

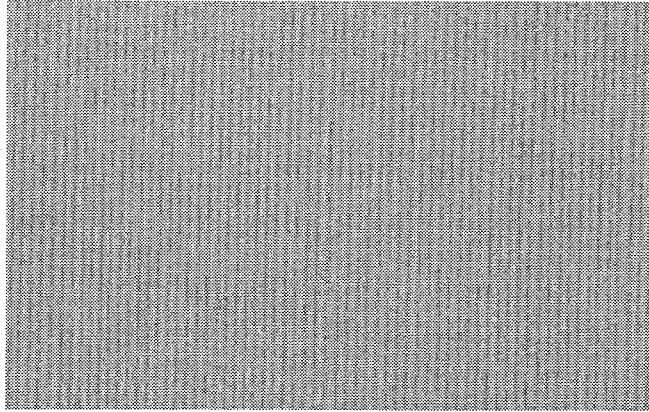
ミキシング コンソール ガ スタジオ ノ オンキョウ
トクセイ ニ アタエル エイキョウ

中原, 雅考

<https://doi.org/10.15017/458907>

出版情報 : Kyushu University, 2004, 博士 (芸術工学) , 課程博士
バージョン :
権利関係 :

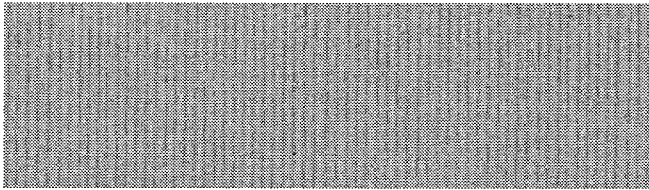




付 録 A: 境界積分の計算

Appendix A : Calculation of a boundary integral

付録として、境界要素法における速度ポテンシャル導出の際に必要な係数 $f_{Sn}(\mathbf{r})$ の算出方法に関して解説を行う。



A

A-1. 数値解析における連立方程式の係数

Coefficient of simultaneous equations on the numerical analysis

本研究では、式(3.38)及び式(3.49)に示した多次元連立方程式を解くことにより、数値計算解を得ている。これらの連立方程式を解くためには、その係数行列に含まれる $f_{S_n}(\mathbf{r})$ 及び $g_{S_n}(\mathbf{r})$ の計算が必要である。これらの係数の算出のためには、分割要素(S_n)上における積分計算が必要となり、それには多少複雑な手順が必要とされる。ここでは、これらの係数のうち $f_{S_n}(\mathbf{r})$ を例に取り(式(A.1))、その計算手法を解説する [19]。尚、 $g_{S_n}(\mathbf{r})$ の算出に関しても基本的な導出過程はここで解説を行う $f_{S_n}(\mathbf{r})$ と同じである。

■ Helmholtz-Huygens 積分の基本形(BF; Basic Form)の離散化表現

⇒速度ポテンシャル $\varphi(\mathbf{r})$ の算出式

$$e(\mathbf{r}) \cdot \varphi(\mathbf{r}) = \varphi_d(\mathbf{r}) - \sum_{n=1}^N \{f_{S_n}(\mathbf{r}) \cdot \varphi(\mathbf{r}_n)\} \quad (3.38)$$

where,

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) & ; \text{velocity potential at the receiver [m}^2/\text{s]} \\ e(\mathbf{r}) & = \begin{cases} 1 & ; \text{receiver } \mathbf{r} \text{ is in the field} \\ 1/2 & ; \text{receiver } \mathbf{r} \text{ is on the smooth boundary} \\ 0 & ; \text{receiver } \mathbf{r} \text{ is out of the field} \end{cases} \\ \varphi_d(\mathbf{r}) & = \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{p}-\mathbf{r}|) \\ & \Rightarrow \text{velocity potential of the source } \mathbf{p} \text{ [m}^2/\text{s]} \\ f_{S_n}(\mathbf{r}) & = \frac{k}{4} \int_{S_n} \{j \cos(\mathbf{n}_s, \mathbf{q}-\mathbf{r}) \cdot H_1^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) + \beta(\mathbf{r}_n) \cdot H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|)\} dS(\mathbf{q}) \\ & \Rightarrow \text{contribution from the surface of the scatter's boundary } S \\ \varphi(\mathbf{r}_n) & ; \text{velocity potential on the } n \text{th element of the scatter's boundary [m}^2/\text{s]} \\ \beta(\mathbf{r}_n) & = \rho c \beta_0(\mathbf{r}_n) ; \text{normalized admittance on the } n \text{th element [kg/Pa} \cdot \text{s}^2] \\ \mathbf{r} & ; \text{receiver position} \\ \mathbf{r}_n & ; \text{middle position of the } n \text{th element of the scatter's boundary} \end{aligned} \right\}$$

