
L_2 &= |\mathbf{r}_{j,2} - \mathbf{r}_i| \\
L_3 &= |\mathbf{r}_{j,3} - \mathbf{r}_i|
\end{aligned} \right\} \tag{A.17}$$

ここで、 $\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i \equiv (r \cos \theta, r \sin \theta)$ と極座標表示すると、要素 S_j 上の微小面積 $dS(\mathbf{r}_S)$ は次のように変換される。

$$dS(\mathbf{r}_S) = \left| \frac{\partial(\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i)}{\partial r} \times \frac{\partial(\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i)}{\partial \theta} \right| dr d\theta = r dr d\theta \tag{A.18}$$

Fig. A.2: A local coordinate used in the calculations of $g_{S_{j,1}}(r_i)$

このとき、 r, θ の値のとりうる範囲はそれぞれ $(0 \leq r \leq R(\theta))$, $(0 \leq \theta \leq \theta_{23})$ であり、(A.12)式よりベクトル $r_s - r_i$ の大きさ r は

$$r = |r_s - r_i| = \sqrt{\begin{aligned} & \left\{ (x_{j,1} - x_{j,3})\eta + (x_{j,2} - x_{j,3})\xi + x_{j,3} - x_i \right\}^2 \\ & + \left\{ (y_{j,1} - y_{j,3})\eta + (y_{j,2} - y_{j,3})\xi + y_{j,3} - y_i \right\}^2 \\ & + \left\{ (z_{j,1} - z_{j,3})\eta + (z_{j,2} - z_{j,3})\xi + z_{j,3} - z_i \right\}^2 \end{aligned}} \quad (\text{A.19})$$

である。

次に、 $\mathbf{R}(\theta)$ はいま定義した極座標による局所座標を用いると、

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\theta) &= (R(\theta) \cos \theta, R(\theta) \sin \theta) \\ &= \frac{l(\theta)}{L_{23}} L_2 (\cos \theta_{23}, \sin \theta_{23}) + \frac{L_{23} - l(\theta)}{L_{23}} (L_3, 0) \end{aligned}$$

と書くことができるから、

$$\left. \begin{aligned} R(\theta) \cos \theta &= \frac{l(\theta)}{L_{23}} L_2 \cos \theta_{23} + \frac{(L_{23} - l(\theta))}{L_{23}} L_3 \\ R(\theta) \sin \theta &= \frac{l(\theta)}{L_{23}} L_2 \sin \theta_{23} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.20})$$

この (A.20) 式を $l(\theta)$, $R(\theta)$ についてそれぞれ解くと、

$$l(\theta) = \frac{L_3 L_{23} \sin \theta}{L_3 \sin \theta + L_2 \sin(\theta_{23} - \theta)} \quad (\text{A.21})$$

$$R(\theta) = \frac{L_2 L_3 \sin \theta_{23}}{L_3 \sin \theta + L_2 \sin(\theta_{23} - \theta)} \quad (\text{A.22})$$

となる。

次に、(A.1) 式の被積分関数を見ると、(2.23)、(2.24) 式で定義した、要素 S_j 上の任意の点 \mathbf{r}_S における音圧 $p(\mathbf{r}_S)$ を要素節点 $\mathbf{r}_{j,1}$ 、 $\mathbf{r}_{j,2}$ 、 $\mathbf{r}_{j,3}$ における音圧 $p(\mathbf{r}_{j,1})$ 、 $p(\mathbf{r}_{j,2})$ 、 $p(\mathbf{r}_{j,3})$ で線形に補間する内挿関数 $N_k(\eta, \xi)$ ($k = 1, 2, 3$) を含んでいる。ここでは、被積分関数の変数であるベクトル $\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i$ を極座標に変換して取り扱っているため、内挿関数 $N_k(\eta, \xi)$ を同じ極座標で表すことを考える。

