

## フラクタル時系列の予測手法を用いた株価予測の検討

時永, 祥三  
九州大学経済学部 : 教授

<https://doi.org/10.15017/4494414>

---

出版情報 : 経済學研究. 64 (1/2), pp.39-63, 1997-09-30. 九州大学経済学会  
バージョン :  
権利関係 :



# フラクタル時系列の予測手法を用いた株価予測の検討

時 永 祥 三

## 1. まえがき

自然界に存在する幾何学模様，物理化学における結晶や相の成長を説明する理論としてフラクタル理論が注目されている<sup>1)2)</sup>。更に，株価や通信トラヒックなどの社会現象についても，統計的な多重化の効果を反映するフラクタルな性質が見いだされることがわかっている。フラクタル理論の技術的な応用として，図形の符号化，フラクタル時系列の信号検出などがある。特に，著者らが示したフラクタル理論を用いた時系列予測の手法は，単なるフラクタル性の説明ではなく，フラクタル理論の応用手法を展開しており，株価予測などの有力な手掛かりを与えている<sup>3)-6)</sup>。

本論文では，フラクタル時系列の典型である株価時系列に注目して，フラクタル性をもつ根拠，予測手法の適合性，株価予測の具体的な応用について述べている。著者らは，すでにフラクタル時系列の予測手法の基礎理論ならびにフラクタル次元の推定方法を示し，更に，非フラクタル時系列のフラクタル信号と ARMA フィルタによる近似方法などとあわせて，株価予測，通信トラヒック予測，需要予測などの具体的な応用例をあげている<sup>3)-6)</sup>。そのなかで，課題として残されていることがらがあり，これらは計算時間に関する事，予測する場合の原系列の選択方法，フラクタル性の根拠となる長期的相関の性質，非フラクタル時系列の近似問題である。これらの課題は，具体的な応用事例が拡大するにつれて解決されていくものであるが，本論文では，これらの基本的な性質を整理している。

以下，2. ではフラクタルとはなにかを簡単に説明し，特に時系列解析での応用について説明する。3 ではフラクタル性をもつ時系列のインパルス応答関数をスケール関数により近似的に展開する方法について示し，時間軸方向にインパルス応答を伸長することにより予測が行える原理を示す<sup>3)4)</sup>。4. では与えられて時系列がフラクタル性をもっているかどうか，更にフラクタル時系列である場所にその次元がいくらになるかを，ウェーブレット変換を用いて推定する方法を示す<sup>4)6)</sup>。5. では，ブラウン運動などをコンピュータにより発生させる手法を応用してシミュレーションによりさまざまな時系

列を発生させ、時系列がフラクタル性をもつための条件を整理する。6. では、フラクタル時系列予測手法の基本となっている時間軸の伸長についてやや詳しく論じ、計算誤差の原因、その解決方法、計算時間の短縮方法などについて考察する。7. では、本論文で示すフラクタル時系列の予測手法を証券投資に応用する基本的な枠組みについて述べる。

## 2. フラクタルの基本的性質

### 2.1 自己相似性と拡大縮小

フラクタルを説明する例題として、図1に示すコッホ曲線(同様なものとして海岸線)、あるいは金属結晶の成長(同様なものとして雪の結晶、河川の形状)がある。これらの特徴は、全体の図形を縮小したものが、図形の部分に類似していること(逆に部分図形を拡大すると全体に類似している)である。拡大縮小により完全に一致する図形は得られないが、概形は良く似たものになる。フラクタル性はこのような幾何学的な図形に限らずに、状態についても説明理論として用いられる。例えば、株式投資において、機関投資家が数億円の単位で利益をあげることに、個人投資家が数万円の利益を上げることが、金額ベースでは大きく異なっているが、株の相場を判断する方法は同じようになされている。すなわち、株価に取り引き数量がかけられるだけであり、株価の挙動あるいはその認識は同様になされる。

これを拡大して、更に、現象の発生にまで解釈の根拠として用いられる。例えば、地震の発生場所(震源)をとった場合、ある時点(地中)から半径 $r$ 以内にある震源の存在確率はフラクタル性もっている。すなわち、半径 $r$ を大きくとった場合には、震源が存在しない地点が存在するが、 $r$ を小さくして見ても、やはり震源が存在しない地点が見いだせる。あるいは、通信回線に発生する通信誤り(エラー)の発生も、発生した前後に集中的に発生し、エラーが発生しない空白部分も存在する。このような現象を、特に長期的な相関よんでいる。フラクタル性とは、実はこのような長期的、あるいは空間的な相関の広がり指しているとも言える。

### 2.2 フラクタル次元

幾何学的には点は0次元、直線は1次元、平面は2次元、空間は3次元であるが、次元を自由度で解釈するならば非整数の次元を定義することができる。例えば、ペアノ線とよばれるボックス状の線

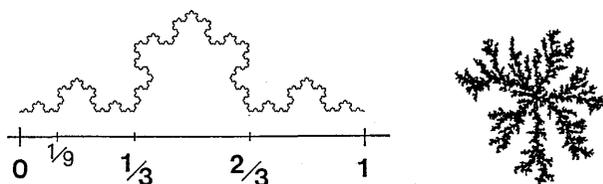


図1 コッホ曲線と金属結晶成長

で2次元の平面を覆い尽くすことができる。同様に空間図形についても経験的な次元とは異なる定義が必要であることが示される。

フラクタル次元についての解釈はさまざまであるが、ユークリッド幾何学的な複雑さ（整数）に対する実質的な複雑さ、相似形が現れる場合の比例定数のようなものと解釈できる。特に、相似形の場合には拡大のサイズなどと密接に関連してくる。

次元にはいくつかの定義が可能であり、異なる次元の値を取るケースも存在する。以下では、代表的な次元の定義を与える。

(a) 相似性次元

経験的に矛盾しない次元の定義であり、ある図形が、その全体を  $1/a$  に縮小した場合の相似形の  $b$  個の集合に類似している場合に、次元  $D$  は

$$D = \log b / \log a \quad (1)$$

で与えられる。

(b) 容量次元

古くはコルモゴロフにより1902年ごろに定義された次元である。 $d$ 次元のユークリッド空間における半径 $\epsilon$ の $d$ 次元の球によって、その集合を被覆するのに最小 $N(\epsilon)$ 個の球が必要であるとき、次元 $D$ は

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \log N(\epsilon) / \log(1/\epsilon) \quad (2)$$

で与えられる。正確な定義を理解するには測度の定義が必要であるが、ここでは被覆する複雑さであると解釈しておく。

(c) 情報量次元

情報理論におけるエントロピーを拡大したものであり、現象や状態に含まれるフラクタル性を定義する。いま、状態 $i$ にある確率を $p_i$ とすると、情報量 $I$ （エントロピー）は

$$I(r) = \sum p_i(r) \log p_i(r) \quad (3)$$

で与えられる。ただし、 $r$ は状態を計測するパラメータであり、被覆する球の半径や平面の場合の正方形の辺の長さなどである。 $r$ を微小変化させたときのエントロピー $I(P, \epsilon)$ との相対値により次のように定義される。

$$D = (I(P, \epsilon) - I(P)) / \log r \quad (4)$$

(d) 確率分布より定義

月のクレータの分布関数などで用いられている定義であり、直径 $r$ 以上のクレータの存在確率を $P(r)$ とした場合に、写真や縮尺を変えても分布は変わらないとの前提で

$$P(r) = cP(\lambda r) \quad (5)$$

となる必要があり、これから確率分布関数は

$$p(r) = cr^{-D} \quad (6)$$

の形になることがわかる。この場合の $D$ で次元を定義する。

(e) 相関関数、スペクトルによる定義

主として時系列解析の場合の次元の定義であり、離れた地点における観測値が相互に関連している

ことがフラクタル性であるとみなされる。従って、相関関数は指数型のように急速にゼロに近づくものではなく、べき乗に比例して減少する必要がある。相関関数を  $C(r)$  としたときに、

$$C(r) = cr^{-(d-D)} \quad (7)$$

により定義される  $D$  を次元とする。ただし、 $d$  はユークリッド空間の次元である。スペクトルによる定義も同様であり

$$S(\omega) = \omega^{-(5-2D)} \quad (8)$$

で定義される場合の  $D$  で与えられる。

### 2.3 フラクタル時系列

経済分析の場合には、地理的な分析など平面、空間が関連するケースもあるが、最もよく出会うのは、時系列分析であろう。従って、以下では時系列におけるフラクタル性について考察する。