A

式(3.38)に含まれる係数 $f_{S_n}(\mathbf{r})$

$$f_{S_n}(\mathbf{r}) = \frac{k}{4} \int_{S_n} \{j \cos(\mathbf{n}_s, \mathbf{q}-\mathbf{r}) \cdot H_1^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) + \beta(\mathbf{r}_n) \cdot H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|)\} dS(\mathbf{q}) \quad (\text{A.1})$$

■ Helmholtz-Huygens 積分の法線方向微分形 (NDF; Normal Detective Form) の離散化表現

⇒速度ポテンシャルの法線方向微分値 $\frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial n_r}$ の算出式

$$e(\mathbf{r}) \cdot \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial n_r} = v_d(\mathbf{r}) - \sum_{n=1}^N g_{S_n}(\mathbf{r}) \quad (3.49)$$

where,

$\frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial n_r}$; normal derivative of the velocity potential at the receiver \mathbf{r} [m/s]

$$e(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & ; \text{receiver } \mathbf{r} \text{ is in the field} \\ 1/2 & ; \text{receiver } \mathbf{r} \text{ is on the smooth boundary} \\ 0 & ; \text{receiver } \mathbf{r} \text{ is out of the field} \end{cases}$$

$$v_d(\mathbf{r}) = \frac{k}{4j} \cos(\mathbf{n}_r, \mathbf{p} - \mathbf{r}) H_1^{(2)}(k|\mathbf{p} - \mathbf{r}|)$$

$$g_{S_n}(\mathbf{r}) = \frac{k}{4j} \int_{S_n} \left[\frac{1}{|\mathbf{q} - \mathbf{r}|} \left\{ \cos(\mathbf{n}_r, \mathbf{n}_s) H_1^{(2)}(k|\mathbf{q} - \mathbf{r}|) \right. \right. \\ \left. \left. + \cos(\mathbf{n}_r, \mathbf{q} - \mathbf{r}) \cos(\mathbf{n}_s, \mathbf{q} - \mathbf{r}) \right. \right. \\ \left. \left. \cdot (k|\mathbf{q} - \mathbf{r}| H_0^{(2)}(k|\mathbf{q} - \mathbf{r}|) - 2H_1^{(2)}(k|\mathbf{q} - \mathbf{r}|)) \right\} \varphi(\mathbf{q}) \right. \\ \left. - \cos(\mathbf{n}_r, \mathbf{q} - \mathbf{r}) H_1^{(2)}(k|\mathbf{q} - \mathbf{r}|) \cdot jk\beta(\mathbf{r}_n) \varphi(\mathbf{r}_n) \right] dS(\mathbf{q})$$

$\varphi(\mathbf{r}_n)$; velocity potential on the n th element of the scatterer's boundary [m^2/s]

$\beta(\mathbf{r}_n) = \rho c \beta_0(\mathbf{r}_n)$; normalized admittance on the n th element [$\text{kg}/\text{Pa} \cdot \text{s}^2$]

$\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{p} - \mathbf{r}|)$; velocity potential due to the source [m^2/s]

\mathbf{r} ; receiver position

\mathbf{r}_n ; middle position of the n th element of the scatterer's boundary

A-2. 積分路に受信点が含まれない場合

Calculation when the receiver is not on the path of integration

式(3.38)を解く過程において、式(3.40)に示す連立方程式の解の算出が必要となる。受信点 r が積分路 S_n 上に含まれない場合の $f_{S_n}(r)$ の算出は、式(3.40)に含まれる係数行列の対角成分以外の要素の算出等において必要となる。

$$\begin{bmatrix} 1/2 + f_{S_1}(r_1) & \cdots & f_{S_N}(r_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{S_1}(r_N) & \cdots & 1/2 + f_{S_N}(r_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(r_1) \\ \vdots \\ \varphi(r_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_d(r_1) \\ \vdots \\ \varphi_d(r_N) \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

