

ミキシングコンソールがスタジオの音響特性に与える影響

中原, 雅考

<https://doi.org/10.15017/458907>

出版情報 : Kyushu University, 2004, 博士（芸術工学）, 課程博士
バージョン :
権利関係 :

第3章 数値解析

Chapter 3. Numerical analysis

3

本研究では、様々なミキシングコンソール形状に対するモニタ特性への影響を検証するために、境界要素法 (BEM ; Boundary Element Method) による数値解析を中心に検証を行っている。境界要素法による数値解析は、任意の音響境界への対応だけではなく、直接音と間接音の分離や、境界の一部のアドミッタンスの変更など、本研究で必要とされる様々な解析条件に対して有効な手段であり、実験では精度的に困難な条件における解析が可能である。

本章では、数値計算手法に関して、境界要素法の概説から始まり、前章で仮定した検証モデルへの適用までを以下の流れに沿って解説する。尚、ここでは2次元音場における境界要素法の扱いに限定して解説を行う。

- 1) 音場の境界積分表現
- 2) 音圧及び音響インテンシティの導出
- 3) 境界積分方程式の数値解析
- 4) 鏡像法の適用
- 5) 検証モデルへの適用
- 6) 解の非一意性問題の影響

3-1. 音場の境界積分表現

Expression of the sound field using the boundary integral equation

境界要素法(BEM ; Boundary Element Method)は、境界積分方程式(BIEM ; Boundary Integral Equation Method)に有限要素法(FEM ; Finite Element Method)の離散化テクニックを組み合わせた解析手法である。英国 Southampton 大学で考案されたこの解析手法は、音響境界を要素分割することで任意の点における応答を算出できる。従って、原理上任意の境界形状を持つ音場の解析に対応可能であり、現在では様々な改良テクニックとともに広く音場解析の手法として用いられている。

3

本節では、先ず 2 次元音場における「任意の観測点での速度ポテンシャル」を「音源関数」と「散乱体表面からの影響」を用いて表現するまでの仮定を導出する。すなわち、2 次元音場における境界積分方程式の導出過程を解説するものであり、境界要素法はこの積分方程式に境界要素の離散化テクニックを応用し任意の点における応答を算出する解析手法である。

2 次元音場を境界 Γ_R に囲まれた空間であると仮定する (Fig. 3-1, 紙面に対して法線方向に一様な音場)。この空間内に線音源 p と境界 S を有する散乱体が存在する場を想定し、最終的に解を導出したい観測点を r とする。Fig. 3-1 中、 n は境界 Γ_R 及び散乱体の境界 S に対する法線方向単位ベクトルを意味する。

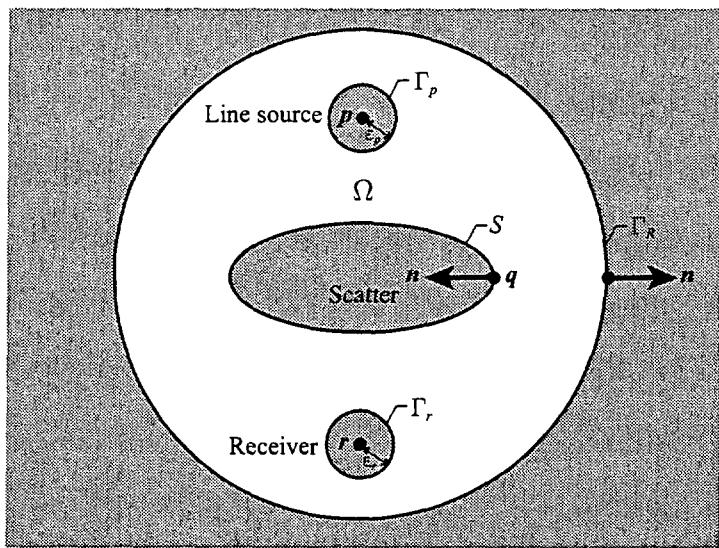


Fig. 3-1 The hypothetical two-dimensional sound field for numerical analysis via the BEM.

音源 p と観測点 r は特異点となるため、そのままでは音場 Γ_r に対して波動方程式を適用できない。そこで、音源 p と観測点 r を Γ_r 内から取り除くために、音源 p を中心とするきわめて小さな半径 ε_p の小円筒表面 Γ_p 及び、観測点 r を中心とするきわめて小さな半径 ε_r の小円筒表面 Γ_r を新たに設定する。ここで、 Γ_r 内において特異点 p, r が取り除かれた領域を新たに Ω とし、その領域内及び境界上 ($\Gamma_r, S, \Gamma_p, \Gamma_r$) の任意の点を q とする。

以上より、特異点が除かれた2次元空間 Ω 内の任意の点 q では、以下の波動方程式が満たされる。

$$\nabla^2 \Phi(q, t) = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi(q, t)}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

3

where, $\left\{ \begin{array}{l} c \quad ; \text{sound speed [m/s]} \\ \Phi(q, t) \quad ; \text{velocity potential [m}^2/\text{s]} \\ \nabla^2 \Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi \quad ; \text{in case of the } x-y \text{ coordinate} \end{array} \right.$

ここで、式 (3.1) により表される音場を正弦波による定常音場とし、速度ポテンシャルを角周波数 ω を用い式(3.2)のように表すと、式(3.1)より式(3.3)の Helmholtz 方程式を得る。

$$\Phi(q, t) = \varphi(q) \cdot e^{j\omega t} \quad (3.2)$$

$$\nabla^2 \varphi(q) + k^2 \varphi(q) = 0 \quad (3.3)$$

where, $\left\{ \begin{array}{l} k = \omega / c \quad ; \text{wave number [rad/s}^2]} \\ \omega \quad ; \text{angular frequency [rad/s]} \\ c \quad ; \text{sound speed [m/s]} \\ \varphi(q) \quad ; \text{velocity potential [m}^2/\text{s]} \\ \nabla^2 \varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi \quad ; \text{in case of the } x-y \text{ coordinate} \end{array} \right.$

空間 Ω 内の音場の支配方程式(3.3)を境界積分方程式として表すために、以下の変形を行う。

- 1** 式(3.3)に任意の重み関数 $\psi(q)$ を掛けて領域 Ω 上で積分する。

$$\iint_{\Omega} [\nabla^2 \varphi(q) + k^2 \varphi(q)] \psi(q) d\Omega(q) = 0 \quad (3.4)$$

- 2** 式(3.4)の被積分関数第1項に Green の積分定理を適用する。

ここで、 $\varphi(q)$ 及び $\psi(q)$ は領域 Ω 内及びその境界上 ($\Gamma_r, S, \Gamma_p, \Gamma_r$) で第2階の導関数を有するとすると、式(3.4)は以下の様に表される。

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \varphi(q) \nabla^2 \psi(q) d\Omega(q) + \iint_{S+\Gamma_p+\Gamma_r+\Gamma_r} \left(\varphi(q) \frac{\partial \psi(q)}{\partial n} - \psi(q) \frac{\partial \varphi(q)}{\partial n} \right) dS(q) \\ + \iint_{\Omega} k^2 \varphi(q) \psi(q) d\Omega = 0 \end{aligned}$$

よって、Helmholz 方程式 (3.3) は、重み関数 $\psi(\mathbf{q})$ を用いて以下のように変形することが出来る。

$$\iint_{\Omega} \{\nabla^2 \psi(\mathbf{q}) + k^2 \psi(\mathbf{q})\} \varphi(\mathbf{q}) d\Omega(\mathbf{q}) + \iint_{S+\Gamma_p+\Gamma_r+\Gamma_R} \left(\varphi(\mathbf{q}) \frac{\partial \psi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{n}} - \psi(\mathbf{q}) \frac{\partial \varphi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{n}} \right) = 0 \quad (3.5)$$

where, \mathbf{n} ; normal unit vector on the boundary of the field Ω

ここで、音源の速度ポテンシャルを 0 次第 2 種の Hankel 関数で表し (式 (3.6)), 重み関数 $\psi(\mathbf{q})$ を観測点 \mathbf{r} に位置する音源からの寄与として表現する (式 (3.7))。

3

$$\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{p}-\mathbf{r}|) ; \text{Velocity potential of the source } \mathbf{p} \quad (3.6)$$

$$\psi(\mathbf{q}) = \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \quad (3.7)$$

ここで、 $\psi(\mathbf{q})$ は Helmholtz 方程式 (3.3) を満たす関数となるから、下記の関係が成り立つ。

$$\iint_{\Omega} \{\nabla^2 \psi(\mathbf{q}) + k^2 \psi(\mathbf{q})\} \varphi(\mathbf{q}) d\Omega(\mathbf{q}) = 0 \quad (3.8)$$

式 (3.7) 及び式 (3.8) を式 (3.5) に代入すると、式 (3.9)を得ることができる。

$$\int_{S+\Gamma_p+\Gamma_r+\Gamma_R} \left\{ \varphi(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \right) - \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \frac{\partial \varphi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{n}} \right\} dS(\mathbf{q}) = 0 \quad (3.9)$$

where,

\mathbf{r} ; receiver position in the field surrounded by the outer boundary Γ_R \mathbf{q} ; arbitrary position on the boundary of the field Ω \mathbf{n} ; normal unit vector on the boundary toward the outside of the field Ω Γ_R ; the outer boundary of the field S ; the surface boundary of the scatter Γ_p ; the boundary near by the source Γ_r ; the boundary near by the receiver Ω ; the field excluded the area neaby the source and the receiver $\varphi(\mathbf{q})$; velocity potential at arbitrary position on the boundary of the field Ω [m^2/s] $\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k \mathbf{p}-\mathbf{r})$; velocity potential due to the source [m^2/s]
--

以上から、Helmholz 方程式 (3.3) に Green の積分定理を適用することにより、2 次元音場 Ω は、音響境界上の積分関数として表現されることが分かる。

3 式 (3.9) における Γ_p 上の積分項を導出。

線音源 \mathbf{p} を囲む極小円筒表面 Γ_p 上の積分を行う。円筒の半径 ε_p は極めて小さいため、円筒表面上の速度ポテンシャルは音源の寄与のみと近似できる (式 (3.10))。

$$\varphi(\mathbf{q}) \approx \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k\varepsilon_p) \quad (3.10)$$

従って、式(3.9)における Γ_p 上の積分 I_{Γ_p} は以下のように表わされる。

$$\begin{aligned}
 I_{\Gamma_p} &= \int_{\Gamma_p} \left\{ \varphi(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \right) - \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \frac{\partial \varphi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{n}} \right\} dS(\mathbf{q}) \\
 &= \int_{\Gamma_p} \left\{ \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k\varepsilon_p) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \right) - \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k\varepsilon_p) \right) \right\} dS(\mathbf{q}) \\
 &= -\frac{1}{4j} \int_{\Gamma_p} \left\{ H_0^{(2)}(k\varepsilon_p) \frac{\partial}{\partial \varepsilon_p} \left(\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \right) - H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \left(-\frac{1}{4j} H_1^{(2)}(k\varepsilon_p) \right) \right\} dS(\mathbf{q})
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

ここで、 $\varepsilon_p \ll 1$ とすると、Hankel 関数の級数展開及び $\lim_{z \rightarrow 0} z^\alpha \log z = 0$ (但し、 $\alpha > 0$)

の公式より、0次及び1次の Hankel 関数に対して以下の近似が成立する(**Note 1**)。

$$H_0^{(2)}(k\varepsilon_p) \ll H_1^{(2)}(k\varepsilon_p) \tag{3.12}$$

従って、式(3.11)は以下のように近似できる。

$$I_{\Gamma_p} \approx -\frac{1}{4j} \int_{\Gamma_p} H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \cdot \frac{1}{4j} H_1^{(2)}(k\varepsilon_p) dS(\mathbf{q}) \tag{3.11}'$$

同様に、円筒表面が音源 p の極近傍であることから、以下の近似が成立する。

$$|\mathbf{q}-\mathbf{r}| \approx |\mathbf{p}-\mathbf{r}| \tag{3.13}$$

従って、(3.11)'は、以下のように近似できる。

$$\begin{aligned}
 I_{\Gamma_p} &\approx -\frac{1}{4j} \int_{\Gamma_p} H_0^{(2)}(k|\mathbf{p}-\mathbf{r}|) \cdot \frac{1}{4j} H_1^{(2)}(k\varepsilon_p) dS(\mathbf{q}) \\
 &= -\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{p}-\mathbf{r}|) \cdot \frac{k}{4j} H_1^{(2)}(k\varepsilon_p) \int_0^{2\pi} \varepsilon_p d\theta \\
 &= -\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{p}-\mathbf{r}|) \cdot \frac{k}{4j} H_1^{(2)}(k\varepsilon_p) \cdot 2\pi\varepsilon_p
 \end{aligned} \tag{3.11}''$$