時系列におけるフラクタル性の定義、あるいはそれに関連した次元の定義として、2.2 にあげたものの中で、(e) 相関係数 (あるいはスペクトル) あるいは (a) 相似性次元が利用可能であろう。相似性次元については、時系列の見方によっては、(b) 容量次元を用いることも可能であろう。しかし、計測に用いる  $\epsilon$  の定義が面倒であるので、単純に、相似形の図形が全体にいくつ含まれるかをみる相似性次元の方が理解しやすい。

フラクタルを相関係数 (あるいはスペクトル) で定義することは、時系列解析一般については便利であろうが、以下でわれわれが取り扱う時系列の予測 (時間域解析) の目的には適していない。時間域解析では、時間軸方向に相似形がいくつあり、その全体の形状とどのように似ているかを直接的に見るほうが有効である。

さて、スペクトルで定義される次元と、相似性次元とは一般には一致しないが、時系列では極めて近い値をとると仮定しておく。このとき、時系列のフラクタル次元  $D$  と自己相似性は、次のようにいくつかの角度から解釈される。

#### (1) 相似性次元による解釈

時系列を 2 次元平面上の曲線と考え、その複雑さの度合としてフラクタル次元を考える。具体的には、コッホ曲線の場合と同様に部分的な図形が連続して 1 つの全体を構成し、これが部分図形の拡大となっていると解釈する。そのように見なすと、 2 に示すような部分図形の時間軸方向への拡大により、全体図形をカバーする場合を想定すればよい。この場合次元は 1 と 2 の間の値をとり線分と平面との中間に位置する。

#### (2) スペクトルによる解釈

フラクタル時系列のスペクトルは周波数のべき乗の形をしているので時間域と周波数域のラプラス変換を通じたスケール変換の関係式

$$L[f(t/a)] = aF(as)$$

により、時間軸上の伸長により同じような波型が現れることが分かる。ただし、 $f(t)$  は時系列、 $F(s)$  はそのラプラス変換である。スペクトルがべき乗であるので、 $F(s)$  と  $F(as)$  は同様の形であり、これ

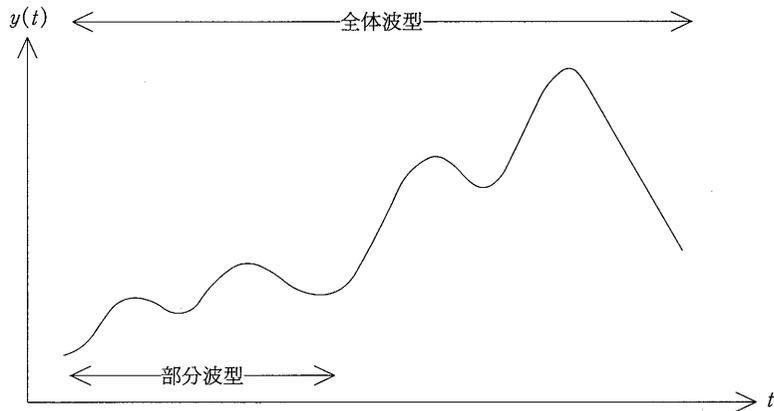


図2 フラクタル時系列の自己相似性

より、 $f(t)$ ,  $f(t/a)$  が同様な統計的な性質を持つことが保証される。

以上のように、フラクタル時系列では、幾何学的な部分図形の拡大縮小による自己相似性の検出や、あるいはこれと等価な、時系列の時間軸方向への拡大縮小により、自己相似の波型の検出が行なえる可能性がある。

### 3 フラクタル性をもつ時系列の予測手法

#### 3.1 スケール関数による近似

以下では、フラクタル理論を用いたフラクタル時系列の予測手法についてまとめておく<sup>3)4)</sup>。

一般的な線形時変入出力システム

$$y(t) = \int_0^{t_0} h(t, t-\tau)x(\tau) d\tau, t > t_0 \quad (9)$$

を考察する。線形時変システムのインパルス応答関数  $h(t, \tau)$  がスケール関数  $\phi(t)$  を用いて次のように展開されると仮定する。

$$h(t, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} h_{ij} \phi_{N_i}(t) \phi_{N_j}(\tau) \quad (10)$$

ただし、

$$\phi_{ij}(t) = \phi(2^i t - j) \quad (11)$$

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq 1; \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (12)$$

特に、以下では入出力が同じ時系列である同定問題 ( $y(t) = x(t)$  の場合) を考える<sup>3)4)</sup>。

いま、式(9)による予測値  $\hat{x}(t)$  と入力時系列  $x(t)$  との差の最小2乗近似を考え、これを最小化する

ようにインパルス応答関数の係数 $h_{ij}$ を決定する。計算にあたり式(10)で $N=0$ とし、 $j$ の範囲を $j=1\sim 4$ に限定する。最適化の方法として最急降下法を用いているが、本論文で考察する問題の範囲では誤った解への局所的や収束の問題はない。式(9)を用いて観測値と予測値の2乗誤差を最小化する場合のしきい値は $10^{-4}$ に選び、推定値が得られるまでの繰り返し回数は平均して20000ステップである。

### 3.2 時間軸の伸長による予測

いま、 $T_s \leq t \leq T_e$ は時系列 $x(t)$ が観測される時間区間であり $T_1 = T_e - T_s$ とする。また、 $0 < t \leq T_2$ は $x(t)$ を予測する区間とする。なお、 $T_1, T_2$ の選び方には任意性があるが、6.で示すように期間 $T_1$ の時系列が、期間全体 $T_2$ の時系列と相似であるように選択する必要がある。

次の量を定義する。

$$b = a^p, a = T_2/T_1, T_2 > T_1 \quad (13)$$

$D$ は時系列 $x(t)$ のフラクタル次元であり、 $1 < D < 2$ である。 $x(t)$ がフラクタル性を持つ場合には、その自己相似性により、 $0 < t \leq T_2$ において、次の式が近似的に成立する。

$$x(t) = \int_0^{bt_0} h\left(\frac{t}{b}, \frac{t-\tau}{b}\right) x(\tau) d\tau, t > bt_0 \quad (14)$$

すなわち、時間軸が $a$ 倍された領域の中に $b$ 個のフラクタル図形が入ると解釈される<sup>1)</sup>。スケール関数で近似された時系列のフラクタル性とは、インパルス応答関数により、以下のように説明される。インパルス応答関数 $h(t, \tau)$ の性質はスケース伸長されても時系列の自己相似性から、同じ線形予測の関係式を成立させる性質を保持するので、区間 $T_1$ で推定された $h(t, \tau)$ を $b$ 倍したものをいれれば、 $a$ 倍に伸長した時間域においても、式(14)の予測モデルが成立する。