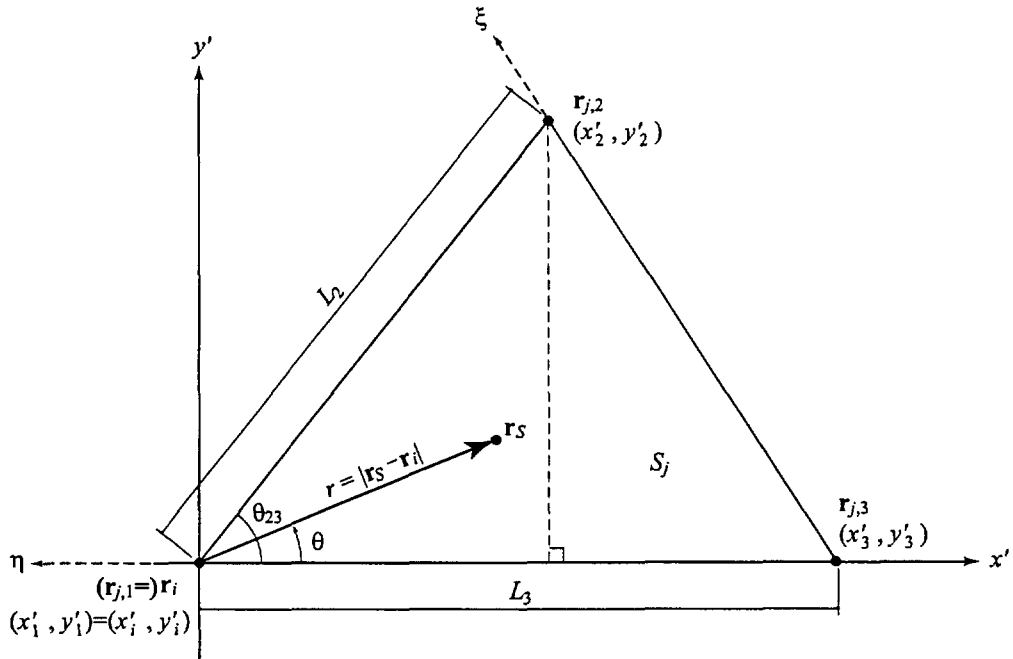


Fig. A.3: The polar coordinates for description of $N_1(\eta, \xi)$

いま、ソース点 \mathbf{r}_i は要素節点 $\mathbf{r}_{j,1}$ にある場合を考えているから、それに対応する内挿関数 $N_k(\eta, \xi)$ は $k = 1$ で、 $N_1(\eta, \xi) = \eta$ である。Fig.A.3 のように要素節点 $\mathbf{r}_{j,1} (= \mathbf{r}_i)$ を原点とし当該の三角形要素を含む平面上に、新たに $x'y'$ 直交座標系をとる。このとき、要素節点 $\mathbf{r}_{j,1}$ 、 $\mathbf{r}_{j,2}$ 、 $\mathbf{r}_{j,3}$ およびソース点 \mathbf{r}_i の $x'y'$ 座標をそれぞれ (x'_1, y'_1) 、 (x'_2, y'_2) 、 (x'_3, y'_3) 、 (x'_i, y'_i) とすると、ベクトル $\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i$ は内挿関数 $N_k(\eta, \xi)$ を用いて、次のように表される。

$$\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i = \left((x'_1 - x'_3)\eta + (x'_2 - x'_3)\xi + x'_3 - x'_i, (y'_1 - y'_3)\eta + (y'_2 - y'_3)\xi + y'_3 - y'_i \right)$$

また、ベクトル $\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i$ は極座標表示として $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ と表されるから、次のような関係が成り立つ。

$$\begin{cases} r \cos \theta = (x'_1 - x'_3)\eta + (x'_2 - x'_3)\xi + x'_3 - x'_i \\ r \sin \theta = (y'_1 - y'_3)\eta + (y'_2 - y'_3)\xi + y'_3 - y'_i \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

この (A.23) 式より、 η 、 ξ についてそれぞれ解くと、

$$\eta = 1 - \frac{L_3 \sin \theta + L_2 \sin(\theta_{23} - \theta)}{L_2 L_3 \sin \theta_{23}} r$$