Hankel 関数の級数展開近似より $\varepsilon_p \rightarrow 0$ の時、上式は以下に近似される。

$$I_{\Gamma_p} \xrightarrow{\varepsilon_p \rightarrow 0} -\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{p}-\mathbf{r}|) \tag{3.14}$$

Note 1

$z \ll 1$ のとき、0次及び1次の Hankel 関数は、以下のように級数展開近似される。

$$\begin{aligned}
 H_0^{(2)}(z) &\approx 1 - j \frac{2}{\pi} \left\{ \log \left(\frac{z}{2} \right) + \gamma \right\} \\
 H_1^{(2)}(z) &\approx 0 - j \left(-\frac{2}{\pi z} \right)
 \end{aligned}$$

where, $\gamma = 0.57721566\dots$; Euler's constant

$$\text{従つて, } \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{H_0^{(2)}(z)}{H_1^{(2)}(z)} \right\} \simeq \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ -z \log \left(\frac{z}{2} \right) - z\gamma - j \frac{\pi z}{2} \right\} = \lim_{z \rightarrow 0} \left\{ -z \log \left(\frac{z}{2} \right) \right\}$$

ここで, $\lim_{z \rightarrow 0} z^a \log z = 0$ ($a > 0$)より ,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left\{ \frac{H_0^{(2)}(z)}{H_1^{(2)}(z)} \right\} \simeq 0 \quad \therefore H_0^{(2)}(z) \ll H_1^{(2)}(z)$$

4 式(3.9)における Γ_r 上の積分項を導出。

3

観測点 r を囲む極小円筒表面 Γ_r 上の積分を行う。円筒の半径 ε_r は極めて小さいため、円筒表面上の速度ポテンシャルは受音点の速度ポテンシャルに近似できる(式(3.15))。

$$\varphi(\mathbf{q}) \approx \varphi(r) \quad (3.15)$$

従つて、式(3.9)における Γ_r 上の積分 I_{Γ_r} は以下のように表わされる。

$$\begin{aligned} I_{\Gamma_r} &= \int_{\Gamma_r} \left\{ \varphi(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \right) - \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \frac{\partial \varphi(\mathbf{q})}{\partial n} \right\} dS(\mathbf{q}) \\ &\approx \int_{\Gamma_r} \left\{ \varphi(r) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k\varepsilon_r) \right) - \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k\varepsilon_r) \frac{\partial \varphi(r)}{\partial n} \right\} dS(\mathbf{q}) \\ &= - \int_{\Gamma_r} \left\{ \varphi(r) \left(-\frac{k}{4j} H_1^{(2)}(k\varepsilon_r) \right) - \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k\varepsilon_r) \frac{\partial \varphi(r)}{\partial \varepsilon_r} \right\} dS(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

$\varepsilon_r \ll 1$ の場合、式(3.12)と同様に $H_0^{(2)}(k\varepsilon_r) \ll H_1^{(2)}(k\varepsilon_r)$ が成立し、式(3.16)は以下のように近似できる。

$$\begin{aligned} I_{\Gamma_r} &\approx - \int_{\Gamma_r} \varphi(r) \left(-\frac{k}{4j} H_1^{(2)}(k\varepsilon_r) \right) dS(\mathbf{q}) \\ &= \varphi(r) \cdot \frac{k}{4j} H_1^{(2)}(k\varepsilon_r) \cdot \int_{\Gamma_r} \varepsilon_r dS(\mathbf{q}) \\ &= \varphi(r) \cdot \frac{k}{4j} H_1^{(2)}(k\varepsilon_r) \cdot e(r) 2\pi\varepsilon_r \end{aligned} \quad (3.16)'$$

$$\text{where, } e(r) = \theta(r)/2\pi \quad (3.17)$$

$$e.g., e(r) = \begin{cases} \theta(r) & ; \text{spatial angle from receiver } r \text{ to the field [rad]} \\ & \\ 1 & ; \text{receiver } r \text{ is in the field} \\ 1/2 & ; \text{receiver } r \text{ is on the smooth boundary} \\ 0 & ; \text{receiver } r \text{ is out of the field} \end{cases}$$

Hankel 関数の級数展開近似より $\varepsilon_r \rightarrow 0$ の時、(3.16)'は以下に近似される。

$$I_{\Gamma_r} \xrightarrow{\varepsilon_r \rightarrow 0} e(r) \cdot \varphi(r) \quad (3.18)$$

5 式(3.14)及び式(3.18)を式(3.9)に代入。

$$\int_{S+\Gamma_R} \left\{ \varphi(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \right) - \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \frac{\partial \varphi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{n}} \right\} dS(\mathbf{q}) - \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{p}-\mathbf{r}|) + e(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) = 0$$

$$\therefore e(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{p}-\mathbf{r}|) - \int_{S+\Gamma_R} \left\{ \varphi(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \right) - \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \frac{\partial \varphi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{n}} \right\} dS(\mathbf{q}) \quad (3.19)$$

3

式(3.19)は、「Helmholtz-Huygens 積分」もしくは「Kirchhoff-Huygens の公式」と呼ばれ、2次元音場解析の基礎積分方程式である。式(3.19)を眺めると、任意の観測点 \mathbf{r} における速度ポテンシャル $\varphi(\mathbf{r})$ が、音源からの寄与と境界周りの積分値により求められることが分かる。

さらに、式(3.19)において Γ_R が極めて大きい場合、 Γ_R 上の積分値は無視することができ(**Note 2**)、式(3.19)は式(3.20)へと近似される。従って、屋外のような開空間音場の場合、式(3.20)を2次元音場の支配積分方程式として使用することができる。

$$e(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{p}-\mathbf{r}|) - \int_S \left\{ \varphi(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \right) - \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \frac{\partial \varphi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{n}} \right\} dS(\mathbf{q}) \quad (3.20)$$

where,

$$\begin{cases} \varphi(\mathbf{r}) ; \text{velocity potential at the receiver position [m}^2/\text{s}] \\ e(\mathbf{r}) = \theta(\mathbf{r})/2\pi ; \begin{cases} 1 & ; \text{receiver } \mathbf{r} \text{ is in the field} \\ 1/2 & ; \text{receiver } \mathbf{r} \text{ is on the smooth boundary} \\ 0 & ; \text{receiver } \mathbf{r} \text{ is out of the field} \end{cases} \\ \theta(\mathbf{r}) ; \text{spatial angle from receiver } \mathbf{r} \text{ to the field [rad]} \\ \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{p}-\mathbf{r}|) ; \text{velocity potential of the source [m}^2/\text{s}] \\ \mathbf{r} ; \text{receiver position} \\ \mathbf{p} ; \text{source position} \\ \mathbf{q} ; \text{arbitrary position on the boundary of the scatter} \\ \mathbf{n} ; \text{normal unit vector on the boundary toward the outside of the field} \\ S ; \text{the surface boundary of the scatter} \end{cases}$$

式(3.20)を眺めると、任意の観測点 \mathbf{r} における速度ポテンシャル $\varphi(\mathbf{r})$ は、音源からの寄与と散乱体表面上の積分値により求められることが分かる。本研究で扱う境界要素法は式(3.20)を支配積分方程式とし、それを離散化し、数値計算により解を得るものである。

Note 2

Fig. 3-1において境界 Γ_R が極めて大きな半径 R の円筒表面である場合、式(3.19)の被積分関数に関して以下の近似が成り立つ。

$$\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \approx \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(kR) \quad (3.21)$$

従って、式(3.19)における Γ_R 上の積分 I_{Γ_R} は以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} I_{\Gamma_R} &= \int_{\Gamma_R} \left\{ \varphi(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \right) - \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \frac{\partial \varphi(\mathbf{q})}{\partial n} \right\} dS(\mathbf{q}) \\ &= \int_{\Gamma_R} \left\{ \varphi(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(kR) \right) - \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(kR) \frac{\partial \varphi(\mathbf{q})}{\partial n} \right\} dS(\mathbf{q}) \\ &= \int_{\Gamma_R} \left\{ \varphi(\mathbf{q}) \left(-\frac{1}{4j} H_1^{(2)}(kR) \right) - \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(kR) \frac{\partial \varphi(\mathbf{q})}{\partial R} \right\} dS(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (3.22)$$

3

z が十分大きい場合、0 次及び 1 次の Hankel 関数は、以下のように近似される。

$$H_0^{(2)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot e^{-j(z-\pi/4)} \quad H_1^{(2)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot e^{-j(z-3\pi/4)}$$

従って、式(3.22)は以下に近似される。

$$\begin{aligned} I_{\Gamma_R} &= - \int_{\Gamma_R} \left\{ \varphi(\mathbf{q}) \frac{k}{4j} \sqrt{\frac{2}{\pi kR}} \cdot e^{-j(kR-3\pi/4)} + \frac{1}{4j} \sqrt{\frac{2}{\pi kR}} \cdot e^{-j(kR-\pi/4)} \frac{\partial \varphi(\mathbf{q})}{\partial R} \right\} dS(\mathbf{q}) \\ &\quad - \int_{\Gamma_R} \left\{ \frac{1}{4j} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \cdot \frac{e^{-j(kR-3\pi/4)}}{R} \cdot \sqrt{R} \left(\frac{\partial \varphi(\mathbf{q})}{\partial R} + jk\varphi(\mathbf{q}) \right) \right\} dS(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (3.22')$$

ここで $\varphi(\mathbf{r})$ に Sommerfeld の放射条件が適用されているとすると、以下が成立する。

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} + jk\Phi \right) = 0 \quad (\Phi = \varphi(\mathbf{q}), R = |\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \quad (3.23)$$

従って、式(3.22')に式(3.23)の条件を適用すると、 Γ_R 上の積分値は 0 に近似できることが分かる(式(3.24))。

$$\begin{aligned} I_{\Gamma_R} &\approx - \int_{\Gamma_R} \left\{ \frac{1}{4j} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \cdot \frac{e^{-j(kR-3\pi/4)}}{R} \cdot \sqrt{R} \left(\frac{\partial \varphi(\mathbf{q})}{\partial R} + jk\varphi(\mathbf{q}) \right) \right\} dS(\mathbf{q}) \\ &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} - \int_{\Gamma_R} \left\{ \frac{1}{4j} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \cdot 0 \cdot 0 \right\} dS(\mathbf{q}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

3-2. 音圧及び音響インテンシティの導出

Solution of the sound pressure and the sound intensity

式(3.20)により、開空間音場の任意の場所における速度ポテンシャルは、音源の速度ポテンシャル及び散乱体表面上の積分値より導出できることが示された。本節では、式(3.20)により導出された速度ポテンシャルをもとに音圧及び音響インテンシティを算出する仮定を記す。

2次元音場内の任意の点 \mathbf{r} における音圧 p 、粒子速度 \mathbf{u} 、速度ポテンシャル Φ を式(3.25)のように表記すると、 \mathbf{r} における音圧及び粒子速度は速度ポテンシャルを用いて式(3.26)のように表される。但し、ここでは2次元音場として x - y 座標系を仮定している。

$$p(\mathbf{r}, t) = \hat{p}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}, \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}, \quad \Phi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}) e^{j\omega t} \quad (3.25)$$

$$\begin{cases} p(\mathbf{r}, t) = \rho \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = -\text{grad}\{\Phi(\mathbf{r}, t)\} \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} \hat{p}(\mathbf{r}) = j\omega\rho \cdot \varphi(\mathbf{r}) \\ \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}) = -\left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j}\right) \varphi(\mathbf{r}) \end{cases} \quad (3.26)$$

where, $\begin{cases} \omega & ; \text{angular frequency [rad/s]} \\ \rho & ; \text{air density [kg/m}^3\text{]} \\ \mathbf{i} & ; \text{unit vector for } x\text{-axis} \\ \mathbf{j} & ; \text{unit vector for } y\text{-axis} \end{cases}$

