

Noise shielding efficiency of barriers with special edge shapes

石塚, 崇

<https://doi.org/10.15017/458564>

出版情報 : Kyushu Institute of Design, 2003, 博士 (芸術工学), 課程博士
バージョン :
権利関係 :

付 録 A 境界積分の算出

第 2 章において、境界要素法を用いた音場の数値解析手法について示した。実際に計算機上でこの手法による数値解析を実行するためには、式 (2.30) あるいは式 (2.65), (2.78) 中に示した境界要素上における積分を数値的に算出できる形で表す必要がある。ここでは、第 2 章第 3 節で示した散乱体表面の音響インピーダンスのみ考慮した解析を例にとり、境界 S_n 上の積分、

$$f_{S_n}(\mathbf{r}) = \frac{k}{4} \int_{S_n} \left\{ j \cos(\mathbf{n}, \mathbf{q} - \mathbf{r}) H_1^{(2)}(k|\mathbf{q} - \mathbf{r}|) + \beta(\mathbf{r}_n) H_0^{(2)}(k|\mathbf{q} - \mathbf{r}|) \right\} dS(\mathbf{q}) \quad (2.30')$$

を計算機上で演算可能な形で表す [45]。

なお、多孔質材内部音場を考慮した解析における式 (2.65), (2.78) 中の境界積分の算出、あるいは、被積分関数が複雑にはなるが音響インテンシティ解析における式 (2.107) に示した境界積分 (NDF) の算出についても基本的な考え方はここで示したものと同様である。

A.1 積分を実行する境界上に受音点が含まれない場合

まず、一般的な状況として受音点 $\mathbf{r}$ が積分を実行する境界 S_n 上に無い場合について説明する。例えば、式 (2.32) 中の係数行列の対角成分以外を算出する際の状況に相当する。

ここで、計算機上では受音点、境界要素等の位置を直交座標系を用いて表すものとする。Fig. A.1 に示すように、ある境界要素 S_n の一端を (x_1, y_1) 、他端を (x_2, y_2) とする。ここでは、便宜上点 (x_1, y_1) を境界要素の始点、点 (x_2, y_2) を終点と呼ぶ。また、要素中点を (x_m, y_m) とする。図示したように、要素 S_n に沿って t 軸を設定し、要素の始点を $t = -1$ 、終点を $t = 1$ とする局所座標を導入すると、要素上の任意の点 $\mathbf{q} : (x_q, y_q)$ は変数 t を用いて以下のように表すことができる。

$$\mathbf{q} \equiv (x_q, y_q) = \left(x_m + \frac{x_2 - x_1}{2} t, y_m + \frac{y_2 - y_1}{2} t \right) \quad (-1 \leq t \leq 1) \quad (\text{A.1})$$

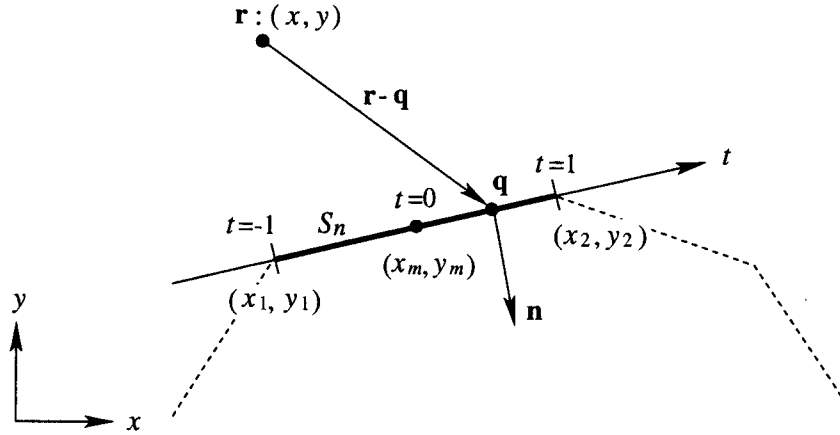


Fig. A.1: Local coordinates for calculating an integral $f_{S_n}(\mathbf{r})$ on a boundary element S_n .