$$= 1 - \frac{r}{R(\theta)} \quad (\text{A.24})$$

$$\xi = \frac{r \sin \theta}{L_2 \sin \theta_{23}} \quad (\text{A.25})$$

以上で (A.1) 式を積分する準備が整ったことになる。ゆえに、 $k = 1$ の場合の (A.1) 式は、(A.24) 式より

$$\begin{aligned} g_{S_{j,1}}(\mathbf{r}_i) &= jk \iint_{S_j} N_1 \frac{e^{-jk|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i|}}{4\pi|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i|} dS(\mathbf{r}_S) \\ &= \frac{jk}{4\pi} \int_0^{\theta_{23}} \int_0^{R(\theta)} \left\{ 1 - \frac{r}{R(\theta)} \right\} \frac{e^{-jkr}}{r} r dr d\theta \\ &= \frac{jk}{4\pi} \left[\int_0^{\theta_{23}} \int_0^{R(\theta)} e^{-jkr} dr d\theta - \int_0^{\theta_{23}} \frac{1}{R(\theta)} \int_0^{R(\theta)} r e^{-jkr} dr d\theta \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\theta_{23}} e^{-jkR(\theta)} d\theta + \frac{\theta_{23}}{4\pi} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_0^{\theta_{23}} e^{-jkR(\theta)} \left\{ 1 + \frac{1}{jkR(\theta)} \right\} d\theta - \frac{1}{j4\pi k} \int_0^{\theta_{23}} \frac{1}{R(\theta)} d\theta \\ &= \frac{\theta_{23}}{4\pi} + \frac{1}{4\pi} \int_0^{\theta_{23}} \frac{e^{-jkR(\theta)} - 1}{jkR(\theta)} d\theta \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

\mathbf{r}_i が $\mathbf{r}_{j,2}$ に位置するとき ($N_2 = \xi$ ($k = 2$) のとき)

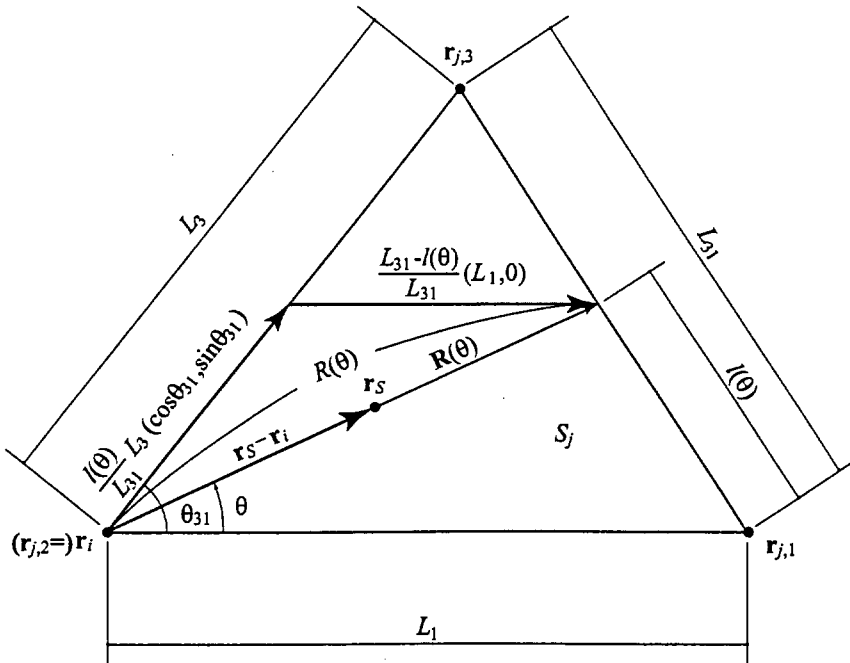


Fig. A.4: A local coordinate used in the calculations of $g_{S_{j,2}}(\mathbf{r}_i)$

ここでは、Fig.A.4のようにソース点 \mathbf{r}_i が要素節点 $\mathbf{r}_{j,2}$ に位置するときを考える。すなわち、 $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{j,2}$ である。このとき、前節の \mathbf{r}_i が $\mathbf{r}_{j,1}$ に位置するときと同様に、図中の各パラメータ θ_{31} ,

θ および $\mathbf{R}(\theta)$ を定義する。また、ベクトル $\mathbf{R}(\theta)$ の大きさを $R(\theta)$ とする。さらに、図中の各長さは次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} l(\theta) &= |\mathbf{R}(\theta) - (\mathbf{r}_{j,1} - \mathbf{r}_i)| \\ L_{31} &= |\mathbf{r}_{j,3} - \mathbf{r}_{j,1}| \\ L_1 &= |\mathbf{r}_{j,1} - \mathbf{r}_i| \\ L_3 &= |\mathbf{r}_{j,3} - \mathbf{r}_i| \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.27})$$

