

## 波動理論に基づく任意多孔質型吸音構造の吸音率推定に関する研究

広沢, 邦一

<https://doi.org/10.15017/458908>

---

出版情報 : Kyushu University, 2004, 博士 (芸術工学), 課程博士  
バージョン :  
権利関係 :

## 第2章 境界要素法による3次元空間の音場解析

境界要素法は、微分方程式で与えられる場の支配方程式と初期条件および境界条件を積分方程式に変換し、積分区間となる境界を離散化することによって場を求める数値解析法である。境界要素法では、境界上の要素節点における未知数だけで問題を扱うため、要素を考える空間の次元が一つ下がり、要素が単純化され、その要素数が空間領域全体を離散化する有限要素法などと比較すると大幅に少なくなるという特徴を持つ。さらに、境界上の要素節点における未知数を求めることから、その境界上の値の振る舞いについて観察する場合には非常に便利な解析方法であるといえる。また、開空間などの無限領域の問題も比較的簡単に扱うことができるため音響散乱問題などに広く応用されている [36]。

本論文では上述のような特徴に鑑み、数値解析法として3次元の境界要素法を一貫して採用する。境界要素法は開空間にも閉空間にも等しく応用できるが、開空間における無限領域の取り扱いに関する説明を含ませるため、本章では、開空間音場の散乱問題に対する一般的な定式化を説明する。まず、基礎となる境界積分方程式、すなわち Helmholtz-Huygens 積分方程式を導出し、その後境界を離散化して代数方程式を得る過程について述べる。この定式化によって音圧または速度ポテンシャルを求められるが、さらに Helmholtz-Huygens 積分方程式の方向微分を求めることによって粒子速度を算出することができるため、この粒子速度の算出方法を説明する。以上の定式化によって、音圧と粒子速度の両方を求められることになり、これらを利用することにより音響インテンシティを求めることができる。そこで、本章で述べる境界要素法から得られる音圧と音響インテンシティを、矩形室内音場を対象としてその厳密解と比較することによって妥当性を検証する。

### 2.1 Helmholtz-Huygens 積分方程式

いま、自由空間中に、無指向性点音源  $p$ 、物体  $S$  があるときの受音点  $\mathbf{r}$  における音圧  $p(\mathbf{r})$  を求めることを考える。

特異点を含まない空間において、連続な2階偏導関数をもつ  $u$  と  $v$  は次の Helmholtz 方程式を満足するものとする。

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad (2.1)$$

$$\nabla^2 v + k^2 v = 0 \quad (2.2)$$

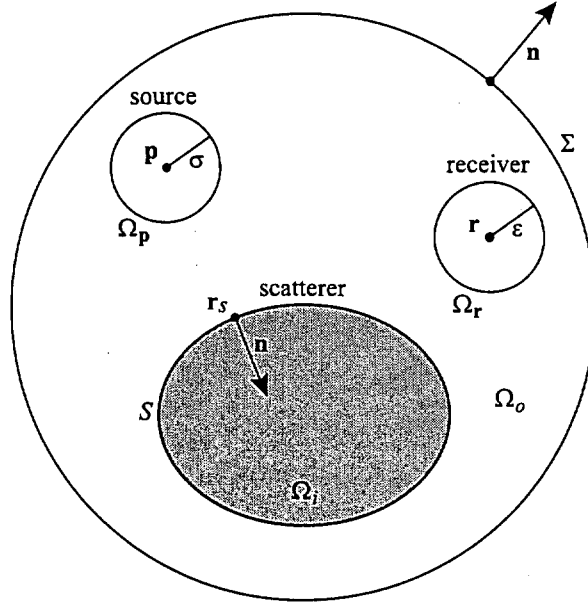


Fig. 2.1: Definitions of geometry and symbols for opening field

(2.2)× $u$ -(2.1)× $v$ より,

$$u\nabla^2 v - v\nabla^2 u = 0$$

したがって, Green の定理から,

$$\iint_S \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = 0 \quad (2.3)$$

ただし,  $\partial/\partial n$  は  $S$  における外向き法線方向微分である。

Fig.2.1 のように法線方向を外向きにとり,  $\mathbf{n}$  を外向き単位法線ベクトルとする。さらに, 点音源  $\mathbf{p}$  を中心とする半径  $\sigma$  の球面を  $\Omega_p$ , 受音点  $\mathbf{r}$  を中心とする半径  $\varepsilon$  の球面を  $\Omega_r$ , および半径  $R$  の球面を  $\Sigma$ , 物体表面を  $S$  と表す。この  $\Omega_p$ ,  $\Omega_r$ ,  $\Sigma$ ,  $S$  で形成される領域を  $\Omega_o$  とすると,  $\Omega_o$  内には特異点が含まれないので, (2.3) 式が成立する。

また,  $u$  を各境界表面上の点  $\mathbf{r}_S$  における音圧として  $p(\mathbf{r}_S)$  と表し,  $v$  を受音点  $\mathbf{r}$  に点音源が存在すると仮定したときの各境界表面上の点  $\mathbf{r}_S$  における自由音場の解,

$$v = \frac{e^{-jk|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|} \equiv q(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}) \quad (2.4)$$

とする。ここに, (2.4) 式は,  $\omega$  を各周波数として時間項に  $e^{j\omega t}$  を採用したときの Helmholtz 方程式の主要解で Green 関数であり,  $k$  は波数で  $k = \omega/c$  ある。  $c$  は空気中の音速である。

$u$ ,  $v$  をこのようにおくと, (2.3) 式は次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_p, \Omega_r, \Sigma, S} \left\{ p(\mathbf{r}_S) \frac{\partial q(\mathbf{r}_S, \mathbf{r})}{\partial n} - q(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}) \frac{\partial p(\mathbf{r}_S)}{\partial n} \right\} dS(\mathbf{r}_S) = 0 \\ \Leftrightarrow & \iint_{\Omega_p, \Omega_r, \Sigma, S} \left\{ p(\mathbf{r}_S) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-jk|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|} \right) - \frac{e^{-jk|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|} \frac{\partial p(\mathbf{r}_S)}{\partial n} \right\} dS(\mathbf{r}_S) = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

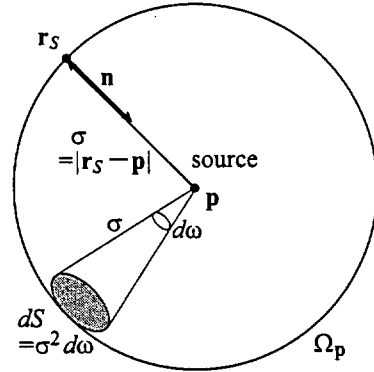
ただし,  $dS(\mathbf{r}_S)$  は各境界表面上の点  $\mathbf{r}_S$  における微小面積であり, また,  $|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|$  は点音源が存在すると仮定している受音点  $\mathbf{r}$  から各境界表面上の点  $\mathbf{r}_S$  までの距離である。

球面  $\Omega_p$  上の積分 点音源  $\mathbf{p}$  を中心とする球面  $\Omega_p$  の半径  $\sigma$  がごく小さい場合には、点音源  $\mathbf{p}$  からの直接音の影響が支配的であると考えられるため、 $\Omega_p$  上の音圧  $p(\mathbf{r}_S)$  は、

$$p(\mathbf{r}_S) = \frac{e^{-jk|\mathbf{r}_S - \mathbf{p}|}}{4\pi|\mathbf{r}_S - \mathbf{p}|} = \frac{e^{-jk\sigma}}{4\pi\sigma} \quad (2.6)$$

となると考えてよい。

また、右図のように微小立体角を  $d\omega$  とすると、微小面積  $dS(\mathbf{r}_S)$  は  $dS(\mathbf{r}_S) = \sigma^2 d\omega$  となる。したがって、 $r \equiv |\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|$  とおいて (2.6) 式を (2.5) 式の  $\Omega_p$  の積分について代入すると、



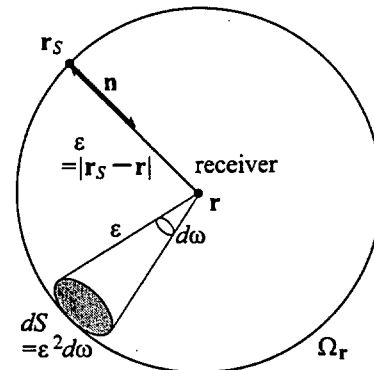
$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega_p} \left\{ \frac{e^{-jk\sigma}}{4\pi\sigma} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-jkr}}{r} \right) - \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-jk\sigma}}{4\pi\sigma} \right) \right\} dS(\mathbf{r}_S) \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^{4\pi} \left\{ \frac{e^{-jk\sigma}}{\sigma} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-jkr}}{r} \right) + \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{e^{-jk\sigma}}{\sigma} \right) \right\} \sigma^2 d\omega \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^{4\pi} \left\{ \frac{e^{-jk\sigma}}{\sigma} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-jkr}}{r} \right) - \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{(1 + jk\sigma)e^{-jk\sigma}}{\sigma^2} \right\} \sigma^2 d\omega \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^{4\pi} \left\{ \sigma e^{-jk\sigma} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-jkr}}{r} \right) - \frac{e^{-jkr}}{r} (1 + jk\sigma)e^{-jk\sigma} \right\} d\omega \end{aligned}$$

ここで、 $\sigma \rightarrow 0$  の極限をとる。すなわち球面  $\Omega_p$  上の任意の点  $\mathbf{r}_S$  を点音源  $\mathbf{p}$  に近づけると、

$$\begin{aligned} & \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^{4\pi} \left\{ \sigma e^{-jk\sigma} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-jkr}}{r} \right) - \frac{e^{-jkr}}{r} (1 + jk\sigma)e^{-jk\sigma} \right\} d\omega \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^{4\pi} \frac{-e^{-jkr}}{r} d\omega = -\frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \quad \left( = -\frac{e^{-jk|\mathbf{p} - \mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{p} - \mathbf{r}|} \equiv q(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \right) \quad (2.7) \end{aligned}$$

球面  $\Omega_r$  上の積分 いま、球の半径  $\varepsilon$  はごく小さいと考えているため、球面  $\Omega_r$  上の音圧  $p(\mathbf{r}_S)$  は一様であるとみなせる。また微小面積  $dS(\mathbf{r}_S)$  は、それに対応する微小立体角を  $d\omega$  とすると、 $dS(\mathbf{r}_S) = \varepsilon^2 d\omega$  であるから、

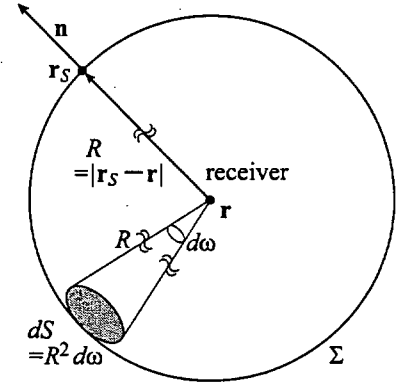
$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega_r} \left\{ p(\mathbf{r}_S) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-jkr}}{r} \right) - \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{\partial p(\mathbf{r}_S)}{\partial n} \right\} dS(\mathbf{r}_S) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} \left\{ p(\mathbf{r}_S) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{e^{-jk\varepsilon}}{\varepsilon} \right) + \frac{e^{-jk\varepsilon}}{\varepsilon} \frac{\partial p(\mathbf{r}_S)}{\partial n} \right\} \varepsilon^2 d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} \left\{ p(\mathbf{r}_S) \frac{(1 + jk\varepsilon)e^{-jk\varepsilon}}{\varepsilon^2} - \frac{e^{-jk\varepsilon}}{\varepsilon} \frac{\partial p(\mathbf{r}_S)}{\partial n} \right\} \varepsilon^2 d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} \left\{ p(\mathbf{r}_S)(1 + jk\varepsilon)e^{-jk\varepsilon} - \varepsilon e^{-jk\varepsilon} \frac{\partial p(\mathbf{r}_S)}{\partial n} \right\} d\omega \end{aligned}$$



ここで、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限をとる。すなわち球面 $\Omega_r$ 上の任意の点 $\mathbf{r}_S$ を受音点 $\mathbf{r}$ に近づけると、

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} \left\{ p(\mathbf{r}_S)(1 + jk\varepsilon)e^{-jk\varepsilon} - \varepsilon e^{-jk\varepsilon} \frac{\partial p(\mathbf{r}_S)}{\partial n} \right\} d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi} p(\mathbf{r}) \int_0^{4\pi} d\omega = p(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

**球面 $\Sigma$ 上の積分** 球面 $\Sigma$ 上の点 $\mathbf{r}_S$ が十分遠方にあるとすると、その半径 $R$ は $R \approx |\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|$ と考えることができる。すなわち、受音点 $\mathbf{r}$ を球面 $\Sigma$ の中心におくことができるということである。また、ここでも同様に微小立体角を $d\omega$ とすると、微小面積 $dS(\mathbf{r}_S)$ は $dS(\mathbf{r}_S) = R^2 d\omega$ となるから、(2.5)式の $\Sigma$ に関する積分は、



$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left\{ p(\mathbf{r}_S) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-jkR}}{R} \right) - \frac{e^{-jkR}}{R} \frac{\partial p(\mathbf{r}_S)}{\partial n} \right\} dS(\mathbf{r}_S) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} \left\{ p(\mathbf{r}_S) \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{e^{-jkR}}{R} \right) - \frac{e^{-jkR}}{R} \frac{\partial p(\mathbf{r}_S)}{\partial n} \right\} R^2 d\omega \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} \left\{ p(\mathbf{r}_S) \frac{(1 + jkR)e^{-jkR}}{R^2} + \frac{e^{-jkR}}{R} \frac{\partial p(\mathbf{r}_S)}{\partial n} \right\} R^2 d\omega \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} \left\{ p(\mathbf{r}_S)(1 + jkR)e^{-jkR} + R e^{-jkR} \frac{\partial p(\mathbf{r}_S)}{\partial n} \right\} d\omega \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} p(\mathbf{r}_S) e^{-jkR} d\omega - \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} e^{-jkR} R \left\{ \frac{\partial p(\mathbf{r}_S)}{\partial n} + jkp(\mathbf{r}_S) \right\} d\omega \end{aligned} \quad (2.9)$$

ここで、 $R \rightarrow \infty$ のとき $p(\mathbf{r}_S) \rightarrow 0$ ならば、第1番目の積分は0となる。すなわち、

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{4\pi} p(\mathbf{r}_S) e^{-jkR} d\omega = 0 \quad (2.10)$$

である。また、Sommerfeldの放射条件[37]

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left\{ \frac{\partial p(\mathbf{r}_S)}{\partial n} + jkp(\mathbf{r}_S) \right\} = 0$$

が成り立つとすれば第2番目の積分は0となる。すなわち、

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{4\pi} e^{-jkR} R \left\{ \frac{\partial p(\mathbf{r}_S)}{\partial n} + jkp(\mathbf{r}_S) \right\} d\omega = 0 \quad (2.11)$$

この(2.10)、(2.11)式より(2.9)式は $R \rightarrow \infty$ のとき次式に示すように0となる。

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} p(\mathbf{r}_S) e^{-jkR} d\omega - \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} e^{-jkR} R \left\{ \frac{\partial p(\mathbf{r}_S)}{\partial n} + jkp(\mathbf{r}_S) \right\} d\omega \right] = 0 \quad (2.12)$$

このことは、無限遠の境界からの影響は考えなくてよいということを示している。

以上, (2.8), (2.9), (2.12) 式より (2.5) 式は,

$$\begin{aligned}
 & -\frac{e^{-jk|\mathbf{p}-\mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{p}-\mathbf{r}|} + p(\mathbf{r}) + \iint_S \left\{ p(\mathbf{r}_S) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-jk|\mathbf{r}_S-\mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{r}_S-\mathbf{r}|} \right) - \left( \frac{e^{-jk|\mathbf{r}_S-\mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{r}_S-\mathbf{r}|} \right) \frac{\partial p(\mathbf{r}_S)}{\partial n} \right\} dS(\mathbf{r}_S) = 0 \\
 \Leftrightarrow & p(\mathbf{r}) = \frac{e^{-jk|\mathbf{p}-\mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{p}-\mathbf{r}|} - \iint_S \left\{ p(\mathbf{r}_S) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-jk|\mathbf{r}_S-\mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{r}_S-\mathbf{r}|} \right) - \left( \frac{e^{-jk|\mathbf{r}_S-\mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{r}_S-\mathbf{r}|} \right) \frac{\partial p(\mathbf{r}_S)}{\partial n} \right\} dS(\mathbf{r}_S) \\
 \Leftrightarrow & p(\mathbf{r}) = q(\mathbf{p}, \mathbf{r}) - \iint_S \left\{ p(\mathbf{r}_S) \frac{\partial q(\mathbf{r}_S, \mathbf{r})}{\partial n} - q(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}) \frac{\partial p(\mathbf{r}_S)}{\partial n} \right\} dS(\mathbf{r}_S) \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

この (2.13) 式を Helmholtz-Huygens 積分方程式という。(2.13) 式の意味するところは, すべての境界  $S$  上の点  $\mathbf{r}_S$  における音圧  $p(\mathbf{r}_S)$  とその外向き法線方向  $n$  の微分係数  $\partial p(\mathbf{r}_S)/\partial n$  が分かれば, 領域  $\Omega_0$  内の任意の受音点  $\mathbf{r}$  における音圧  $p(\mathbf{r})$  を求めることができるということである。

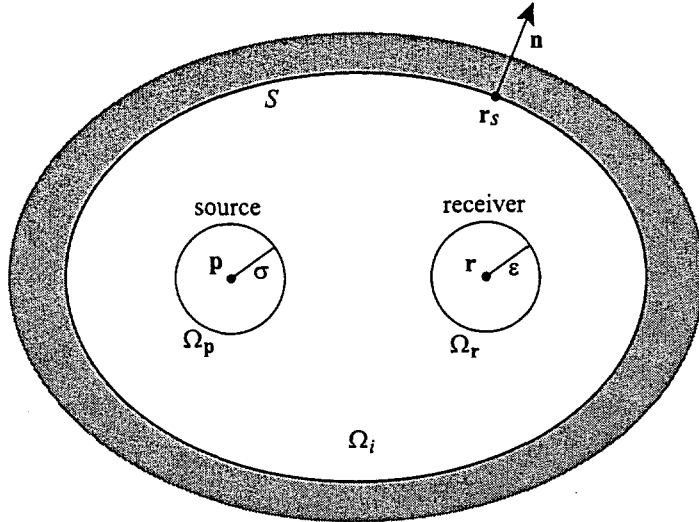


Fig. 2.2: Definitions of geometry and symbols for enclosed field

また, Fig.2.2 のような閉空間に対しても, 球面  $\Omega_p$ ,  $\Omega_r$  および境界面  $S$  で囲まれた領域  $\Omega_i$  内においては特異点が存在しないので, (2.5) 式と同様に次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\Omega_p, \Omega_r, S} \left\{ p(\mathbf{r}_S) \frac{\partial q(\mathbf{r}_S, \mathbf{r})}{\partial n} - q(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}) \frac{\partial p(\mathbf{r}_S)}{\partial n} \right\} dS(\mathbf{r}_S) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \iint_{\Omega_p, \Omega_r, S} \left\{ p(\mathbf{r}_S) \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-jk|\mathbf{r}_S-\mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{r}_S-\mathbf{r}|} \right) - \frac{e^{-jk|\mathbf{r}_S-\mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{r}_S-\mathbf{r}|} \frac{\partial p(\mathbf{r}_S)}{\partial n} \right\} dS(\mathbf{r}_S) = 0 \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