また, S_n 上の積分はこの局所座標を用いて,

$$\int_{S_n} dS(\mathbf{q}) = \int_{\mathbf{q}(t)=(x_1, y_1)}^{\mathbf{q}(t)=(x_2, y_2)} d\mathbf{q}(t) = \frac{l}{2} \int_{-1}^1 dt \quad (\text{A.2})$$

where,

l : Length of the boundary element

と変換される。受信点座標を $\mathbf{r} = (x, y)$ とすると, 上の2式より式(2-30')は

$$f_{S_n}(\mathbf{r}) = \frac{k}{4} \cdot \frac{l}{2} \int_{-1}^1 \left\{ j \cos(\mathbf{n}, \mathbf{q} - \mathbf{r}) H_1^{(2)}(k|\mathbf{q} - \mathbf{r}|) + \beta(\mathbf{r}_n) H_0^{(2)}(k|\mathbf{q} - \mathbf{r}|) \right\} dt \quad (\text{A.3})$$

where,

$$\mathbf{q} - \mathbf{r} = (x_q - x, y_q - y) = \left(x_m + \frac{x_2 - x_1}{2} t - x, y_m + \frac{y_2 - y_1}{2} t - y \right) \quad (\text{A.4})$$

と表される。被積分関数中の Hankel 関数の引数に関しては式(A.4)より, ベクトル $(\mathbf{q} - \mathbf{r})$ の大きさを算出すれば良い。

残る方向余弦 $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{q} - \mathbf{r})$ について以下に示す。ここで, Fig. A.2 に示すように, 単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ は要素の始点から終点に向かって常に右側を向いているものとする。この場合, ベクトル $\mathbf{n}$ は要素の始点から終点に引いたベクトルを時計回りに $\pi/2$ 回転させ, それを要素長で割ることで求まる。ベクトルを回転させる一次変換は以下のように行列表現される。

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

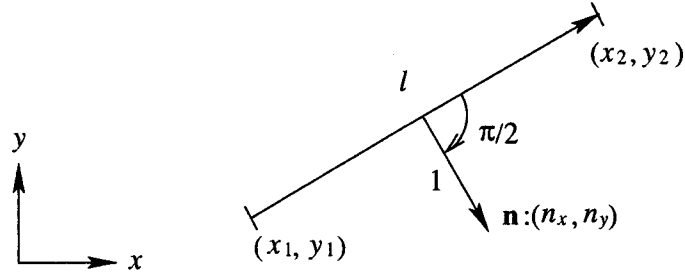


Fig. A.2: A unit normal vector on a boundary element.

ここで, θ は反時計回りを正とする回転角である。上式よりベクトル $\mathbf{n}$ の x, y 方向成分 n_x, n_y は,

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \frac{1}{l} \cdot A \left(-\frac{\pi}{2} \right) \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{l} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_2 - y_1}{l} \\ -\frac{x_2 - x_1}{l} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

となる。したがって, 方向余弦 $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{q} - \mathbf{r})$ は,

$$\begin{aligned} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{q} - \mathbf{r}) &= \frac{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{r})}{|\mathbf{n}| |\mathbf{q} - \mathbf{r}|} \\ &= \frac{(y_2 - y_1)(x_q - x) - (x_2 - x_1)(y_q - y)}{l \sqrt{(x_q - x)^2 + (y_q - y)^2}} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

と表すことができる。ここで, $(x_q - x)$ および $(y_q - y)$ は式 (A.4) の通りである。

以上の定式化により, 境界積分 $f_{S_n}(\mathbf{r})$ を t 軸上の線積分として表すことができる。式 (A.3) の定積分は陽な形で求めることができないため, 実際には数値積分により積分値を求める。本論文における数値計算では, Gauss-Legendre 積分 [46] を用いて積分値を算出している。

上述したように, ここでは法線ベクトルは要素の始点から終点に向かって常に右側を向いているものとしている。計算機上で境界要素に座標を与える際にはこの点に留意し, 法線ベクトルが解析対象とする音場に対して外向きになるように各要素の始点および終点を設定する必要がある。