計算においては、 $a = \text{整数}$ となるように $T_1, T_2$ を選んでいる(例： $T_2 = 2T_1$ )。サンプリングされた時系列を仮定し、サンプリング間隔を1とするすなわち、式(1)では $t = t_0 + 1$ であり、式(6)では $t = bt_0 + b$ となるので、次の予測式となる。

$$x(bt_0 + b) = \int_0^{bt_0} h\left(\frac{t}{b}, \frac{t-\tau}{b}\right) x(\tau) d\tau, t > bt_0 \quad (15)$$

予測を議論する場合には、通常、現在までの観測データをもとにして、1ステップ先のサンプルの予測値を計算することが行われる。これを、以下では $b$ 時刻先の予測とよぶ。

これに対して、式(15)に従って、逐次的に予測された値を観測値と見なして、予測を継続していく場合を考え、これにより $n$ ステップ将来の値を予測する場合を $nb$ 時刻先の予測とよんでおく。 $nb$ 時刻先の予測においてもインパルス応答が計算されているので、線形予測をそのまま継続して用いる場合になどと比較して、予測誤差は極めて小さいものとなる。また、現在の時刻から離れた時刻の予測値を得ることができるので、株式投資におけるオプションの設定などに利用できる。

図3にはブラウン運動の非整数階積分に基づき、プログラムにより発生させたフラクタル時系列fBm (fractional Brownian motion) の予測の様子を示している。

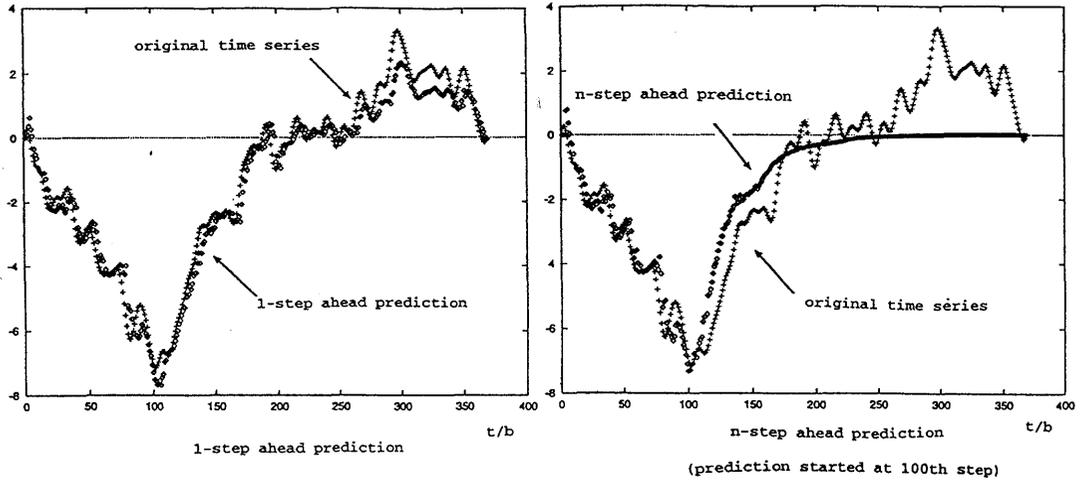


図3 fBmの予測 (b時刻, nd時刻先)

### 3.3 シミュレーションによる予測誤差の検討

以下では、式(15)を用いた**b**時刻先の予測、**nb**時刻先の予測の誤差について、シミュレーションによる検討結果をまとめておく。フラクタル時系列データはfBmとして発生させておき、時系列データのサンプル数**N**は、**N**=500,1000とする。

まず、表1には**b**時刻先の予測について、いくつかのフラクタル次元の時系列の平均予測誤差を示している。予測誤差の定義として、期間内の時系列の最大値と最小値の差（振幅）に対する予測誤差の割合（%）をとっている。これより分かるように**a**=2の場合には0.3%程度、**a**=3の場合には0.4%程度の数値となっており、極めて小さな値である。

なお、本手法による予測誤差の精度を比較するために、線形予測を行なった結果についても表2に合わせて示している。線形予測では、予測誤差が8%程度となっており、本手法による予測よりかなり大きな値となっている。

表1 本手法の**b**時刻先の予測誤差 (%)

	500サンプル			1000サンプル		
	a=2 次元D	1.80	1.50	1.25	1.80	1.50
予測誤差	0.32	0.19	0.13	0.25	0.19	0.17

表2 線形予測の**b**時刻先の予測誤差 (%)

	500			1000		
	a=2 次元D	1.80	1.50	1.25	1.80	1.50
予測誤差	10.1	9.1	7.6	9.7	8.4	8.8
	500			1000		
	a=3 次元D	1.80	1.50	1.25	1.80	1.50
予測誤差	21.3	19.1	14.9	17.7	14.4	13.5

表3 本手法のnb時刻先の予測誤差 (%)

	nb=30			nb=60		
次元D	1.80	1.50	1.25	1.80	1.50	1.25
予測誤差	4.1	3.7	3.3	5.1	4.9	4.6
	nb=90			nb=120		
次元D	1.80	1.50	1.25	1.80	1.50	1.25
予測誤差	5.7	5.2	4.9	6.1	5.6	5.1

次に、表3にnb時刻先の予測について予測誤差の平均値を示している。この結果が示すようにnb時刻先の予測についても誤差は6%程度におさまっている。

線形予測を行なった結果について表は省略しているが、本手法による予測と比較して誤差は極めて大きく、例えば、nb=45において平均予測誤差は20%程度となっている。

#### 4 フラクタル性と次元の推定

##### 4.1 フラクタル時系列のウェーブレット変換

次に、フラクタル時系列のパラメータをウェーブレット変換を用いて推定する方法について述べる。時系列がフラクタル性をもつ場合には、そのスペクトルの時間平均が周波数のべき乗に反比例する性質を持つことが証明されている<sup>97)</sup>。すなわち、時系列の分散、フラクタル次元を、それぞれ、 $\sigma^2$ 、 $D$ とするとスペクトルは次のようになる。

$$S(\omega) = \sigma^2 \omega^{-\gamma} \tag{16}$$

$$\gamma = 5 - 2D \tag{17}$$

与えられた時系列 $x(t)$ をウェーブレット変換する。

$$x(t) = \sum_n \sum_m x_n^m \phi_n^m(t). \tag{18}$$

$$x_n^m = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \phi_n^m(t) dt. \tag{19}$$

ここで、 $\phi_n^m(t)$ は基本関数 $\phi(t)$ に対する次のスケール、シフト変換とにより構成される。

$$\phi_n^m = 2^{m/2} \phi(2^m t - n). \tag{20}$$

ここで、 $m, n$ は、スケール変換、シフト変換のインデックスである。 $x(t)$ がフラクタル性をもつことから、ウェーブレット係数 $x_n^m$ の満たすべき条件として、次の関係式が得られる。

$$\text{var} x_n^m = \sigma^2 2^{-\gamma m}. \tag{21}$$

この関係式は、ウェーブレット基本関数の性質などを用いると証明できる。いま、式(18)の両辺のスペクトルをとると次のようになる。

$$S(\omega) = \sum_m P_m(\omega) |\Psi(2^{-m}\omega)|^2 \tag{22}$$

ここで、 $\Psi(\cdot)$ はウェーブレット基本関数のフーリエ変換であり、 $P(\omega)$ はウェーブレット係数のスペク

トルであり、 $x_n^m$ が局所的に変化しているので、時間を表す添字 $n$ について計算した値である<sup>8)</sup>。ウェーブレット基本関数のフーリエ変換は帯域フィルタの特性をもっているので、式(22)の左辺が式(16)と一致するには

$$P(\omega) = \sigma^2 2^{-\gamma m} \quad (23)$$

となることが必要であることが分かる。 $x_n^m$ から求めた分散とスペクトルとは等価であるので、式(21)が成り立つ。

式(21)の両変の対数をとると、 $m$ についての線形の直線となるので、左辺により計算されるデータに対して回帰直線を当てはめ、この直線との2乗平方誤差 $rmse$ の大きさによりフラクタル性を判定できる。

$$rmse = \left[ \sum_m (\log(\text{var} x_n^m) - c_0 - c_1 m)^2 \right]^{1/2} / M \quad (24)$$