ここで、瞬時音響インテンシティは(3.27)で定義され、その時間平均アクティブ音響インテンシティ(以下、音響インテンシティ)は(3.28)となる。

$$\mathbf{I}(\mathbf{r}, t) = p(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \quad (3.27)$$

$$\hat{\mathbf{I}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \Re[\hat{p}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{u}}^*(\mathbf{r})] = \frac{1}{2} \Re[\hat{p}^*(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r})] \quad (3.28)$$

以上をまとめると、音圧及び音響インテンシティは速度ポテンシャルを用いて以下のように表すことができる。

$$\begin{cases} \hat{p}(\mathbf{r}) = j\omega\rho \cdot \varphi(\mathbf{r}) & ; \text{sound pressure [Pa]} \\ \hat{\mathbf{I}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \Re[\hat{p}^*(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r})] & ; \text{time averaged active sound intensity [W/m}^2\text{]} \end{cases} \quad (3.29)$$

where, $\begin{cases} \varphi(\mathbf{r}) & ; \text{velocity potential [m}^2/\text{s]} \\ \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}) = -\left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j}\right) \varphi(\mathbf{r}) & ; \text{particle velocity [m/s]} \\ \omega & ; \text{angular frequency [rad/s]} \\ \rho & ; \text{air density [kg/m}^3\text{]} \\ \mathbf{i} & ; \text{unit vector for } x\text{-axis} \\ \mathbf{j} & ; \text{unit vector for } y\text{-axis} \end{cases}$

式(3.20)によると、速度ポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ が求められていれば、音圧 $\hat{p}(\mathbf{r})$ が算出できることが分かる（速度ポテンシャルの導出に関しては、次節 3-3. で示す）。一方、音響インテンシティ $\hat{I}(\mathbf{r})$ の算出には、音圧の他に粒子速度 $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r})$ が必要となる。粒子速度を求めるためには速度ポテンシャルの $x-y$ 方向微分を行う必要があり、式(3.20)によって得られる速度ポテンシャルの結果をそのまま流用することはできない。速度ポテンシャルの $x-y$ 方向微分係数を算出するためには、式(3.20)に示した Helmholtz-Huygens 積分の方向微分形に対する解 $\frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}_r}$ を別途算出する必要がある。以下に、Helmholtz-Huygens 積分を受音点 \mathbf{r} において \mathbf{n}_r 方向に微分した場合の式を示す。粒子速度の算出のためには、式(3.30)を解き、 $\frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}_r}$ を導出する必要がある（次節 3-3. にて詳述）。

3

$$e(\mathbf{r}) \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}_r} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_r} \left\{ \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{p}-\mathbf{r}|) \right\} - \int_S \left\{ \phi(\mathbf{q}) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_r \partial \mathbf{n}} \left(\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_r} \left\{ \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \right\} \frac{\partial \phi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{n}} \right\} dS(\mathbf{q}) \quad (3.30)$$

式(3.20)が Helmholtz-Huygens 積分の基本形(BF; Basic Form)と呼ばれるのに対して、式(3.30)は Helmholtz-Huygens 積分の放線方向微分形(NDF; Normal Derivative Form)と呼ばれる。

3-3. 境界積分方程式の数値解析

Numerical solution of the boundary integral formula

2次元開空間音場における任意の点での音圧及び音響インテンシティを算出するためには、式(3.20)及び式(3.30)から速度ポテンシャル $\varphi(\mathbf{r})$ 及びその方向微分値 $\frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}_r}$ を算出しなければならない。

本節では、解析対象音場が Fig. 3-2 のように表されているとし、速度ポテンシャル及びその方向微分値の導出を行う。なお、散乱体の境界表面にはノーマル音響アドミッタンス β_0 が与えられるとしている。

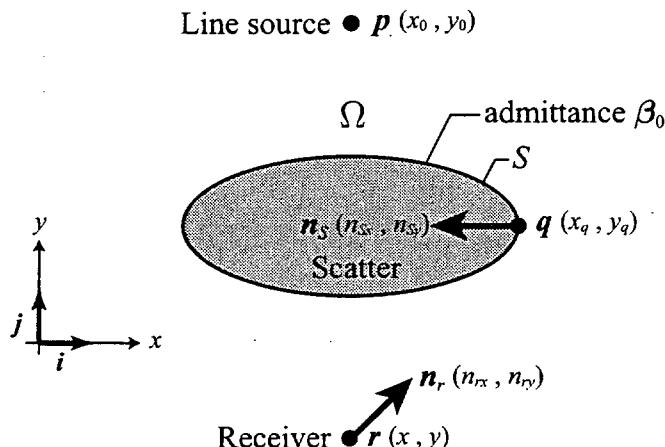


Fig. 3-2 The hypothetical two-dimensional open field for numerical analysis via the BEM.

ここで目的とする解は、速度ポテンシャル $\varphi(\mathbf{r})$ 及びその方向微分値 $\frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}_r}$ であり、それぞれの支配方程式は、式(3.20)' 及び式(3.30)' である。

■ Helmholtz-Huygens 積分の基本形(BF; Basic Form)

$$e(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4j}H_0^{(2)}(k|\mathbf{p}-\mathbf{r}|) - \int_S \left\{ \varphi(\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_s} \left(\frac{1}{4j}H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \right) - \frac{1}{4j}H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \frac{\partial \varphi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{n}_s} \right\} dS(\mathbf{q}) \quad (3.20)',$$

■ Helmholtz-Huygens 積分の放線方向微分形(NDF; Normal Derivative Form)

$$e(\mathbf{r})\frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}_r} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_r} \left\{ \frac{1}{4j}H_0^{(2)}(k|\mathbf{p}-\mathbf{r}|) \right\} - \int_S \left\{ \varphi(\mathbf{q}) \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_r \partial \mathbf{n}_s} \left(\frac{1}{4j}H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_r} \left\{ \frac{1}{4j}H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \right\} \frac{\partial \varphi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{n}_s} \right\} dS(\mathbf{q}) \quad (3.30)',$$

Fig. 3-2, (3.20)', (3.30)'に使用されているパラメータの一覧を以下に記す。

3

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) & ; \text{velocity potential at the receiver position [m}^2/\text{s}] \\ e(\mathbf{r}) = \theta(\mathbf{r})/2\pi & ; \begin{cases} 1 & ; \text{receiver } \mathbf{r} \text{ is in the field} \\ 1/2 & ; \text{receiver } \mathbf{r} \text{ is on the smooth boundary} \\ 0 & ; \text{receiver } \mathbf{r} \text{ is out of the field} \end{cases} \\ \theta(\mathbf{r}) & ; \text{spatial angle from receiver } \mathbf{r} \text{ to the field [rad]} \\ \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{p}-\mathbf{r}|) & ; \text{velocity potential due to the source [m}^2/\text{s}] \\ \beta_0(\mathbf{q}) & ; \text{normal admittance on the scatter's boundary [m/Pa} \cdot \text{s}] \\ \beta(\mathbf{q}) = \rho c \beta_0(\mathbf{q}) & ; \text{normalized admittance [kg/Pa} \cdot \text{s}^2] \end{aligned} \right\} \quad (3.31) \\
 & \mathbf{r} = (x, y) ; \text{receiver position} \\
 & \mathbf{p} = (x_0, y_0) ; \text{source position} \\
 & \mathbf{q} = (x_q, y_q) ; \text{arbitrary position on the boundary of the scatter} \\
 & \mathbf{n}_r = (n_{rx}, n_{ry}) ; \text{normal unit vector at the receiver} \\
 & \mathbf{n}_s = (n_{sx}, n_{sy}) ; \text{normal unit vector on the boundary toward the outside of the field} \\
 & S ; \text{the surface boundary of the scatter} \\
 & \mathbf{i} ; \text{unit vector of the } x\text{-axis} \\
 & \mathbf{j} ; \text{unit vector of the } y\text{-axis}
 \end{aligned}$$

3-3-1. 速度ポテンシャルの導出

Solution of the velocity potential

以下、式(3.20)'より速度ポテンシャルを導出する過程を記す。

1 積分方程式の変形

(3.20)'の被積分項に含まれる Hankel 関数の法線方向微分を行う。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_s} \left(\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \right) &= \mathbf{n}_s \cdot \text{grad} \left\{ \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \right\} \\
 &= \mathbf{n}_s \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_q} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y_q} \mathbf{j} \right) \left(\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \right) \\
 &= -\frac{k}{4j} \cdot \frac{n_{sx}(x_q - x) + n_{sy}(y_q - y)}{1 \cdot |\mathbf{q}-\mathbf{r}|} H_1^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \\
 &= -\frac{k}{4j} \cdot \cos(\mathbf{n}_s, \mathbf{q}-\mathbf{r}) H_1^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

ここで、 \mathbf{q} 点における境界表面のノーマルアドミッタンスを $\beta_0(\mathbf{q})$ とし、境界 S 上において局所作用を仮定すると、以下の関係が成り立つ。

$$\beta_0(\mathbf{q}) = \frac{u_n(\mathbf{q})}{p(\mathbf{q})} = -\frac{\partial \phi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{n}_S} / j\omega\rho \cdot \phi(\mathbf{q}) \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \text{従って, } \frac{\partial \phi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{n}_S} &= j\omega\rho \cdot \beta_0(\mathbf{q}) \cdot \phi(\mathbf{q}) \\ &= jk \cdot \beta(\mathbf{q}) \cdot \phi(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (3.34)$$

ここで、 $\beta(\mathbf{q})$ は $\beta_0(\mathbf{q})$ を空気のアドミッタンスで基準化した基準化アドミッタンスである。

次に、式(3.32)及び式(3.34)を式(3.20)'に代入し整理すると、以下を得る。

$$\begin{aligned} e(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{p}-\mathbf{r}|) \\ &\quad - \frac{k}{4} \int_S \{ j \cos(\mathbf{n}_S, \mathbf{q}-\mathbf{r}) \cdot H_1^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) + \beta(\mathbf{q}) \cdot H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \} \phi(\mathbf{q}) dS(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (3.35)$$

2 境界要素の分割と数値解析

式(3.35)を数値的に解くために、Fig. 3-2 に示した散乱体の境界 S を N 個の線分要素に分割する(Fig. 3-3)。

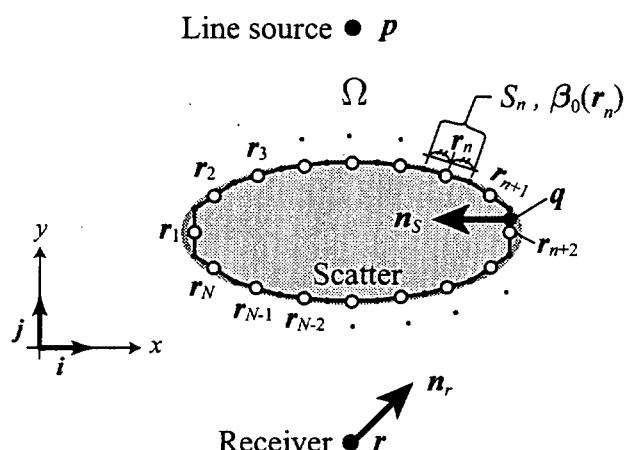


Fig. 3-3 Divided acoustical boundary of the scatter which is shown in the field, Fig. 3-2.