球面  $\Omega_p$  および  $\Omega_r$  上の積分に関しても, (2.7), (2.8) 式とまったく同様に導出できるので, 領域  $\Omega_i$  を囲む境界面  $S$  の積分だけが残る, (2.13) 式と同義の次式が成立する。

$$p(\mathbf{r}) = q(\mathbf{p}, \mathbf{r}) - \iint_S \left\{ p(\mathbf{r}_S) \frac{\partial q(\mathbf{r}_S, \mathbf{r})}{\partial n} - q(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}) \frac{\partial p(\mathbf{r}_S)}{\partial n} \right\} dS(\mathbf{r}_S) \quad (2.15)$$

(2.13) 式と (2.15) 式は数学的に同じ形をしている。また, 直接音  $q(\mathbf{p}, \mathbf{r})$  と全境界  $S$  からの寄与によって領域  $\Omega_i$  内の任意の点  $\mathbf{r}$  における音圧  $p(\mathbf{r})$  が決定されるという意味においてはまったくの同義である。

## 2.2 境界要素法による音圧の解析

一般に、境界要素法によって音場解析を行う場合、境界条件として、開空間の場合は散乱体などの表面上のノーマル比音響インピーダンス比を、また閉空間の場合はその空間を閉じる壁面などの表面上のノーマル比音響インピーダンス比を考え、対象とする領域のみを扱う。このとき重要なのは、境界が局所作用 [38] の仮定を前提としていることである。多くの場合、局所作用を仮定することによって境界条件を定めるが、境界を構成する壁が背後空気層付きの多孔質材料である場合などは局所作用を仮定することができないため、多孔質材料や背後空気層の内部音場まで考慮し、複数の領域を取り扱わなければならない。このような場合はそれぞれの領域を各境界において連成して結合するという方法によって定式化する必要がある。本論文では、どちらの手法も用いて解析するので、以下にそれぞれの定式化および離散化について概要を述べる。なお、以降本論文においては、前者の境界要素法を単に境界要素法 (Boundary Element Method; BEM)、または一般的な境界要素法と呼び、後者を領域結合型境界要素法 (Domain Coupling Boundary Element Method; DC-BEM) と呼ぶ。

ここで、音場内のある点において音圧を粒子速度で除した値のことを比音響インピーダンス、その逆数を比音響アドミッタンスと定義する [39]。このとき本論文では、境界表面上のある点において、境界面に対して垂直方向の比音響インピーダンスをノーマル比音響インピーダンス、その逆数をノーマル比音響アドミッタンスといい、媒質の特性インピーダンスで基準化したものをそれぞれノーマル比音響インピーダンス比、ノーマル比音響アドミッタンス比と呼ぶ。

### 2.2.1 単一領域の定式化

いま、Fig.2.3 のように3次元自由空間に閉曲面  $S$  が存在し、その外部領域  $\Omega_0$  に点音源  $\mathbf{p}$ 、受音点  $\mathbf{r}$  がある場合を考える。なお、内部領域を  $\Omega_1$  とするが、今考えるのは  $\Omega_0$  のみである。このとき、受音点  $\mathbf{r}$  における音圧  $p(\mathbf{r})$  は次式で表される。

$$c(\mathbf{r})p(\mathbf{r}) = q(\mathbf{p}, \mathbf{r}) - \iint_S \left\{ p(\mathbf{r}_S) \frac{\partial q(\mathbf{r}_S, \mathbf{r})}{\partial n_S} - q(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}) \frac{\partial p(\mathbf{r}_S)}{\partial n_S} \right\} dS(\mathbf{r}_S) \quad (2.16)$$

ここで、 $\mathbf{r}_S$  は閉曲面  $S$  上の任意の点、 $\mathbf{n}_S$  はその点  $\mathbf{r}_S$  における外向き単位法線ベクトル、 $p(\mathbf{r}_S)$  は点  $\mathbf{r}_S$  における音圧、 $dS(\mathbf{r}_S)$  は点  $\mathbf{r}_S$  での微小面積である。また、 $q(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ 、 $q(\mathbf{r}_S, \mathbf{r})$  はそれぞれ次のようにおいた。

$$\begin{aligned} q(\mathbf{p}, \mathbf{r}) &= \frac{e^{-jk|\mathbf{p}-\mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{p}-\mathbf{r}|} \\ q(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}) &= \frac{e^{-jk|\mathbf{r}_S-\mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{r}_S-\mathbf{r}|} \end{aligned} \quad (2.17)$$

$c(\mathbf{r})$  は受音点  $\mathbf{r}$  の設置状況を表す定数で、 $\Omega_0$  から見た開き立体角を  $\Phi(\mathbf{r})$  とすると、

$$c(\mathbf{r}) = \frac{\Phi(\mathbf{r})}{4\pi} \quad (2.18)$$

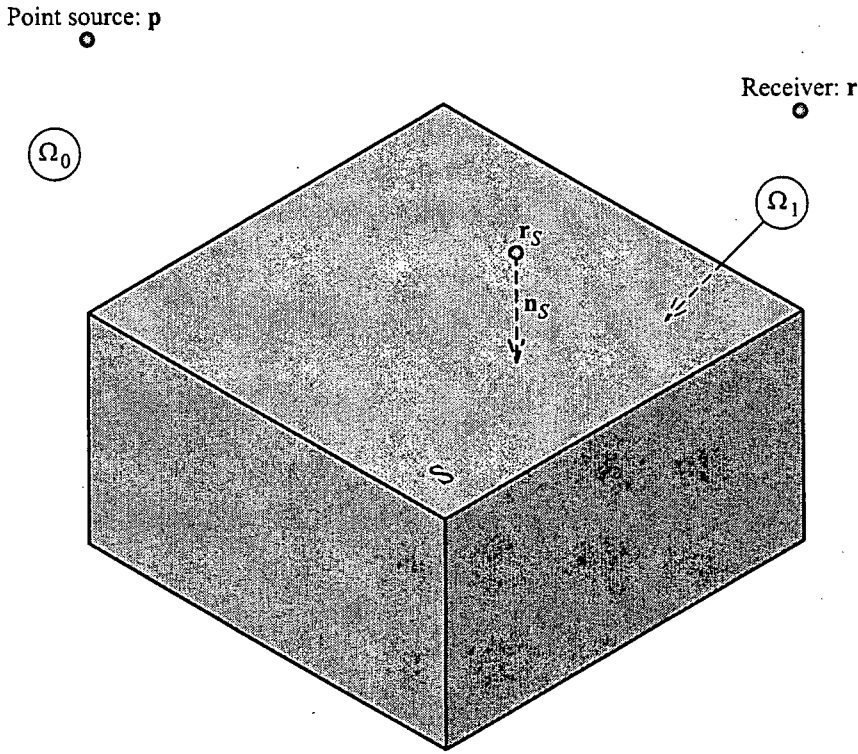


Fig. 2.3: Definitions of geometry and symbols

である。例えば、受音点  $\mathbf{r}$  が  $\Omega_0$  中に浮かんでいる場合は  $\Phi(\mathbf{r}) = 4\pi$ 、滑らかな曲面上にある場合は  $\Phi(\mathbf{r}) = 2\pi$  となる。

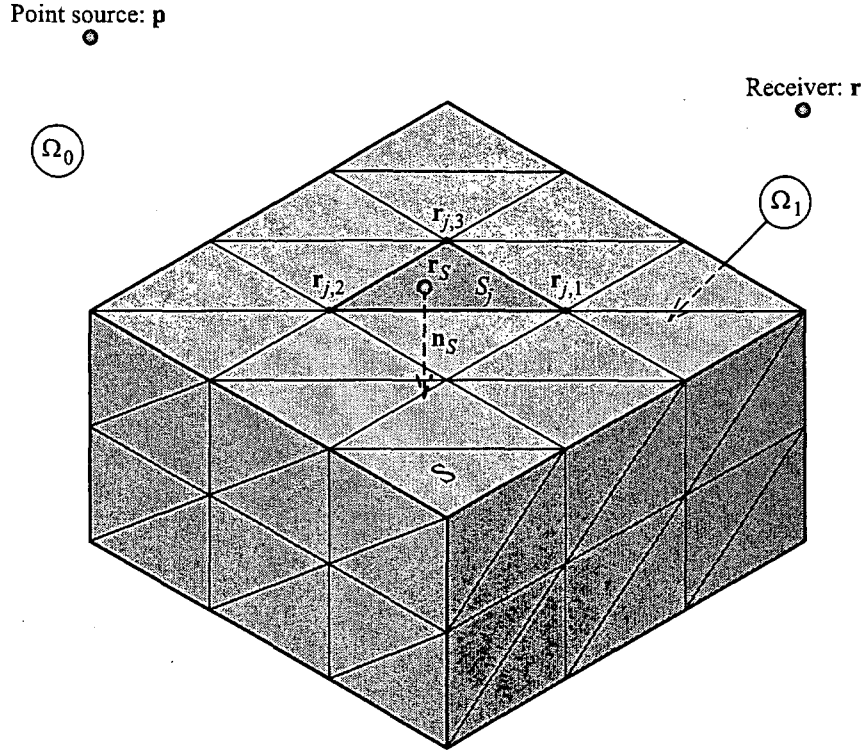
この (2.16) 式を見ると、未知数として、受音点  $\mathbf{r}$  での音圧  $p(\mathbf{r})$  と閉曲面  $S$  上の音圧  $p(\mathbf{r}_S)$ 、その外向き法線方向微分係数が挙げられる。つまり、閉曲面  $S$  上の音圧  $p(\mathbf{r}_S)$  が分かれば、受音点  $\mathbf{r}$  での音圧  $p(\mathbf{r})$  が求まることになる。したがって、まず、受音点  $\mathbf{r}$  での音圧  $p(\mathbf{r})$  を求める準備として、閉曲面  $S$  上の音圧  $p(\mathbf{r}_S)$  を求めることを考える。

いま、閉曲面  $S$  上の点  $\mathbf{r}_S$  では局所作用が仮定できると考える。このとき、空気の密度を  $\rho$ 、空気中の音速を  $c$ 、点  $\mathbf{r}_S$  における  $\mathbf{n}_S$  方向の粒子速度を  $u(\mathbf{r}_S)$ 、閉曲面  $S$  上の点  $\mathbf{r}_S$  におけるノーマル比音響アドミッタンスを  $\beta_0(\mathbf{r}_S)$  とし、時間項に  $e^{j\omega t}$  を採用すると、 $\partial p(\mathbf{r}_S)/\partial n_S$  は、

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p(\mathbf{r}_S)}{\partial n_S} &= -\rho \frac{\partial u(\mathbf{r}_S)}{\partial t} \\
 &= -\rho \beta_0(\mathbf{r}_S) \frac{\partial p(\mathbf{r}_S)}{\partial t} \\
 &= -j\omega \rho \beta_0(\mathbf{r}_S) p(\mathbf{r}_S) \\
 &= -jk\rho c \beta_0(\mathbf{r}_S) p(\mathbf{r}_S) \\
 &= -jk\beta(\mathbf{r}_S) p(\mathbf{r}_S)
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

ただし、 $\beta(\mathbf{r}_S)$  は点  $\mathbf{r}_S$  における空気のアドミッタンスで基準化した  $\mathbf{n}_S$  方向に対するノーマル比音響アドミッタンス比で、 $\beta(\mathbf{r}_S) = \rho c \beta_0(\mathbf{r}_S)$  である。



Fig. 2.4: Descretization of a surface into  $N$  boundary elements

また、(2.16)式の被積分関数の第1項の $\mathbf{n}_S$ 方向による微分は、 $\mathbf{r}_S - \mathbf{r}$ 方向微分の $\mathbf{n}_S$ 方向成分であると解釈できる。すなわち、

$$\frac{\partial q(\mathbf{r}_S, \mathbf{r})}{\partial n_S} = \frac{\partial}{\partial n_S} \left( \frac{e^{-jk|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|} \right) = -\frac{(1 + jk|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|)(\mathbf{r}_S - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_S}{4\pi|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|^2 |\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|} e^{-jk|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|} \quad (2.20)$$

したがって、(2.19)式と(2.20)式より(2.16)式は次のように書ける。

$$c(\mathbf{r})p(\mathbf{r}) = q(\mathbf{p}, \mathbf{r}) - \iint_S \left\{ p(\mathbf{r}_S) \frac{\partial q(\mathbf{r}_S, \mathbf{r})}{\partial n_S} + jk\beta(\mathbf{r}_S)p(\mathbf{r}_S)q(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}) \right\} dS(\mathbf{r}_S) \quad (2.21)$$

$$= \frac{e^{-jk|\mathbf{p} - \mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{p} - \mathbf{r}|} + \iint_S \left\{ p(\mathbf{r}_S) \frac{(1 + jk|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|)(\mathbf{r}_S - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_S}{4\pi|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|^2 |\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|} e^{-jk|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|} - jk\beta(\mathbf{r}_S)p(\mathbf{r}_S) \frac{e^{-jk|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|} \right\} dS(\mathbf{r}_S) \quad (2.22)$$

ここで、(2.21)式の離散化を考える。Fig.2.4のように、閉曲面を $N$ 個の三角形の境界要素 $S_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ )に分割する。ただし、各三角形要素の頂点に設けた $M$ 個の要素節点における音圧によって、要素上の任意の点における音圧は線形に補間されるものと仮定する。すなわち、要素 $S_j$ 上の任意の点の音圧 $p(\mathbf{r}_S)$ は、要素節点における音圧 $p(\mathbf{r}_{j,1})$ ,  $p(\mathbf{r}_{j,2})$ ,  $p(\mathbf{r}_{j,3})$ と内挿関数 $N_k(\eta, \xi)$  ( $k = 1, 2, 3$ )の線形結合として次のように与えられるものとする[40]。

$$p(\mathbf{r}_S) = \sum_{k=1}^3 N_k(\eta, \xi)p(\mathbf{r}_{j,k}) \quad (2.23)$$

ここに,

$$\begin{aligned} N_1 &= \eta, \quad N_2 = \xi, \quad N_3 = 1 - \eta - \xi \\ \text{for } [0 \leq \eta \leq 1], [0 \leq \xi \leq 1 - \eta] \end{aligned} \quad (2.24)$$

であり, 位置ベクトル  $\mathbf{r}_{j,k}$  は境界要素  $S_j$  上の内挿関数番号  $k$  の頂点座標を表す。これは, Fig.2.5 のように  $\eta\xi$  平面の局所座標として表され,  $p(\mathbf{r}_S)$  は図の三角形の領域内で値をとる。このとき, 内挿関数番号  $k = 1, 2, 3$  の順番は 3 頂点の座標から求められる外積が外向き法線方向と一致するようにする。

この (2.23) 式を (2.21) 式に代入し, 積分項を次のように離散化する。

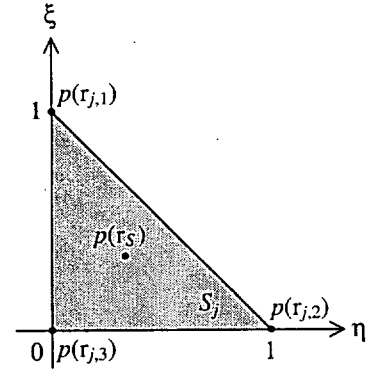


Fig. 2.5: Local coordinates for triangular linear element

$$\begin{aligned} c(\mathbf{r})p(\mathbf{r}) &= q(\mathbf{p}, \mathbf{r}) - \sum_{j=1}^N \iint_{S_j} \left[ \left\{ \sum_{k=1}^3 N_k p(\mathbf{r}_{j,k}) \right\} \frac{\partial q(\mathbf{r}_S, \mathbf{r})}{\partial n_S} \right. \\ &\quad \left. + jk\beta(\mathbf{r}_j) \left\{ \sum_{k=1}^3 N_k p(\mathbf{r}_{j,k}) \right\} q(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}) \right] dS(\mathbf{r}_S) \\ &= q(\mathbf{p}, \mathbf{r}) - \sum_{j=1}^N \left[ \iint_{S_j} \left\{ \sum_{k=1}^3 N_k p(\mathbf{r}_{j,k}) \right\} \frac{\partial q(\mathbf{r}_S, \mathbf{r})}{\partial n_S} dS(\mathbf{r}_S) \right. \\ &\quad \left. + jk\beta(\mathbf{r}_j) \iint_{S_j} \left\{ \sum_{k=1}^3 N_k p(\mathbf{r}_{j,k}) \right\} q(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}) dS(\mathbf{r}_S) \right] \\ &= q(\mathbf{p}, \mathbf{r}) - \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^3 \left[ p(\mathbf{r}_{j,k}) \iint_{S_j} N_k \frac{\partial q(\mathbf{r}_S, \mathbf{r})}{\partial n_S} dS(\mathbf{r}_S) \right. \\ &\quad \left. + jk\beta(\mathbf{r}_j) p(\mathbf{r}_{j,k}) \iint_{S_j} N_k q(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}) dS(\mathbf{r}_S) \right] \end{aligned} \quad (2.25)$$

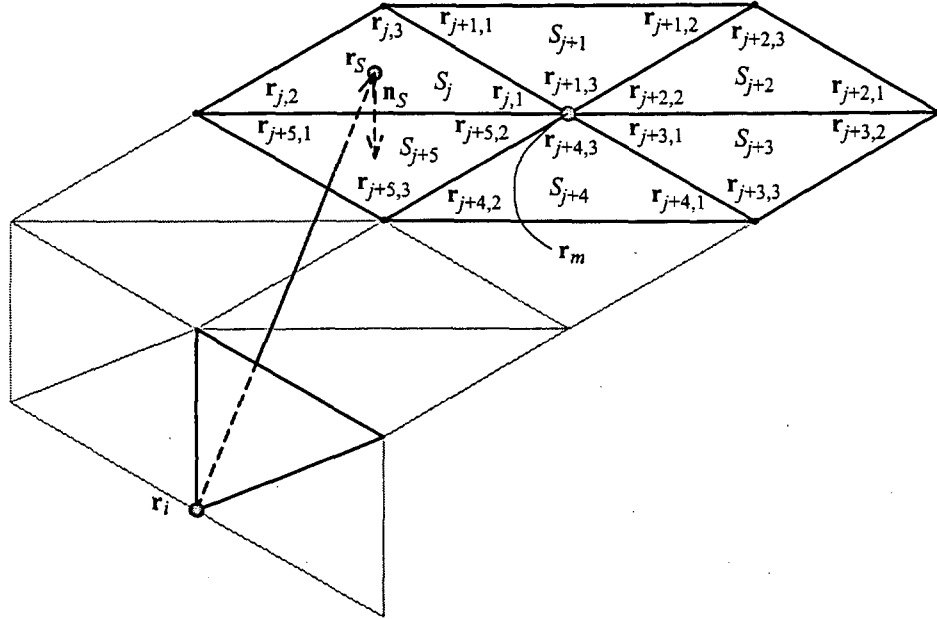
ただし,  $\mathbf{r}_j$  は境界要素  $S_j$  上の任意の点を表すこととした。

ここで, (2.25) 式において求めるべき未知数は閉曲面上の音圧であるから, 任意の受音点  $\mathbf{r}$  を各要素節点  $\mathbf{r}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) に置き換え, 各要素節点での音圧  $p(\mathbf{r}_i)$  に関する  $M$  元連立一次方程式にする。(2.25) 式で  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i$  とすると,

$$\begin{aligned} c(\mathbf{r}_i)p(\mathbf{r}_i) &= q(\mathbf{p}, \mathbf{r}_i) - \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^3 \left[ p(\mathbf{r}_{j,k}) \iint_{S_j} N_k \frac{\partial q(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}_i)}{\partial n_S} dS(\mathbf{r}_S) \right. \\ &\quad \left. + jk\beta(\mathbf{r}_j) p(\mathbf{r}_{j,k}) \iint_{S_j} N_k q(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}_i) dS(\mathbf{r}_S) \right], \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (2.26)$$