$M$ は添字 $m$ の取り得る個数である。

#### 4.2 フラクタル次元の推定

フラクタル時系列の分散とフラクタル次元を推定する方法を整理する。パラメータの尤度関数は次の形で与えられる。

$$P = \prod_{m,n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2}} \exp[-(x_n^m)^2 / 2\sigma_a^2]. \quad (25)$$

ここで、

$$\sigma_a^2 = \sigma^2 \beta^{-m}. \quad (26)$$

であり、 $\sigma^2$ は推定しようとしている時系列の分散であり、 $\beta$ は推定する未知のフラクタル次元 $D$ と次に示す関係式で結ばれる。

$$\beta = 2^\gamma, \gamma = 5 - 2D. \quad (27)$$

式(25)の対数尤度関係を取り、添字 $m$ ごとの集計を取り、

$$L(\sigma^2, \beta) = -0.5N(m) \sum_m \left[ \sigma_m^2 / \sigma_a^2 + \ln(2\pi\sigma_a^2) \right]. \quad (28)$$

となる。ここで $\sigma_m^2$ は式(19)における $x_n^m$ についての分散であり、

$$\sigma_m^2 = \sum_n (x_n^m)^2 / N(m). \quad (29)$$

により計算される。ここで $N(m)$ は $x_n^m$ の $m$ についてのサンプル数である。

式(28)の尤度関係を最大にするため、式(28)を未知数について微分してゼロとおくと次の式を得る。

$$\sum_m N(m) \sigma_m^2 \beta^m - \sigma^2 \sum_m N(m) = 0 \quad (30)$$

$$\sum_m N(m) \sigma_m^2 \beta^m - \sigma_m^2 \sum_m m N(m) = 0 \quad (31)$$

これらから $\sigma^2$ を消去すると、 $\beta$ に関する次の方程式を得る。

$$\sum_m C_m N(m) \sigma_m^2 \beta^m = 0. \quad (32)$$

方程式の根のなかで、唯一存在する正の実根より、 $\gamma$ を計算する。ここで

$$C_m = m / \sum_m m N(m) - 1 / \sum_m N(m). \quad (33)$$

$\sigma^2$ は次に示す式で計算される。

$$\sigma^2 = \sum_m N(m) \sigma_m^2 \beta^m / \sum_m N(m). \quad (34)$$

### 4.3 シミュレーションによる次元推定の検証

以下では、シミュレーションにより発生させ既知のフラクタル次元をもつfBmの時系列について、4.1で示した手法によりフラクタル次元の推定を行なった結果について簡単にまとめておく。

まず、フラクタル性を調べる元となる式(24)の *rmse* の値については、平均して0.04程度となることが分かる。理論的にはこの値はゼロになるが、離散化の効果、および計算誤差などが含まれていると考えられる。従って小数点以下1桁が1となる程度であればフラクタル時系列と見なしてよいことが分かる。

次に、フラクタル次元の推定誤差については、相対誤差が5%程度であり、ほぼ正確に求まっていることが分かる。株価などの現実の時系列では、真の次元は分かっていないので推定誤差がどの程度であるかは不明である。しかし、すでに述べた時系列予測の誤差との関連性を考慮すると、フラクタル次元の推定の相対誤差も5%程度の範囲におさまることが予想される。

表4 シミュレーションによるfBmのrmse

	サンプル数=1000		
次元D	1.25	1.50	1.75
rmse	0.04	0.05	0.08

表5 シミュレーションによるfBm次元推定の相対誤差 (%)

	サンプル数=1000		
次元D	1.25	1.50	1.75
相対誤差	2.8	2.6	3.2

## 5 時系列の発生方法とフラクタル性

### 5.1 時系列の長期的相関

すでに述べたように、フラクタル時系列の予測には時間域における相似次元の定義が有効であるが、時系列そのもののフラクタル性の検証にはスペクトル解析が簡単であり、利用しやすい。スペクトルが周波数のべき乗で減少していくので

$$S(\omega) = \sigma^2 \omega^{-\gamma} \quad (35)$$

と書ける。一方、これを自己相関関数として見れば

$$C(t) = ct^{-\gamma/2} \quad (36)$$

となる。特に、相関関数については、時間軸上の隔たり  $t$  がかなり大きくなっても関数値がゼロにはならないことがフラクタル性の特徴である。通常の自己回帰 (AR) モデルにより生成された時系列は指数的な自己相関関数を持っているので、時刻  $t$  が少し大きくなると相関はゼロになってしまう。すなわち、時間が少しでも隔たると、時系列のサンプル値は相互に相関がないというのが一般的な時系列である。

これに対してフラクタル時系列では、相関がかなり隔たった時刻でも持続していることになる。そこで、この相関をどのように解釈するかが問題となる。これにはいくつもの解釈が可能であろうが、本論文では次のようなフラクタル時系列発生メカニズム (仮説) をたててみる (もちろん統計的検定を行うなどの厳密な意味での仮説ではない)。仮定しているメカニズムは次ようなものである。

(a) 時系列のピーク、ボトムの相関がある

時系列を波型の増加、減少ととらえることにすると、急激に波型が増加する時刻があり、一方では急激に減少する時刻がある。フラクタル時系列では、スペクトルの形状から平均値は有限であるから、長い時間幅の中では波型の増加と減少の割合はほぼ同じ程度となる。増加する時刻には増加傾向が集中し、減少の時刻には減少が集中する。このような増加、減少の時刻について、長期的な相関が見られる (すなわち関連性が見いだされる)。

(b) 統計的に多重化された現象である

単一の時系列をコンピュータで発生させようとする場合には、定常的な時系列になるケースが多い。しかし、定常的な時系列は基本的に予測可能であり、やがては周期的に波型となってしまい、フラクタル的な性質を持たなくなる。従って、時系列は定常的な時系列 (あるいは確率的な発生メカニズムにより生成された時系列) を重ねあわせた現象であろう。

## 5.2 時系列発生モデルについて

5.1の仮説で述べたように、基本的には単一の定常時系列はフラクタル時系列にはならないことを前提としているので、以下では、フラクタル時系列を定常時系列 (確率的な発生メカニズムを含む) の統計的な多重化により発生させられたものであるとする。以下の4つのメカニズムを考察する。これらのモデルは最初のものを除いて基本的には同様のモデルであり、間欠的に時系列の値が増加あるいは減少し、その発生パターンにある程度の集中性が見られることである。以下では、通信トラヒックの発生モデルに用いられる呼び方を用いることにする。

(a) ARモデル

通常のAR (自己回帰) モデルであり、フラクタル性はもともと持っていないが、フラクタル時系列により近似する、あるいは逆の関係として考察する。

(b) MMPP (ポアソン到着) の統計多重

通信トラヒックの発生を説明するための、いわゆるMMPP (Modulated Markov Poisson Process) とよばれる時系列の発生方法である。時系列の増加 (通信トラヒックではデータの発生の増加) が生じている期間 (on 期間) と、全く増加しない (通信トラヒックではデータが発生しない) 期間 (off 期