ここで、ベクトル $\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i$ の極座標表示 $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ を考えると、要素 S_j 上の微小面積 $dS(\mathbf{r}_S)$ は (A.18) 式のように表され、 r, θ の値のとりうる範囲はそれぞれ $(0 \leq r \leq R(\theta))$, $(0 \leq \theta \leq \theta_{31})$ であり、ベクトル $\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i$ の大きさ r は (A.19) である。

次に、 $\mathbf{R}(\theta)$ はいま定義した極座標による局所座標を用いると、

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\theta) &= (R(\theta) \cos \theta, R(\theta) \sin \theta) \\ &= \frac{l(\theta)}{L_{31}} L_3 (\cos \theta_{31}, \sin \theta_{31}) + \frac{L_{31} - l(\theta)}{L_{31}} (L_1, 0) \end{aligned}$$

と書くことができるから、

$$\left. \begin{aligned} R(\theta) \cos \theta &= \frac{l(\theta)}{L_{31}} L_3 \cos \theta_{31} + \frac{(L_{31} - l(\theta))}{L_{31}} L_1 \\ R(\theta) \sin \theta &= \frac{l(\theta)}{L_{31}} L_3 \sin \theta_{31} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.28})$$

この (A.28) 式を $l(\theta)$, $R(\theta)$ についてそれぞれ解くと、

$$l(\theta) = \frac{L_1 L_{31} \sin \theta}{L_1 \sin \theta + L_3 \sin(\theta_{31} - \theta)} \quad (\text{A.29})$$

$$R(\theta) = \frac{L_3 L_1 \sin \theta_{31}}{L_1 \sin \theta + L_3 \sin(\theta_{31} - \theta)} \quad (\text{A.30})$$

となる。

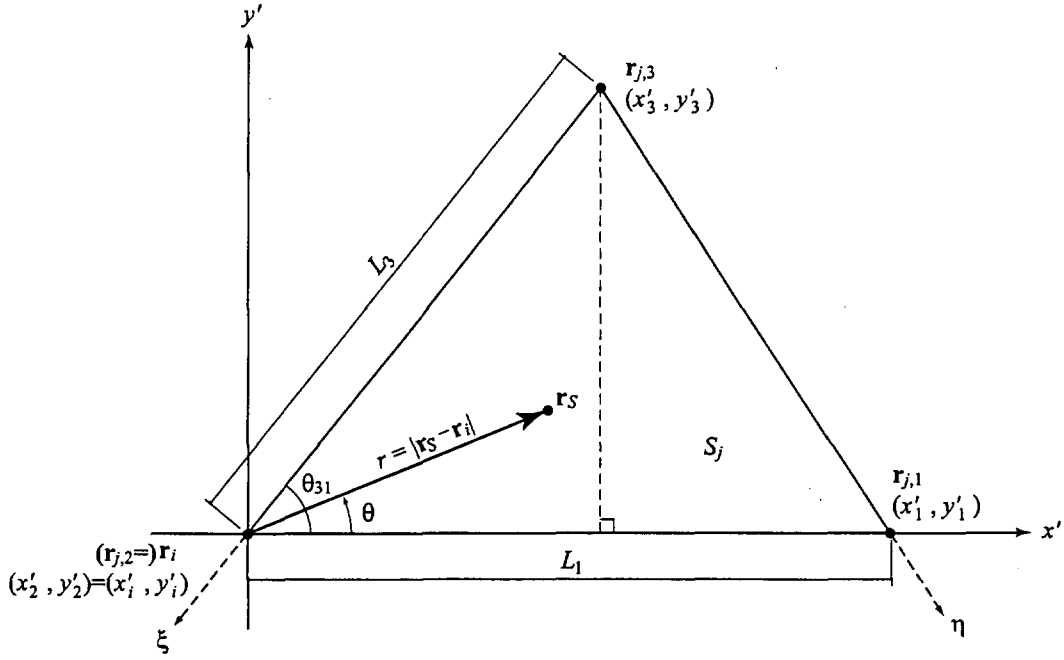
ここで、(A.1) 式の被積分関数である内挿関数 $N_k(\eta, \xi)$ を極座標で表すことを考える。