となる。ところで, (2.26) 式では同じ要素節点における音圧を表す表記に  $p(\mathbf{r}_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, M$ ) と  $p(\mathbf{r}_{j,k})$  ( $j = 1, 2, \dots, N$  and  $k = 1, 2, 3$ ) の 2 種類が混在しており不都合である。この問題を解消するために要素節点番号について整理する。

いま, Fig.2.6 のように三角形境界要素  $S_j \sim S_{j+5}$  があり, それぞれの要素に対する要素節点  $\mathbf{r}_{j,k}$  が番号付けされているものとする。このとき, 図から分かるように各三角形要素の 1 頂点が

Fig. 2.6: Illustration of the relation between  $\mathbf{r}_i$  and  $\mathbf{r}_{j,k}$ 

集合している点  $\mathbf{r}_m$  は節点番号が違うだけで同じ座標である。したがって、(2.26)式において異なる節点番号であっても同じ座標の要素節点における音圧ごとにまとめることができる。すなわち、 $p(\mathbf{r}_m)$  について (2.26) 式の積分をまとめるということは、Fig.2.6 に例をとると、 $p(\mathbf{r}_{j,1})$ ,  $p(\mathbf{r}_{j+1,3})$ ,  $p(\mathbf{r}_{j+2,2})$ ,  $p(\mathbf{r}_{j+3,1})$ ,  $p(\mathbf{r}_{j+4,3})$ ,  $p(\mathbf{r}_{j+5,2})$  に関する積分をまとめることになる。以上より、要素節点の音圧について (2.26) 式をまとめると次式が得られる。

$$c(\mathbf{r}_i)p(\mathbf{r}_i) = q(\mathbf{p}, \mathbf{r}_i) - \sum_{m=1}^M \{H_m(\mathbf{r}_i) + G_m(\mathbf{r}_i)\} p(\mathbf{r}_m), \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, M \quad (2.27)$$

ただし、 $H_m(\mathbf{r}_i)$  と  $G_m(\mathbf{r}_i)$  は要素節点の音圧  $p(\mathbf{r}_m)$  に関する積分についてまとめた項で、Fig.2.6 の場合では以下のようになる。

$$\left. \begin{aligned} H_m(\mathbf{r}_i) &= h_{S_{j,1}}(\mathbf{r}_i) + h_{S_{j+1,3}}(\mathbf{r}_i) + h_{S_{j+2,2}}(\mathbf{r}_i) \\ &\quad + h_{S_{j+3,1}}(\mathbf{r}_i) + h_{S_{j+4,3}}(\mathbf{r}_i) + h_{S_{j+5,2}}(\mathbf{r}_i) \\ G_m(\mathbf{r}_i) &= \beta(\mathbf{r}_j)g_{S_{j,1}}(\mathbf{r}_i) + \beta(\mathbf{r}_{j+1})g_{S_{j+1,3}}(\mathbf{r}_i) + \beta(\mathbf{r}_{j+2})g_{S_{j+2,2}}(\mathbf{r}_i) \\ &\quad + \beta(\mathbf{r}_{j+3})g_{S_{j+3,1}}(\mathbf{r}_i) + \beta(\mathbf{r}_{j+4})g_{S_{j+4,3}}(\mathbf{r}_i) + \beta(\mathbf{r}_{j+5})g_{S_{j+5,2}}(\mathbf{r}_i) \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

また、

$$g_{S_{j,k}}(\mathbf{r}_i) = jk \iint_{S_j} N_k q(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}_i) dS(\mathbf{r}_S) = jk \iint_{S_j} N_k \frac{e^{-jk|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i|}}{4\pi|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i|} dS(\mathbf{r}_S) \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} h_{S_{j,k}}(\mathbf{r}_i) &= \iint_{S_j} N_k \frac{\partial q(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}_i)}{\partial n_S} dS(\mathbf{r}_S) \\ &= - \iint_{S_j} N_k \frac{(1 + jk|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i|)}{4\pi|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i|^2} \frac{(\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n}_S}{|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i|} e^{-jk|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_i|} dS(\mathbf{r}_S) \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$q(\mathbf{p}, \mathbf{r}_i) = \frac{e^{-jk|\mathbf{p} - \mathbf{r}_i|}}{4\pi|\mathbf{p} - \mathbf{r}_i|} \quad (2.31)$$

である。(2.27) 式を整理してマトリックス表示すると,

$$\begin{aligned}
 & [\mathbf{H}]\{\mathbf{p}\} = \{\mathbf{q}\} \\
 \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} c(\mathbf{r}_1) + H_1(\mathbf{r}_1) + G_1(\mathbf{r}_1) & \cdots & H_M(\mathbf{r}_1) + G_M(\mathbf{r}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_1(\mathbf{r}_M) + G_1(\mathbf{r}_M) & \cdots & c(\mathbf{r}_M) + H_M(\mathbf{r}_M) + G_M(\mathbf{r}_M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ p(\mathbf{r}_M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q(\mathbf{p}, \mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ q(\mathbf{p}, \mathbf{r}_M) \end{bmatrix} \quad (2.32)
 \end{aligned}$$

と書くことができる。(2.32) 式の  $[\mathbf{H}]$  を係数行列,  $\{\mathbf{q}\}$  を直接音ベクトルと呼ぶ。この連立方程式を解くことによって, 閉曲面上の音圧  $p(\mathbf{r}_1), \dots, p(\mathbf{r}_M)$  を求めることができる。この閉曲面上の音圧  $p(\mathbf{r}_m)$  を用いることによって, 任意の受音点における音圧を求めることができる。すなわち, 閉曲面  $S$  上の音圧  $p(\mathbf{r}_i)$  を (2.27) 式に代入する。

$$c(\mathbf{r})p(\mathbf{r}) = q(\mathbf{p}, \mathbf{r}) - \sum_{j=1}^M \{H_m(\mathbf{r}) + G_m(\mathbf{r})\} p(\mathbf{r}_m) \quad (2.33)$$

または,

$$c(\mathbf{r})p(\mathbf{r}) = q(\mathbf{p}, \mathbf{r}) - \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^3 \{h_{S_{j,k}}(\mathbf{r}) + \beta(\mathbf{r}_j)g_{S_{j,k}}(\mathbf{r})\} p(\mathbf{r}_{j,k}) \quad (2.34)$$

### 2.2.2 複数領域の連成問題の定式化

本節では、複数の領域を結合して音場を解く領域結合型境界要素法 (DC-BEM) の定式化について説明する。その例として、Fig.2.7に示すように、多孔質材料があるインピーダンスを持つ物質に囲われており、その上面のみが外部領域と接しているモデルを考える。これは3次元自由空間に浮いており、外部領域  $\Omega_0$  に点音源  $\mathbf{p}$  が存在するものとする。

このとき、外部領域  $\Omega_0$  から見た閉曲面を  $S_0$ 、内部領域  $\Omega_1$  から見た閉曲面を  $S_1$  とする。また、外部領域  $\Omega_0$  における境界条件として、あるインピーダンスを持つ物質に覆われている部分はノーマル比音響インピーダンス比で与えられるものとし、インピーダンス境界 (impedance boundary)  $S_{0,im}$  と呼ぶことにする。多孔質材料の部分はそのノーマル比音響インピーダンス比が未知であることから粒子速度で与えられるものとし、粒子速度境界 (particle velocity boundary)  $S_{0,ve}$  と呼ぶことにする。同様に、内部領域  $\Omega_1$  における境界条件として、ノーマル比音響インピーダンス比で与えられる部分を  $S_{1,im}$ 、粒子速度で与えられる部分を  $S_{1,ve}$  と呼ぶことにする。

#### 外部領域 $\Omega_0$ の定式化

いま、Fig.2.7の外部領域  $\Omega_0$  のような音場において、法線方向を領域より外向きにとった場合、受音点  $\mathbf{r}$  での音圧  $p(\mathbf{r})$  は (2.16)~(2.18) 式より次式で与えられる。

$$\begin{aligned} c(\mathbf{r})p(\mathbf{r}) &= q(\mathbf{p}, \mathbf{r}) - \iint_{S_0} \left\{ p(\mathbf{r}_{S_0}) \frac{\partial q(\mathbf{r}_{S_0}, \mathbf{r})}{\partial n_{S_0}} - q(\mathbf{r}_{S_0}, \mathbf{r}) \frac{\partial p(\mathbf{r}_{S_0})}{\partial n_{S_0}} \right\} dS(\mathbf{r}_{S_0}) \\ &= q(\mathbf{p}, \mathbf{r}) - \iint_{S_{0,ve}} \left\{ p(\mathbf{r}_{S_0}) \frac{\partial q(\mathbf{r}_{S_0}, \mathbf{r})}{\partial n_{S_0}} - q(\mathbf{r}_{S_0}, \mathbf{r}) \frac{\partial p(\mathbf{r}_{S_0})}{\partial n_{S_0}} \right\} dS(\mathbf{r}_{S_0}) \\ &\quad - \iint_{S_{0,im}} \left\{ p(\mathbf{r}_{S_0}) \frac{\partial q(\mathbf{r}_{S_0}, \mathbf{r})}{\partial n_{S_0}} - q(\mathbf{r}_{S_0}, \mathbf{r}) \frac{\partial p(\mathbf{r}_{S_0})}{\partial n_{S_0}} \right\} dS(\mathbf{r}_{S_0}) \end{aligned} \quad (2.35)$$

ここで、 $\mathbf{r}_{S_0}$  は閉曲面  $S_0$  上の任意の点、 $p(\mathbf{r}_{S_0})$  はその点  $\mathbf{r}_{S_0}$  における音圧、 $dS(\mathbf{r}_{S_0})$  は点  $\mathbf{r}_{S_0}$  での微小面積である。また、 $q(\mathbf{p}, \mathbf{r})$  と  $q(\mathbf{r}_{S_0}, \mathbf{r})$  はそれぞれ (2.17) 式で表される。

まず (2.35) 式の被積分関数のうちの境界表面上の音圧  $p(\mathbf{r}_{S_0})$  の外向き法線方向微分  $\partial p(\mathbf{r}_{S_0})/\partial n_{S_0}$  を求めるために、粒子速度境界  $S_{0,ve}$  およびインピーダンス境界  $S_{0,im}$  における境界条件を考える。なお、インピーダンス境界  $S_{0,im}$  上の任意の点  $\mathbf{r}_{S_0}$  では局所作用が仮定できると考える。このとき、時間項に  $e^{j\omega t}$  を採用すると、 $\partial p(\mathbf{r}_{S_0})/\partial n_{S_0}$  には以下の関係がある。

$$\frac{\partial p(\mathbf{r}_{S_0})}{\partial n_{S_0}} = \begin{cases} -\rho \frac{\partial u(\mathbf{r}_{S_0})}{\partial t} = -jk\rho c u(\mathbf{r}_{S_0}) & (\mathbf{r}_{S_0} \in S_{0,ve}) \\ -jk\beta(\mathbf{r}_{S_0})p(\mathbf{r}_{S_0}) & (\mathbf{r}_{S_0} \in S_{0,im}) \end{cases} \quad (2.36)$$

ここに、 $\beta(\mathbf{r}_{S_0})$  は点  $\mathbf{r}_{S_0}$  における空気の特性インピーダンスで基準化した  $\mathbf{n}_{S_0}$  方向に対するノーマル比音響アドミッタンス比である。また、 $u(\mathbf{r}_{S_0})$  は点  $\mathbf{r}_{S_0}$  における  $\mathbf{n}_{S_0}$  方向の粒子速度である。

次に (2.35) 式の被積分関数の第1項の  $\mathbf{n}_{S_0}$  方向による微分は、

$$\frac{\partial q(\mathbf{r}_{S_0}, \mathbf{r})}{\partial n_{S_0}} = \frac{\partial}{\partial n_{S_0}} \left( \frac{e^{-jk|\mathbf{r}_{S_0}-\mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{r}_{S_0}-\mathbf{r}|} \right) = -\frac{(1+jk|\mathbf{r}_{S_0}-\mathbf{r}|)(\mathbf{r}_{S_0}-\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_{S_0}}{4\pi|\mathbf{r}_{S_0}-\mathbf{r}|^2 |\mathbf{r}_{S_0}-\mathbf{r}|} e^{-jk|\mathbf{r}_{S_0}-\mathbf{r}|}$$

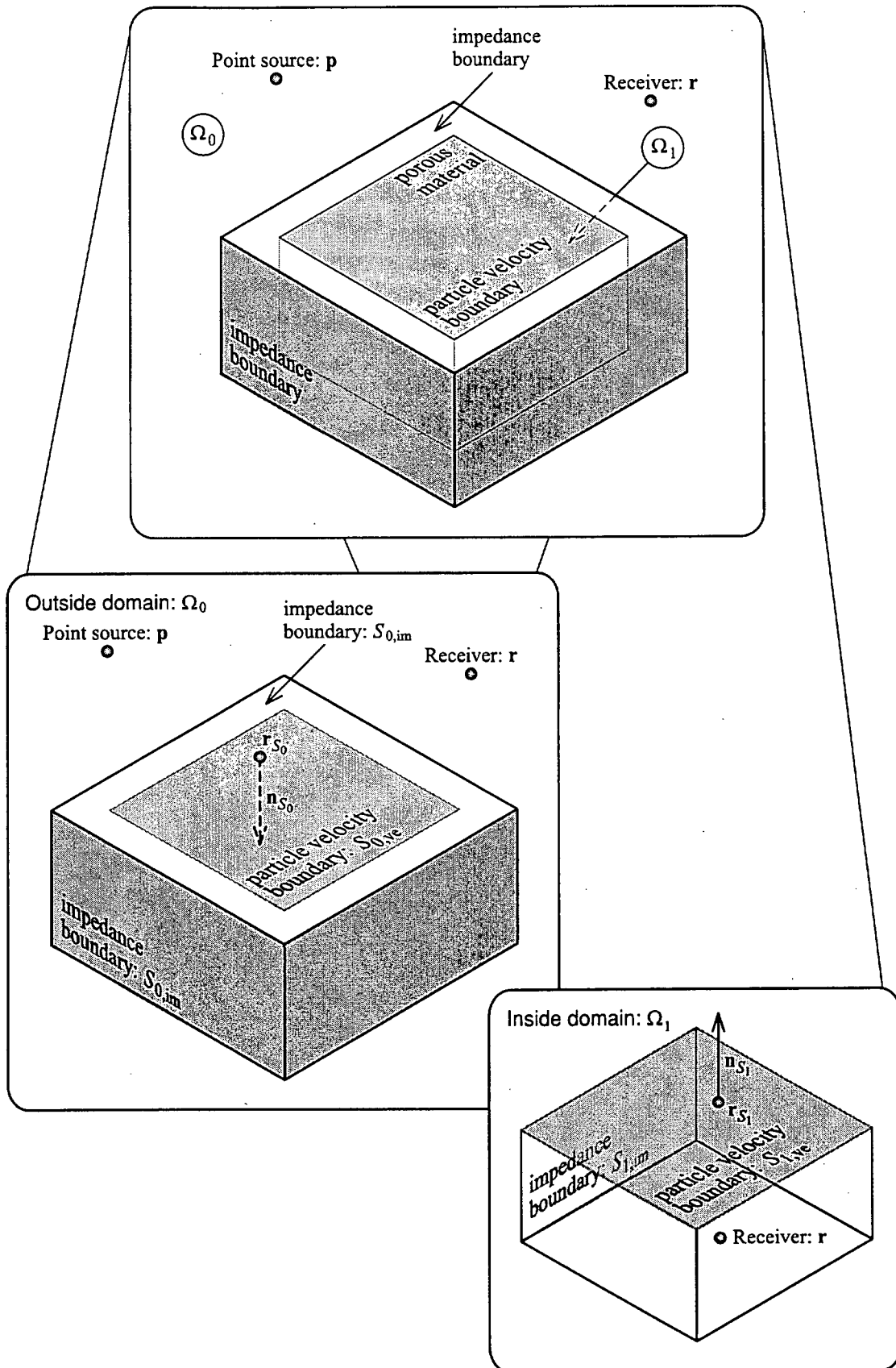


Fig. 2.7: Division of a domain and definitions of geometry and symbols

で与えられることから, (2.35) 式は次のように書き換えることができる。

$$c(\mathbf{r})p(\mathbf{r}) = q(\mathbf{p}, \mathbf{r}) - \iint_{S_{0,ve}} \left\{ p(\mathbf{r}_{S_0}) \frac{\partial q(\mathbf{r}_{S_0}, \mathbf{r})}{\partial n_{S_0}} + jk\rho c u(\mathbf{r}_{S_0}) q(\mathbf{r}_{S_0}, \mathbf{r}) \right\} dS(\mathbf{r}_{S_0}) \\ - \iint_{S_{0,im}} \left\{ p(\mathbf{r}_{S_0}) \frac{\partial q(\mathbf{r}_{S_0}, \mathbf{r})}{\partial n_{S_0}} + jk\beta(\mathbf{r}_{S_0}) p(\mathbf{r}_{S_0}) q(\mathbf{r}_{S_0}, \mathbf{r}) \right\} dS(\mathbf{r}_{S_0}) \quad (2.37)$$

ここで, (2.37) 式の離散化を考える。外部領域  $\Omega_0$  における粒子速度境界  $S_{0,ve}$  を  $N_{0,ve}$  個の三角形の境界要素  $S_{0,j}$  ( $j = 1, 2, \dots, N_{0,ve}$ ) に, インピーダンス境界  $S_{0,im}$  を  $N_{0,im}$  個の三角形の境界要素  $S_{0,j}$  ( $j = N_{0,ve} + 1, N_{0,ve} + 2, \dots, N_{0,ve} + N_{0,im}$ ) に分割する。そして, これら全要素数を  $N_0 (= N_{0,ve} + N_{0,im})$  とおく。ただし, これらの三角形境界要素は線形要素を仮定する。ゆえに, 要素上の任意の点における音圧と粒子速度は, 各三角形要素の頂点に設けた要素節点の値によって線形に補間されるものと仮定する。この仮定により, 要素  $S_{0,j}$  上の任意の点の音圧  $p(\mathbf{r}_{S_0})$  および粒子速度  $u(\mathbf{r}_{S_0})$  は, 3要素節点における音圧  $p(\mathbf{r}_{j,1}^0)$ ,  $p(\mathbf{r}_{j,2}^0)$ ,  $p(\mathbf{r}_{j,3}^0)$ , 粒子速度  $u(\mathbf{r}_{j,1}^0)$ ,  $u(\mathbf{r}_{j,2}^0)$ ,  $u(\mathbf{r}_{j,3}^0)$  と内挿関数  $N_k(\eta, \xi)$  ( $k = 1, 2, 3$ ) の線形結合としてそれぞれ次のように与えられるものとする [40]。

$$p(\mathbf{r}_{S_0}) = \sum_{k=1}^3 N_k(\eta, \xi) p(\mathbf{r}_{j,k}^0) \quad (\mathbf{r}_{S_0} \in S_{0,j}) \quad (2.38)$$

$$u(\mathbf{r}_{S_0}) = \sum_{k=1}^3 N_k(\eta, \xi) u(\mathbf{r}_{j,k}^0) \quad (\mathbf{r}_{S_0} \in S_{0,j}) \quad (2.39)$$

ここに,

$$N_1 = \eta, \quad N_2 = \xi, \quad N_3 = 1 - \eta - \xi \quad \text{for } [0 \leq \eta \leq 1], [0 \leq \xi \leq 1 - \eta]$$