以下、受信点 r が積分路 S_n 上に含まれない場合の $f_{S_n}(r)$ の算出過程を記す。

ここで、数値計算のためのローカル座標を Fig. A-1 に示すようなデカルト座標で定義する。

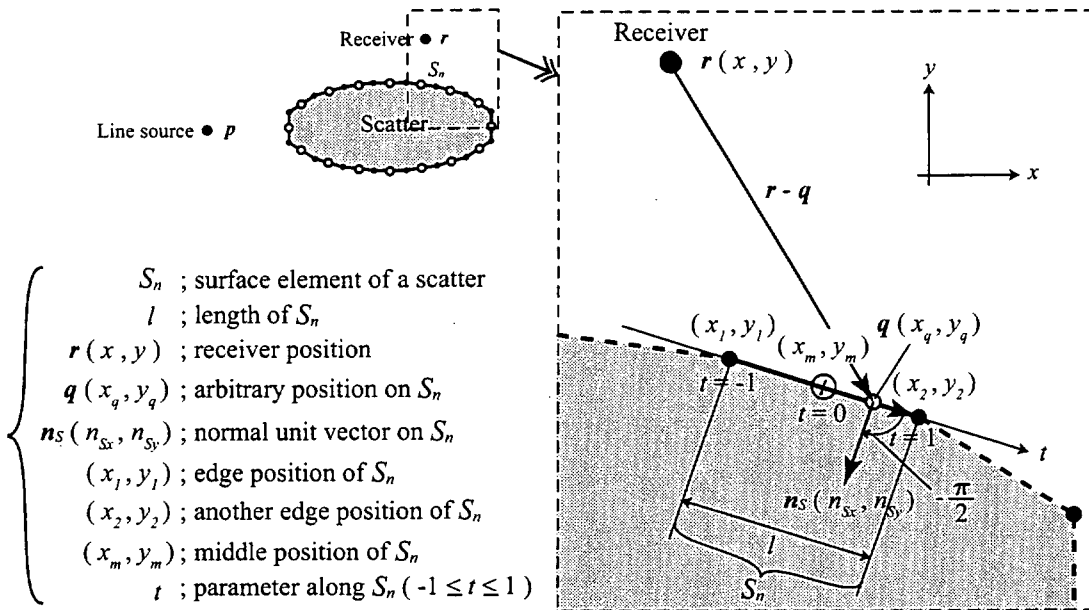


Fig. A-1 Local coordinates for calculation of $f_{S_n}(r)$. The receiver r is not on S_n .

境界要素 S_n の一端を (x_1, x_2) 、他端を (x_2, y_2) とすると、 S_n 上の任意の点 q は以下のように表すことができる。ここで、 (x_m, y_m) は要素中点を表し、 t は S_n に沿った媒介変数である。

$$\mathbf{q} \equiv (x_q, y_q) = \left(x_m + \frac{x_2 - x_1}{2} \cdot t, y_m + \frac{y_2 - y_1}{2} \cdot t \right) \quad (A.2)$$

$(-1 \leq t \leq 1)$

同様に媒介変数 t を用いると, S_n 上の積分は, 以下のように表すことができる。ここで, l は S_n の長さである。

$$\int_{S_n} dS(\mathbf{q}) = \int_{\mathbf{q}(t)=(x_1, y_1)}^{\mathbf{q}(t)=(x_2, y_2)} d\mathbf{q}(t) = \frac{l}{2} \int_{-1}^1 dt \quad (\text{A.3})$$

式(A.2)及び式(A.3)を式(A.1)に代入すると, $f_{S_n}(\mathbf{r})$ は, 媒介変数 t の積分表現に置き換えることができる(式(A.4))。

$$f_{S_n}(\mathbf{r}) = \frac{k}{4} \cdot \frac{l}{2} \int_{-1}^1 \left\{ j \cos(\mathbf{n}_S, \mathbf{q} - \mathbf{r}) \cdot H_1^{(2)}(k|\mathbf{q} - \mathbf{r}|) + \beta(\mathbf{r}_n) \cdot H_0^{(2)}(k|\mathbf{q} - \mathbf{r}|) \right\} dt \quad (\text{A.4})$$