いま、ソース点 \mathbf{r}_i は要素節点 $\mathbf{r}_{j,2}$ にある場合を考えているから、それに対応する内挿関数 $N_k(\eta, \xi)$ は $k=2$ で、 $N_2(\eta, \xi) = \xi$ である。Fig.A.5 のように要素節点 $\mathbf{r}_{j,2} (= \mathbf{r}_i)$ を原点とし当該の三角形要素を含む平面上に、新たに $x'y'$ 直交座標系をとる。このとき、要素節点 $\mathbf{r}_{j,1}$, $\mathbf{r}_{j,2}$, $\mathbf{r}_{j,3}$ およびソース点 \mathbf{r}_i の $x'y'$ 座標をそれぞれ (x'_1, y'_1) , (x'_2, y'_2) , (x'_3, y'_3) , (x'_i, y'_i) とすると、ベクトル $\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i$ は内挿関数 $N_k(\eta, \xi)$ を用いて、次のように表される。

$$\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i = \left((x'_1 - x'_3)\eta + (x'_2 - x'_3)\xi + x'_3 - x'_i, (y'_1 - y'_3)\eta + (y'_2 - y'_3)\xi + y'_3 - y'_i \right)$$

また、ベクトル $\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i$ は極座標表示として $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ と表されるから、次のような関係が成り立つ。

$$\left\{ \begin{aligned} r \cos \theta &= (x'_1 - x'_3)\eta + (x'_2 - x'_3)\xi + x'_3 - x'_i \\ r \sin \theta &= (y'_1 - y'_3)\eta + (y'_2 - y'_3)\xi + y'_3 - y'_i \end{aligned} \right. \quad (\text{A.31})$$

Fig. A.5: The polar coordinates for description of $N_2(\eta, \xi)$

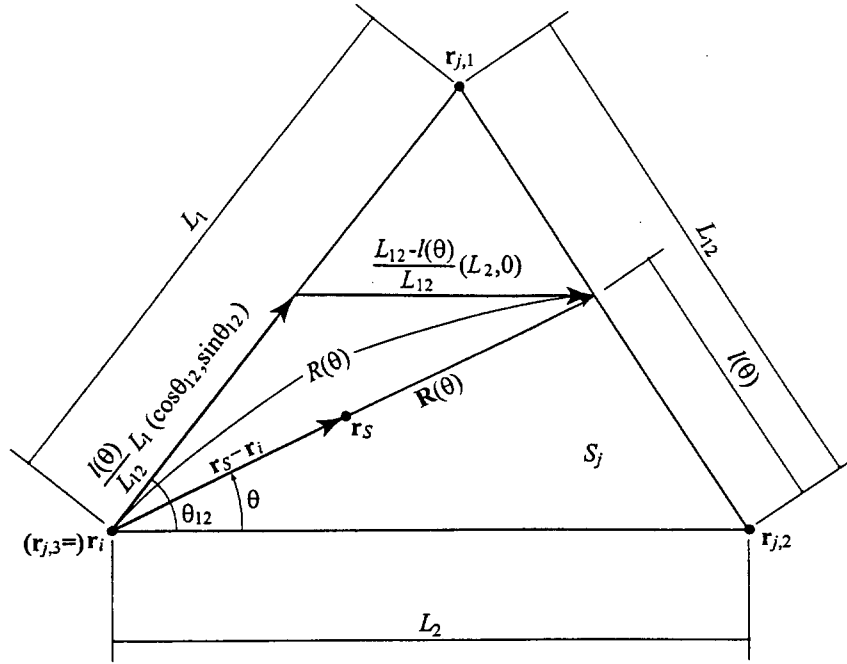
この (A.31) 式より, η, ξ についてそれぞれ解くと,

$$\eta = \frac{r \sin(\theta_{31} - \theta)}{L_1 \sin \theta_{31}} \quad (\text{A.32})$$

$$\begin{aligned} \xi &= 1 - \frac{L_1 \sin \theta + L_3 \sin(\theta_{31} - \theta)}{L_3 L_1 \sin \theta_{31}} r \\ &= 1 - \frac{r}{R(\theta)} \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