である。この (2.38), (2.39) 式を (2.37) 式に代入し, 積分項を次のように離散化する。

$$c(\mathbf{r})p(\mathbf{r}) = q(\mathbf{p}, \mathbf{r}) - \sum_{j=1}^{N_{0,ve}} \iint_{S_{0,j}} \left[ \left\{ \sum_{k=1}^3 N_k p(\mathbf{r}_{j,k}^0) \right\} \frac{\partial q(\mathbf{r}_{S_0}, \mathbf{r})}{\partial n_{S_0}} \right. \\ \left. + jk\rho c \left\{ \sum_{k=1}^3 N_k u(\mathbf{r}_{j,k}^0) \right\} q(\mathbf{r}_{S_0}, \mathbf{r}) \right] dS(\mathbf{r}_{S_0}) \\ - \sum_{j=N_{0,ve}+1}^{N_0} \iint_{S_{0,j}} \left[ \left\{ \sum_{k=1}^3 N_k p(\mathbf{r}_{j,k}^0) \right\} \frac{\partial q(\mathbf{r}_{S_0}, \mathbf{r})}{\partial n_{S_0}} \right. \\ \left. + jk\beta(\mathbf{r}_{0,j}) \left\{ \sum_{k=1}^3 N_k p(\mathbf{r}_{j,k}^0) \right\} q(\mathbf{r}_{S_0}, \mathbf{r}) \right] dS(\mathbf{r}_{S_0}) \\ = q(\mathbf{p}, \mathbf{r}) - \sum_{j=1}^{N_0} \sum_{k=1}^3 p(\mathbf{r}_{j,k}^0) \iint_{S_{0,j}} N_k \frac{\partial q(\mathbf{r}_{S_0}, \mathbf{r})}{\partial n_{S_0}} dS(\mathbf{r}_{S_0}) \\ - jk\rho c \sum_{j=1}^{N_{0,ve}} \sum_{k=1}^3 u(\mathbf{r}_{j,k}^0) \iint_{S_{0,j}} N_k q(\mathbf{r}_{S_0}, \mathbf{r}) dS(\mathbf{r}_{S_0}) \\ - jk \sum_{j=N_{0,ve}+1}^{N_0} \sum_{k=1}^3 \beta(\mathbf{r}_{0,j}) p(\mathbf{r}_{j,k}^0) \iint_{S_{0,j}} N_k q(\mathbf{r}_{S_0}, \mathbf{r}) dS(\mathbf{r}_{S_0}) \quad (2.40)$$

ただし、位置ベクトル  $\mathbf{r}_{0,j}$  は外部領域  $\Omega_0$  内の境界表面における境界要素  $S_{0,j}$  上の任意の点を表し、 $\mathbf{r}_{j,k}^0$  は同じく外部領域  $\Omega_0$  内の境界要素  $S_{0,j}$  における内挿関数番号  $k$  の頂点位置を表す。

ここで、まず要素節点に番号付けすることを考える。全要素節点数を  $M_0$  個、粒子速度境界に関する要素節点数を  $M_{0,ve}$  個、インピーダンス境界に関する要素節点数を  $M_{0,im}$  とする。このとき、粒子速度境界における要素節点から番号付けするものとする、粒子速度境界の要素節点番号は  $1, 2, \dots, M_{0,ve}$  となり、インピーダンス境界の要素節点番号は  $M_0 - M_{0,im} + 1, M_0 - M_{0,im} + 2, \dots, M_0$  となる。これは、粒子速度境界とインピーダンス境界を分ける境界線上にある要素節点互いの境界に関して共通となり、その共通の要素節点  $M_0 - M_{0,im} + 1, M_0 - M_{0,im} + 2, \dots, M_{0,ve}$  の分だけ全要素節点数  $M_0$  より  $M_{0,ve} + M_{0,im}$  が大きくなってしまふことによる。このようなことから、要素節点番号は境界ごとに番号を割振るのではなく、すべての要素節点について通し番号にするのが望ましい。

次に、(2.40) 式において求めるべき未知数は閉曲面  $S_0$  上の音圧と粒子速度であるから、受音点  $\mathbf{r}$  をいま番号付けした各要素節点  $\mathbf{r}_{0,i}$  ( $i = 1, 2, \dots, M_0$ ) に置き換え、各要素節点での音圧  $p(\mathbf{r}_{0,i})$  および粒子速度  $u(\mathbf{r}_{0,i})$  に関する連立一次方程式にする。(2.40) 式で  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{0,i}$  とすると、

$$\begin{aligned} c(\mathbf{r}_{0,i})p(\mathbf{r}_{0,i}) = & q(\mathbf{p}, \mathbf{r}_{0,i}) - \sum_{j=1}^{N_0} \sum_{k=1}^3 p(\mathbf{r}_{j,k}^0) \iint_{S_{0,j}} N_k \frac{\partial q(\mathbf{r}_{S_0}, \mathbf{r}_{0,i})}{\partial n_{S_0}} dS(\mathbf{r}_{S_0}) \\ & - jk\rho c \sum_{j=1}^{N_{0,ve}} \sum_{k=1}^3 u(\mathbf{r}_{j,k}^0) \iint_{S_{0,j}} N_k q(\mathbf{r}_{S_0}, \mathbf{r}_{0,i}) dS(\mathbf{r}_{S_0}) \\ & - jk \sum_{j=N_{0,ve}+1}^{N_0} \sum_{k=1}^3 \beta(\mathbf{r}_{0,j}) p(\mathbf{r}_{j,k}^0) \iint_{S_{0,j}} N_k q(\mathbf{r}_{S_0}, \mathbf{r}_{0,i}) dS(\mathbf{r}_{S_0}) \\ & \text{for } i = 1, 2, \dots, M_0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

となる。ここで、(2.41) 式の積分項を

$$g_{S_{0,j},k}(\mathbf{r}_{0,i}) = jk \iint_{S_{0,j}} N_k q(\mathbf{r}_{S_0}, \mathbf{r}_{0,i}) dS(\mathbf{r}_{S_0}) = jk \iint_{S_{0,j}} N_k \frac{e^{-jk|\mathbf{r}_{S_0} - \mathbf{r}_{0,i}|}}{4\pi|\mathbf{r}_{S_0} - \mathbf{r}_{0,i}|} dS(\mathbf{r}_{S_0}) \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} h_{S_{0,j},k}(\mathbf{r}_{0,i}) &= \iint_{S_{0,j}} N_k \frac{\partial q(\mathbf{r}_{S_0}, \mathbf{r}_{0,i})}{\partial n_{S_0}} dS(\mathbf{r}_{S_0}) \\ &= - \iint_{S_{0,j}} N_k \frac{(1 + jk|\mathbf{r}_{S_0} - \mathbf{r}_{0,i}|)}{4\pi|\mathbf{r}_{S_0} - \mathbf{r}_{0,i}|^2} \frac{(\mathbf{r}_{S_0} - \mathbf{r}_{0,i}) \cdot \mathbf{n}_{S_0}}{|\mathbf{r}_{S_0} - \mathbf{r}_{0,i}|} e^{-jk|\mathbf{r}_{S_0} - \mathbf{r}_{0,i}|} dS(\mathbf{r}_{S_0}) \end{aligned} \quad (2.43)$$

(2.42), (2.43) 式のおよくと、(2.41) 式は次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} c(\mathbf{r}_{0,i})p(\mathbf{r}_{0,i}) = & q(\mathbf{p}, \mathbf{r}_{0,i}) - \sum_{j=1}^{N_0} \sum_{k=1}^3 h_{S_{0,j},k}(\mathbf{r}_{0,i}) p(\mathbf{r}_{j,k}^0) \\ & - \rho c \sum_{j=1}^{N_{0,ve}} \sum_{k=1}^3 g_{S_{0,j},k}(\mathbf{r}_{0,i}) u(\mathbf{r}_{j,k}^0) - \sum_{j=N_{0,ve}+1}^{N_0} \sum_{k=1}^3 \beta(\mathbf{r}_{0,j}) g_{S_{0,j},k}(\mathbf{r}_{0,i}) p(\mathbf{r}_{j,k}^0) \\ & \text{for } i = 1, 2, \dots, M_0 \end{aligned} \quad (2.44)$$



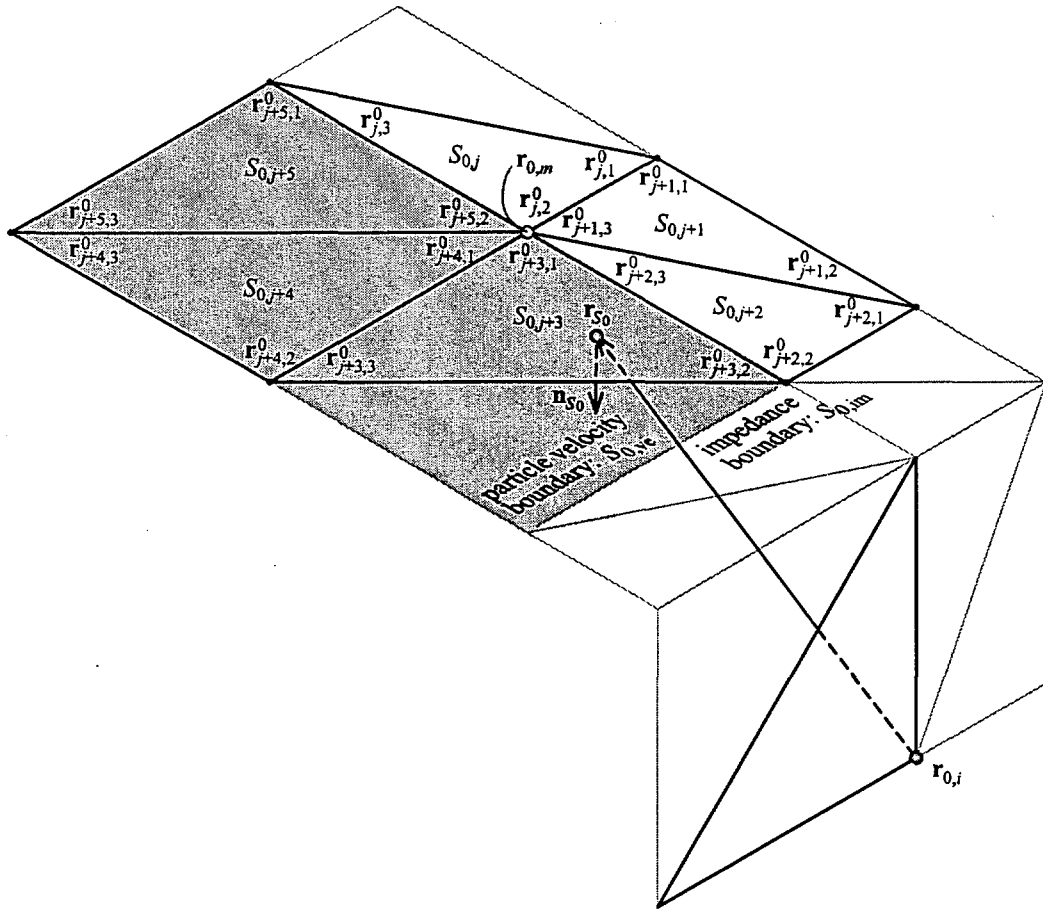


Fig. 2.8: Illustration of nodes that boundary elements have in both particle velocity and impedance boundaries.

ところで、(2.44)式では同じ位置にある要素節点を表す表記に $r_{0,i}$  ( $i = 1, 2, \dots, M_0$ )と $r_{j,k}^0$  ( $j = 1, 2, \dots, N_0$  and  $k = 1, 2, 3$ )の2種類が混在してしまっており、このままでは不都合がある。この問題を解消するため2.2.1節と同様な手続きにより要素節点番号について整理する。ただし、(2.44)式の音圧に関する第1項目の和( $\sum_{j=1}^{N_1}$ )と、対象とする要素節点を共通に持つ境界要素が全て粒子速度境界またはインピーダンス境界のどちらかに含まれる場合のみこれまでの手続きで整理できるが、そうではない要素節点、すなわち粒子速度境界とインピーダンス境界の両方に共通の要素節点 $M_0 - M_{0,im} + 1, M_0 - M_{0,im} + 2, \dots, M_{0,ve}$ の場合は注意を要する。というのも、そもそも要素節点における値というものは、その要素上の任意の点の音圧あるいは粒子速度を補間するための代表値であるから、同じ座標の要素節点であっても今考えているような二つの境界に共通である場合には、粒子速度を補間するのか音圧を補間するのかによって別に用いなければならない。

したがって、いま、外部領域 $\Omega_0$ における要素節点 $r_{0,m}$ が粒子速度境界とインピーダンス境界の両方に共通である場合の例としてFig.2.8のような状況を考える。粒子速度境界 $S_{0,ve}$ における

要素節点  $\mathbf{r}_{0,m}$  の粒子速度  $u(\mathbf{r}_{0,m})$  に関する積分についてまとめると,

$$G_{ve,m}^0(\mathbf{r}_{0,i}) = \rho c \left\{ g_{S_{0,j+3},1}(\mathbf{r}_{0,i}) + g_{S_{0,j+4},1}(\mathbf{r}_{0,i}) + g_{S_{0,j+5},2}(\mathbf{r}_{0,i}) \right\}$$

同様にインピーダンス境界  $S_{0,im}$  における要素節点  $\mathbf{r}_{0,m}$  の音圧  $p(\mathbf{r}_{0,m})$  に関する積分についてまとめると,

$$G_{im,m}^0(\mathbf{r}_{0,i}) = \beta_{0,j}(\mathbf{r}_{0,m})g_{S_{0,j},2}(\mathbf{r}_{0,i}) + \beta_{0,j+1}(\mathbf{r}_{0,m})g_{S_{0,j+1},3}(\mathbf{r}_{0,i}) \\ + \beta_{0,j+2}(\mathbf{r}_{0,m})g_{S_{0,j+2},3}(\mathbf{r}_{0,i})$$

となる。また, (2.44) 式の音圧に関する第 1 項目の和に対応する積分は,

$$H_m^0(\mathbf{r}_{0,i}) = h_{S_{0,j},2}(\mathbf{r}_{0,i}) + h_{S_{0,j+1},3}(\mathbf{r}_{0,i}) + h_{S_{0,j+2},3}(\mathbf{r}_{0,i}) \\ + h_{S_{0,j+3},1}(\mathbf{r}_{0,i}) + h_{S_{0,j+4},1}(\mathbf{r}_{0,i}) + h_{S_{0,j+5},2}(\mathbf{r}_{0,i})$$

以上のようにして, (2.44) 式を要素節点番号についてまとめると次式が得られる。

$$c(\mathbf{r}_{0,i})p(\mathbf{r}_{0,i}) = q(\mathbf{p}, \mathbf{r}_{0,i}) - \sum_{m=1}^{M_0} H_m^0(\mathbf{r}_{0,i})p(\mathbf{r}_{0,m}) - \sum_{m=1}^{M_{0,ve}} G_{ve,m}^0(\mathbf{r}_{0,i})u(\mathbf{r}_{0,m}) \\ - \sum_{m=M_0-M_{0,im}+1}^{M_0} G_{im,m}^0(\mathbf{r}_{0,i})p(\mathbf{r}_{0,m}), \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, M_0 \quad (2.45)$$

(2.45) 式において, 音圧と粒子速度に関する項それぞれについてまとめ, マトリックス表示すると次のようになる。

$$[\mathbf{H}_0]\{\mathbf{p}_0\} = -[\mathbf{G}_0]\{\mathbf{u}_0\} + \{\mathbf{q}_d\} \quad (2.46)$$

ただし,

$$\{\mathbf{p}_0\}^T = \{p(\mathbf{r}_{0,1}), p(\mathbf{r}_{0,2}), \dots, p(\mathbf{r}_{0,M_0})\} \quad (2.47)$$

$$\{\mathbf{u}_0\}^T = \{u(\mathbf{r}_{0,1}), u(\mathbf{r}_{0,2}), \dots, u(\mathbf{r}_{0,M_{0,ve}})\} \quad (2.48)$$

$$\{\mathbf{q}_d\}^T = \{q(\mathbf{p}, \mathbf{r}_{0,1}), q(\mathbf{p}, \mathbf{r}_{0,2}), \dots, q(\mathbf{p}, \mathbf{r}_{0,M_0})\} \quad (2.49)$$

$[\mathbf{G}_0] =$

$$\begin{bmatrix} G_{ve,1}^0(\mathbf{r}_{0,1}) & \cdots & G_{ve,M_0-M_{0,im}+1}^0(\mathbf{r}_{0,1}) & \cdots & G_{ve,M_{0,ve}}^0(\mathbf{r}_{0,1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{ve,1}^0(\mathbf{r}_{M_0-M_{0,im}+1}) & \cdots & G_{ve,M_0-M_{0,im}+1}^0(\mathbf{r}_{M_0-M_{0,im}+1}) & \cdots & G_{ve,M_{0,ve}}^0(\mathbf{r}_{M_0-M_{0,im}+1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{ve,1}^0(\mathbf{r}_{0,M_0}) & \cdots & G_{ve,M_0-M_{0,im}+1}^0(\mathbf{r}_{0,M_0}) & \cdots & G_{ve,M_{0,ve}}^0(\mathbf{r}_{0,M_0}) \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{H}_0] = & \begin{bmatrix} c(\mathbf{r}_{0,1}) + H_1^0(\mathbf{r}_{0,1}) \cdots \\ \vdots \ddots \\ H_1^0(\mathbf{r}_{M_0-M_0,im+1}) \cdots \\ \vdots \ddots \\ H_1^0(\mathbf{r}_{M_0,ve}) \cdots \\ \vdots \ddots \\ H_1^0(\mathbf{r}_{M_0}) \cdots \end{bmatrix} \\
& \begin{aligned} & H_{M_0-M_0,im+1}^0(\mathbf{r}_{0,1}) + G_{im,M_0-M_0,im+1}^0(\mathbf{r}_{0,1}) \\ & \vdots \\ & c(\mathbf{r}_{M_0-M_0,im+1}) + H_{M_0-M_0,im+1}^0(\mathbf{r}_{M_0-M_0,im+1}) + G_{im,M_0-M_0,im+1}^0(\mathbf{r}_{M_0-M_0,im+1}) \\ & \vdots \\ & H_{M_0-M_0,im+1}^0(\mathbf{r}_{M_0,ve}) + G_{im,M_0-M_0,im+1}^0(\mathbf{r}_{M_0,ve}) \\ & \vdots \\ & H_{M_0-M_0,im+1}^0(\mathbf{r}_{M_0}) + G_{im,M_0-M_0,im+1}^0(\mathbf{r}_{M_0}) \end{aligned} \\
& \begin{aligned} \cdots & H_{M_0,ve}^0(\mathbf{r}_{0,1}) + G_{im,M_0,ve}^0(\mathbf{r}_{0,1}) \\ \ddots & \vdots \\ \cdots & H_{M_0,ve}^0(\mathbf{r}_{M_0-M_0,im+1}) + G_{im,M_0,ve}^0(\mathbf{r}_{M_0-M_0,im+1}) \\ \ddots & \vdots \\ \cdots & c(\mathbf{r}_{M_0,ve}) + H_{M_0,ve}^0(\mathbf{r}_{M_0,ve}) + G_{im,M_0,ve}^0(\mathbf{r}_{M_0,ve}) \\ \ddots & \vdots \\ \cdots & H_{M_0,ve}^0(\mathbf{r}_{M_0}) + G_{im,M_0,ve}^0(\mathbf{r}_{M_0}) \end{aligned} \\
& \begin{aligned} \cdots & H_{M_0}^0(\mathbf{r}_{0,1}) + G_{im,M_0}^0(\mathbf{r}_{0,1}) \\ \ddots & \vdots \\ \cdots & H_{M_0}^0(\mathbf{r}_{M_0-M_0,im+1}) + G_{im,M_0}^0(\mathbf{r}_{M_0-M_0,im+1}) \\ \ddots & \vdots \\ \cdots & H_{M_0}^0(\mathbf{r}_{M_0,ve}) + G_{im,M_0}^0(\mathbf{r}_{M_0,ve}) \\ \ddots & \vdots \\ \cdots & c(\mathbf{r}_{M_0}) - H_{M_0}^0(\mathbf{r}_{M_0}) + G_{im,M_0}^0(\mathbf{r}_{M_0}) \end{aligned} \end{aligned} \tag{2.51}$$