ここで,

$$\begin{aligned} \mathbf{q} - \mathbf{r} &= (x_q - x, y_q - y) \\ &= \left(x_m + \frac{x_2 - x_1}{2} \cdot t - x, y_m + \frac{y_2 - y_1}{2} \cdot t - y \right) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$|\mathbf{q} - \mathbf{r}| = \sqrt{\left(x_m + \frac{x_2 - x_1}{2} \cdot t - x \right)^2 + \left(y_m + \frac{y_2 - y_1}{2} \cdot t - y \right)^2} \quad (\text{A.6})$$

次に, 式(A.4)の被積分項に含まれる方向余弦 $\cos(\mathbf{n}_S, \mathbf{q} - \mathbf{r})$ の算出を行う。

ここで, S_n の単位法線ベクトル \mathbf{n}_S は, (x_1, y_1) から (x_2, y_2) に向かって常に右側を向いているものとする。この時, 単位法線ベクトル \mathbf{n}_S は, ベクトル $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ を $-\pi/2$ 回転させ, 要素長 l で基準化することにより得ることができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_S &= \begin{bmatrix} n_{Sx} \\ n_{Sy} \end{bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} \cos(-\pi/2) & -\sin(-\pi/2) \\ \sin(-\pi/2) & \cos(-\pi/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (y_2 - y_1)/l \\ -(x_2 - x_1)/l \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

式(A.5)～式(A.7)より, 方向余弦 $\cos(\mathbf{n}_S, \mathbf{q} - \mathbf{r})$ は, 以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \cos(\mathbf{n}_S, \mathbf{q} - \mathbf{r}) &= \frac{\mathbf{n}_S \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{r})}{|\mathbf{n}_S| \cdot |\mathbf{q} - \mathbf{r}|} \\ &= \frac{(y_2 - y_1)(x_q - x) - (x_2 - x_1)(y_q - y)}{l \cdot \sqrt{(x_q - x)^2 + (y_q - y)^2}} \\ &= \frac{(y_2 - y_1) \left(x_m + \frac{x_2 - x_1}{2} \cdot t - x \right) - (x_2 - x_1) \left(y_m + \frac{y_2 - y_1}{2} \cdot t - y \right)}{l \cdot \sqrt{\left(x_m + \frac{x_2 - x_1}{2} \cdot t - x \right)^2 + \left(y_m + \frac{y_2 - y_1}{2} \cdot t - y \right)^2}} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

式(A.5), 式(A.6), 式(A.8)を式(A.4)に代入し, 媒介変数 t に関して区間 $[-1, 1]$ の積分を行うことにより, $f_{S_n}(\mathbf{r})$ を算出することができる。

尚, 実際の計算に際しては, 以下の点に留意する。

1. $f_{S_n}(\mathbf{r})$ の積分解は陽な形で求めることができないため, 数値計算により求める。
本論文では, Gauss-Legendre 求積法により数値解を得ている。
2. 上記のように単位法線ベクトルの向きを設定した場合には, 散乱体の要素接点を順次時計回りに設定することで, 境界の外部に解析音場が設定される。逆に, 境界内部を解析音場としたい場合には, 境界の要素接点を順次反時計回りに設定することになる。実際に計算機でプログラムを作成する場合には, この点に注意する。

A-3. 積分路に受信点が含まれない場合

Calculation when the receiver is on the path of integration

式(3.38)を解く過程において, 式(3.40)に示す連立方程式の解の算出が必要となる。受信点 \mathbf{r} が積分路 S_n 上に含まれる場合の $f_{S_n}(\mathbf{r})$ の算出は, 式(3.40)に含まれる係数行列の対角成分の算出において必要となる。この場合, 受信点 \mathbf{r} は, 要素節点 (S_n の中点) 上に位置することになる ($\mathbf{r} = \mathbf{r}_n$, Fig. A-2)。