A.2 積分を実行する境界要素の midpoint に受信点がある場合

多くの場合は、前節に示した方法で境界積分を数値的に算出することができる。しかし、(2.32) 中の係数行列の対角成分を算出する際には、受信点を積分を実行する境界要素の midpoint に設定する。このため、その積分値の算出には前節と異なる定式化が必要になる。

Fig. A.3 に示すように、受信点 $\mathbf{r}$ が積分を実行する境界要素 S_n の midpoint $\mathbf{r}_n$ にあるとする。この場合、法線ベクトル $\mathbf{n}$ とベクトル $(\mathbf{q} - \mathbf{r}_n)$ は常に直交することになり、

$$\cos(\mathbf{n}, \mathbf{q} - \mathbf{r}_n) = 0 \quad (\text{A.8})$$

が成り立つ。上式より、境界積分 $f_{S_n}(\mathbf{r}_n)$ は以下のように簡略化される。

$$f_{S_n}(\mathbf{r}_n) = \frac{k}{4} \int_{S_n} \beta(\mathbf{r}_n) H_0^{(2)}(k|\mathbf{q} - \mathbf{r}_n|) dS(\mathbf{q}) \quad (\text{A.9})$$

ところで、図中の受信点 $\mathbf{r}_n$ を囲む半円筒 Γ_r は、第 2 章第 2 節で Helmholtz-Huygens 積分を導出する際に考えた受信点を囲む半径 ε_r ($\varepsilon_r \ll 1$) の小円筒である。受信点が境界上にある場合、図示したように半円筒となる。したがって、境界積分の積分路は図中でこの部分を除いた直線状の実線部分となる。また、被積分関数が点 $\mathbf{q}$ に関して点 $\mathbf{r}_n$ を中心とした偶関数であることから、式 (A.9) は要素長を l として、

$$\begin{aligned} f_{S_n}(\mathbf{r}_n) &= \frac{k\beta(\mathbf{r}_n)}{4} \cdot 2 \lim_{\varepsilon_r \rightarrow 0} \int_{\varepsilon_r}^{l/2} H_0^{(2)}(kt) dt \\ &= \frac{\beta(\mathbf{r}_n)}{4} \cdot 2 \lim_{\varepsilon_r \rightarrow 0} \int_{k\varepsilon_r}^{kl/2} H_0^{(2)}(z) dz \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

と表される。

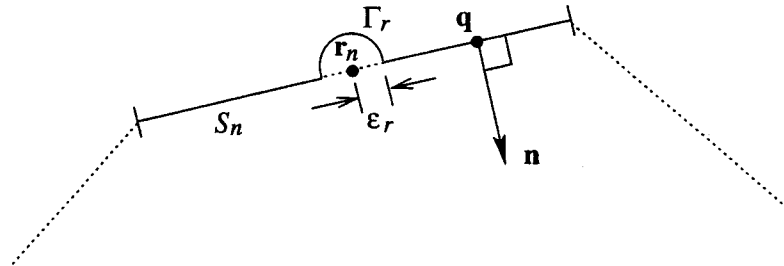


Fig. A.3: A boundary element and a receiver point at the middle point of it.

ここで, Hankel 関数の定積分,

$$\lim_{b \rightarrow 0} \int_b^a H_0^{(2)}(z) dz$$

を求める。Hankel 関数を級数展開すると [11],

$$\begin{aligned} H_0^{(2)}(z) &= J_0(z) - jY_0(z) \\ &= \sum_m \frac{(-z^2/4)^m}{m!\Gamma(m+1)} - j \left\{ \frac{2}{\pi} \log(z/2) \sum_m \frac{(-z^2/4)^m}{m!\Gamma(m+1)} - \frac{2}{\pi} \sum_m \psi(m+1) \frac{(-z^2/4)^m}{m! \cdot m!} \right\} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m}}{(m!)^2} \left[1 - j \frac{2}{\pi} \{ \log(z/2) - \psi(m+1) \} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

where,

$$\Gamma(m+1) = m! \quad (\Gamma: \text{Gamma function}) \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} \psi(1) &= -\gamma, \quad \psi(m+1) = -\gamma + \sum_{n=0}^m n^{-1} \\ (\gamma &= 0.5772156649 \dots : \text{Euler's constant}) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