内部領域  $\Omega_1$  の定式化

内部領域は Fig.2.7 に示すように、多孔質材料が充填されているものとする。この多孔質材料を等方均質と考え、ある伝搬定数  $\gamma$  と特性インピーダンス  $Z_p$  を持つ媒質であるとする。いま、Fig.2.7 の内部領域  $\Omega_1$  のような音場において、法線方向を領域より外向きにとった場合の受音点  $\mathbf{r}$  での音圧  $p(\mathbf{r})$  は (2.16)~(2.18) 式より次式で与えられる。ただし、内部領域には点音源は存在しないので、(2.16) 式の直接音項  $q(\mathbf{p}, \mathbf{r})$  を省いた形となる。

$$\begin{aligned} c(\mathbf{r})p(\mathbf{r}) &= - \iint_{S_1} \left\{ p(\mathbf{r}_{S_1}) \frac{\partial q_p(\mathbf{r}_{S_1}, \mathbf{r})}{\partial n_{S_1}} - q_p(\mathbf{r}_{S_1}, \mathbf{r}) \frac{\partial p(\mathbf{r}_{S_1})}{\partial n_{S_1}} \right\} dS(\mathbf{r}_{S_1}) \\ &= - \iint_{S_{1,ve}} \left\{ p(\mathbf{r}_{S_1}) \frac{\partial q_p(\mathbf{r}_{S_1}, \mathbf{r})}{\partial n_{S_1}} - q_p(\mathbf{r}_{S_1}, \mathbf{r}) \frac{\partial p(\mathbf{r}_{S_1})}{\partial n_{S_1}} \right\} dS(\mathbf{r}_{S_1}) \\ &\quad - \iint_{S_{1,im}} \left\{ p(\mathbf{r}_{S_1}) \frac{\partial q_p(\mathbf{r}_{S_1}, \mathbf{r})}{\partial n_{S_1}} - q_p(\mathbf{r}_{S_1}, \mathbf{r}) \frac{\partial p(\mathbf{r}_{S_1})}{\partial n_{S_1}} \right\} dS(\mathbf{r}_{S_1}) \end{aligned} \quad (2.52)$$

ここで、 $\mathbf{r}_{S_1}$  は閉曲面  $S_1$  上の任意の点、 $p(\mathbf{r}_{S_1})$  はその点  $\mathbf{r}_{S_1}$  における音圧、 $dS(\mathbf{r}_{S_1})$  は点  $\mathbf{r}_{S_1}$  での微小面積である。また、 $q_p(\mathbf{r}_{S_1}, \mathbf{r})$  は次のようにおいた。

$$q_p(\mathbf{r}_{S_1}, \mathbf{r}) = \frac{e^{-jk_p|\mathbf{r}_{S_1}-\mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{r}_{S_1}-\mathbf{r}|} \quad (2.53)$$

なお、 $k_p$  は多孔質材料中の伝搬定数  $\gamma$  を用いて次のように表される複素波数である。

$$\begin{aligned} k_p &= -j\gamma \\ \Rightarrow \gamma &= k_i + jk_r \quad (k_i > 0, k_r > 0) \end{aligned} \quad (2.54)$$

この  $k_i$  は吸音材の減衰定数、 $k_r$  は位相定数であり、吸音材中の実効音速を  $c_p$  とすると  $k_r = \omega/c_p$  なる関係がある。

外部領域  $\Omega_0$  の定式化と同様に、粒子速度境界  $S_{1,ve}$  およびインピーダンス境界  $S_{1,im}$  における境界条件を考えたとき、時間項に  $e^{j\omega t}$  を採用すると、 $\partial p(\mathbf{r}_{S_1})/\partial n_{S_1}$  には以下の関係がある。

$$\frac{\partial p(\mathbf{r}_{S_1})}{\partial n_{S_1}} = \begin{cases} -\rho \frac{\partial u(\mathbf{r}_{S_1})}{\partial t} = -jk_p Z_p u(\mathbf{r}_{S_1}) & (\mathbf{r}_{S_1} \in S_{1,ve}) \\ -jk_p \beta_p(\mathbf{r}_{S_1}) p(\mathbf{r}_{S_1}) & (\mathbf{r}_{S_1} \in S_{1,im}) \end{cases} \quad (2.55)$$

ここに、 $Z_p$  は媒質の特性インピーダンス、 $\beta_p(\mathbf{r}_{S_1})$  は点  $\mathbf{r}_{S_1}$  における媒質の特性インピーダンスで基準化した  $\mathbf{n}_{S_1}$  方向に対するノーマル比音響アドミッタンス比である。また、 $u(\mathbf{r}_{S_1})$  は点  $\mathbf{r}_{S_1}$  における  $\mathbf{n}_{S_1}$  方向の粒子速度である。なお、ここでも、インピーダンス境界  $S_{1,im}$  上の任意の点  $\mathbf{r}_{S_1}$  では局所作用が仮定できるとする。また、(2.52) 式の被積分関数の第1項の  $\mathbf{n}_{S_1}$  方向による微分は、

$$\frac{\partial q_p(\mathbf{r}_{S_1}, \mathbf{r})}{\partial n_{S_1}} = \frac{\partial}{\partial n_{S_1}} \left( \frac{e^{-jk_p|\mathbf{r}_{S_1}-\mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{r}_{S_1}-\mathbf{r}|} \right) = -\frac{(1+jk_p|\mathbf{r}_{S_1}-\mathbf{r}|)(\mathbf{r}_{S_1}-\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_{S_1}}{4\pi|\mathbf{r}_{S_1}-\mathbf{r}|^2 |\mathbf{r}_{S_1}-\mathbf{r}|} e^{-jk_p|\mathbf{r}_{S_1}-\mathbf{r}|}$$

で与えられることから、(2.52) 式は次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} c(\mathbf{r})p(\mathbf{r}) &= - \iint_{S_{1,ve}} \left\{ p(\mathbf{r}_{S_1}) \frac{\partial q_p(\mathbf{r}_{S_1}, \mathbf{r})}{\partial n_{S_1}} + jk_p Z_p u(\mathbf{r}_{S_1}) q_p(\mathbf{r}_{S_1}, \mathbf{r}) \right\} dS(\mathbf{r}_{S_1}) \\ &\quad - \iint_{S_{1,im}} \left\{ p(\mathbf{r}_{S_1}) \frac{\partial q_p(\mathbf{r}_{S_1}, \mathbf{r})}{\partial n_{S_1}} + jk_p \beta_p(\mathbf{r}_{S_1}) p(\mathbf{r}_{S_1}) q_p(\mathbf{r}_{S_1}, \mathbf{r}) \right\} dS(\mathbf{r}_{S_1}) \end{aligned} \quad (2.56)$$

ここで、(2.56)式を三角形線形要素を仮定して離散化する。すなわち、内部領域  $\Omega_1$  における粒子速度境界  $S_{1,ve}$  を  $N_{1,ve}$  個の三角形の境界要素  $S_{1,j}$  ( $j = 1, 2, \dots, N_{1,ve}$ ) に、インピーダンス境界  $S_{1,im}$  を  $N_{1,im}$  個の三角形の境界要素  $S_{1,j}$  ( $j = N_{1,ve} + 1, N_{1,ve} + 2, \dots, N_{1,ve} + N_{1,im}$ ) に分割する。そして、これら全要素数を  $N_1 (= N_{1,ve} + N_{1,im})$  とおく。本定式化は外部領域  $\Omega_0$  との連成が目的であるため、 $\Omega_0$  と結合する境界となる粒子速度境界の要素分割は  $\Omega_0$  と完全に同じになるように注意する。このとき、要素  $S_{1,j}$  上の任意の点の音圧  $p(\mathbf{r}_{S_1})$  および粒子速度  $u(\mathbf{r}_{S_1})$  は、3要素節点における音圧  $p(\mathbf{r}_{j,1}^1)$ ,  $p(\mathbf{r}_{j,2}^1)$ ,  $p(\mathbf{r}_{j,3}^1)$ 、粒子速度  $u(\mathbf{r}_{j,1}^1)$ ,  $u(\mathbf{r}_{j,2}^1)$ ,  $u(\mathbf{r}_{j,3}^1)$  と内挿関数  $N_k(\eta, \xi)$  ( $k = 1, 2, 3$ ) の線形結合としてそれぞれ次のように与えられるものとする [40]。

$$p(\mathbf{r}_{S_1}) = \sum_{k=1}^3 N_k(\eta, \xi) p(\mathbf{r}_{j,k}^1) \quad (\mathbf{r}_{S_1} \in S_{1,j}) \quad (2.57)$$

$$u(\mathbf{r}_{S_1}) = \sum_{k=1}^3 N_k(\eta, \xi) u(\mathbf{r}_{j,k}^1) \quad (\mathbf{r}_{S_1} \in S_{1,j}) \quad (2.58)$$

ここに、

$$N_1 = \eta, \quad N_2 = \xi, \quad N_3 = 1 - \eta - \xi \quad \text{for } [0 \leq \eta \leq 1], [0 \leq \xi \leq 1 - \eta]$$

である。この (2.57), (2.58) 式を (2.56) 式に代入し、積分項を次のように離散化する。

$$\begin{aligned} c(\mathbf{r})p(\mathbf{r}) = & - \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{k=1}^3 p(\mathbf{r}_{j,k}^1) \iint_{S_{1,j}} N_k \frac{\partial q_p(\mathbf{r}_{S_1}, \mathbf{r})}{\partial n_{S_1}} dS(\mathbf{r}_{S_1}) \\ & - jk_p Z_p \sum_{j=1}^{N_{1,ve}} \sum_{k=1}^3 u(\mathbf{r}_{j,k}^1) \iint_{S_{1,j}} N_k q_p(\mathbf{r}_{S_1}, \mathbf{r}) dS(\mathbf{r}_{S_1}) \\ & - jk_p \sum_{j=N_{1,ve}+1}^{N_1} \sum_{k=1}^3 \beta_p(\mathbf{r}_{1,j}) p(\mathbf{r}_{j,k}^1) \iint_{S_{1,j}} N_k q_p(\mathbf{r}_{S_1}, \mathbf{r}) dS(\mathbf{r}_{S_1}) \end{aligned} \quad (2.59)$$

ただし、位置ベクトル  $\mathbf{r}_{1,j}$  は内部領域  $\Omega_1$  内の境界表面における境界要素  $S_{1,j}$  上の任意の点を表し、 $\mathbf{r}_{j,k}^1$  は同じく外部領域  $\Omega_1$  内の境界要素  $S_{1,j}$  における内挿関数番号  $k$  の頂点位置を表す。

ここで、外部領域  $\Omega_0$  と同様に粒子速度境界における要素節点から番号付けする。全要素節点数を  $M_1$  個、粒子速度境界に関する要素節点数を  $M_{1,ve}$  個、インピーダンス境界に関する要素節点数を  $M_{1,im}$  とする。また、内部領域  $\Omega_1$  においても (2.59) 式で求めるべき未知数は閉曲面  $S_1$  上の音圧と粒子速度であるから、受音点  $\mathbf{r}$  をいま番号付けした各要素節点  $\mathbf{r}_{1,i}$  ( $i = 1, 2, \dots, M_1$ ) に置き換え、各要素節点での音圧  $p(\mathbf{r}_{1,i})$  および粒子速度  $u(\mathbf{r}_{1,i})$  に関する連立一次方程式にする。(2.59) 式で  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{1,i}$  とすると、

$$\begin{aligned} c(\mathbf{r}_{1,i})p(\mathbf{r}_{1,i}) = & - \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{k=1}^3 p(\mathbf{r}_{j,k}^1) \iint_{S_{1,j}} N_k \frac{\partial q_p(\mathbf{r}_{S_1}, \mathbf{r}_{1,i})}{\partial n_{S_1}} dS(\mathbf{r}_{S_1}) \\ & - jk_p Z_p \sum_{j=1}^{N_{1,ve}} \sum_{k=1}^3 u(\mathbf{r}_{j,k}^1) \iint_{S_{1,j}} N_k q_p(\mathbf{r}_{S_1}, \mathbf{r}_{1,i}) dS(\mathbf{r}_{S_1}) \\ & - jk_p \sum_{j=N_{1,ve}+1}^{N_1} \sum_{k=1}^3 \beta_p(\mathbf{r}_{1,j}) p(\mathbf{r}_{j,k}^1) \iint_{S_{1,j}} N_k q_p(\mathbf{r}_{S_1}, \mathbf{r}_{1,i}) dS(\mathbf{r}_{S_1}) \end{aligned} \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, M_1 \quad (2.60)$$

となる。ここで、(2.60)式の積分項を

$$g_{S_{1,j},k}(\mathbf{r}_{1,i}) = jk_p \iint_{S_{1,j}} N_k q_p(\mathbf{r}_{S_1}, \mathbf{r}_{1,i}) dS(\mathbf{r}_{S_1}) = jk_p \iint_{S_{1,j}} N_k \frac{e^{-jk_p|\mathbf{r}_{S_1}-\mathbf{r}_{1,i}|}}{4\pi|\mathbf{r}_{S_1}-\mathbf{r}_{1,i}|} dS(\mathbf{r}_{S_1}) \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} h_{S_{1,j},k}(\mathbf{r}_{1,i}) &= \iint_{S_{1,j}} N_k \frac{\partial q_p(\mathbf{r}_{S_1}, \mathbf{r}_{1,i})}{\partial n_{S_1}} dS(\mathbf{r}_{S_1}) \\ &= - \iint_{S_{1,j}} N_k \frac{(1 + jk_p|\mathbf{r}_{S_1}-\mathbf{r}_{1,i}|)}{4\pi|\mathbf{r}_{S_1}-\mathbf{r}_{1,i}|^2} \frac{(\mathbf{r}_{S_1}-\mathbf{r}_{1,i}) \cdot \mathbf{n}_{S_1}}{|\mathbf{r}_{S_1}-\mathbf{r}_{1,i}|} e^{-jk_p|\mathbf{r}_{S_1}-\mathbf{r}_{1,i}|} dS(\mathbf{r}_{S_1}) \end{aligned} \quad (2.62)$$

(2.61), (2.62)式のようにおくと、(2.60)式は次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} c(\mathbf{r}_{1,i})p(\mathbf{r}_{1,i}) &= - \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{k=1}^3 h_{S_{1,j},k}(\mathbf{r}_{1,i})p(\mathbf{r}_{j,k}^1) \\ &\quad - Z_p \sum_{j=1}^{N_{1,ve}} \sum_{k=1}^3 g_{S_{1,j},k}(\mathbf{r}_{1,i})u(\mathbf{r}_{j,k}^1) - \sum_{j=N_{1,ve}+1}^{N_1} \sum_{k=1}^3 \beta(\mathbf{r}_{1,j})g_{S_{1,j},k}(\mathbf{r}_{1,i})p(\mathbf{r}_{j,k}^1) \\ &\quad \text{for } i = 1, 2, \dots, M_1 \end{aligned} \quad (2.63)$$

ここでも、外部領域 $\Omega_0$ とまったく同様な手続きによって、同じ位置にある要素節点を表す表記に $\mathbf{r}_{1,i}$  ( $i = 1, 2, \dots, M_1$ ) と $\mathbf{r}_{j,k}^1$  ( $j = 1, 2, \dots, N_1$  and  $k = 1, 2, 3$ ) の2種類が混在してしまっている不都合を解消する。この操作によって定義しなおされた要素節点 $\mathbf{r}_{1,m}$ を用いてまとめると(2.63)式は、

$$\begin{aligned} c(\mathbf{r}_{1,i})p(\mathbf{r}_{1,i}) &= - \sum_{m=1}^{M_1} H_m^1(\mathbf{r}_{1,i})p(\mathbf{r}_{1,m}) - \sum_{m=1}^{M_{1,ve}} G_{ve,m}^1(\mathbf{r}_{1,i})u(\mathbf{r}_{1,m}) \\ &\quad - \sum_{m=M_1-M_{1,im}+1}^{M_1} G_{im,m}^1(\mathbf{r}_{1,i})p(\mathbf{r}_{1,m}), \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, M_1 \end{aligned} \quad (2.64)$$

となる。この(2.64)式を音圧と粒子速度に関する項それぞれについてまとめ、マトリックス表示すると次のようになる。

$$[\mathbf{H}_1]\{\mathbf{p}_1\} = -[\mathbf{G}_1]\{\mathbf{u}_1\} \quad (2.65)$$

ただし、

$$\{\mathbf{p}_1\}^T = \{p(\mathbf{r}_{1,1}), p(\mathbf{r}_{1,2}), \dots, p(\mathbf{r}_{1,M_1})\} \quad (2.66)$$

$$\{\mathbf{u}_1\}^T = \{u(\mathbf{r}_{1,1}), u(\mathbf{r}_{1,2}), \dots, u(\mathbf{r}_{1,M_{1,ve}})\} \quad (2.67)$$

$$[\mathbf{G}_1] = \begin{bmatrix} G_{ve,1}^1(\mathbf{r}_{1,1}) & \cdots & G_{ve,M_1-M_{1,im}+1}^1(\mathbf{r}_{1,1}) & \cdots & G_{ve,M_{1,ve}}^1(\mathbf{r}_{1,1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{ve,1}^1(\mathbf{r}_{M_1-M_{1,im}+1}) & \cdots & G_{ve,M_1-M_{1,im}+1}^1(\mathbf{r}_{M_1-M_{1,im}+1}) & \cdots & G_{ve,M_{1,ve}}^1(\mathbf{r}_{M_1-M_{1,im}+1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{ve,1}^1(\mathbf{r}_{1,M_1}) & \cdots & G_{ve,M_1-M_{1,im}+1}^1(\mathbf{r}_{1,M_1}) & \cdots & G_{ve,M_{1,ve}}^1(\mathbf{r}_{1,M_1}) \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{H}_1] = & \begin{bmatrix} c(\mathbf{r}_{1,1}) + H_1^1(\mathbf{r}_{1,1}) \cdots \\ \vdots \ddots \\ H_1^1(\mathbf{r}_{M_1-M_1,im+1}) \cdots \\ \vdots \ddots \\ H_1^1(\mathbf{r}_{M_1,ve}) \cdots \\ \vdots \ddots \\ H_1^1(\mathbf{r}_{M_1}) \cdots \end{bmatrix} \\
& \begin{aligned} & H_{M_1-M_1,im+1}^1(\mathbf{r}_{1,1}) + G_{im,M_1-M_1,im+1}^1(\mathbf{r}_{1,1}) \\ & \vdots \\ & c(\mathbf{r}_{M_1-M_1,im+1}) + H_{M_1-M_1,im+1}^1(\mathbf{r}_{M_1-M_1,im+1}) + G_{im,M_1-M_1,im+1}^1(\mathbf{r}_{M_1-M_1,im+1}) \\ & \vdots \\ & H_{M_1-M_1,im+1}^1(\mathbf{r}_{M_1,ve}) + G_{im,M_1-M_1,im+1}^1(\mathbf{r}_{M_1,ve}) \\ & \vdots \\ & H_{M_1-M_1,im+1}^1(\mathbf{r}_{M_1}) + G_{im,M_1-M_1,im+1}^1(\mathbf{r}_{M_1}) \end{aligned} \\
& \begin{aligned} \cdots & H_{M_1,ve}^1(\mathbf{r}_{1,1}) + G_{im,M_1,ve}^1(\mathbf{r}_{1,1}) \\ \ddots & \vdots \\ \cdots & H_{M_1,ve}^1(\mathbf{r}_{M_1-M_1,im+1}) + G_{im,M_1,ve}^1(\mathbf{r}_{M_1-M_1,im+1}) \\ \ddots & \vdots \\ \cdots & c(\mathbf{r}_{M_1,ve}) + H_{M_1,ve}^1(\mathbf{r}_{M_1,ve}) + G_{im,M_1,ve}^1(\mathbf{r}_{M_1,ve}) \\ \ddots & \vdots \\ \cdots & H_{M_1,ve}^1(\mathbf{r}_{M_1}) + G_{im,M_1,ve}^1(\mathbf{r}_{M_1}) \end{aligned} \\
& \begin{aligned} \cdots & H_{M_1}^1(\mathbf{r}_{1,1}) + G_{im,M_1}^1(\mathbf{r}_{1,1}) \\ \ddots & \vdots \\ \cdots & H_{M_1}^1(\mathbf{r}_{M_1-M_1,im+1}) + G_{im,M_1}^1(\mathbf{r}_{M_1-M_1,im+1}) \\ \ddots & \vdots \\ \cdots & H_{M_1}^1(\mathbf{r}_{M_1,ve}) + G_{im,M_1}^1(\mathbf{r}_{M_1,ve}) \\ \ddots & \vdots \\ \cdots & c(\mathbf{r}_{M_1}) - H_{M_1}^1(\mathbf{r}_{M_1}) + G_{im,M_1}^1(\mathbf{r}_{M_1}) \end{aligned} \Big] \tag{2.69}
\end{aligned}$$