と書ける。すなわち, 内挿関数 $N_2(\eta, \xi)$ の極座標表示は (A.33) 式で与えられる。したがって, $k = 2$ の場合の (A.1) 式は,

$$\begin{aligned} g_{S_j,2}(\mathbf{r}_i) &= jk \iint_{S_j} N_2 \frac{e^{-jk|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i|}}{4\pi|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i|} dS(\mathbf{r}_S) \\ &= \frac{jk}{4\pi} \int_0^{\theta_{31}} \int_0^{R(\theta)} \left\{ 1 - \frac{r}{R(\theta)} \right\} \frac{e^{-jkr}}{r} r dr d\theta \\ &= \frac{jk}{4\pi} \left[\int_0^{\theta_{31}} \int_0^{R(\theta)} e^{-jkr} dr d\theta - \int_0^{\theta_{31}} \frac{1}{R(\theta)} \int_0^{R(\theta)} r e^{-jkr} dr d\theta \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\theta_{31}} e^{-jkR(\theta)} d\theta + \frac{\theta_{31}}{4\pi} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_0^{\theta_{31}} e^{-jkR(\theta)} \left\{ 1 + \frac{1}{jkR(\theta)} \right\} d\theta - \frac{1}{j4\pi k} \int_0^{\theta_{31}} \frac{1}{R(\theta)} d\theta \\ &= \frac{\theta_{31}}{4\pi} + \frac{1}{4\pi} \int_0^{\theta_{31}} \frac{e^{-jkR(\theta)} - 1}{jkR(\theta)} d\theta \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Fig. A.6: A local coordinate used in the calculations of $g_{S_{j,3}}(\mathbf{r}_i)$

\mathbf{r}_i が $\mathbf{r}_{j,3}$ に位置するとき ($N_3 = 1 - \eta - \xi$ ($k = 3$) のとき)

ここでは, Fig.A.6 のようにソース点 \mathbf{r}_i が要素節点 $\mathbf{r}_{j,3}$ に位置するときを考える。すなわち, $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{j,3}$ である。このとき, 前節の \mathbf{r}_i が $\mathbf{r}_{j,2}$ に位置するときと同様に, 図中の各パラメータ θ_{12} , θ および $\mathbf{R}(\theta)$ を定義する。また, ベクトル $\mathbf{R}(\theta)$ の大きさを $R(\theta)$ とする。さらに, 図中の各長さは次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} l(\theta) &= |\mathbf{R}(\theta) - (\mathbf{r}_{j,2} - \mathbf{r}_i)| \\ L_{12} &= |\mathbf{r}_{j,1} - \mathbf{r}_{j,2}| \\ L_1 &= |\mathbf{r}_{j,1} - \mathbf{r}_i| \\ L_2 &= |\mathbf{r}_{j,2} - \mathbf{r}_i| \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.35})$$

ここで, ベクトル $\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i$ の極座標表示 ($r \cos \theta, r \sin \theta$) を考えると, 要素 S_j 上の微小面積 $dS(\mathbf{r}_S)$ は (A.18) 式のように表され, r, θ の値のとり範囲はそれぞれ ($0 \leq r \leq R(\theta)$), ($0 \leq \theta \leq \theta_{12}$) であり, ベクトル $\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i$ の大きさ r は (A.19) である。

次に, $\mathbf{R}(\theta)$ はいま定義した極座標による局所座標を用いると,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\theta) &= (R(\theta) \cos \theta, R(\theta) \sin \theta) \\ &= \frac{l(\theta)}{L_{12}} L_1 (\cos \theta_{12}, \sin \theta_{12}) + \frac{L_{12} - l(\theta)}{L_{12}} (L_2, 0) \end{aligned}$$

と書くことができるから,

$$\left. \begin{aligned} R(\theta) \cos \theta &= \frac{l(\theta)}{L_{12}} L_1 \cos \theta_{12} + \frac{L_{12} - l(\theta)}{L_{12}} L_2 \\ R(\theta) \sin \theta &= \frac{l(\theta)}{L_{12}} L_1 \sin \theta_{12} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.36})$$