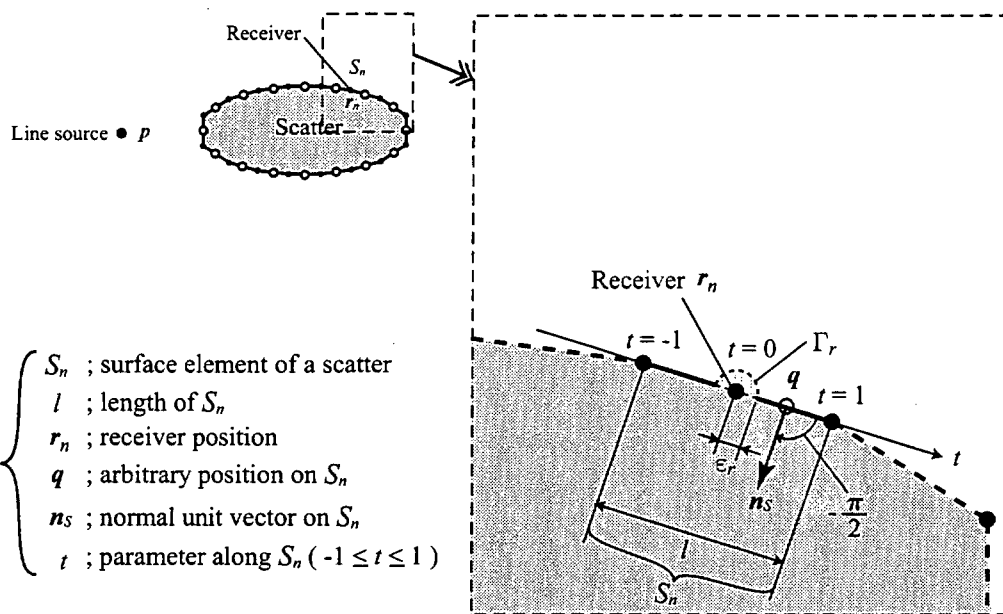


Fig. A-2 Local coordinates for calculation of $f_{S_n}(\mathbf{r})$. The receiver \mathbf{r} is on the middle of S_n , \mathbf{r}_n .

受音点 r_n が, S_n 上にあることから, 単位法線ベクトル n_s とベクトル $(q-r_n)$ は常に直交する。

$$\cos(n_s, q-r_n) = 0 \quad (\text{A.9})$$

式(A.9)を式(A.1)に代入すると, $f_{S_n}(r)$ は, 以下のように表すことができる。

$$f_{S_n}(r_n) = \frac{k}{4} \int_{S_n} \{\beta(r_n) \cdot H_0^{(2)}(k|q-r_n|\}) dS(q) \quad (\text{A.10})$$

ここで, 受音点 r_n を中心とした半径 ε_r ($\ll 1$) の小円筒 Γ , 内は, 特異点として音場から除外されている (Fig. 3-1)。従って, 式(A.10)における積分路は, 受音点 r_n の近傍 $\pm \varepsilon_r$ を除いた区間となる。また, 式(A.10)における被積分関数は, r_n を中心とした偶関数である。従って, 式(A.10)は, 媒介変数 t を用いて以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} f_{S_n}(r_n) &= \frac{k}{4} \beta(r_n) \cdot 2 \lim_{\varepsilon_r \rightarrow 0} \int_{\varepsilon_r}^{\varepsilon_r/2} H_0^{(2)}(kt) dt \\ z = kt \text{ と置換すると} &= \frac{\beta(r_n)}{2} \cdot \lim_{\varepsilon_r \rightarrow 0} \int_{k\varepsilon_r}^{k\varepsilon_r/2} H_0^{(2)}(z) dz \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

ここで, 式(A.11)に含まれる Hankel 関数の定積分 $\lim_{b \rightarrow 0} \int_b^a H_0^{(2)}(z) dz$ に関して検討する。Hankel 関数を級数展開すると, 以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} H_0^{(2)}(z) &= J_0(z) - jY_0(z) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^m}{m! \Gamma(m+1)} - j \left\{ \frac{2}{\pi} \log(z/2) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^m}{m! \Gamma(m+1)} - \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \psi(m+1) \frac{(-z^2/4)^m}{m! m!} \right\} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m}}{(m!)^2} \left[1 - j \frac{2}{\pi} \{ \log(z/2) - \psi(m+1) \} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$\text{where, } \begin{cases} \Gamma(m+1) = m! & ; \text{Gamma function} \\ \psi(m+1) = -\gamma + \sum_{n=0}^m n^{-1}, \psi(1) = -\gamma \\ \gamma = 0.5772156649... & ; \text{Euler's constant} \end{cases}$$