外部領域  $\Omega_0$  と内部領域  $\Omega_1$  の結合

外部領域  $\Omega_0$  と内部領域  $\Omega_1$  で定式化した連立一次方程式 (2.46), (2.65) 式を解くことによって、境界表面上の全ての要素節点における音圧と粒子速度境界上の要素節点における粒子速度を求めたいのだが、(2.46), (2.65) 式のままでは粒子速度境界上の粒子速度が未知数であるため解くことができない。そこで、 $\Omega_0$ ,  $\Omega_1$  を結合し、その粒子速度および境界表面上の音圧を求めることを考える。

本節で扱っている音場は、外部領域  $\Omega_0$  と内部領域  $\Omega_1$  が粒子速度境界を介した結合場として考えることができる。しかしこのようにして取り扱うためには、粒子速度境界における境界要素、要素節点数およびその座標が等しくなければならない。したがって、以降これらの関係が成り立つものとする。すなわち、

$$\begin{aligned} \text{粒子速度境界} & : S_{ve} \equiv S_{0,ve} = S_{1,ve} \\ \text{粒子速度境界における要素数} & : N_{ve} \equiv N_{0,ve} = N_{1,ve} \\ \text{粒子速度境界における要素節点数} & : M_{ve} \equiv M_{0,ve} = M_{1,ve} \end{aligned}$$

また、粒子速度境界において二つの場が結合しているとするならば、その境界上で次の連続条件が満たされていなければならない。

$$\begin{aligned} \text{音圧が連続} & \implies p(\mathbf{r}_{S_0}) = p(\mathbf{r}_{S_1}) \\ \text{法線方向の粒子速度が連続} & \implies u(\mathbf{r}_{S_0}) = -u(\mathbf{r}_{S_1}) \\ & \text{for } \mathbf{r}_{S_0} \in S_{0,ve} \text{ and } \mathbf{r}_{S_1} \in S_{1,ve} \end{aligned} \quad (2.70)$$

上記の関係が成立するものとして、外部領域  $\Omega_0$  および内部領域  $\Omega_1$  に関する連立一次方程式 (2.46), (2.65) 式の要素節点上の音圧ベクトル  $\{\mathbf{p}_0\}$ ,  $\{\mathbf{p}_1\}$  と係数行列  $[\mathbf{H}_0]$ ,  $[\mathbf{H}_1]$  を次のように粒子速度境界に関する成分 ( $m = 1, 2, \dots, M_{ve}$ ) とその残りに関する成分 ( $m = M_{ve+1}, M_{ve+2}, \dots, M_0$  or  $M_1$ ) に分ける。

$$\begin{aligned} \{\mathbf{p}_0\} &= \left\{ \mathbf{p}_{0,ve}^T, \mathbf{p}_{0,M_0-M_{ve}}^T \right\}^T \\ \{\mathbf{p}_1\} &= \left\{ \mathbf{p}_{1,ve}^T, \mathbf{p}_{1,M_1-M_{ve}}^T \right\}^T \\ [\mathbf{H}_0] &= \left[ \mathbf{H}_{0,ve}, \mathbf{H}_{0,M_0-M_{ve}} \right] \\ [\mathbf{H}_1] &= \left[ \mathbf{H}_{1,ve}, \mathbf{H}_{1,M_1-M_{ve}} \right] \end{aligned} \quad (2.71)$$

この (2.71) 式の関係を用いると (2.46), (2.65) 式は次のように変形できる。

$$[\mathbf{H}_{0,ve}]\{\mathbf{p}_{0,ve}\} + [\mathbf{H}_{0,M_0-M_{ve}}]\{\mathbf{p}_{0,M_1-M_{ve}}\} + [\mathbf{G}_0]\{\mathbf{u}_0\} = \{\mathbf{q}_d\} \quad (2.72)$$

$$[\mathbf{H}_{1,ve}]\{\mathbf{p}_{1,ve}\} + [\mathbf{H}_{1,M_1-M_{ve}}]\{\mathbf{p}_{1,M_1-M_{ve}}\} + [\mathbf{G}_1]\{\mathbf{u}_1\} = \{\mathbf{0}\} \quad (2.73)$$

ここで、連続条件 (2.70) から (2.73) 式は次のように書き換えられる。

$$[\mathbf{H}_{1,ve}]\{\mathbf{p}_{0,ve}\} + [\mathbf{H}_{1,M_1-M_{ve}}]\{\mathbf{p}_{1,M_1-M_{ve}}\} - [\mathbf{G}_1]\{\mathbf{u}_0\} = \{\mathbf{0}\} \quad (2.74)$$



したがって、(2.72), (2.74)式をまとめると、

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{H}_{0,ve}] & [\mathbf{H}_{0,M_0-M_{ve}}] & [\mathbf{G}_0] & [0] \\ [\mathbf{H}_{1,ve}] & [0] & -[\mathbf{G}_1] & [\mathbf{H}_{1,M_1-M_{ve}}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\mathbf{p}_{0,ve}\} \\ \{\mathbf{p}_{0,M_1-M_{ve}}\} \\ \{\mathbf{u}_0\} \\ \{\mathbf{p}_{1,M_1-M_{ve}}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\mathbf{q}_d\} \\ \{0\} \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

この  $M_0 + M_1$  元連立一次方程式 (2.75) 式を解くことによって、全ての要素節点上の音圧および粒子速度を求めることができる。また、この要素節点上の音圧  $p(\mathbf{r}_m)$  と粒子速度  $u(\mathbf{r}_m)$  を次の (2.76) または (2.77) 式に代入すれば、外部領域  $\Omega_0$  または内部領域  $\Omega_1$  内の任意の点  $\mathbf{r}$  における音圧  $p(\mathbf{r})$  を求めることができる。

$$\begin{aligned} c(\mathbf{r})p(\mathbf{r}) = & q(\mathbf{p}, \mathbf{r}) - \sum_{m=1}^{M_0} H_m^0(\mathbf{r})p(\mathbf{r}_{0,m}) - \sum_{m=1}^{M_{0,ve}} G_{ve,m}^0(\mathbf{r})u(\mathbf{r}_{0,m}) \\ & - \sum_{m=M_0-M_{0,im}+1}^{M_0} G_{im,m}^0(\mathbf{r})p(\mathbf{r}_{0,m}), \quad \text{for } \mathbf{r} \in \Omega_0 \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} c(\mathbf{r})p(\mathbf{r}) = & - \sum_{m=1}^{M_1} H_m^1(\mathbf{r})p(\mathbf{r}_{1,m}) - \sum_{m=1}^{M_{1,ve}} G_{ve,m}^1(\mathbf{r})u(\mathbf{r}_{1,m}) \\ & - \sum_{m=M_1-M_{1,im}+1}^{M_1} G_{im,m}^1(\mathbf{r})p(\mathbf{r}_{1,m}), \quad \text{for } \mathbf{r} \in \Omega_1 \end{aligned} \quad (2.77)$$

### 線形要素を仮定した場合の粒子速度に関する注意

本節における外部領域  $\Omega_0$  および内部領域  $\Omega_1$  の定式化では、議論が繁雑になることを避けるため、粒子速度境界  $S_{0,ve}$ ,  $S_{1,ve}$  における境界要素への分割に関して条件をつけなかったが、ここでは注意すべき事項について述べる。

音圧  $p$  と速度ポテンシャル  $\varphi$  は次のような比例関係にある。

$$p = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = j\omega \rho \varphi \quad (2.78)$$

ただし、時間項に  $e^{j\omega t}$  を採用した。この (2.78) 式から分かるように、本節の定式化のように音圧を求める手続きは、速度ポテンシャルを求めることに他ならない。

粒子速度は、数学的には速度ポテンシャルの方向微分によって初めて決定されるものである。したがって、境界表面の要素節点における粒子速度を求める場合、その点での速度ポテンシャルすなわち音圧の方向微分係数が一意に定まっている状況に限り求めることができるということが分かる。具体的な状況としては、境界要素として線形要素を仮定した場合には、対象となる要素節点を共通とする境界要素が全て同一平面上にあり、その法線方向が等しい場合である。これは、一定要素のように境界要素上の任意の一点を要素節点として仮定する場合には、その要素節点は要素の重心などで代表されることが多いため、要素節点における音圧の法線方向は各々の境界要素において必ず決まっており、このような注意を意識する必要はない。もし、境界が曲面であり、

その要素節点を共通とする境界要素が同一平面上にない場合は、粒子速度の方向を決定する各境界要素の法線方向が同じ方向ではないことになり、粒子速度を決定することができなくなってしまふ。ゆえに、境界が曲面である場合、線形要素を仮定すると音圧や速度ポテンシャルを求めることはできても、境界表面上の粒子速度を(2.75)式を解いたときに同時に求めることはできない。必要な場合は、境界表面上の点における任意の方向の粒子速度を求めるための連立一次方程式を別途立式し、求めねばならない。

### 2.3 境界要素法による粒子速度の解析

2.2節では、境界表面も含めた音場内の任意の点における音圧を求めるための定式化を行った。音場内の音圧分布やある受音点における周波数応答を求めるには音圧が分かれば十分であるが、音場内の音響インテンシティを観察するような場合には音圧だけでは不十分で、粒子速度も求める必要がある。本論文においても音響インテンシティの観察を行うため、本節において境界表面を除いた音場内の任意の点の任意の方向における粒子速度を求めるための定式化を行う。

ある3次元音場に点音源  $\mathbf{p}$  と境界  $S$  が存在するときの受音点  $\mathbf{r}$  における音圧  $p(\mathbf{r})$  は、(2.16)~(2.18) 式より Helmholtz-Huygens 積分方程式として表される。

$$c(\mathbf{r})p(\mathbf{r}) = q(\mathbf{p}, \mathbf{r}) - \iint_S \left\{ p(\mathbf{r}_S) \frac{\partial q(\mathbf{r}_S, \mathbf{r})}{\partial n_S} - q(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}) \frac{\partial p(\mathbf{r}_S)}{\partial n_S} \right\} dS(\mathbf{r}_S) \quad (2.79)$$

ここで、 $\mathbf{r}_S$  は閉曲面  $S$  上の任意の点、 $p(\mathbf{r}_S)$  はその点  $\mathbf{r}_S$  における音圧、 $dS(\mathbf{r}_S)$  は点  $\mathbf{r}_S$  での微小面積である。このとき、受音点  $\mathbf{r}$  における粒子速度  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  は、

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{j\omega\rho} \text{grad } p(\mathbf{r}) \\ &= -\frac{1}{j\omega\rho} \left\{ \frac{\partial p(\mathbf{r})}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p(\mathbf{r})}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p(\mathbf{r})}{\partial z} \mathbf{k} \right\} \end{aligned} \quad (2.80)$$

で与えられる。すなわち、(2.79) 式の  $x, y, z$  方向に対する微分が分かれば、(2.80) 式よりそれぞれの方向の粒子速度が求められることになる。ここで、(2.80) 式の  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  はそれぞれ  $x, y, z$  方向の単位ベクトルで、 $\rho$  はその音場内の空気の密度である。

よって、以下任意の方向  $\mathbf{n}_r$  に対する Helmholtz-Huygens 積分方程式 (2.79) の方向微分形を導出する。ただし、ベクトル  $\mathbf{n}_r$  は単位ベクトルとする。(2.79) 式を  $\mathbf{n}_r$  方向に微分すると、

$$c(\mathbf{r}) \frac{\partial p(\mathbf{r})}{\partial n_r} = \frac{\partial q(\mathbf{p}, \mathbf{r})}{\partial n_r} - \iint_S \left\{ p(\mathbf{r}_S) \frac{\partial^2 q(\mathbf{r}_S, \mathbf{r})}{\partial n_S \partial n_r} - \frac{\partial q(\mathbf{r}_S, \mathbf{r})}{\partial n_r} \frac{\partial p(\mathbf{r}_S)}{\partial n_S} \right\} dS(\mathbf{r}_S) \quad (2.81)$$

となる [41]。

この (2.81) 式の各微分項を考える。まず、直接音項の  $\mathbf{n}_r$  方向微分は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial q(\mathbf{p}, \mathbf{r})}{\partial n_r} &= \frac{\partial}{\partial n_r} \left( \frac{e^{-jk|\mathbf{p}-\mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{p}-\mathbf{r}|} \right) \\ &= -\frac{(1+jk|\mathbf{p}-\mathbf{r}|)e^{-jk|\mathbf{p}-\mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{p}-\mathbf{r}|^2} \cdot \cos(\mathbf{n}_r, \mathbf{p}-\mathbf{r}) \\ &= -\frac{(1+jk|\mathbf{p}-\mathbf{r}|)}{4\pi|\mathbf{p}-\mathbf{r}|^2} \frac{(\mathbf{p}-\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_r}{|\mathbf{p}-\mathbf{r}|} e^{-jk|\mathbf{p}-\mathbf{r}|} \end{aligned} \quad (2.82)$$

次に、被積分関数のうちの第1項目の  $\mathbf{n}_r$  方向微分は、 $r \equiv |\mathbf{r}_S - \mathbf{r}|$  とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 q(\mathbf{r}_S, \mathbf{r})}{\partial n_S \partial n_r} &= \frac{\partial^2}{\partial n_S \partial n_r} \left( \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \right) \\ &= -\frac{e^{-jkr}}{4\pi r^3} \left[ \left\{ 3(1+jkr) + (jkr)^2 \right\} \cos(\mathbf{r}_S - \mathbf{r}, \mathbf{n}_S) \cos(\mathbf{r}_S - \mathbf{r}, \mathbf{n}_r) - (1+jkr) \cos(\mathbf{n}_S, \mathbf{n}_r) \right] \\ &= -\frac{e^{-jkr}}{4\pi r^3} \left[ \left\{ 3(1+jkr) - (kr)^2 \right\} \frac{(\mathbf{r}_S - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_S}{r} \frac{(\mathbf{r}_S - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_r}{r} - (1+jkr) \mathbf{n}_S \cdot \mathbf{n}_r \right] \end{aligned} \quad (2.83)$$

となる [41]。次に、被積分関数のうちの第2項目の  $\mathbf{n}_r$  方向微分は、

$$\frac{\partial}{\partial n_r} \left( \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \right) = -\frac{(1+jkr)(\mathbf{r}_S - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_r}{4\pi r^2 r} e^{-jkr} \quad (2.84)$$

また、(2.81) 式における  $\partial p(\mathbf{r}_S)/\partial n_S$  は、次のように境界上の音圧または粒子速度から求めることができる。

$$\frac{\partial p(\mathbf{r}_S)}{\partial n_S} = \begin{cases} -\rho \frac{\partial u(\mathbf{r}_S)}{\partial t} = -jk\rho c u(\mathbf{r}_S) & (\mathbf{r}_S \in \text{particle velocity boundary}) \\ -jk\beta(\mathbf{r}_S)p(\mathbf{r}_S) & (\mathbf{r}_S \in \text{impedance boundary}) \end{cases} \quad (2.85)$$

ただし、インピーダンス境界では局所作用が仮定できるとし、 $Z_0$  を空気の特徴インピーダンス ( $= \rho c$ ) としたときの  $\beta(\mathbf{r}_S)$  は  $Z_0$  で基準化された境界表面におけるノーマル比音響アドミッタンス比、 $u(\mathbf{r}_S)$  は境界表面上の外向き法線方向の粒子速度である。(2.82)~(2.85) 式より (2.81) 式における未知数は、全境界面  $S$  上の音圧と粒子速度境界が存在する場合の粒子速度のみであることが分かる。ところが、これらの未知数は 2.2.1 節の (2.32) 式、または 2.2.2 節の (2.75) 式を解くことによって得られるため、新たに境界表面上の値を求める必要はない。

以上より、(2.81) 式を 2.2.1 節または 2.2.2 節と同様に離散化した後、 $\mathbf{n}_r$  方向の微分を  $x, y, z$  方向に適用し (2.80) 式の関係を用いることによって、任意の受音点における粒子速度ベクトルを求めることができる。なお、本節における粒子速度に対する定式化は単一領域でかつ全境界面に局所作用を仮定できる場合について行ったが、複数領域を連成する領域結合型境界要素法においても同様の手続きにより粒子速度を求めることができる。

## 2.4 境界要素解析の妥当性に関する検討

本節では、2.2節、2.3節にわたって定式化してきた3次元音場に対する境界要素法の妥当性について検討を行う。

この検証に用いる音場は、全面剛であるような矩形室内とする。定式化は開空間音場において行ってきたが、先に触れたようにまったく同様に閉空間音場に対しても境界要素法を定式化することができる。この矩形室内音場において検証を行う理由として、まずその厳密解が古くから示されており、数学的に確立していることが挙げられる。また、境界要素法における離散化において球のような曲面を含む場合、本論文では線形要素を仮定するため形状誤差が必ず生じるが、矩形ではその形状誤差が生じないことも挙げられる。

以上より、まず厳密解に関する簡単な説明の後、音圧レベル分布と音響インテンシティについて比較検証する。検証に用いる矩形室内音場は、Fig.2.9に示すように、 $x, y, z$  方向の各寸法が  $L_x = 1.7\text{m}$ ,  $L_y = 1.9\text{m}$ ,  $L_z = 1.3\text{m}$  であり、室の中央に存在する点音源が純音を放射しているものとする。また、受信点は Fig.2.9に示すように、高さ  $L_z = 0.867\text{m}$  で  $0.25 \leq x \leq 1.675\text{m}$ ,  $0.25 \leq y \leq 1.875\text{m}$  の平面上に  $0.05\text{m}$  間隔で配置する。