ここで、散乱体の境界 S 上の音響条件を以下のように設定する。

- 分割されたそれぞれの境界要素を $S_1, S_2, S_3, \dots, S_N$ と表記し、それに対する中点(要素節点)を $r_1, r_2, r_3, \dots, r_N$ とする。
- 各要素表面の速度ポテンシャル及びアドミッタンスは、要素節点である個々の要素の中点における値と等しいとする。

すなわち、ここでは境界要素に対して一定要素を仮定しており、個々の要素内で以下の近似が成立することになる。

$$\varphi(\mathbf{q}) \approx \varphi(\mathbf{r}_n) \quad , \quad \beta(\mathbf{q}) \approx \beta(\mathbf{r}_n) \quad (n=1, 2, \dots, N) \quad (3.36)$$

以上より、(3.35)は以下のような離散化された表現に置き換えることができる。

$$e(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4j}H_0^{(2)}(k|\mathbf{p}-\mathbf{r}|) \quad (3.37)$$

$$-\frac{k}{4} \sum_{n=1}^N \varphi(\mathbf{r}_n) \int_{S_n} \left\{ j \cos(\mathbf{n}_s, \mathbf{q}-\mathbf{r}) \cdot H_1^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) + \beta(\mathbf{q}) \cdot H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \right\} dS(\mathbf{q})$$

3

$$\therefore e(\mathbf{r}) \cdot \varphi(\mathbf{r}) = \varphi_d(\mathbf{r}) - \sum_{n=1}^N \left\{ f_{S_n}(\mathbf{r}) \cdot \varphi(\mathbf{r}_n) \right\} \quad (3.38)$$

where,

$\varphi(\mathbf{r})$; velocity potential at the receiver [m ² /s]
$e(\mathbf{r})$	= $\begin{cases} 1 & ; \text{receiver } \mathbf{r} \text{ is in the field} \\ 1/2 & ; \text{receiver } \mathbf{r} \text{ is on the smooth boundary} \\ 0 & ; \text{receiver } \mathbf{r} \text{ is out of the field} \end{cases}$
$\varphi_d(\mathbf{r})$	= $\frac{1}{4j}H_0^{(2)}(k \mathbf{p}-\mathbf{r})$ ⇒ velocity potential of the source \mathbf{p} [m ² /s]
$f_{S_n}(\mathbf{r})$	= $\frac{k}{4} \int_{S_n} \left\{ j \cos(\mathbf{n}_s, \mathbf{q}-\mathbf{r}) \cdot H_1^{(2)}(k \mathbf{q}-\mathbf{r}) + \beta(\mathbf{r}_n) \cdot H_0^{(2)}(k \mathbf{q}-\mathbf{r}) \right\} dS(\mathbf{q})$ ⇒ contribution from the surface of the scatter's boundary S
$\varphi(\mathbf{r}_n)$; velocity potential on the n th element of the scatter's boundary [m ² /s]
$\beta(\mathbf{r}_n)$	= $\rho c \beta_0(\mathbf{r}_n)$; normalized admittance on the n th element [kg/Pa · s ²]
\mathbf{r}	; receiver position
\mathbf{r}_n	; middle position of the n th element of the scatter's boundary

以下、式(3.38)より $\varphi(\mathbf{r})$ を算出する手順を記す。

① 受音点 \mathbf{r} を散乱体の境界表面の要素上に設定する。

この時、 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_m$ ($m = 1, 2, \dots, N$)、 $e(\mathbf{r}) = 1/2$ であるから、式(3.38)は以下のように表せる。

$$\frac{1}{2}\varphi(\mathbf{r}_m) = \varphi_d(\mathbf{r}_m) - \sum_{n=1}^N \left\{ f_{S_n}(\mathbf{r}_m) \cdot \varphi(\mathbf{r}_n) \right\} \quad (m=1, 2, \dots, N) \quad (3.39)$$

② N 次連立方程式の計算。

式(3.39)を行列表記すると、以下となる。

$$\begin{bmatrix} 1/2 + f_{S1}(\mathbf{r}_1) & \cdots & f_{SN}(\mathbf{r}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{S1}(\mathbf{r}_N) & \cdots & 1/2 + f_{SN}(\mathbf{r}_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ \varphi(\mathbf{r}_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_d(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ \varphi_d(\mathbf{r}_N) \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

上記行列を解くことで、散乱体表面上の速度ポテンシャル $\varphi(\mathbf{r}_n)$ ($n = 1, 2, \dots, N$) を得ることができる(係数 $f_{Sn}(\mathbf{r}_n)$ の計算手法に関しては、巻末の Appendix A 参照)。

$$\begin{bmatrix} \varphi(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ \varphi(\mathbf{r}_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 + f_{S1}(\mathbf{r}_1) & \cdots & f_{SN}(\mathbf{r}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{S1}(\mathbf{r}_N) & \cdots & 1/2 + f_{SN}(\mathbf{r}_N) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \varphi_d(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ \varphi_d(\mathbf{r}_N) \end{bmatrix} \quad (3.40),$$

③ 受音点 \mathbf{r} における速度ポテンシャル $\varphi(\mathbf{r})$ の算出。

(3.40)' で求めた散乱体表面上の速度ポテンシャル $\varphi(\mathbf{r}_n)$ を式(3.38)に代入し、速度ポテンシャル $\varphi(\mathbf{r})$ を算出する。

3

④ 最後に、算出された速度ポテンシャル $\varphi(\mathbf{r})$ を用いて受音点 \mathbf{r} における音圧 $\hat{p}(\mathbf{r})$ が算出される(式(3.29))。

3-3-2. 速度ポテンシャルの方向微分の導出

Solution of the derivative of the velocity potential

受音点 \mathbf{r} における音響インテンシティを算出するためには、前項 3-3-1. で算出された音圧の他に粒子速度が必要となる。粒子速度を得るためにには、速度ポテンシャルの方向微分 $\frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}_r}$ を算出する必要がある。

以下、式(3.30)' より速度ポテンシャルの方向微分値を導出する手法を記す。

1 積分方程式の変形

式(3.30)' の右辺第1項及び被積分関数の第2項は、(3.32)と同様に以下に変形できる。

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_r} \left\{ \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{p}-\mathbf{r}|) \right\} = \frac{k}{4j} \cdot \cos(\mathbf{n}_r, \mathbf{p}-\mathbf{r}) H_1^{(2)}(k|\mathbf{p}-\mathbf{r}|) \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_r} \left\{ \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \right\} = \frac{k}{4j} \cdot \cos(\mathbf{n}_r, \mathbf{q}-\mathbf{r}) H_1^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \quad (3.42)$$

次に、式(3.30)' の右辺被積分関数の第1項を変形する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_r \partial \mathbf{n}_s} \left(\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \right) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_r} \left\{ -k \cos(\mathbf{n}_s, \mathbf{q}-\mathbf{r}) H_1^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \right\} \\ \text{式(3.32)より,} \quad &= -k \cdot \mathbf{n}_r \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} \right) \left\{ \cos(\mathbf{n}_s, \mathbf{q}-\mathbf{r}) H_1^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \right\} \end{aligned} \quad (3.43)$$

式(3.43)の右辺に関して、 x 方向の偏微分を考える。

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \cos(\mathbf{n}_s, \mathbf{q} - \mathbf{r}) H_1^{(2)}(k|\mathbf{q} - \mathbf{r}|) \right\} \\
 = & \frac{\partial}{\partial x} \cos(\mathbf{n}_s, \mathbf{q} - \mathbf{r}) \cdot H_1^{(2)}(k|\mathbf{q} - \mathbf{r}|) + \cos(\mathbf{n}_s, \mathbf{q} - \mathbf{r}) \cdot \frac{\partial}{\partial x} H_1^{(2)}(k|\mathbf{q} - \mathbf{r}|) \\
 = & -\frac{n_{sx}}{|\mathbf{q} - \mathbf{r}|} H_1^{(2)}(k|\mathbf{q} - \mathbf{r}|) + \frac{(x_q - x)}{|\mathbf{q} - \mathbf{r}|^2} \cos(\mathbf{n}_s, \mathbf{q} - \mathbf{r}) \{ 2H_1^{(2)}(k|\mathbf{q} - \mathbf{r}|) - k|\mathbf{q} - \mathbf{r}| H_0^{(2)}(k|\mathbf{q} - \mathbf{r}|) \}
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

3

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} \cos(\mathbf{n}_s, \mathbf{q} - \mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{n_{sx}(x_q - x) + n_{sy}(y_q - y)}{\sqrt{(x_q - x)^2 + (y_q - y)^2}} \right\} \\
 &= -\frac{n_{sx}}{|\mathbf{q} - \mathbf{r}|} + \frac{(x_q - x)}{|\mathbf{q} - \mathbf{r}|^2} \cdot \frac{n_{sx}(x_q - x) + n_{sy}(y_q - y)}{1 \cdot |\mathbf{q} - \mathbf{r}|} \\
 &= -\frac{n_{sx}}{|\mathbf{q} - \mathbf{r}|} + \frac{(x_q - x)}{|\mathbf{q} - \mathbf{r}|^2} \cos(\mathbf{n}_s, \mathbf{q} - \mathbf{r}) \\
 \frac{\partial}{\partial x} H_1^{(2)}(k|\mathbf{q} - \mathbf{r}|) &= -k \frac{(x_q - x)}{|\mathbf{q} - \mathbf{r}|} \left\{ H_0^{(2)}(k|\mathbf{q} - \mathbf{r}|) - \frac{1}{k|\mathbf{q} - \mathbf{r}|} H_1^{(2)}(k|\mathbf{q} - \mathbf{r}|) \right\}
 \end{aligned}$$

式(3.43)の右辺の y 方向偏微分に関しても同様に以下を得る。

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \cos(\mathbf{n}_s, \mathbf{q} - \mathbf{r}) H_1^{(2)}(k|\mathbf{q} - \mathbf{r}|) \right\} \\
 = & -\frac{n_{sy}}{|\mathbf{q} - \mathbf{r}|} H_1^{(2)}(k|\mathbf{q} - \mathbf{r}|) + \frac{(y_q - y)}{|\mathbf{q} - \mathbf{r}|^2} \cos(\mathbf{n}_s, \mathbf{q} - \mathbf{r}) \{ 2H_1^{(2)}(k|\mathbf{q} - \mathbf{r}|) - k|\mathbf{q} - \mathbf{r}| H_0^{(2)}(k|\mathbf{q} - \mathbf{r}|) \}
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

式(3.44)及び式(3.45)を式(3.43)に代入すると、式(3.30)'の右辺被積分関数の第1項は以下のように変形される。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{n}_r \partial \mathbf{n}_s} \left(\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k|\mathbf{q} - \mathbf{r}|) \right) &= -\frac{k}{|\mathbf{q} - \mathbf{r}|} \left[-\frac{n_{rx}n_{sx} + n_{ry}n_{sy}}{1 \cdot 1} \cdot H_1^{(2)}(k|\mathbf{q} - \mathbf{r}|) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{n_{rx}(x_q - x) + n_{ry}(y_q - y)}{1 \cdot |\mathbf{q} - \mathbf{r}|} \cdot \cos(\mathbf{n}_s, \mathbf{q} - \mathbf{r}) \right. \\
 &\quad \left. \cdot \{ 2H_1^{(2)}(k|\mathbf{q} - \mathbf{r}|) - k|\mathbf{q} - \mathbf{r}| H_0^{(2)}(k|\mathbf{q} - \mathbf{r}|) \} \right] \\
 &= \frac{k}{|\mathbf{q} - \mathbf{r}|} \left[\cos(\mathbf{n}_r, \mathbf{n}_s) H_1^{(2)}(k|\mathbf{q} - \mathbf{r}|) \right. \\
 &\quad \left. + \cos(\mathbf{n}_r, \mathbf{q} - \mathbf{r}) \cos(\mathbf{n}_s, \mathbf{q} - \mathbf{r}) \right. \\
 &\quad \left. \cdot \{ k|\mathbf{q} - \mathbf{r}| H_0^{(2)}(k|\mathbf{q} - \mathbf{r}|) - 2H_1^{(2)}(k|\mathbf{q} - \mathbf{r}|) \} \right]
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

以上より、式(3.41)、式(3.42)、式(3.46)を式(3.30)'に代入すると Helmholtz-Huygens 積分の方向微分形は以下の式で表すことができる。

$$\begin{aligned}
 e(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}_r} = & \frac{k}{4j} \cos(\mathbf{n}_r, \mathbf{p}-\mathbf{r}) H_1^{(2)}(k|\mathbf{p}-\mathbf{r}|) \\
 & - \frac{k}{4j} \int_S \left[\frac{\varphi(\mathbf{q})}{|\mathbf{q}-\mathbf{r}|} \left\{ \cos(\mathbf{n}_r, \mathbf{n}_S) H_1^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \right. \right. \\
 & + \cos(\mathbf{n}_r, \mathbf{q}-\mathbf{r}) \cos(\mathbf{n}_S, \mathbf{q}-\mathbf{r}) \\
 & \cdot (k|\mathbf{q}-\mathbf{r}| H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) - 2H_1^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|)) \} \\
 & \left. - \cos(\mathbf{n}_r, \mathbf{q}-\mathbf{r}) H_1^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}_S} \right] dS(\mathbf{q})
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