式(A.12)を用いると, Hankel 関数の不定積分は以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned}
 \int H_0^{(2)}(z) dz &= \int \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m}}{(m!)^2} \left[1 - j \frac{2}{\pi} \left\{ \log(z/2) - \psi(m+1) \right\} \right] dz \\
 &= 2 \int \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \cdot \frac{d}{d(z/2)} \left\{ \frac{(z/2)^{2m+1}}{2m+1} \right\} \cdot \left[1 - j \frac{2}{\pi} \left\{ \log(z/2) - \psi(m+1) \right\} \right] d(z/2) \\
 &= 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \cdot \left\{ \frac{(z/2)^{2m+1}}{2m+1} \right\} \cdot \left[1 - j \frac{2}{\pi} \left\{ \log(z/2) - \psi(m+1) \right\} \right] - 2 \int \sum_m \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \cdot \left\{ \frac{(z/2)^{2m}}{2m+1} \right\} \cdot \left[-j \frac{2}{\pi} \right] d(z/2) \\
 &= 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m+1}}{(m!)^2 (2m+1)} \left[1 - j \frac{2}{\pi} \left\{ \log(z/2) - \psi(m+1) \right\} \right] - 2 \sum_m \frac{(-1)^m}{(m!)^2 (2m+1)} \left(-j \frac{2}{\pi} \right) \frac{(z/2)^{2m+1}}{2m+1} \\
 &= 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m+1}}{(m!)^2 (2m+1)} \left[1 - j \frac{2}{\pi} \left\{ \log(z/2) - \psi(m+1) - \frac{1}{2m+1} \right\} \right] \tag{A.13}
 \end{aligned}$$

従って, Hankel 関数の定積分は, 以下となる。

$$\begin{aligned}
 f_{Sn}(r_n) &= 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (a/2)^{2m+1}}{(m!)^2 (2m+1)} \left[1 - j \frac{2}{\pi} \left\{ \log(a/2) - \psi(m+1) - \frac{1}{2m+1} \right\} \right] \\
 &\quad - \lim_{b \rightarrow 0} 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (b/2)^{2m+1}}{(m!)^2 (2m+1)} \left[1 - j \frac{2}{\pi} \left\{ \log(b/2) - \psi(m+1) - \frac{1}{2m+1} \right\} \right] \\
 &= a \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (a/2)^{2m}}{(m!)^2 (2m+1)} \left[1 - j \frac{2}{\pi} \left\{ \log(a/2) - \psi(m+1) - \frac{1}{2m+1} \right\} \right] \\
 &\quad - \lim_{b \rightarrow 0} 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2 (2m+1)} \left[(b/2)^{2m+1} \left\{ 1 + j \frac{2}{\pi} \left(\psi(m+1) + \frac{1}{2m+1} \right) \right\} - j \frac{2}{\pi} (b/2)^{2m+1} \log(b/2) \right] \\
 &= a \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (a/2)^{2m}}{(m!)^2 (2m+1)} \left[1 - j \frac{2}{\pi} \left\{ \log(a/2) - \psi(m+1) - \frac{1}{2m+1} \right\} \right] \tag{A.14} \\
 &\left(\because \text{when } m \geq 0, \quad \lim_{b \rightarrow 0} (b/2)^{2m+1} \log(b/2) = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\{\log(b/2)\}'}{\{(b/2)^{-(2m+1)}\}'} = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{(b/2)^{2m+1}}{-(2m+1)} = 0 \right)
 \end{aligned}$$

式(A.14)及び式(A.11)より, $f_{Sn}(r)$ は, 以下の式で計算することができる。

尚, 実際の計算においては, 式中の無限級数は $m = 20$ で打ち切っている [19]。

$$f_{Sn}(r_n) = \frac{\beta(r_n)kl}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (kl/2)^{2m+1}}{(m!)^2 (2m+1)} \left[1 - j \frac{2}{\pi} \left\{ \log(kl/2) - \psi(m+1) - \frac{1}{2m+1} \right\} \right] \tag{A.15}$$

$$\text{where, } \begin{cases} \psi(m+1) = -\gamma + \sum_{n=0}^m n^{-1}, \psi(1) = -\gamma \\ \gamma = 0.5772156649... ; \text{ Euler's constant} \end{cases}$$