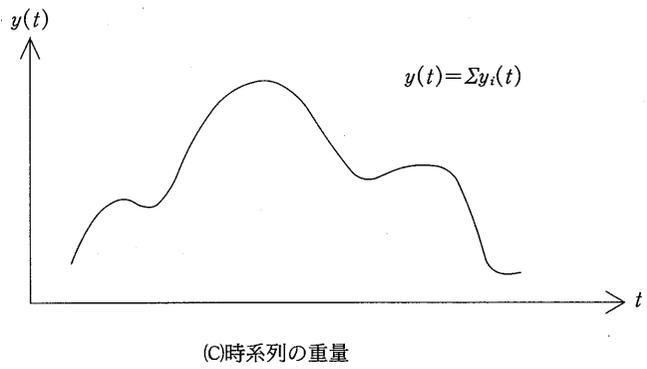
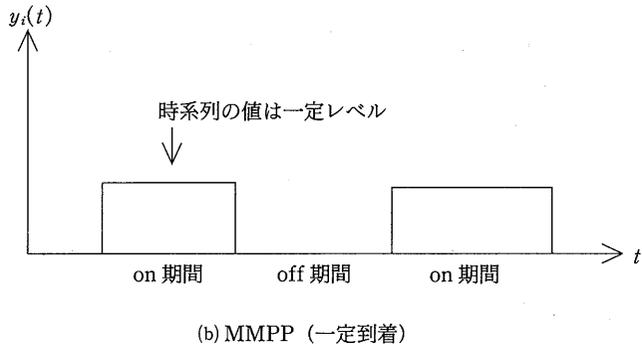
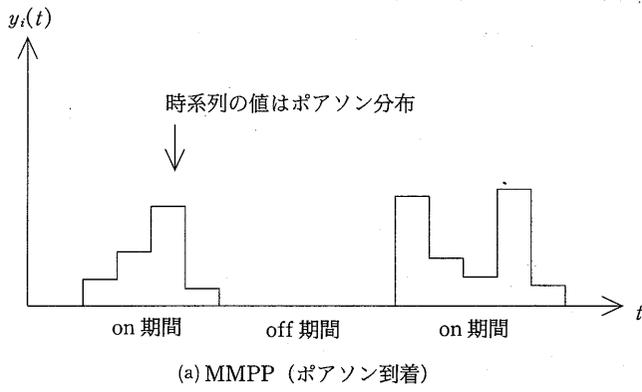


図4 MMPPの生成モデル

間)とが、交互に発生し、その長さの持続が指数分布に従うモデルである。on 期間において時系列が増加する割合(データの発生割合)はポアソン到着とする。更に、このような発生モデルを複数個用意して、これらを重畳(統計多重)したものを最終的な時系列の値とする。概要を図4に示す。

#### (c) MMPP(一定到着)の統計多重

(b)に示したと基本的には同じであるが、最後のデータの発生パターンを、ポアソン到着ではなく一定値としておく。データの発生パターンが一定であることにより、通信トラフィックでの解析が簡単になることが示されているほかに、あとで分かるように、長期的な相関を生成することができる。

#### (d) 状態遷移モデル

時系列の値が増加する(通信トラフィックではデータが発生)する状態のパターンに複数個の状態があると仮定し、この状態の継続時間、状態にある間でのデータの発生割合、更にある状態から次の状態へと遷移の確率が行列で与えられているとするモデルである。状態には何もデータを発生しない状態も含むとする。これによりモデルはMMPPを拡張したものになる。状態の継続時間、状態でのデータの発生割合はアーラン分布を仮定する。

以上述べた時系列生成モデルについてシミュレーションによる検証を行なう。すなわちシミュレーションにより時系列を発生させておいて、この時系列にフラクタル性質が見い出せるかを、すでに述べたウェーブレット変換により求めた *rmse* 値で比較する。

結果の一部を表6から表9に示している。これらは特定パラメータを設定した場合の結果であるが、パラメータの値を極端に変更しないかぎり、同様の傾向を示すことが分かっている。

(a) ARモデルの次数を3以下とし、係数については、時系列の振幅が極端に小さく、あるいは大きくならない範囲で選択する。

(b) 構成要素の時系列の on 期間, off 期間の長さは正規分布から発生させ、その on 期間の平均長さを  $\lambda_a=50$ , on 期間, off 期間の長さの分散を  $\sigma=1$  としている。発生するデータ長さは指数分布に従うとし、その平均値は平均  $\lambda=10$ , 分散  $\sigma_1=1$  の正規分布から生成される。

(c) 構成要素の時系列の on 期間, off 期間の長さは正規分布から発生、その on 期間の平均長さを  $\lambda_a=20$ , on 期間, off 期間の長さの分散を  $\sigma=1$  としている。発生するデータ長さは一定値とし、その値は平均  $\lambda=10$ , 分散  $\sigma=1$  の正規分布から生成される。

(d) 全体を構成する時系列ごとに状態の継続時間の平均  $c_i$ , 位相  $k_1$ , セル到着率は平均  $\mu_i$ , 位相  $k_2$  として要素ごとに(いずれもアーラン分布を仮定)変えているが、これらは平均と分散を与えた正規分布から選んでいる。 $c=50$ ,  $\sigma_c=1$ ,  $\mu=50$ ,  $\sigma_2=1$  とする。

これらの結果から次のようなことが言える。

#### (1) 発生のパターンの長期的相関

発生モデルの中で最も *rmse* が小さいモデルは(c)である。この場合の特徴は、データの発生個数が一定値である(時系列でいえば、それぞれの時系列要素の期間における増加, 減少の割合が一定である)ことである。すなわち, on 期間, off 期間の分布は指数分布であり, 相互に統計的に無関係であるが, 時系列の増加(あるいはデータの発生数)については全く同じパターンであり, 相関が非常に

表6 ARモデルのrmse

次数	p=1	p=2	p=3
rmse	0.201	0.181	0.161

表7 MMPPのrmse (データ長さ指数分布の場合)

	N=5	N=20	N=50	N=100	N=200
a/b=0.25	0.136	0.139	0.141	0.146	0.145
a/b=1.00	0.191	0.162	0.181	0.187	0.188
a/b=0.40	0.193	0.201	0.211	0.237	0.245

表8 MMPPのrmse (データ長さ固定長の場合)

	N=5	N=20	N=50	N=100	N=200
a/b=0.25	0.115	0.114	0.112	0.110	0.120
a/b=1.00	0.099	0.056	0.093	0.107	0.109
a/b=0.40	0.119	0.111	0.080	0.096	0.101

表9 状態遷移モデルのrmse

	N=1	N=5	N=20	N=50	N=100
$k_1=5$ $k_2=1$	0.233	0.219	0.182	0.176	0.178
$k_2=5$	0.212	0.185	0.151	0.138	0.131
$k_2=10$	0.211	0.137	0.110	0.118	0.129

強いことが言える。これを拡張すると、データの発生する時刻ではなく、発生パターンが相互に相関していれば、フラクタル性が極めて強いものになる。

(2)統計多重化の効果

それぞれの時系列発生要素だけではフラクタル性は見られないが、これらを重畳(統計多重)した時系列にはフラクタル性が見られるケースが増加する。すなわち、完全に全部がフラクタル時系列であるとは言えないが、パラメータを適切に設定することにより、時系列をフラクタル的なものとして処理できる可能性がある。これらの詳しい条件については省略するが、概要は次のように整理できる。

(a) 多重化する時系列の構成数は少なくとも20程度以上である。

(b) 指数分布として与えられる個々の時系列の on 期間, off 期間の平均値は50ないし200程度, その分布0.5ないし2.0は程度であること。

6 フラクタル時系列の予測と留意点

6.1 時間軸伸長の場合の時間域の選択

3. で述べたように、フラクタル時系列の予測を行う場合には、時系列をスケール関数で展開されたインパルス応答関数と入力時系列(予測対象と同じ)との畳み込みで表現する必要がある。具体的には、インパルス応答関数の展開形式

$$h(t, \tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} h_{ij} \phi_{N_i}(t) \phi_{N_j}(\tau). \quad (2)$$