ここで、式(3.34)より、
 $\frac{\partial \varphi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{n}_S} = jk\beta(\mathbf{q})\varphi(\mathbf{q})$ であるから、

上式右辺被積分関数最終項は、散乱体の表面アドミッタンスを用いて以下のように表現できる。

$$\begin{aligned}
 e(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}_r} = & \frac{k}{4j} \cos(\mathbf{n}_r, \mathbf{p}-\mathbf{r}) H_1^{(2)}(k|\mathbf{p}-\mathbf{r}|) \\
 & - \frac{k}{4j} \int_S \left[\frac{\varphi(\mathbf{q})}{|\mathbf{q}-\mathbf{r}|} \left\{ \cos(\mathbf{n}_r, \mathbf{n}_S) H_1^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \right. \right. \\
 & + \cos(\mathbf{n}_r, \mathbf{q}-\mathbf{r}) \cos(\mathbf{n}_S, \mathbf{q}-\mathbf{r}) \\
 & \cdot (k|\mathbf{q}-\mathbf{r}| H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) - 2H_1^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|)) \} \\
 & \left. - \cos(\mathbf{n}_r, \mathbf{q}-\mathbf{r}) H_1^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \cdot jk\beta(\mathbf{q})\varphi(\mathbf{q}) \right] dS(\mathbf{q})
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

2 境界要素の分割と数値解析

前項 3-3-1 の 2) と同様に、式(3.48)に関しても離散化表現が可能である。

散乱体表面の境界が Fig. 3-3, 式(3.36)で示したように一定要素として離散化されている場合、式(3.48)より速度ポテンシャルの方向微分 $\frac{\partial \varphi(r)}{\partial n_r}$ は以下の式で表される。

$$e(r) \cdot \frac{\partial \varphi(r)}{\partial n_r} = v_d(r) - \sum_{n=1}^N g_{sn}(r) \quad (3.49)$$

3

where,

$\frac{\partial \varphi(r)}{\partial n_r}$; normal derivative of the velocity potential at the receiver r [m/s]
$e(r)$	$= \begin{cases} 1 & ; \text{receiver } r \text{ is in the field} \\ 1/2 & ; \text{receiver } r \text{ is on the smooth boundary} \\ 0 & ; \text{receiver } r \text{ is out of the field} \end{cases}$
$v_d(r)$	$= \frac{k}{4j} \cos(n_r, p-r) H_1^{(2)}(k p-r)$
$g_{sn}(r)$	$= \frac{k}{4j} \int_{S_n} \left[\frac{1}{ q-r } \{ \cos(n_r, n_s) H_1^{(2)}(k q-r) \right.$ $+ \cos(n_r, q-r) \cos(n_s, q-r)$ $\cdot (k q-r H_0^{(2)}(k q-r) - 2H_1^{(2)}(k q-r)) \} \varphi(q)$ $\left. - \cos(n_r, q-r) H_1^{(2)}(k q-r) \cdot jk\beta(r_n)\varphi(r_n) \right] dS(q)$
$\varphi(r_n)$; velocity potential on the n th element of the scatter's boundary [m ² /s]
$\beta(r_n)$	$= \rho c \beta_0(r_n)$; normalized admittance on the n th element [kg/Pa · s ²]
$\frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k p-r)$; velocity potential due to the source [m ² /s]
r	; receiver position
r_n	; middle position of the n th element of the scatter's boundary

散乱体の境界上の速度ポテンシャル $\varphi(r_n)$ は、既に式(3.40)' で算出されているため、それらを式(3.49)代入することにより、速度ポテンシャルの方向微分 $\frac{\partial \varphi(r)}{\partial n_r}$ が算出される。尚、係数 $g_{sn}(r)$ の算出方法に関しては、速度ポテンシャルの導出の際に必要となる係数 $f_{sn}(r)$ の算出方法とほぼ同じである(式(3.38), 卷末の Appendix A 参照)。

以上により算出された $\frac{\partial \varphi(r)}{\partial n_r}$ により粒子速度 $\hat{u}(r)$ を求め、前項 3-3-1 で算出した音圧 $\hat{p}(r)$ とその粒子速度 $\hat{u}(r)$ を用いることで、受音点 r における音響インテンシティ $\hat{I}(r)$ が算出できる(式(3.29))。

3-4. 鏡像法の適用

Application of the mirror method

本研究で取り扱う音場モデル(Fig. 2-1)のように無限長の剛な床を有する音場の解析では、鏡像法を適用して計算を行う。この場合、床に対して対象の位置に虚音源及び散乱体の虚像が音場に付加される(Fig. 3-4)。

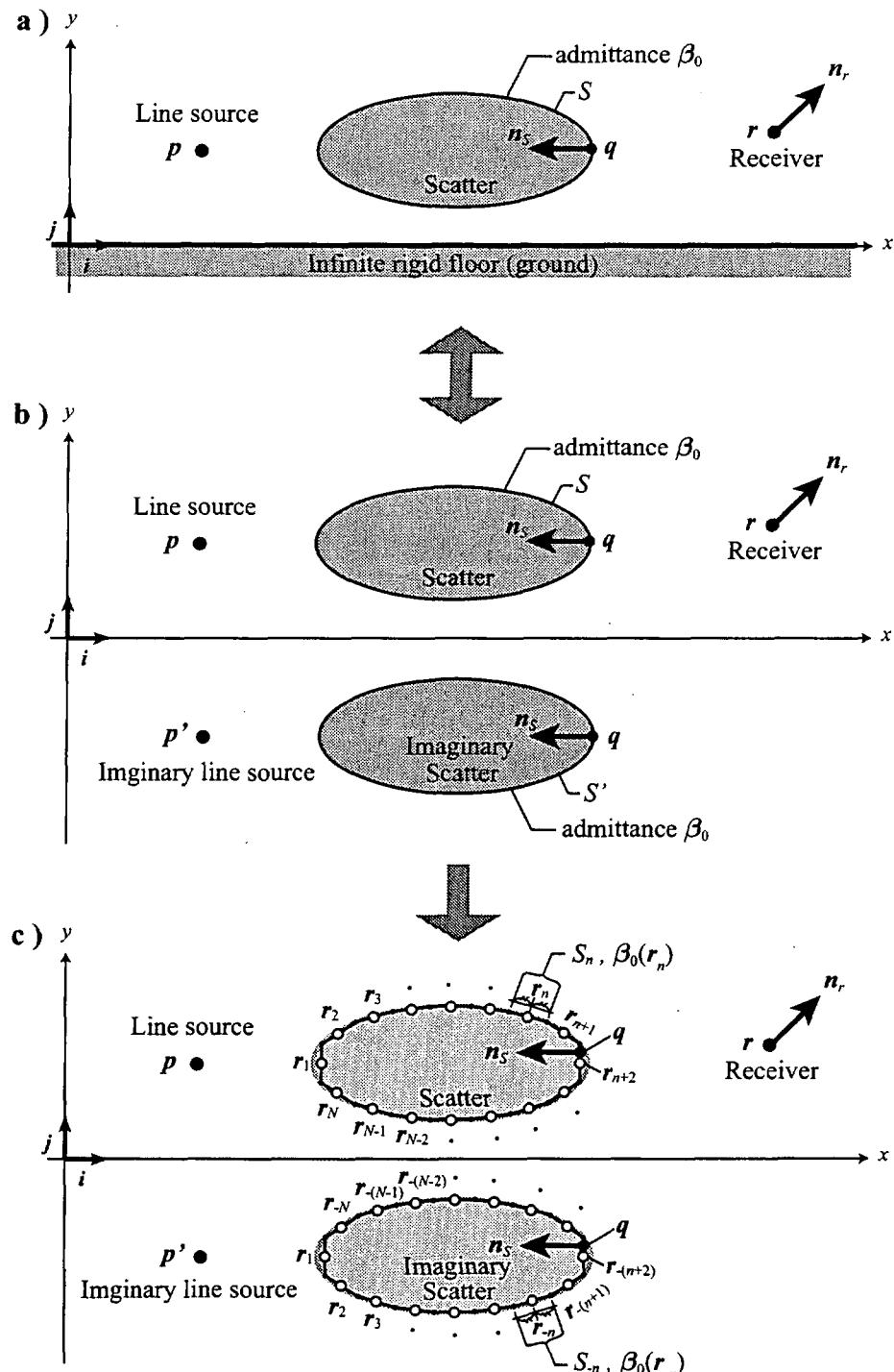


Fig. 3-4 a) The original field with the infinite rigid floor (ground). b) The modeled field with mirror images of the line source and the scatter's boundary. c) The divided boundary of the scatter for numerical calculation.

ここで、境界要素法による数値計算の過程において散乱体の境界要素が N 個に分割されるとすると、鏡像法が適用された音場では、散乱体の実像と虚像を合わせて $2N$ 個の境界要素に対して計算を行わなければならない。このことは、数値計算において最もコンピュータの能力を要する逆行列算出の要素数(式(3.39))が 4 倍になることを意味している。

本節では、音場の対称性を利用し、鏡像法が適用された音場の解析において計算の簡略化を行う手法を記す。

鏡像法により新たに付加された虚音源及び散乱体の鏡像を含む音場(Fig. 3-3-a)は、式(3.35)より以下のように表される。ここで、 \mathbf{p}' は虚音源の位置、 S' は散乱体の鏡像の境界面を表す。

③

$$\begin{aligned} e(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4j}\left\{H_0^{(2)}(k|\mathbf{p}-\mathbf{r}|)+H_0^{(2)}(k|\mathbf{p}'-\mathbf{r}|)\right\} \\ & -\frac{k}{4}\int_{S+S'}\left\{j\cos(\mathbf{n}_S, \mathbf{q}-\mathbf{r})\cdot H_1^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|)+\beta(\mathbf{q})\cdot H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|)\right\}\varphi(\mathbf{q})dS(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (3.50)$$

ここで、 S_n と S_{-n} 及び \mathbf{r} と \mathbf{r}_{-n} が鏡像面に対して対象となるように境界要素の番号付けを行うと(Fig.3-3-c)，式(3.50)は、式(3.36)～式(3.38)と同様の手法により以下のように離散化表現できる。

$$e(\mathbf{r})\cdot\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_{2d}(\mathbf{r}) - \sum_{n=\pm 1, \dots, \pm N}\{f_{S_n}(\mathbf{r})\cdot\varphi(\mathbf{r}_n)\} \quad (3.51)$$

where,

$\varphi(\mathbf{r})$; velocity potential at the receiver [m ² /s] $e(\mathbf{r})$ = $\begin{cases} 1 & ; \text{receiver } \mathbf{r} \text{ is in the field} \\ 1/2 & ; \text{receiver } \mathbf{r} \text{ is on the smooth boundary} \\ 0 & ; \text{receiver } \mathbf{r} \text{ is out of the field} \end{cases}$ $\varphi_{2d}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4j}\left\{H_0^{(2)}(k \mathbf{p}-\mathbf{r})+H_0^{(2)}(k \mathbf{p}'-\mathbf{r})\right\}$ \Rightarrow velocity potential of the real source \mathbf{p} and the mirror source \mathbf{p}' [m ² /s] $f_{S_n}(\mathbf{r}) = \frac{k}{4}\int_{S_n}\left\{j\cos(\mathbf{n}_S, \mathbf{q}-\mathbf{r})\cdot H_1^{(2)}(k \mathbf{q}-\mathbf{r})+\beta(\mathbf{r}_n)\cdot H_0^{(2)}(k \mathbf{q}-\mathbf{r})\right\}dS(\mathbf{q})$ \Rightarrow contribution from the surface of the scatter's boundaries S and S' $\varphi(\mathbf{r}_n)$; velocity potential on the n th element of the scatter's boundary [m ² /s] $\beta(\mathbf{r}_n) = \rho c \beta_0(\mathbf{r}_n)$; normalized admittance on the n th element [kg/Pa·s ²] \mathbf{r} ; receiver position \mathbf{r}_n ; middle position of the n th element of the scatter's boundary