と表せる。上式より不定積分は,

$$\begin{aligned} &\int H_0^{(2)}(z) dz \\ &= \int \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m}}{(m!)^2} \left[1 - j \frac{2}{\pi} \{ \log(z/2) - \psi(m+1) \} \right] dz \\ &= 2 \int \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \cdot \frac{d}{d(z/2)} \left\{ \frac{(z/2)^{2m+1}}{2m+1} \right\} \cdot \left[1 - j \frac{2}{\pi} \{ \log(z/2) - \psi(m+1) \} \right] d(z/2) \\ &= 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m+1}}{(m!)^2 (2m+1)} \left[1 - j \frac{2}{\pi} \{ \log(z/2) - \psi(m+1) \} \right] \\ &\quad - 2 \int \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2 (2m+1)} \left(-j \frac{2}{\pi} \right) (z/2)^{2m} d(z/2) \\ &= 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m+1}}{(m!)^2 (2m+1)} \left[1 - j \frac{2}{\pi} \{ \log(z/2) - \psi(m+1) \} \right] \\ &\quad - 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2 (2m+1)} \cdot \left(-j \frac{2}{\pi} \right) \frac{(z/2)^{2m+1}}{2m+1} \\ &= 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m+1}}{(m!)^2 (2m+1)} \left[1 - j \frac{2}{\pi} \left\{ \log(z/2) - \psi(m+1) - \frac{1}{2m+1} \right\} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

となる。したがって求める定積分は,

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow 0} \int_b^a H_0^{(2)}(z) dz \\ = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (a/2)^{2m+1}}{(m!)^2 (2m+1)} \left[1 - j \frac{2}{\pi} \left\{ \log(a/2) - \psi(m+1) - \frac{1}{2m+1} \right\} \right] \\ - \lim_{b \rightarrow 0} 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (b/2)^{2m+1}}{(m!)^2 (2m+1)} \left[1 - j \frac{2}{\pi} \left\{ \log(b/2) - \psi(m+1) - \frac{1}{2m+1} \right\} \right] \end{aligned}$$

であり, ここで $m \geq 0$ のとき,

$$\lim_{b \rightarrow 0} (b/2)^{2m+1} \log(b/2) = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{\{\log(b/2)\}'}{\{(b/2)^{-(2m+1)}\}'} = \lim_{b \rightarrow 0} \frac{(b/2)^{2m+1}}{2m+1} = 0$$

より,

$$\lim_{b \rightarrow 0} \int_b^a H_0^{(2)}(z) dz = a \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (a/2)^{2m}}{(m!)^2 (2m+1)} \left[1 - j \frac{2}{\pi} \left\{ \log(a/2) - \psi(m+1) - \frac{1}{2m+1} \right\} \right] \quad (\text{A.15})$$

となる。

上式より, 式 (A.10) は,

$$\begin{aligned} f_{S_n}(\mathbf{r}_n) &= \frac{\beta(\mathbf{r}_n)}{4} \cdot 2 \lim_{\varepsilon_r \rightarrow 0} \int_{k\varepsilon_r}^{kl/2} H_0^{(2)}(z) dz \\ &= \frac{\beta(\mathbf{r}_n) kl}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (kl/4)^{2m}}{(m!)^2 (2m+1)} \left[1 - j \frac{2}{\pi} \left\{ \log(kl/4) - \psi(m+1) - \frac{1}{2m+1} \right\} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

と表せる。この式 (A.16) と式 (A.13) を用いて, 受音点が積分を実行する境界の midpoint にある場合の境界積分 $f_{S_n}(\mathbf{r}_n)$ を算出することができる。実際の解析においては, 式中の無限級数は $m = 20$ で打ち切るものとしている [45]。