における  $h_{ij}$  を推定する時間領域  $T_s \leq t \leq T_e$  をどこに選択するか、更に、この推定された  $h_{ij}$  をどの範囲の  $T_2$  に用いるかが問題となる。フラクタル時系列の自己相似形の解釈として全体の波型が縮小された部分が要素として組み合わせられ全体を構成している（あるいはその逆の関係）とすると、全体の一部に縮小された部分が存在することになる。いま、株価予測などの現実的な問題を仮定すると、観測期間に比べて予測期間はせいぜい2倍～3倍であるので、**図5**に示すような関係になるであろう。特に、波型の開始時点と終了時点の値を同じ値（レベル値を引けばゼロ）としたケースでは、予測期間である2倍～3倍拡大された時間域における始点と終点の値は同じ値となる必要がある。

同様の条件を、始点と終点の値が異なる場合についても適用すると、時間域  $T_1$  および  $T_2$  のどちらの期間についても、始点から終点までの波型を例えば最大値が1になるように正規化しておいて、この2つの波型の一致が最大となるケースがフラクタル時系列における拡大（あるいは縮小）波型となっていると解釈する。これをアルゴリズムとしてまとめると以下のようなになる。なお、次のアルゴリズムでは、分かりやすいように時系列全体をまず基本として考えている。

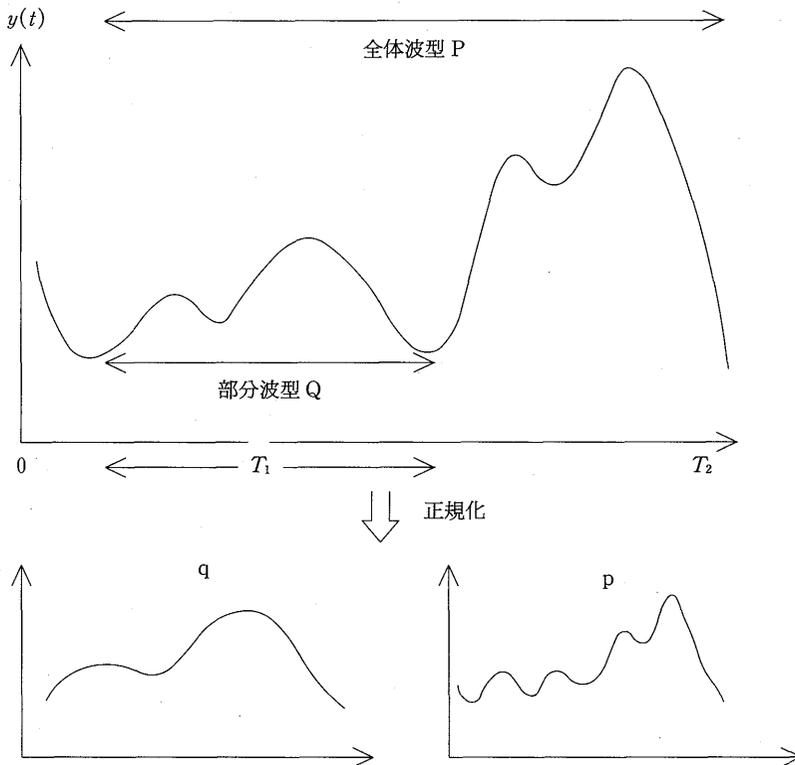


図5 自己相似区間の検出

ステップ1)

時系列の観測期間  $T_2$  における波型を最大値が1になるように正規化しておき、これをマッチングをとる原パターンPとする。

ステップ2)

次に、 $T_1$  となる期間を見いだすために、時系列の開始時点からはじめて、時刻  $t$  から全体の期間の  $1/a$  倍 (いままでの議論では  $1/2$  倍～ $1/3$  倍) の時刻までとり、この期間の波型を最大値が1になるように正規化する。これを波型のQとする。

ステップ3)

波型P,Qは相互に記録された期間が異なるので、どちらかに合わせるために時間軸方向に伸長(あるいは縮小)する。この場合、適当に波型を補間する必要がある。これらの波型を  $p, q$  とする。

ステップ4)

波型  $p, q$  との組み合わせの中で、差異が最小となるケースの時間領域  $T_1$  が、時系列からインパルス応答を計算する予測のための原時系列となる。この場合  $T_2$  は予測される期間となる。

なお、上アルゴリズムでは、全体の時系列を基本として説明したが、実際には部分的な原時系列が与えられ、これから予測可能な全体の期間の範囲を見い出す方法となるであろう。しかし、アルゴリズムはほとんど同じである (詳しいことは省略する)

なお、本論文では、本質的には時系列そのものの相似性ではなく、インパルス応答の相似性を利用している。従って、上に述べたような時系列そのものの相似性により予測期間  $T_2$  を見いだすことは、厳密には正しい方法とは言えない。しかし、数値シミュレーションの結果や、次に述べる単純化されたケースを考察すると、上に述べた相似形の検出方法が、考えられる妥当な方法であることが分かる。

いま、 $n$  ステップ先の予測を考察すると、式(15)を単純化して積和の形で表現する。原波型の開始時刻をゼロとしておき、任意の時刻  $t_0$  から  $n$  ステップ先の予測を開始すると仮定する。予測式は次のようになる。

$$y(bt_0 + nb) = h_0 y(bt_0 + nb - b) + h_1 y(bt_0 + nb - 2b) \dots + h_n y(bt_0) \quad (37a)$$

$$y(t_0 + n) = h_0 y(t_0 + n - 1) + h_1 y(t_0 + n - 2) \dots + h_n y(t_0) \quad (37b)$$

ただし式(37a)は伸長された時間軸における予測であり、式(37b)は原時系列におけるパラメータ  $h_i$  の計算結果の確認に相当する予測式である。一般には、 $y(t_0)$  から出発して  $y(t_0 + n - 2)$ ,  $y(t_0 + n - 1)$ ,  $y(t_0 + n)$  を順次求める計算の精度は極めて良好であるので、式(37b)における予測値は、観測値にほとんど等しいと考えてよい。

ここで、 $n$  ステップ先の予測は、結果的には開始時刻  $t_0$  における時系列の値  $y(t_0)$  にだけ依存していることが分かる。いま、更に単純化して

$$y(bt_0) = y(t_0) \quad (38)$$

としてみると、式(37a)から求まる  $y(bt_0 + nb - 2b)$ ,  $y(bt_0 + nb - b)$ ,  $y(bt_0 + nb)$  は、 $y(t_0 + n - 2)$ ,  $y(t_0 + n - 1)$ ,  $y(t_0 + n)$  に等しくなる。すなわち、見かけ上は  $nb$  ステップ先の予測を行なっているように見えるが、実際には原時系列をたどっているにすぎない。従って、もともと時系列に、

$$y(t_0+n-2)=y(bt_0+nb-2b), y(t_0+n-1)=y(bt_0+nb-b), \dots \quad (38)$$

という関係があれば、時間軸伸長による予測の精度が向上することになる。すなわち、 $y(bt_0)=y(t_0)$ という極端な場合には、 $n$ ステップ先の予測は、もとの時系列を時間軸にそって **$b$ 倍に引き延ばしたものに一致している**。従って、もし、原時系列について、 $T_1$ の区間の波型をこのように時間軸にそって **$b$ 倍に引き延ばしたものが、全体に相似である**ケースでは、 $n$ ステップ先の予測が良く一致することになる。このようなことから、上に述べたアルゴリズムで予測を行う時間域を求めることが、可能性として存在することが示される。