式(3.51)に式(3.39)～式(3.40)'と同様の手法を適用すると、散乱体表面上の速度ポテンシャル $\varphi(\mathbf{r}_n)$ は、以下の行列形式で表現される。

$$\begin{bmatrix} 1/2 + f_{S1}(\mathbf{r}_1) & \cdots & f_{SN}(\mathbf{r}_1) & f_{S-N}(\mathbf{r}_1) & \cdots & f_{S-1}(\mathbf{r}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{S1}(\mathbf{r}_N) & \cdots & 1/2 + f_{SN}(\mathbf{r}_N) & f_{S-N}(\mathbf{r}_N) & \cdots & f_{S-1}(\mathbf{r}_N) \\ f_{S1}(\mathbf{r}_{-N}) & \cdots & f_{SN}(\mathbf{r}_{-N}) & 1/2 + f_{S-N}(\mathbf{r}_{-N}) & \cdots & f_{S-1}(\mathbf{r}_{-N}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{S1}(\mathbf{r}_{-1}) & \cdots & f_{SN}(\mathbf{r}_{-1}) & f_{S-N}(\mathbf{r}_{-1}) & \cdots & 1/2 + f_{S-1}(\mathbf{r}_{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ \varphi(\mathbf{r}_N) \\ \varphi(\mathbf{r}_{-N}) \\ \vdots \\ \varphi(\mathbf{r}_{-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{2d}(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ \varphi_{2d}(\mathbf{r}_N) \\ \varphi_{2d}(\mathbf{r}_{-N}) \\ \vdots \\ \varphi_{2d}(\mathbf{r}_{-1}) \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

鏡像の影響を考慮しているために、式(3.52)は $2N$ 元の連立方程式として表現される。

ここで、音場の対称性から式(3.53)及び式(3.54)の関係を用いると、式(3.52)は(3.55)に書き換えることができる。

$$\varphi_{2d}(\mathbf{r}_{-m}) = \varphi_{2d}(\mathbf{r}_m) \quad (3.53)$$

$$f_{S-n}(\mathbf{r}_{-m}) = f_{Sn}(\mathbf{r}_m) \quad (3.54)$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 + f_{S1}(\mathbf{r}_1) & \cdots & f_{SN}(\mathbf{r}_1) & f_{SN}(\mathbf{r}_{-1}) & \cdots & f_{S1}(\mathbf{r}_{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{S1}(\mathbf{r}_N) & \cdots & 1/2 + f_{SN}(\mathbf{r}_N) & f_{SN}(\mathbf{r}_{-N}) & \cdots & f_{S1}(\mathbf{r}_{-N}) \\ f_{S1}(\mathbf{r}_{-N}) & \cdots & f_{SN}(\mathbf{r}_{-N}) & 1/2 + f_{SN}(\mathbf{r}_N) & \cdots & f_{S1}(\mathbf{r}_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{S1}(\mathbf{r}_{-1}) & \cdots & f_{SN}(\mathbf{r}_{-1}) & f_{SN}(\mathbf{r}_1) & \cdots & 1/2 + f_{S1}(\mathbf{r}_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ \varphi(\mathbf{r}_N) \\ \varphi(\mathbf{r}_{-N}) \\ \vdots \\ \varphi(\mathbf{r}_{-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{2d}(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ \varphi_{2d}(\mathbf{r}_N) \\ \varphi_{2d}(\mathbf{r}_{-N}) \\ \vdots \\ \varphi_{2d}(\mathbf{r}_{-1}) \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

式(3.55)の $2N$ 個の線形方程式のうち、 $\mathbf{r}_{\pm i}$ に関する2式を抜き出し両辺を減算すると(式(3.56))、散乱体表面の速度ポテンシャルに関しても鏡像面に対して対象であることが分かる(式(3.57))。

$$\sum_{m=1}^N \{f_{Sm}(\mathbf{r}_i) - f_{Sm}(\mathbf{r}_{-i})\} \{\varphi(\mathbf{r}_m) - \varphi(\mathbf{r}_{-m})\} = 0 \quad (3.56)$$

$$\therefore \varphi(\mathbf{r}_{-m}) = \varphi(\mathbf{r}_m) \quad (m=1, \dots, N) \quad (3.57)$$

式(3.57)を式(3.55)に代入すると、以下を得る。

$$\begin{bmatrix} 1/2 + f_{S1}(\mathbf{r}_1) & \cdots & f_{SN}(\mathbf{r}_1) & f_{SN}(\mathbf{r}_{-1}) & \cdots & f_{S1}(\mathbf{r}_{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{S1}(\mathbf{r}_N) & \cdots & 1/2 + f_{SN}(\mathbf{r}_N) & f_{SN}(\mathbf{r}_{-N}) & \cdots & f_{S1}(\mathbf{r}_{-N}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ \varphi(\mathbf{r}_N) \\ \varphi(\mathbf{r}_{-N}) \\ \vdots \\ \varphi(\mathbf{r}_{-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{2d}(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ \varphi_{2d}(\mathbf{r}_N) \\ \varphi_{2d}(\mathbf{r}_{-N}) \\ \vdots \\ \varphi_{2d}(\mathbf{r}_{-1}) \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

更に上記を整理すると、結果として N 元の連立方程式として表すことができ(式(3.59)), 式(3.51)を式(3.60)と改めることができる。

$$\begin{bmatrix} 1/2 + f_{S1}(\mathbf{r}_1) + f_{S1}(\mathbf{r}_{-1}) & \cdots & f_{SN}(\mathbf{r}_1) + f_{SN}(\mathbf{r}_{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{S1}(\mathbf{r}_N) + f_{S1}(\mathbf{r}_{-N}) & \cdots & 1/2 + f_{SN}(\mathbf{r}_N) + f_{SN}(\mathbf{r}_{-N}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ \varphi(\mathbf{r}_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{2d}(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ \varphi_{2d}(\mathbf{r}_N) \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \varphi(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ \varphi(\mathbf{r}_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 + f_{S1}(\mathbf{r}_1) + f_{S1}(\mathbf{r}_{-1}) & \cdots & f_{SN}(\mathbf{r}_1) + f_{SN}(\mathbf{r}_{-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{S1}(\mathbf{r}_N) + f_{S1}(\mathbf{r}_{-N}) & \cdots & 1/2 + f_{SN}(\mathbf{r}_N) + f_{SN}(\mathbf{r}_{-N}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \varphi_{2d}(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ \varphi_{2d}(\mathbf{r}_N) \end{bmatrix} \quad (3.59)',$$

$$e(\mathbf{r}) \cdot \varphi(\mathbf{r}) = \varphi_{2d}(\mathbf{r}) - \sum_{n=1}^N \{f_{Sn}(\mathbf{r}) + f_{Sn}(\mathbf{r}')\} \varphi(\mathbf{r}_n) \quad (3.60)$$

where,

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(\mathbf{r}) ; \text{velocity potential at the receiver } [\text{m}^2/\text{s}] \\ e(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & ; \text{receiver } \mathbf{r} \text{ is in the field} \\ 1/2 & ; \text{receiver } \mathbf{r} \text{ is on the smooth boundary} \\ 0 & ; \text{receiver } \mathbf{r} \text{ is out of the field} \end{cases} \\ \varphi_{2d}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4j} \{ H_0^{(2)}(k|\mathbf{p}-\mathbf{r}|) + H_0^{(2)}(k|\mathbf{p}'-\mathbf{r}|) \} \\ \qquad \Rightarrow \text{velocity potential of the real source } \mathbf{p} \text{ and the mirror source } \mathbf{p}' \text{ [m}^2/\text{s}] \\ f_{Sn}(\mathbf{r}) = \frac{k}{4} \int_{S_n} \{ j \cos(\mathbf{n}_s, \mathbf{q}-\mathbf{r}) \cdot H_1^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) + \beta(\mathbf{r}_n) \cdot H_0^{(2)}(k|\mathbf{q}-\mathbf{r}|) \} dS(\mathbf{q}) \\ \qquad \Rightarrow \text{contribution from the surface of the scatter's boundaries } S \text{ and } S' \\ \varphi(\mathbf{r}_n) ; \text{velocity potential on the } n \text{th element of the scatter's boundary } [\text{m}^2/\text{s}] \\ \beta(\mathbf{r}_n) = \rho c \beta_0(\mathbf{r}_n) ; \text{normalized admittance on the } n \text{th element } [\text{kg/Pa} \cdot \text{s}^2] \\ \mathbf{r} ; \text{receiver position} \\ \mathbf{r}' ; \text{mirror receiver position} \\ \mathbf{r}_n ; \text{middle position of the } n \text{th element of the scatter's boundary} \end{array} \right.$$

以上より、鏡像法が適用される音場の解析においては、式 (3.59)' により散乱体表面の速度ポテンシャル $\varphi(\mathbf{r}_n)$ ($n = 1, 2, \dots, N$) を求め、それらを式(3.60)に代入することにより、受音点 \mathbf{r} における速度ポテンシャル $\varphi(\mathbf{r})$ を算出することができる。

この手法により、散乱体の鏡像を含めた $2N$ 個の分割要素による寄与が N 元の連立方程式の解で得ることができ、コンピュータの計算負荷を大幅に軽減することができる。

3-5. 検証モデルへの適用

Application for the examined field

Fig. 2-1 に示したように、本論文における検証モデルは、無限長の剛な床を有する 2 次元音場モデルである。従って、境界要素法による数値解析においては、鏡像法を適用し (Fig. 3-5)，前節 3-4. で述べた手法を用いて数値解析を行う。尚、本論文では、虚音源及び実音源からの個別の寄与の解析も行っており、その際には、Fig. 3-5 の音場モデルから適当な条件を割愛し、鏡像法を用いない手法にて数値解析を行う。

3

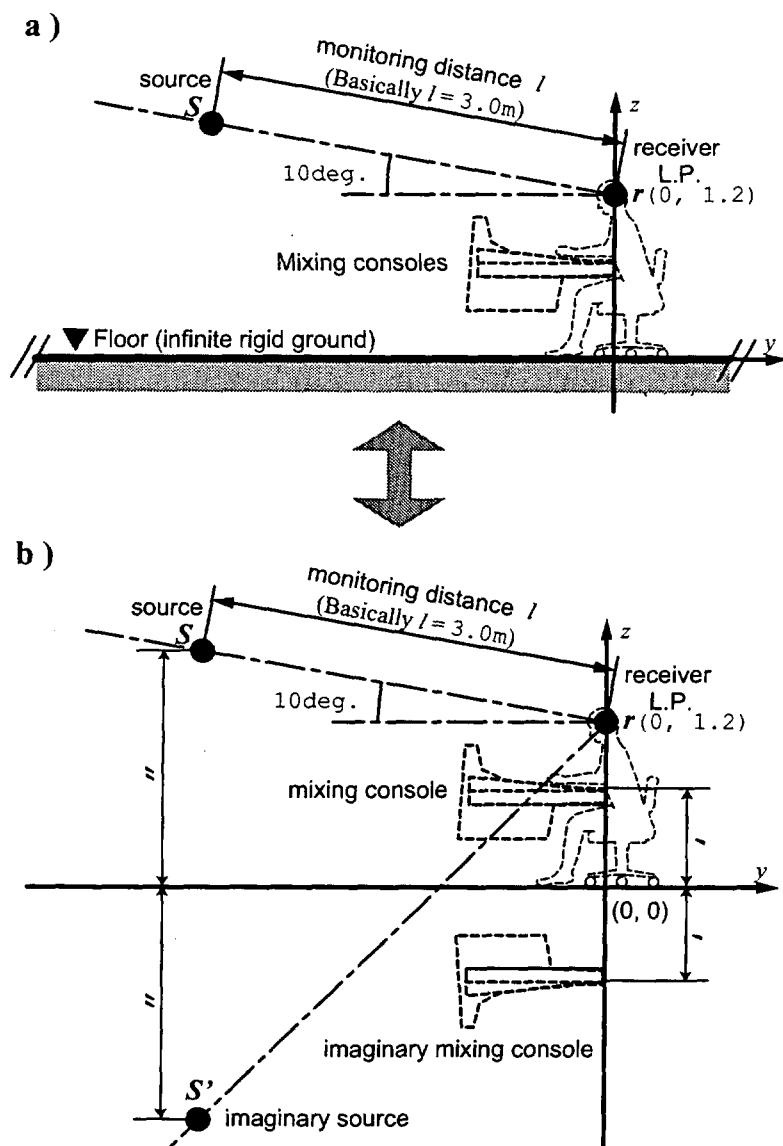


Fig. 3-5 The examined field; a) the original field, b) the equivalent field with the mirror image.