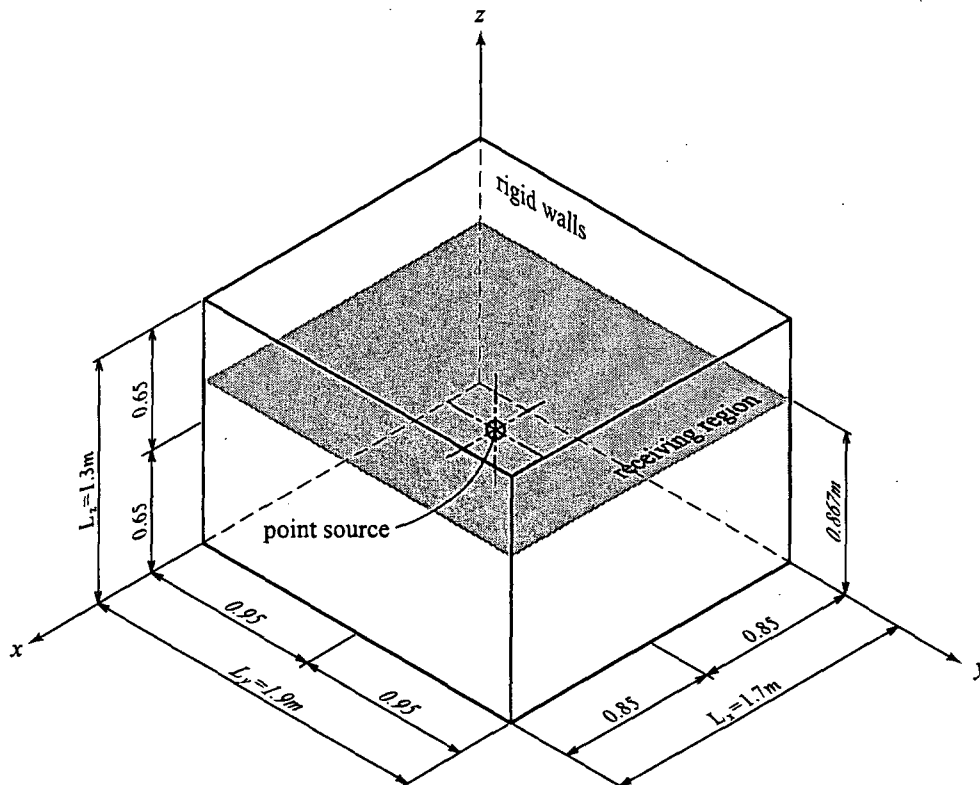


Fig. 2.9: The rectangular room as the analysis model

## 2.4.1 矩形室内音場における音圧と粒子速度の厳密解

Fig.2.9 で示すような矩形室内音場における音圧  $p$  は、強さ 1 の点音源の位置を  $S; (x_0, y_0, z_0)$ 、受音点を  $P; (x, y, z)$  とすると、厳密解として次のように固有モード関数による級数展開の形で表される [42-44]。

$$p(P) = -\frac{c^2}{V} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\Psi_N(P)\Psi_N(S)}{(\omega^2 - \xi_N^2)\Lambda_N} \quad (2.86)$$

ただし、 $c$  は音速、 $\omega$  は点音源が放射する純音の角周波数である。また、 $V$  は室容積で、室の  $x, y, z$  方向の各寸法を  $L_x, L_y, L_z$  とすると  $V = L_x L_y L_z$  となる。

ここで、(2.86) 式における  $\Psi_N$  は室の固有モード関数で、受音点  $P$  および点音源  $S$  に対するそれは次式で与えられる。

$$\Psi_N(P) = \cos\left(\frac{n_x \pi}{L_x} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{L_y} y\right) \cos\left(\frac{n_z \pi}{L_z} z\right) \quad (2.87)$$

$$\Psi_N(S) = \cos\left(\frac{n_x \pi}{L_x} x_0\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{L_y} y_0\right) \cos\left(\frac{n_z \pi}{L_z} z_0\right) \quad (2.88)$$

ただし、 $n_x, n_y, n_z$  は固有値で、 $n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \dots$  であり、互いに独立に値をとる。また、 $N$  は固有値  $n_x, n_y, n_z$  のすべての組み合わせを表し、したがって (2.86) 式の  $\sum$  は固有値全ての組み合わせに関する総和である。次に (2.86) 式の  $\xi_N$  は固有角周波数で次式で与えられる。

$$\xi_N^2 = (\pi c)^2 \left\{ \left(\frac{n_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{L_z}\right)^2 \right\} \quad (2.89)$$

また、(2.86) 式の  $\Lambda_N$  は正規化因子で次式で与えられる。

$$\Lambda_N = \frac{1}{\epsilon_{n_x} \epsilon_{n_y} \epsilon_{n_z}} \quad (2.90)$$

$$\epsilon_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 2 & n > 0 \end{cases}$$

この正規化因子 (2.90) は、直交関数系である固有モード関数を正規直交関数系にするものである。

一方、音場内の任意の点における  $n$  方向の粒子速度  $u_n$  は、その点の音圧  $p$  を用いて、

$$u_n = -\frac{1}{j\omega\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \quad (2.91)$$

と表される。ここに、 $\rho$  は媒質の密度である。したがって、 $x$  方向の粒子速度は、

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{j}{\omega\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ &= -j \frac{c^2}{\omega\rho V} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\Psi_N(P)\Psi_N(S)}{(\omega^2 - \xi_N^2)\Lambda_N} \right\} \\ &= -j \frac{c^2}{\omega\rho V} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \Psi_N(P) \right] \frac{\Psi_N(S)}{(\omega^2 - \xi_N^2)\Lambda_N} \\ &= j \frac{c^2}{\omega\rho V} \frac{\pi}{L_x} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{n_x \Psi_N(S)}{(\omega^2 - \xi_N^2)\Lambda_N} \sin\left(\frac{n_x \pi}{L_x} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{L_y} y\right) \cos\left(\frac{n_z \pi}{L_z} z\right) \end{aligned} \quad (2.92)$$

同様に  $y$  方向および  $z$  方向の粒子速度は,

$$u_y = j \frac{c^2}{\omega \rho V} \frac{\pi}{L_y} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{n_y \Psi_N(S)}{(\omega^2 - \xi_N^2) \Lambda_N} \cos\left(\frac{n_x \pi}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{L_y} y\right) \cos\left(\frac{n_z \pi}{L_z} z\right) \quad (2.93)$$

$$u_z = j \frac{c^2}{\omega \rho V} \frac{\pi}{L_z} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{n_z \Psi_N(S)}{(\omega^2 - \xi_N^2) \Lambda_N} \cos\left(\frac{n_x \pi}{L_x} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{L_y} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{L_z} z\right) \quad (2.94)$$

で与えられる。

## 2.4.2 音圧の厳密解と境界要素解析解の比較

矩形室内音場の任意の点における音圧を厳密解と境界要素解析によってそれぞれ求め比較する。両者の比較は Fig.2.9 に示す受音領域における値の分布によって行う。なお、計算周波数は 200Hz で、厳密解における総和は  $x, y, z$  成分それぞれを第 100 項までとり、合計で 1,000,000 項まで計算する。また、境界要素法における境界要素は三角形線形要素を用い、その各辺の長さは、 $x$  方向では  $L_x$  を 18 分割、 $y$  方向では  $L_y$  を 20 分割、 $z$  方向では  $L_z$  を 14 分割し、それぞれ 0.1m 以下とする。この長さは 200Hz の波長の 1/18 以下である。

まず、Fig.2.10 に厳密解によって得られた音圧のレベル分布を、Fig.2.11 に境界要素法によって得られた音圧のレベル分布を示す。このレベル表示は、音源の強さを 1 としたときに各受音点  $P$  で得られる音圧  $p(P)$  の対数表示で、 $10 \log(p^2(P))[\text{dB}]$  である。また、より詳細に両者の差を観察するために、 $y = 0.975\text{m}$  における厳密解と境界要素法それぞれによって得られた音圧のレベル表示を Fig.2.12 に示す。

Fig.2.10 と Fig.2.11 からこれら両者を比較すると、目視によってはほぼ同じ分布を示しているといつてよく、厳密解および境界要素法による数値解析解はよく整合しているように見える。しかし、Fig.2.12 から分かるように、音圧のディップ付近では両者の値が比較的不一致を見せ、その差は最大で 1.7dB である。この音圧のディップ付近では、厳密解の収束が非常に難しくなる傾向にあることが境界要素解析解との不一致の原因であると考えられ、このことから境界要素法の不備であるとは言い難い。この収束の難しいと思われる音圧のディップ以外の場所における両者の差は最大で 0.7dB 程度であり、厳密解および境界要素解析解の整合性を見ることが出来る。したがって、この音圧のレベル分布の比較から、境界要素法による音場解析の妥当性が確認できたといえる。

## 2.4.3 音響インテンシティの厳密解と境界要素解析解の比較

ある正弦波音場内の任意の点  $\mathbf{r}$  における音圧  $p(\mathbf{r}, t)$  と粒子速度  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  が次のように与えられているものとする。

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r}, t) &= p(\mathbf{r})e^{j\omega t} \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{u}(\mathbf{r})e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (2.95)$$

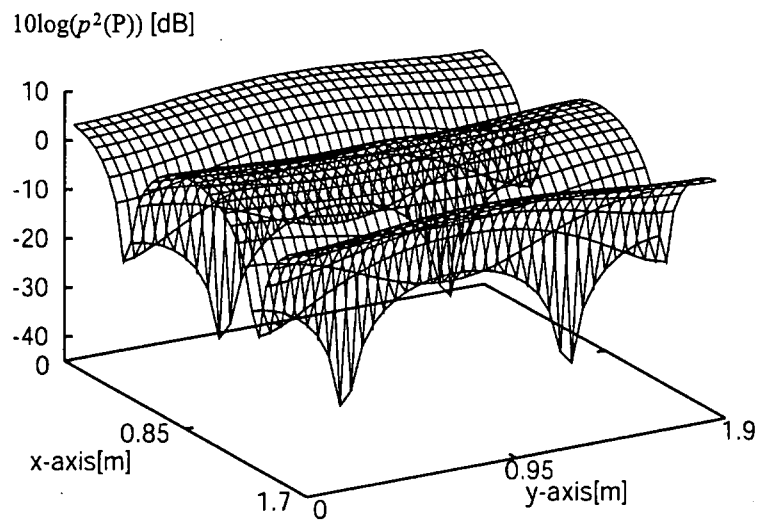


Fig. 2.10: The distribution of sound pressure level ( $10\log(p^2(P))$  [dB]) at 200Hz which is calculated by exact solution in the room

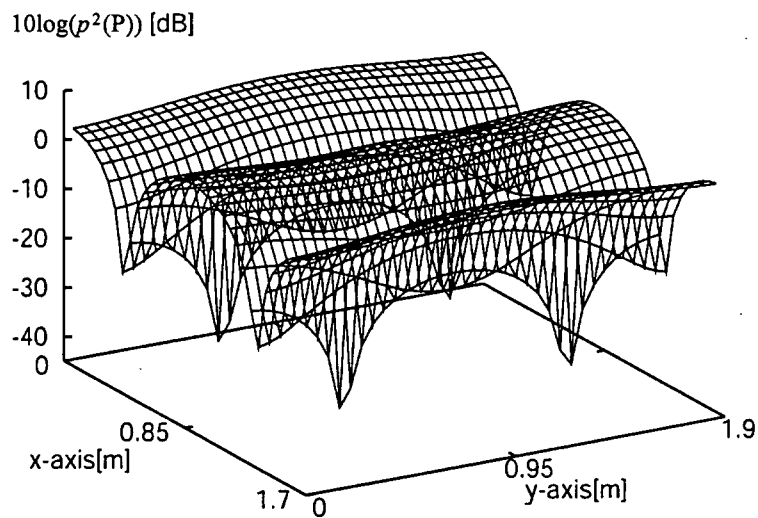


Fig. 2.11: the distribution of sound pressure level ( $10\log(p^2(P))$  [dB]) at 200Hz which is calculated by boundary element method in the room



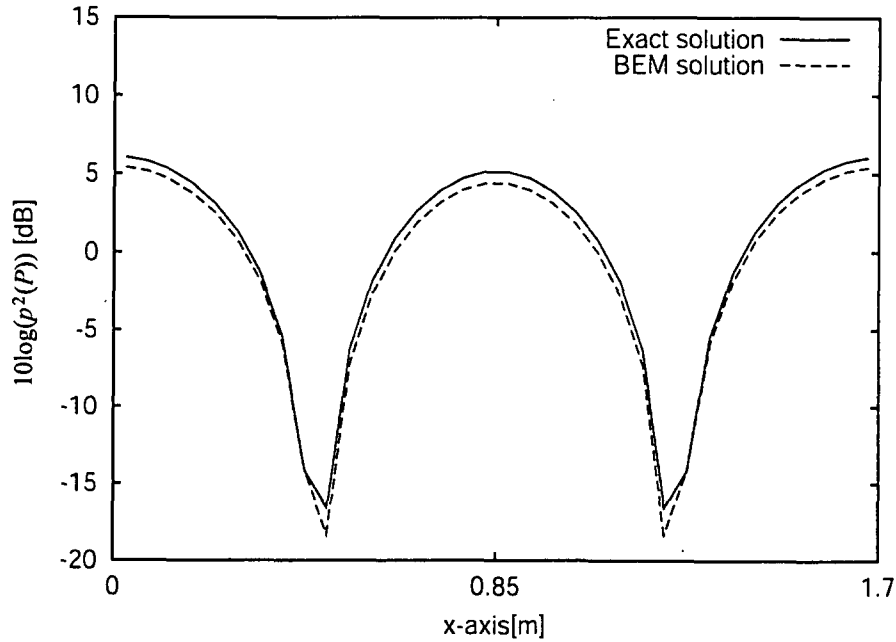


Fig. 2.12: Comparison of exact solution and BEM solution at  $y = 0.975\text{m}$ , 200Hz

このとき、全瞬時音響インテンシティの複素振幅である複素音響インテンシティ  $C$  は、

$$C = I + jJ \quad (2.96)$$

$$I = \frac{1}{2} \text{Re}[p(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r})^*] \quad (2.97)$$

$$J = \frac{1}{2} \text{Im}[p(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r})^*] \quad (2.98)$$

と表される [45]。ここで、 $I$  はアクティブインテンシティと呼ばれ、瞬時インテンシティの長時間にわたる時間平均値で、単位面積を単位時間に通過するその点  $\mathbf{r}$  における正味の音響エネルギーを表す。これは、音圧の位相の空間的傾きに比例するので、等位相面である波面に直交する。一方、 $J$  はリアクティブインテンシティと呼ばれ、瞬時インテンシティの虚部の振幅であり、その部分を行ったり来たりして留まっている音響エネルギーを表す。これは、平均2乗音圧の空間的傾きの逆方向に比例するため、音圧レベルの等値面に直交する。

さて、2.4.1 節から明らかなように、全面剛である矩形室内における音圧 (2.86) は全ての点において実数である。すなわち、粒子速度 (2.92)~(2.94) が純虚数となるため、(2.97) 式より複素音響インテンシティも純虚数となり、アクティブインテンシティは値を持たずリアクティブインテンシティのみとなる。これは、音響エネルギーを吸収する場所がまったくない音場においては、エネルギーが流れないという直感的なイメージに一致する。

したがって、ここで取り扱っている音場においてはリアクティブインテンシティの比較を行う。厳密解および境界要素法ともに音圧と粒子速度の両方を求めることができるので、得られた値を (2.98) 式に代入し、リアクティブインテンシティを求める。これによって、粒子速度まで含めた境界要素解析の妥当性を検証することができる。Fig.2.13 に、Fig.2.9 で示される受信領域での厳

密解によって得られたリアクティブインテンシティ分布を、Fig.2.14に境界要素法によって得られたそれを示す。また、両者の差をより明確にするために、厳密解の絶対値に対する厳密解と境界要素解析解の差の比をFig.2.15に示す。ただし、ここでのリアクティブインテンシティのベクトル表示では、ベクトルの長さを対数圧縮せず真数にて描画している。なお、Fig.2.13, Fig.2.14には厳密解および境界要素法によって得られる音圧レベル分布を重ね合わせてプロットしている。

目視によってFig.2.13とFig.2.14と比較すると、音源近傍となる中央付近で若干の差が認められるものの、全体としてはよく一致しているように見ることができる。より詳細に、Fig.2.15によって厳密解と境界要素解析解の比較を観察すると、上述の点音源を中心とした同心円状に $y$ 方向成分の差があることが分かる。音圧のレベル分布において示したFig.2.10~Fig.2.12より音源付近および $x = 0.85\text{m}$ 付近は音圧のピークとなることから、粒子速度分布においてはディップとなることが分かる。したがって、音圧でもそうであったようにディップ付近では厳密解の収束が悪くなるため、両者の示す値が整合しなくなると考えられる。したがって、ここでもこの現象は境界要素解析の不備であるとは言い難い。これらを除いた受音点においては、概ね良好な一致を示しており、平均で厳密解と境界要素解析解の相対的な誤差は1%未満である。また、両者とも音圧レベルの等値面にリアクティブインテンシティ・ベクトルが直交しており、正しくこの音場を表現していると考えられる。

なお、前述したがリアクティブインテンシティは平均2乗音圧の空間的傾きの逆方向に比例することから、ベクトルが集中する場所は音圧レベルが非常に小さい値となる谷を示すことが考えられる。この傾向がFig.2.13, Fig.2.14とも顕著に現れている。これとは逆に、ベクトルが発散し湧き出しを形成しているところに音源があると考えられるが、本音場で設定した点音源が存在する室中央において両図からはそれが認められない。これは、室内壁面が剛で音響エネルギーを吸収するところがまったくないことから、音場内において音響エネルギーが飽和し、点音源から音響エネルギーを供給できない状態になっていると考えられる。

#### 2.4.4 境界要素法における点音源の音響放射パワーについて

前節まで全面剛であるような矩形室内音場を考えてきたが、もしそこにある点音源が周辺の音場や境界条件に全く左右されずに音を放射し続けるとするならば、その音場は発散してしまうはずである。境界要素法の基礎となるHelmholtz-Huygens積分方程式(2.13), (2.15)を見ると、点音源からの音放射を表す直接音項は自由空間でのGreen関数で与えられるため、定常駆動し対象となる音場や境界条件にかかわらず音を放射し続けるものと解釈されてしまうことがあるが、前節までの矩形室内音場の解析からも分かるとおおり、その音場は発散しない。すなわち、Helmholtz-Huygens積分方程式における直接音項で与えられる点音源の音響放射パワーは一定にはならず、音場や境界条件の影響を受けて変化することが予想される。ここでは、境界要素法における点音源の音響放射パワーについて観察し、その音響放射パワーが点音源周辺の音場や境界条件からの影響とのバランスによって決定されることを示す[46]。

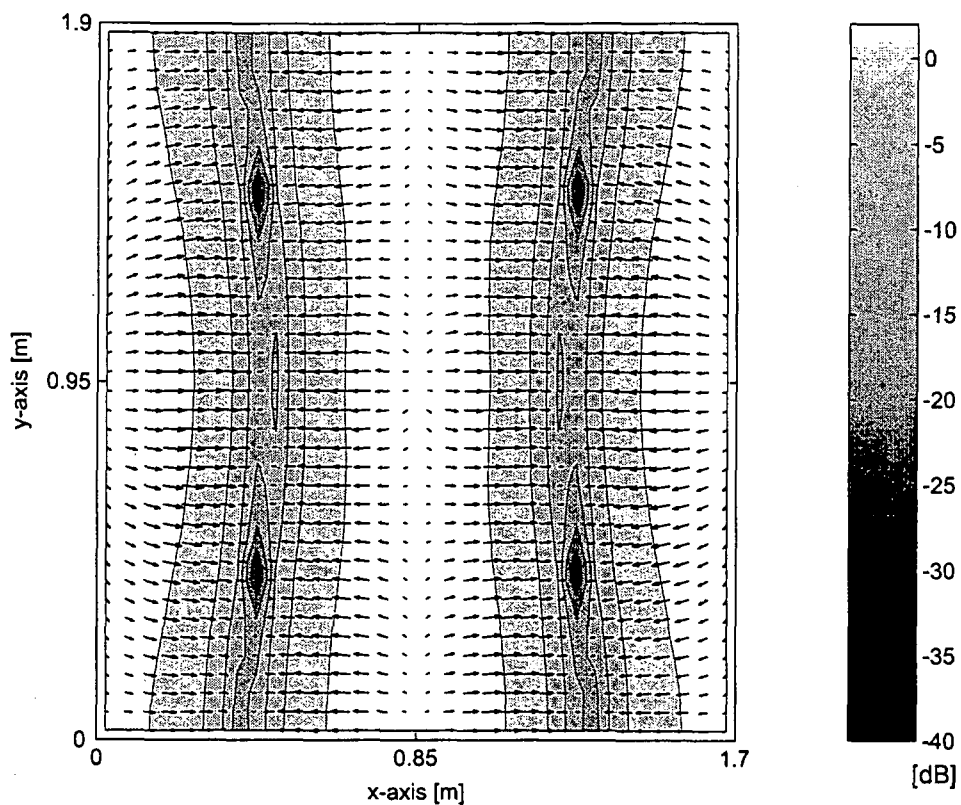


Fig. 2.13: The distribution of reactive intensity at 200Hz which is calculated by exact solution in the room