もっとも、一般的には $y(bt_0)=y(t_0)$ ではないし、この項目を式(37)に従って考慮すると、 $n$ ステップ先の予測は単純に $T_1$ の区間の波型をこのように時間軸にそって **$b$ 倍に引き延ばしたものとはならない**。現実的には、上に述べたアルゴリズム以外には相似である期間を見いだすことができないので、プログラム作成の上では、この方法を採用することになる。

次に、アルゴリズムの妥当性を間接的に検証するシミュレーションを行ってみる。fBmとして発生させた時系列について、次の2つのケースについて1ステップ先、 $n$ ステップ先の予測を行ってみる。  
ケース1)

発生させた時系列の最初から $T_1$ 、 $T_2$ の期間を開始して予測を行う。すなわち、特に相似となる期間を見いだすことなく、観測された時系列の開始時刻、および予測を行う期間 $T_2$ の開始時刻のどちらも時刻ゼロから開始する。

ケース2)

アルゴリズムに従って、できるだけ相似となるように $T_2$ を検出して予測を行う。

シミュレーションでは、話を簡単にするために、開始時刻の値をゼロとしておき、最終的にゼロになるまでの時刻の全体を時間域 $T_2$ しておく。従って、具体的には時間域 $T_1$ を検出することになる。

100回にわたりを発生させて上のようなシミュレーションの平均をとった結果を表10に示している。これより分かるように、ケース1には予測誤差が極めて大きなものとなっており、通常に線型予測より更に悪い結果となっている。このように、相似となる時間域を上へのべた単純ではあるが、パターンマッチングを行って見いだすことは、極めて有効であることがわかる。

表10  $T_1$ 、 $T_2$ を時刻ゼロから開始した場合の予測誤差

	nb=30	nb=60	nb=90	nb=120
予測誤差	22.0	23.3	33.5	38.0

## 6.2 インパルス応答の計算時間とパターン化

時間軸を伸長する前の原時系列において、入出力システムの同定をするためにインパルス応答関数を計算する。具体的には、インパルス応答関数をスケーラ関数で展開した場合の係数 $h_{ij}$ を計算することになる。しかし、この係数 $h_{ij}$ は添え字 $i$ 、 $j$ の範囲について計算する必要があり、しかも、最小2乗近似により繰り返し計算をする必要があるため、計算時間はかなりものとなる。具体的に、添え字 $i$ 、

$j$ の範囲をそれぞれ1000, 5とした場合に、係数 $h_{ij}$ が精度良く求まるための限界である5000ステップという回数をかけると、

$$\text{係数 } h_{ij} \text{ の計算回数} = 2.5 \times 10^7$$

となる。この繰り返し計算には基本的に予測値を計算するのと同様な手順が含まれているので、これに比例する計算時間が必要となる。計算時間の概数として、大型汎用コンピュータでも、長さ1000の時系列について約1分程度であり、これをワークステーションなどの換算すると数10分単位の計算となる。

このようなことから、オフラインで予測を行う場合の計算と、オンライン環境、あるいは予測すべき系列が非常に多い場合の計算について、いくつかの工夫が必要となる。これには次のようなことが考えられるであろう。

(1) 似ている時系列に同じ $h_{ij}$ を適用する。

いくつかの典型的な時系列データについて $h_{ij}$ を計算しておき、似た時系列に対して同じ $h_{ij}$ を適用する。もちろん、似ていることを検出する基準が必要となるが、これについては、すでに述べた原系列と予測すべき系列との時間域 $T_1$ ,  $T_2$ の検出方法と同様の手法が利用できるであろう。

(2) 予測期間を短くする。

長さが1000とか500とかの時系列のデータの $n$ ステップ先の予測をする場合に、大きな $n$ について一括して予測を行う場合には、上に述べたような多量の計算が必要である。しかし、例えば、20サンプルの原系列データを用いてせいぜい10ステップ先の予測をする場合には計算時間を短縮することができる。しかし、この場合にはフラクタル性を適用できるための条件(波型の類似性)を見いだせる範囲は狭まる危険性がある。

(3) 近似値を用いて計算時間を短縮する。

インパルス応答関数の $h_{ij}$ を計算する場合に、最小2乗誤差ができるだけ短い時間に小さくなるように初期値を適当に設定する。あるいは、最小2乗誤差が目的の基準より大きくても、繰り返し計算の回数がある程度までくると、自動的に計算を終了する。

このどちらも、問題の性質により予測誤差が大きく拡大してしまう危険性がある。以上のような問題点を考慮すると、いずれにしても時系列データを管理するデータベース管理システムが必要であると言える。

## 7 株式投資への応用について

### 7.1 株価のフラクタル性

証券市場における株価時系列がフラクタル的な性質をもっていることは、これまで多くの研究結果で示されている。例えば、オプション価格の理論式の導出では株価(あるいは相対株価)をブラウン運動でモデル化することが行われている<sup>9)</sup>。以下ではわれわれの行った実験結果をまとめて示しておく。

まず、最初に CD-ROM データ化されて株価について、フラクタル的であるかどうかを4.1で示した *rmse* を用いて検証している。表11では、代表的な株価の銘柄についても *rmse* を示している。

用いたデータに日本の株式市場における電子化された日々の株価であり、概要は次のようである。

ファイル：東洋経済新報社 CD 株価

種類：一日の終値

収録期間：1970年から1982年

サンプル：11業種からランダムに10銘柄を選択

データの長さ：500および2000

#### (1)観測期間の長さによる変化

表11 (a) には、フラクタル性を検査する *rmse* および次元  $D$  の推定について、平均値と5種類の銘柄に対する結果を示している。 $R_{500}$ 、 $D_{500}$  はそれぞれサンプル数かが500の場合の *rmse* と次元  $D$  を意味する。比較のために正弦関数に雑音を加えた定常波の結果も示している。

これらの結果より分かるように、全体的に *rmse* は0.2程度となっている。この広がりについては、銘柄による差は大きくない。

観測期間による *rmse* の違いについては、一般的に期間が長くなるほど縮小する傾向になる。これは長い時系列には、よりフラクタル性が含まれていることを意味している。しかし、サンプル数が500である場合の方が、2000の場合より小さくなるケースも存在しており、株価の性質に依存するものがある。

しかし、全体的にサンプル数が1000以上であれば *rmse* も小さくなることがわかるので、株価の予測をする場合には、最低でも1000サンプルあれば十分であることが予測できる。また、フラクタル次元については、ほぼ1.5と仮定してよいことが分かる。

#### (2)業種による変化

表11 (b) にはサンプル数が2000の場合の業種による *rmse* の値  $R$  と、 $D$  の変化を示している。業種による変化については、明確には差異が現れない。やや、化学や電気ガス、金融保険でフラクタル性が強い。これは株価のフラクタル性が一般的に成立することを示している。また、フラクタル次元についても約1.5の近辺である。