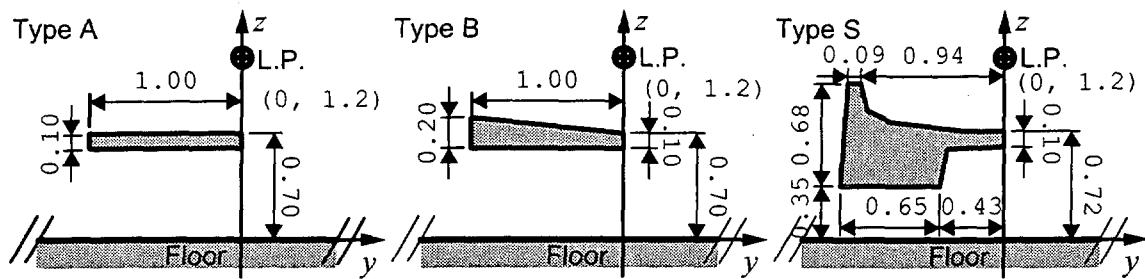


Fig. 2-4 Three types of a mixing console are examined. Unit [m].

3

散乱体となるミキシングコンソール (Fig. 2-4) に関しては、特に断りのない限りその表面アドミッタансは 0、すなわち剛な境界が仮定されている。境界要素を線分に分割する場合、一般的には要素の大きさが小さいほど解析精度を高めることができる。十分な解析精度を得るために境界要素の大きさは、散乱体の形状にもよるが、防音壁形状の境界に関しては、解析波長の $1/8 \sim 1/10$ 程度の大きさを分割要素とすることで十分な解析精度を得られることが報告されている [10]。更に、境界要素寸法の最大値と最小値に大きな差が生じている場合、解析精度が低下することに関する報告されている [11]。これらを踏まえ、本研究では、ミキシングコンソールの境界を「解析周波数の $1/8$ 波長以下」かつ「最大要素の大きさが最小要素の大きさの 2 倍以下」となるように要素分割している。

周波数特性に関しては、 $1/24$ オクターブ間隔での表記により十分な特徴を表現できることが確認されたため、数値計算においては、 $1/24$ オクターブごとに解析周波数を選択し計算を行っている（次節 3-6., Fig. 3-9 ~ Fig. 3-12 参照）。

以下、本研究で用いた境界要素法による数値計算条件をまとめて記す。

1) 鏡像法を適用。

但し、一部の検証を除く。

2) ミキシングコンソールの境界アドミッタанс = 0

但し、一部の検証を除く。

3) ミキシングコンソールの境界分割要素の大きさ

- ・ 解析周波数の $1/8$ 波長以下 かつ,
- ・ 「最大要素の大きさ」 $\leq 2 \times$ 「最小要素の大きさ」

4) 周波数特性算出時の計算周波数間隔

$1/24$ オクターブ間隔

但し、音場にコンソールが存在しない場合、すなわち無限長の剛な床のみが存在する場合の数値解析に関しては、境界要素は用いず、音源関数である Hankel 関数の加算により応答を算出している。尚、上記解析条件の妥当性に関しては、2 次元無響室における測定結果と比較することにより確認を行っている（第 4 章、第 5 章参照）。

3-6. 解の非一意性問題の影響

Effect of the non-uniqueness problem on the numerical calculation

境界要素法を用いた開空間の数値解析では、式(3.40)'における逆行列計算が発散してしまう場合に大きな誤差を生じてしまう。このような現象は、連立方程式(3.40)の左辺行列が階数不足となり、解が一意に定まらない場合に生じる。このような解の非一意性の問題は、一般的に散乱体の内部 Dirichlet 問題の固有周波数において生じることが知られている。

解の非一意性による解析誤差の改善手法に関しては、Schenck による CHIEF (Combined Helmholtz Integral Equation Formulation) [12], Burton と Miller による手法 [13, 14], 石塚による手法 [15, 16] など幾つかの手法が提案されている。

本節では、従来の境界要素法に対する適用が容易であり、改善効果に対する予測が行い易いといった利便性から、石塚の手法を用いて対象モデル(Fig. 3-5)における数値解析誤算の検証を行う。

石塚の手法は、散乱体の境界の内側、すなわち散乱体内部に新たに吸音境界を設けることで解析誤差の生じる周波数帯域を高域へとシフトし、解析帯域内における計算誤差を改善する手法である。イメージ的には、境界表面に対して吸音性の裏面を付加し、散乱体の境界に「厚み」を持たせるモデル化を行う。数値計算自体は従来の手法をそのまま利用するが、結果として、解析誤差は厚みの 2 倍で与えられる波長より高い周波数帯域にシフトされる(Fig. 3-6)。改善効果帯域を広くするためには、厚みを薄くすることで対応可能であるが、それに伴い境界要素の分割寸法が小さくなり計算負荷の増大を促すことになる。

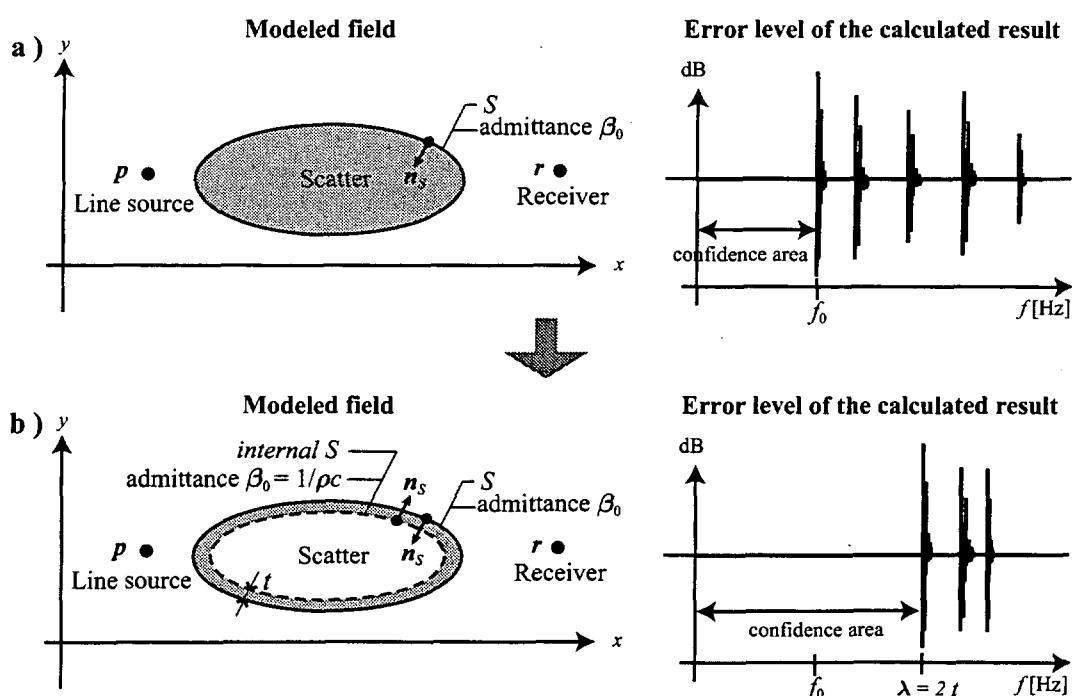


Fig. 3-6 Image illustrating of the Ishiduka's method; a) conventional method, b) improved method.

以下、ミキシングコンソール Type A (Fig. 2-4)に石塚の手法を適用し、本検証モデルにおける解析誤差に関して検証を行う。

解析モデルを Fig. 3-7 に示す。ここでは、解析誤差改善のために、ミキシングコンソールの内部に新たに完全吸音性(アドミッタンス $1/\rho c$)の境界が設けられている。内部吸音境界と表面境界とのオフセット距離は、 $t = 3\text{cm}$ とした。従って、 $\lambda \geq 2 \times t$ 、すなわち 5.7kHz 以下の帯域にて解析誤差の改善が期待できる。

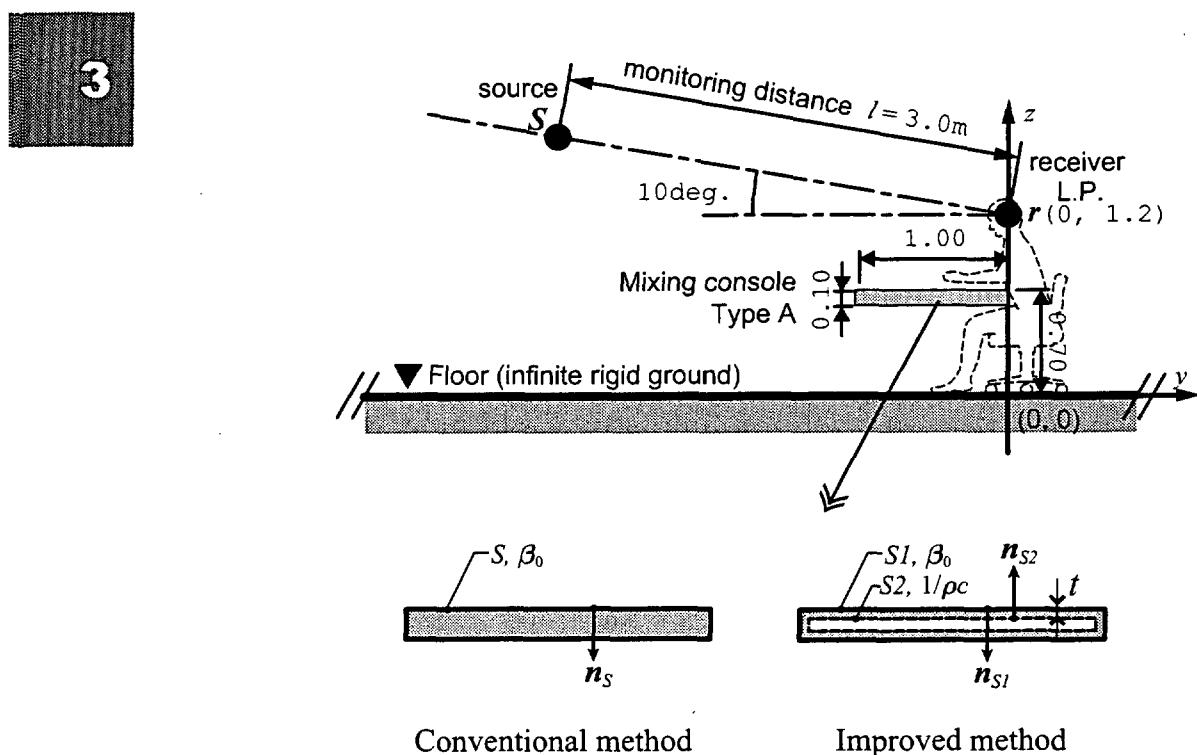


Fig. 3-7 The modeled field with improved technique. The interior absorbing boundary is inserted.

Type A のミキシングコンソールにおける内部 Dirichlet 問題は、式 (3.61) で表され、その固有周波数は式 (3.62) で表される。ここで、内部 Dirichlet 問題は、境界上の音圧を 0 とした場合の音圧モード関数であり、境界上の粒子速度を 0 とし、cos 関数で表現される一般的な室の音圧モード関数とは異なっている。

$$p(y, z) = A \cdot \sin\left(\frac{n_y \pi y}{l_y}\right) \cdot \sin\left(\frac{n_z \pi z}{l_z}\right) \quad (3.61)$$

$$f_0(n_y, n_z) = \sqrt{\left(\frac{c \cdot n_y}{2l_y}\right)^2 + \left(\frac{c \cdot n_z}{2l_z}\right)^2} \quad (3.62)$$

where, $\begin{cases} c ; \text{sound speed [m/s]} \\ l_y ; \text{depth of the mixing console, 1.0 [m]} \\ l_z ; \text{thickness of the mixing console, 0.1 [m]} \\ n_y, n_z = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$

3

以下に、固有周波数 f_0 を一番低いものから 10kHz まで列挙する(一部割愛)。

Table 3-1 Natural frequencies of the interior Dirichlet problem for Type A mixing console.