この (A.36) 式を $l(\theta)$, $R(\theta)$ についてそれぞれ解くと,

$$l(\theta) = \frac{L_2 L_{12} \sin \theta}{L_2 \sin \theta + L_1 \sin(\theta_{12} - \theta)} \quad (\text{A.37})$$

$$R(\theta) = \frac{L_1 L_2 \sin \theta_{12}}{L_2 \sin \theta + L_1 \sin(\theta_{12} - \theta)} \quad (\text{A.38})$$

となる。

ここで, (A.1) 式の被積分関数である内挿関数 $N_k(\eta, \xi)$ を極座標で表すことを考える。

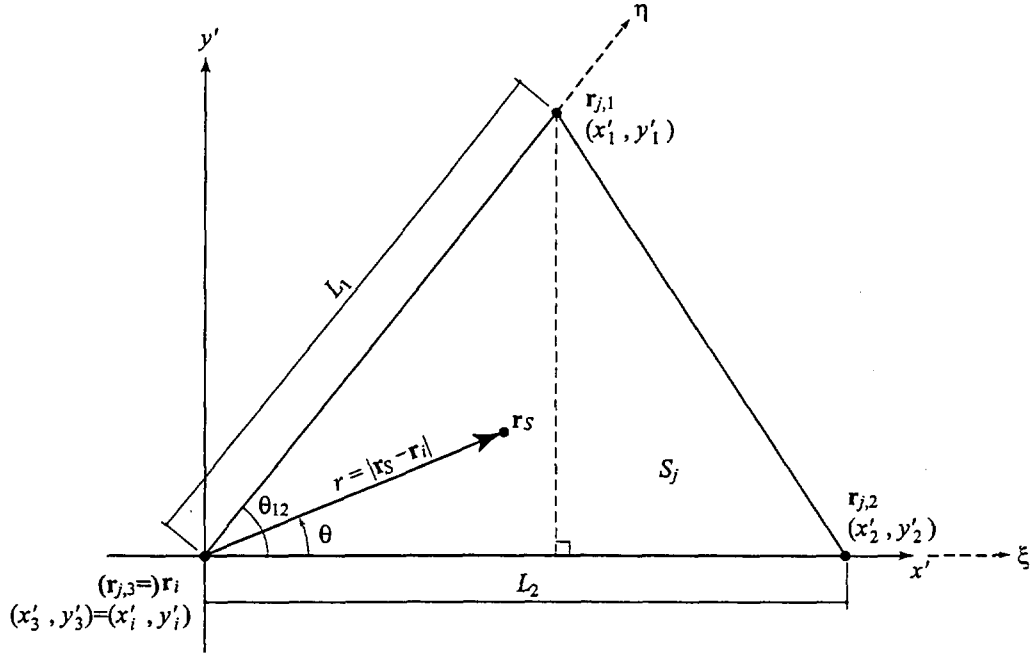


Fig. A.7: The polar coordinates for description of $N_3(\eta, \xi)$

いま, ソース点 r_i は要素節点 $r_{j,3}$ にある場合を考えているから, それに対応する内挿関数 $N_k(\eta, \xi)$ は $k=3$ で, $N_3(\eta, \xi) = 1 - \eta - \xi$ である。Fig.A.7 のように要素節点 $r_{j,3}(=r_i)$ を原点とし当該の三角形要素を含む平面上に, 新たに $x'y'$ 直交座標系をとる。このとき, 要素節点 $r_{j,1}$, $r_{j,2}$, $r_{j,3}$ およびソース点 r_i の $x'y'$ 座標をそれぞれ (x'_1, y'_1) , (x'_2, y'_2) , (x'_3, y'_3) , (x'_i, y'_i) とすると, ベクトル $r_s - r_i$ は内挿関数 $N_k(\eta, \xi)$ を用いて, 次のように表される。

$$r_s - r_i = ((x'_1 - x'_3)\eta + (x'_2 - x'_3)\xi + x'_3 - x'_i, (y'_1 - y'_3)\eta + (y'_2 - y'_3)\xi + y'_3 - y'_i)$$

また, ベクトル $r_s - r_i$ は極座標表示として $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ と表されるから, 次のような関係が成り立つ。

$$\begin{cases} r \cos \theta = (x'_1 - x'_3)\eta + (x'_2 - x'_3)\xi + x'_3 - x'_i \\ r \sin \theta = (y'_1 - y'_3)\eta + (y'_2 - y'_3)\xi + y'_3 - y'_i \end{cases} \quad (\text{A.39})$$