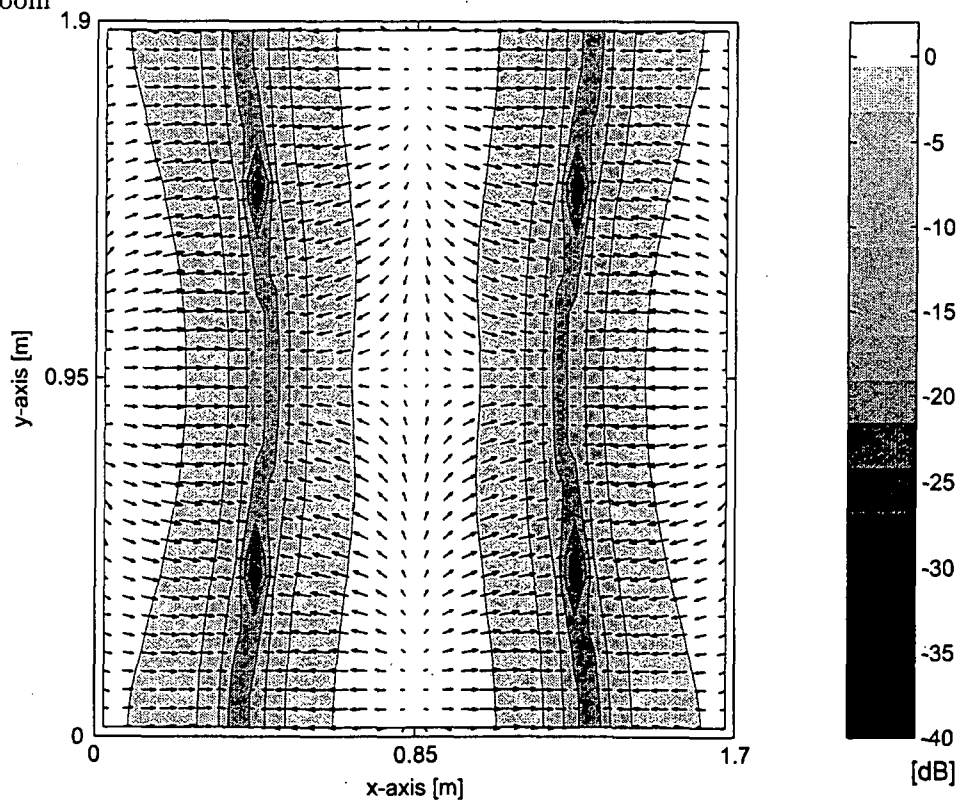


Fig. 2.14: The distribution of reactive intensity at 200Hz which is calculated by boundary element method in the room

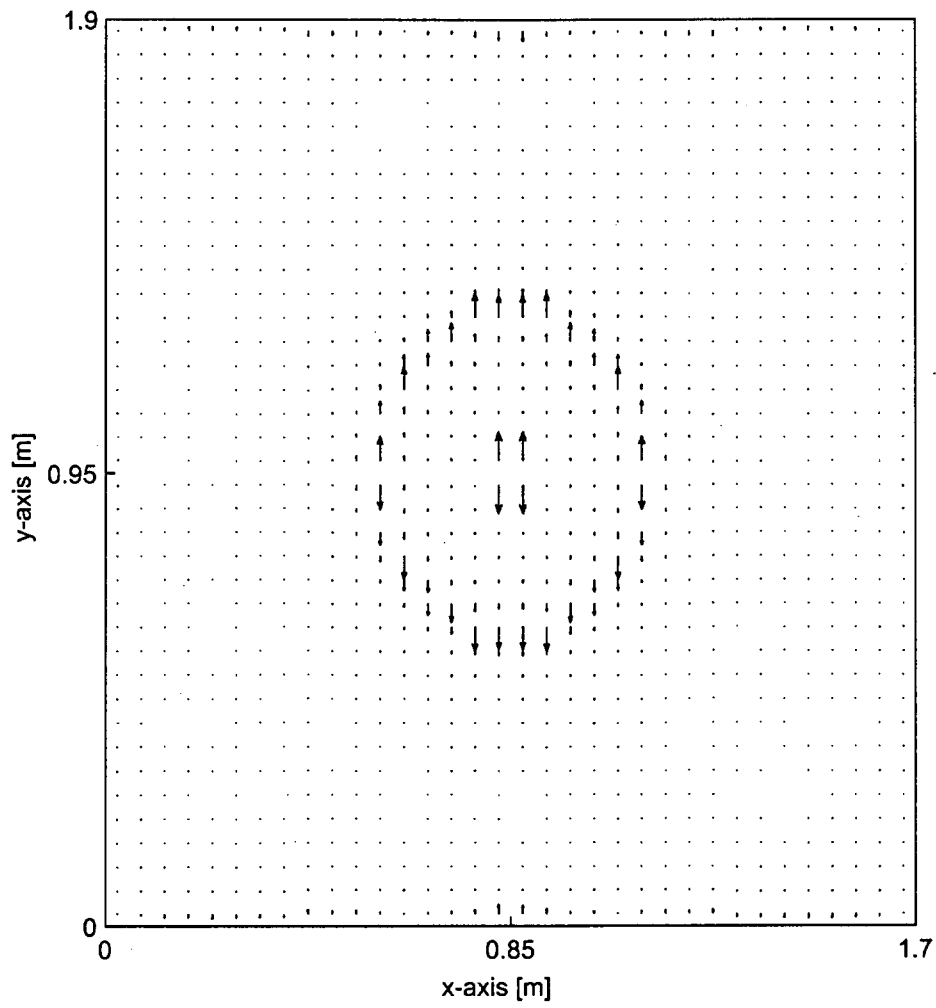


Fig. 2.15: Differences between exact solution and boundary element analysis solution

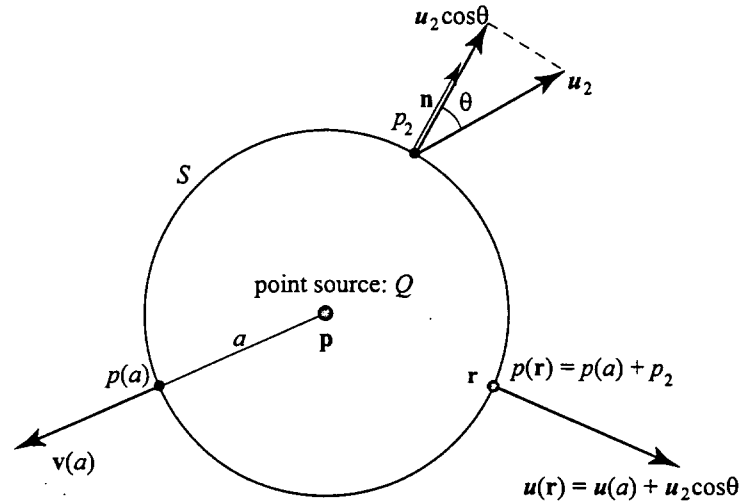


Fig. 2.16: Definitions of symbols

$p(a)$  is sound pressure and  $u(a)$  is particle velocity, both are value on the surface  $S$  caused by velocity potential  $\Phi_1$ .  $p_2$  is sound pressure and  $u_2$  is particle velocity, both are value in the  $S$  caused by velocity potential  $\Phi_2$ . Therefore, on the point  $p$  on the  $S$ , sound pressure  $p$  is  $p(a) + p_2$  and particle velocity  $u$  is  $u(a) + u_2 \cos \theta$ .

#### 音響放射パワーの算出方法について

ある音場内の点  $p$  に点音源  $Q$  があるとすると、 $Q$  を含む音場の速度ポテンシャル  $\Phi_0$  は、 $Q$  のみによる速度ポテンシャル  $\Phi_1$  と  $Q$  以外の音源や散乱体からの反射音による  $\Phi_2$  の和によって与えられる。

いま Fig.2.16 のように、点音源  $Q$  を中心とする微小半径  $a$  の球面  $S$  を考える。 $S$  の内部には、 $Q$  以外の音源や散乱体が存在しないものとする。このとき、 $Q$  以外の音源や散乱体と  $Q$  との距離が半径  $a$  に対して十分長く、かつ波長よりも  $a$  が十分に小さいならば、 $\Phi_2$  は  $S$  において一様であるとみなすことができる。そこで、 $\Phi_2$  による  $S$  内の音圧を  $p_2$ 、粒子速度を  $u_2$  とおき、それぞれ定数とする。

一方、球面  $S$  上の  $\Phi_1$  による音圧と  $S$  に対する法線方向の粒子速度は、点音源  $Q$  のみによるため一定の値をとり、それぞれ  $p(a)$ 、 $u(a)$  とおく。

以上のように速度ポテンシャル  $\Phi_1$ 、 $\Phi_2$  による音圧と粒子速度を定義すると、球面  $S$  上の点  $r$  における音圧  $p(r)$  は  $p(r) = p(a) + p_2$ 、 $S$  に対する法線方向の粒子速度  $u(r)$  は  $u(a) + u_2 \cos \theta$  で与えられる。このとき、法線方向の音響インテンシティ  $I(r)$  は、 $I(r) = \text{Re}[p(r) \cdot u^*(r)]/2$  であるから、点音源  $Q$  の音響放射パワー  $W$  は、

$$\begin{aligned}
 W &= \int_S I(r) dS \\
 &= \frac{1}{2} \int_S \text{Re}[\{p(a) + p_2\} u(a)^*] dS + \frac{1}{2} \int_S \text{Re}[\{p(a) + p_2\} u_2^* \cos \theta] dS \\
 &= \frac{1}{2} \text{Re}[\{p(a) + p_2\} u(a)^*] \int_S dS + \frac{1}{2} \text{Re}[\{p(a) + p_2\} u_2^*] \int_S \cos \theta dS \quad (2.99)
 \end{aligned}$$

となる。(2.99)式における第2項の積分は零であり、第1項の積分は球面 $S$ の表面積に等しいことから、

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \{p(a) + p_2\} u(a)^* \right] \cdot 4\pi a^2 \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ p(a) u(a)^* \right] \cdot 4\pi a^2 + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ p_2 (4\pi a^2 u(a))^* \right] \end{aligned} \quad (2.100)$$

と書ける。(2.100)式の第1項は点音源 $Q$ が自由空間中に単独で存在するときの音響放射パワー $W_1$ であり、第2項は他の音源や散乱体からの反射によって生じる音圧 $p_2$ がもたらす音響放射パワー $W_2$ である。また、 $4\pi a^2 u(a)$ は $Q$ からの湧き出しの体積速度に相当する。

いま、点音源 $Q$ からの湧き出しの体積速度が $U \exp(j\omega t)$ であるとすると、この速度ポテンシャル $\Phi_1$ は時間項 $\exp(j\omega t)$ を省略して次式で与えられる。

$$\Phi_1 = U \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \quad (2.101)$$

ここで、 $r$ は点音源 $Q$ から観測点までの距離、 $k$ は波数、 $j$ は虚数単位である。この(2.101)式を用いると、 $Q$ によって生じる音圧 $p(a)$ と粒子速度 $u(a)$ は、それぞれ

$$\begin{aligned} p(a) &= \rho \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = j\omega \rho U \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \\ u(a) &= -\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = U \frac{1 + jkr}{4\pi r^2} e^{-jkr} \end{aligned}$$

となるから、音響放射パワーは、

$$W = W_1 + W_2 = \frac{k^2 \rho c |U|^2}{8\pi} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ p_2 U^* \right] \quad (2.102)$$

で与えられる。

以上のように、点音源の音響放射パワーは、音源位置における音源自身以外による音圧 $p_2$ を求めることができれば計算することができる。本手法を境界要素法に適用する場合は、まず境界表面上の音圧を連立一次方程式を解くことによって求めた後に、音源の位置において音源を除く境界からの寄与のみで音圧を求めればよい。

#### 数値計算例

一端を閉じ反対側は開いている状態とした、断面が正方形の音響管内に点音源が一つ存在する音場を境界要素法によって解析した例を示す。解析モデルとしてはFig.2.17のように、音響管内の5面をすべて剛壁とし1面だけ完全吸音面とした。音源は閉じている端から250Hz、または500Hzの1/4波長となる位置で、中心軸からわずかにずらして設定した。

自由空間に単独で存在する場合の放射パワーを基準とした管内における点音源の相対放射音響パワーレベルをFig.2.18, Fig.2.19に示す。Fig.2.18, Fig.2.19における点音源は、それぞれ250Hz, 500Hzの1/4波長のところに位置する。

これらから、音場の影響を受けて放射パワーレベルが周波数によって変化していることがわかる。特に対象周波数(250Hz, 500Hz)付近では、音源近傍の音圧が開端からの反射音との干渉に

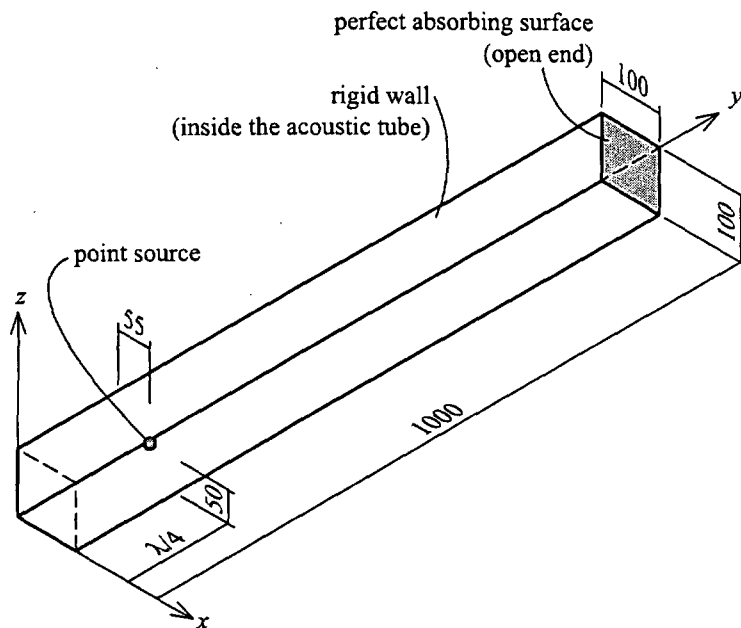


Fig. 2.17: The acoustic tube as for numerical calculation

よって小さくなるため、放射インピーダンスが減少し放射パワーレベルが小さくなる様子が顕著に現れている。

もし、点音源が音場や境界条件に影響されずに音を放射し続けるとすると、Fig.2.18やFig.2.19のように音響放射パワーが周波数によって変化することはない。ゆえに、境界要素法における点音源はいわゆる定常駆動ではなく、その音場によって音響放射パワーが変化するということができる。これは、非常に重要な性質であると言え、狭小な閉空間音場の解析をする場合などは音源の音響放射パワーが変化している可能性があり、注意を要する。

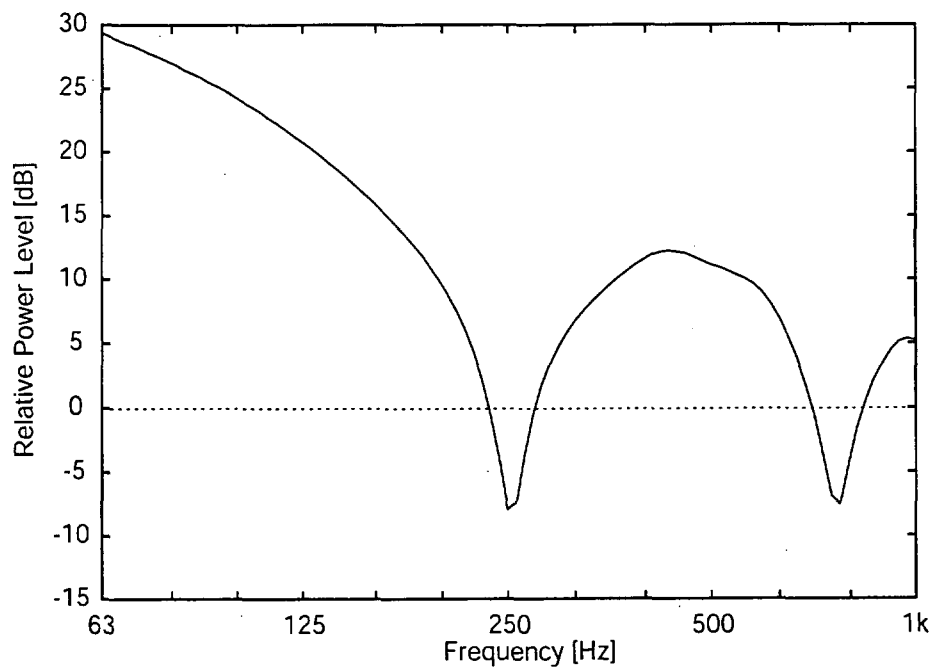


Fig. 2.18: Relative radiation power level; when the point source is at 1/4 wavelength in 250Hz.

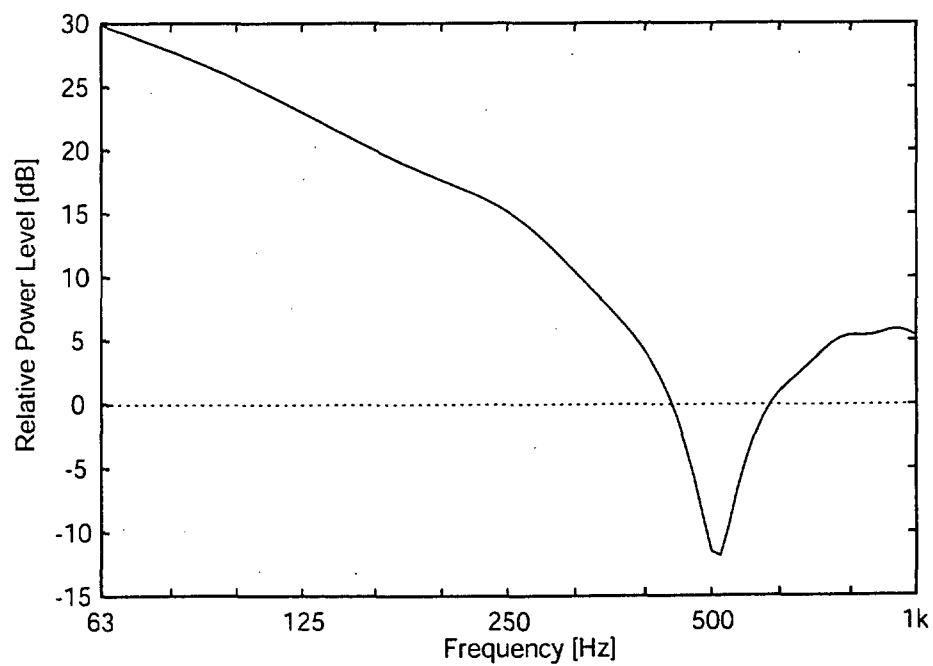


Fig. 2.19: Relative radiation power level; when the point source is at 1/4 wavelength in 500Hz.