No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(n_y, n_z)	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)	(7, 1)	(8, 1)	(9, 1)	(10, 1)
f_0 [Hz]	1.73k	1.75k	1.79k	1.85k	1.92k	2k	2.1k	2.2k	2.31k	2.43k
No.	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(n_y, n_z)	(11, 1)	(12, 1)	(13, 1)	(14, 1)	(15, 1)	(16, 1)	(17, 1)	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)
f_0 [Hz]	2.55k	2.68k	2.82k	2.95k	3.1k	3.24k	3.39k	3.44k	3.45k	3.47k
\vdots										
No.	221	222	223	224	225	226	227	228	229	230
(n_y, n_z)	(48, 3)	(53, 2)	(27, 5)	(56, 1)	(41, 4)	(28, 5)	(49, 3)	(54, 2)	(29, 5)	(57, 1)
f_0 [Hz]	9.72k	9.73k	9.76k	9.77k	9.84k	9.84k	9.87k	9.89k	9.93k	9.94k
No.	231	232								
(n_y, n_z)	(42, 4)	(50, 3)								
f_0 [Hz]	9.96k	10.01k								

Table 3-1 より、検証モデル(Fig. 3-7)において改善手法を用いない場合、1.7kHz 以上の周波数帯域にて解析誤差が生じることが予測される。また、前述したように改善手法を用いた場合に予測される改善帯域は 5.7kHz 以下である。従って、改善手法を用いた場合、1.7kHz ~ 5.7kHz の帯域にて誤差の改善が期待できる。

Fig. 3-8 に、改善手法を用いない場合と改善手法を用いた場合の計算結果を示す。計算は、 $1\text{kHz} \sim 7\text{kHz}$ の帯域において 2Hz ごとに L.P. における応答を算出した。図中、灰色線が改善手法を用いない場合の計算結果であり、黒色線が改善手法を用いた場合の計算結果である。結果は、自由音場における音源応答で基準化している。尚、図中の下向き矢印は、内部 Dirichlet 問題における固有周波数を表している。Fig. 3-8 によると、 5.7kHz 近辺では逆に乱れが生じているものの、改善手法を用いることにより、 $1.7\text{kHz} \sim 5.7\text{kHz}$ の帯域において従来の手法において見られる鋭いピーク成分が改善されていることが分かる。特に、固有周波数が集中するあたりの周波数において改善効果を確認することができる。

3

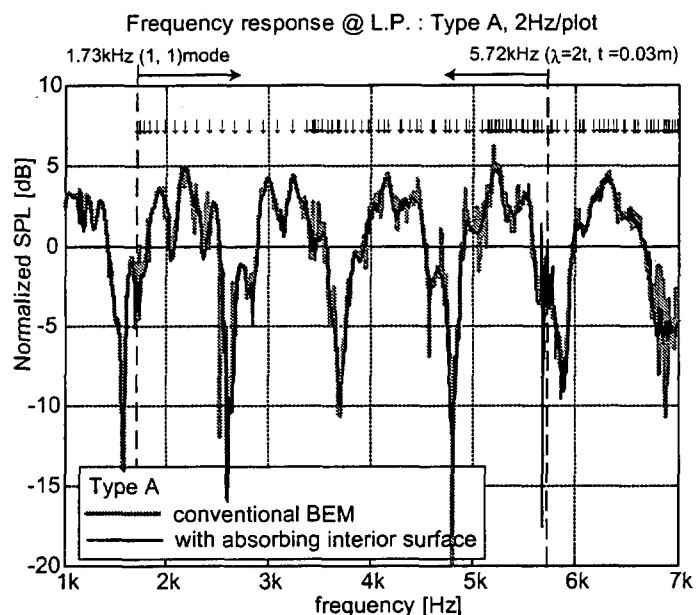


Fig. 3-8 Comparison of the two calculated results; the conventional BEM and the improved method proposed by Ishiduka. The modeled field is shown in Fig. 3-7. Type A mixing console is inserted. The gray and the black lines indicate the results via the conventional method and the improved method, respectively. The 0dB indicates the response in a free sound field. Down arrows indicate the natural frequencies of the interior Dirichlet problem for the Type A mixing console. Calculation was conducted at 2Hz intervals.

Fig. 3-8 により、石塚の手法を数値解析に取り入れることにより、検証モデルにおける特性改善に効果があることが確認された。しかし、改善手法の有無による計算結果の違いは小さく、実用的には無視できる程度であると考えられる。Fig. 3-9 は、同様の計算を $10\text{Hz} \sim 10\text{kHz}$ の帯域において、 $1/96$ オクターブごとの周波数において行った結果である。図中、灰色線が改善手法を用いない場合の計算結果であり、黒色線が改善手法を用いた場合の計算結果である。Fig. 3-9 によると、このような実用範囲の数値計算においては、ミキシングコンソールの内部 Dirichlet 問題における計算誤

差の影響はほぼ無視できることが分かる。また、Fig. 3-10 は、同様の計算を 1/24 オクターブごとの周波数において行った結果である。Fig. 3-9、同様に内部 Dirichlet 問題における計算誤差の影響は無視できることが分かる。また、Fig. 3-9 と Fig. 3-10 を比較すると、特に本研究で対象としている中低域における周波数特性の解析精度としては 1/24 オクターブごとの周波数における演算で十分にその特徴を表現できていることが分かる。同様に、Type B, Type S のミキシングコンソール (Fig. 2-4) に関して、改善手法の有無による違いを 1/24 オクターブごとの周波数において計算した結果をそれぞれ Fig. 3-11, Fig. 3-12 に示す。Type A の場合の計算結果と同様に、Type B, Type S のミキシングコンソールについても、本研究で対象としている中低域特性においては、内部 Dirichlet 問題における計算誤差の影響は無視できると考えられる。

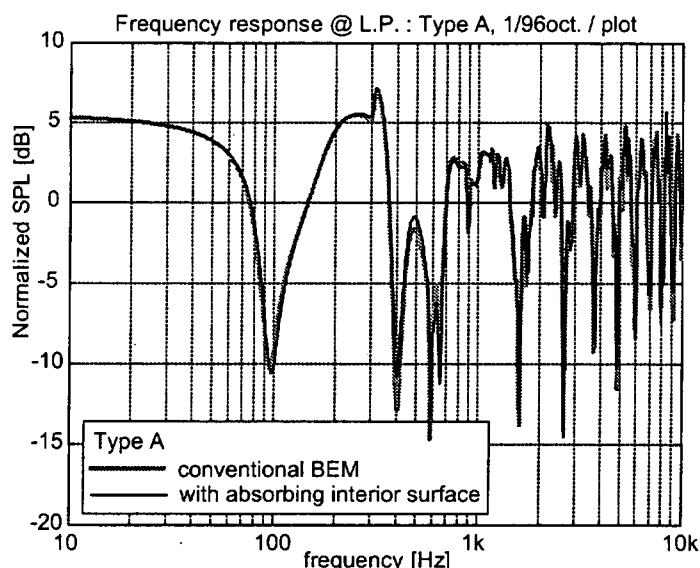


Fig. 3-9 Comparison of the two calculated results; the conventional BEM and the improved method proposed by Ishiduka. Calculation was conducted at 1/96 octave intervals. Other conditions are same as the one of Fig. 3-8.

3

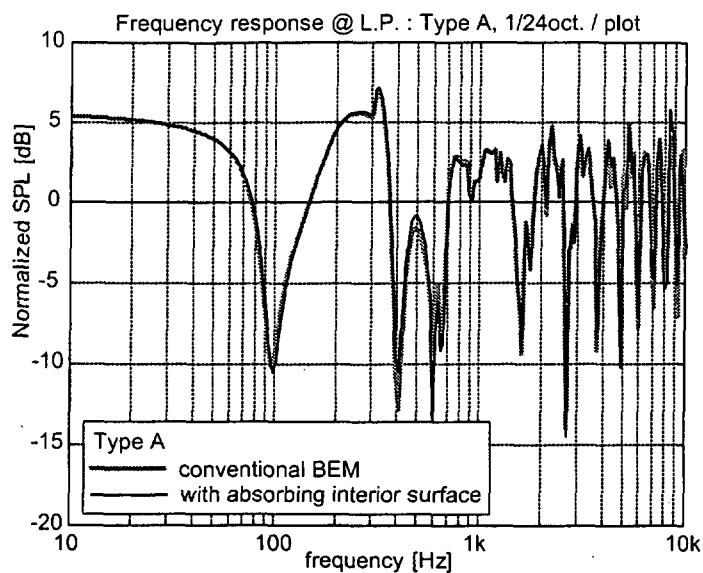


Fig. 3-10 Comparison of the two calculated results; the conventional BEM and the improved method proposed by Ishiduka. Calculation was conducted at 1/24 octave intervals. Other conditions are same as the one of Fig. 3-9.

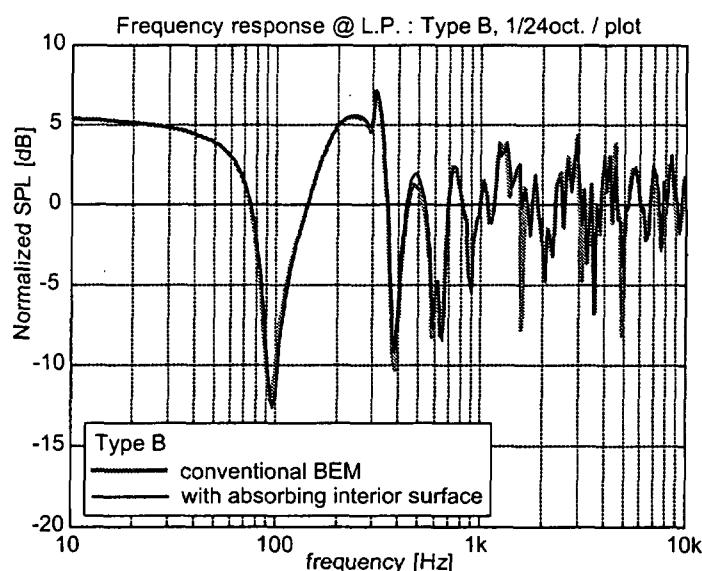


Fig. 3-11 Comparison of the two calculated results; the conventional BEM and the improved method proposed by Ishiduka. Type B mixing console is inserted. Other conditions are same as the one of Fig. 3-10 (Calculation was conducted at 1/24 octave intervals).

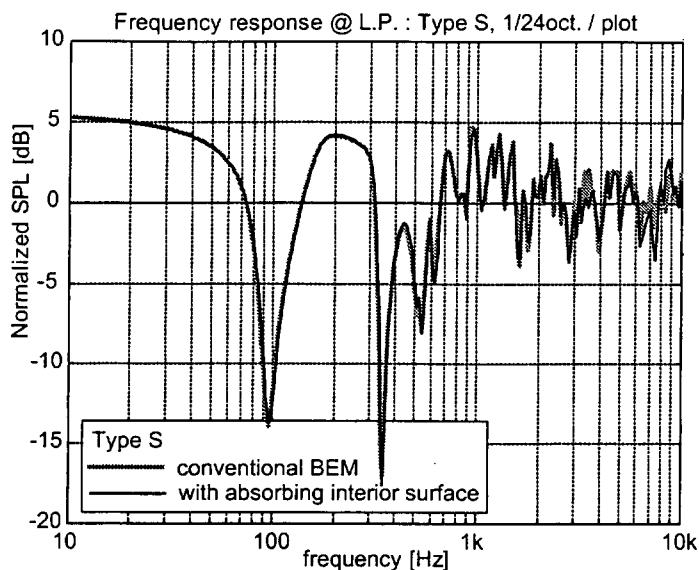


Fig. 3-12 Comparison of the two calculated results; the conventional BEM and the improved method proposed by Ishiduka. Type B mixing console is inserted. Other conditions are same as the one of Fig. 3-11 (Calculation was conducted at 1/24 octave intervals).

内部 Dirichlet 問題における計算誤差が顕著に表れない理由としては、本研究で扱う音場が、直接音の影響が大きい音場であり、散乱体（ミキシングコンソール）境界面上における積分計算誤差がによる影響が少ないためであると考えられる。音源に対してミキシングコンソールの影となるような受音点において計算を行う場合はこの点に注意する必要があるが、本研究の主対象となる受音点、すなわちリスニングポイント（L.P.）は、常に音源を直接臨む位置に設定されるため、本研究では内部 Dirichlet 問題における計算誤差が無視できるものと考える。

以上より、本研究では、特別な改善手法は適用せず、従来の境界要素法の手法を用いて数値解析を行う。また、周波数特性の算出においては、1/24 オクターブ間隔にて計算を行うこととする。