この (A.39) 式より, η , ξ についてそれぞれ解くと,

$$\eta = \frac{r \sin \theta}{L_1 \sin \theta_{12}} \quad (\text{A.40})$$

$$\xi = \frac{r \sin(\theta_{12} - \theta)}{L_2 \sin \theta_{12}} \quad (\text{A.41})$$

と書ける。したがって、内挿関数 $N_3(\eta, \xi)$ の極座標表示は次の通りである。

$$\begin{aligned}
 N_3 &= 1 - \eta - \xi \\
 &= 1 - \frac{r \sin \theta}{L_1 \sin \theta_{12}} - \frac{r \sin(\theta_{12} - \theta)}{L_2 \sin \theta_{12}} \\
 &= 1 - \frac{r}{R(\theta)}
 \end{aligned} \tag{A.42}$$

ゆえに、 $k = 3$ の場合の (A.1) 式は、

$$\begin{aligned}
 g_{S_{j,3}}(\mathbf{r}_i) &= jk \iint_{S_j} N_3 \frac{e^{-jk|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i|}}{4\pi|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i|} dS(\mathbf{r}_S) \\
 &= \frac{jk}{4\pi} \int_0^{\theta_{12}} \int_0^{R(\theta)} \left\{ 1 - \frac{r}{R(\theta)} \right\} \frac{e^{-jk r}}{r} r dr d\theta \\
 &= \frac{jk}{4\pi} \left[\int_0^{\theta_{12}} \int_0^{R(\theta)} e^{-jk r} dr d\theta - \int_0^{\theta_{12}} \frac{1}{R(\theta)} \int_0^{R(\theta)} r e^{-jk r} dr d\theta \right] \\
 &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\theta_{12}} e^{-jk R(\theta)} d\theta + \frac{\theta_{12}}{4\pi} \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_0^{\theta_{12}} e^{-jk R(\theta)} \left\{ 1 + \frac{1}{jk R(\theta)} \right\} d\theta - \frac{1}{j4\pi k} \int_0^{\theta_{12}} \frac{1}{R(\theta)} d\theta \\
 &= \frac{\theta_{12}}{4\pi} + \frac{1}{4\pi} \int_0^{\theta_{12}} \frac{e^{-jk R(\theta)} - 1}{jk R(\theta)} d\theta
 \end{aligned} \tag{A.43}$$

A.3.2 $h_{S_{j,k}}(\mathbf{r}_i)$ の計算

Fig.A.8のように境界要素 S_j 上の要素節点 $\mathbf{r}_{j,1}$, $\mathbf{r}_{j,2}$, $\mathbf{r}_{j,3}$ のうちどれかに \mathbf{r}_i がある場合 (Fig.A.8では $\mathbf{r}_{j,3}$ の位置に \mathbf{r}_i がある), $\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i$ と点 \mathbf{r}_S における外向き単位法線ベクトル \mathbf{n}_S は常に直交する関係にある。したがって, (A.13) 式のベクトル $\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i$ と \mathbf{n}_S の内積は,

$$\cos(\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i, \mathbf{n}_S) = \frac{(\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n}_S}{|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i|} = 0$$

となるので, 結局

$$h_{S_{j,k}}(\mathbf{r}_i) = 0 \tag{A.44}$$

である。すなわち, $i = j$ のときに限って $h_{S_{j,k}}(\mathbf{r}_i)$ は常に零であり, $g_{S_{j,k}}(\mathbf{r}_i)$ のみを考えればよいことになる。

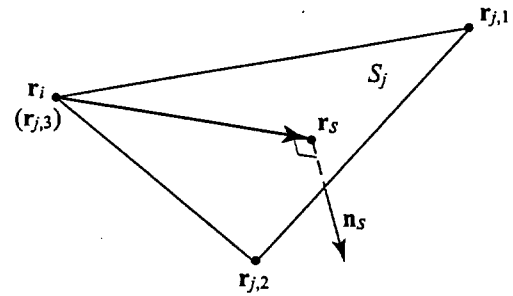


Fig. A.8: A illustration of relation between vectors $\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i$ and \mathbf{n}_S