これらのことから、業種によりフラクタル性については明確な差がないこと、従って、業種の応じて特別な株価予測の手法を取らなくてもよいことが分かる。

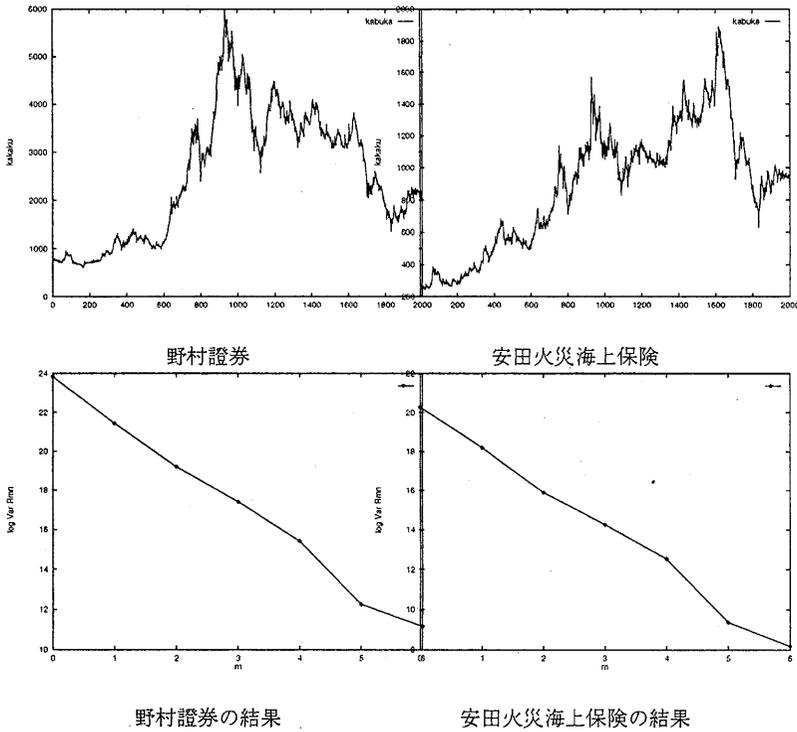
このようなデータを整理すると、次のようなことが言える。

#### (1)フラクタル性

基準となる *rmse* を求めると、その値は極めて小さくなっており、コンピュータシミュレーションにより発生させる fBm と同じ程度となっている。従って、ウェーブレット変換（あるいはこれと等価なスペクトル）の領域では、株価時系列はフラクタルであると見なしてさしつかえないことが分かる。

#### (2)次元

表11には、推定されたフラクタルの次元  $D$  についても示されている。これより分かるように、ほとん



野村証券の結果

安田火災海上保険の結果

図6 株価と  $rmse$  の例

表11 (a).  $rmse$ , 次元の観測長さによる変化

銘柄	$R_{500}$	$D_{500}$	$R_{2000}$	$D_{2000}$
平均	0.17	1.49	0.14	1.51
三洋電気	0.22	1.34	0.15	1.51
ハウスイ	0.29	1.37	0.17	1.50
KDD	0.15	1.58	0.12	1.56
ダイソー	0.20	1.51	0.13	1.57
キャノン	0.17	1.49	0.14	1.51
定常波	0.47	1.12	0.34	1.25

表11 (b).  $rmse$ , 次元の業種による変化

銘柄	$R$	$D$	銘柄	$R$	$D$
富士電機	0.14	1.47	日立工機	0.16	1.48
東芝機械	0.14	1.49	OKK	0.18	1.53
東ソー	0.11	1.52	日本化成	0.12	1.50
明治製菓	0.16	1.47	日本製糖	0.16	1.47
日立金属	0.16	1.44	川崎製鉄	0.12	1.53
日本ユニシス	0.17	1.50	住友商事	0.12	1.54
読売ランド	0.13	1.53	東宝	0.18	1.54
九州電力	0.12	1.56	東邦ガス	0.14	1.55
野村証券	0.12	1.57	安田火災	0.12	1.52

どの場合、次元は1.5である。これは、ブラウン運動の場合の次元と一致するので、株価は基本的にはブラウン運動であると言える。

### (3)観測のサンプリング間隔

計算に用いている株価データは日々の取引の終値を用いている。日々のデータは緩やかに変化するのが一般的であり、これに理数モデルを当てはめる場合に、フラクタル時系列を利用することは極めて適切である。ちなみに、ARモデルを株価に当てはめる場合には、経験的に観測のサンプリング間隔は週単位が最適であり、日々の単位ではサンプリングの値の間の変化が緩やかすぎて、ARモデルではモデル化できない（係数計算の連立方程式の近似計算が収束しない）問題点がある。

## 7.2 株価予測の精度

ここでは主に、フラクタル時系列により近似的に表現された株価時系列の $n$ ステップ先の予測の精度について考察する。まず最初に、代表的な銘柄について $n$ ステップ先の予測の結果について表12にまとめている。用いたデータは7.1と同様である。株価データを全部用いることは計算量が膨大となるので、ここでは、7.1に示したデータのなかで、業種ごとに10程度の株価時系列を選択して、 $n$ ステップ先の予測を実施している。

実際に観測された株価（終値）をフラクタル時系列としてモデル化し、本論文の手法によりその将来の値を予測して、実際に観測された時系列との比較を行う。

表12には、株価予測の $nb$ 時刻先の予測誤差について、平均値と、いくつかの個別銘柄に対する結果を示している。予測誤差に期間内の最大振幅に対する誤差の割合（パーセント）としている。 $N=2000$ の場合を考察している。予測期間については、 $nb$ 時刻先について、 $nb=28$ から $nb=140$ までをとり、この場合の予測誤差を示している。

なお、 $b$ 時刻先の予測誤差についての結果は省略しているが、極めて小さく、平均して、振幅に対して0.6%程度となっている。

これらの結果より分かるように、全体的に $nb$ 時刻先の予測誤差については銘柄により差が大きく誤差が小さい場合には0.3%程度であるが、大きい場合には14%程度まで拡大している。この平均値4%

表12  $nb$ 時刻先の予測誤差 (%)

銘柄	nb=28	56	84	112	140
富士電機	4.0	4.7	4.3	5.4	6.2
日立工機	4.4	4.1	5.5	5.6	6.6
極洋	4.5	4.6	5.2	5.6	6.6
ラサ工業	5.9	4.6	6.7	6.2	7.0
平均	4.2	4.5	5.1	5.5	6.5
富士電機	4.1	4.3	6.5	7.4	7.6
日立工機	4.7	5.6	5.7	6.4	7.4
平均	4.3	5.3	5.4	5.4	6.5

上段は560日目から下段は840日目から予測を開始。

ないし6%は程度である。これらは定常波に対する予測誤差より十分に小さい。

予測誤差が84時刻先の場合には5%前後、140時刻先の予測の場合には7%前後となっており、実際に予測を用いて投資決定をするには大きな違いはないと考えられる。なお、140時刻先の予測は、例えば500日間の観測された株価から140日先の株価を予測するものであり、その誤差が7%程度であることは、この予測方式が有効であることを示している。通常行なわれるブラウン運動のモデル、あるいは線形予測では、このような精度は得られない。

### 7.3 オプション取引への応用

以下では、株価予測の応用として、オプション取引の決定に適用した場合を考察する。本論文で示した予測理論を株価の予測に直接用いて、売買による利益を計算することも可能であるが、株価に依存する点が大きく、また個別銘柄の理論的な予測方法はないなどの問題がある。一方、オプション価格については、従来から用いられている理論式があり比較検討ができる利点がある。

ここで考察するオプション取引は次のような方法で行なわれると仮定する。いま、例としてコールオプションを購入する場合を考察する。一定の期日(時刻) $t$ あとの原株の取引について、オプション価格 $C_m$ が市場に示されているとする。一方本論文で示して時系列予測の方法により、 $t$ 時刻あとの予測株価 $S_t$ からオプション価格の予測値 $C_f$ を求めておく、すなわち、

$$C_f = \max[S_t - K, 0] \quad (39)$$

ここでは、 $K$ は行使価格である。

オプション取引を有利にすすめるには

$$C_f > C_m \quad (40)$$

のときに限ってオプションを購入すればよい。これ以外のケースでは、市場でのオプション価格は、予測値より高く割りだかな投資となるからである。

オプション取り引きの方法は以下のようにまとめられる。

- 1) 現在を $t$ 期としたとき、 $C_f > C_m$ である場合にのみコールオプションを購入する。
- 2) このように購入したオプションを、時刻 $t$ 期において反対売買するすなわち取引の期日にコールオプションを売る。
- 3) このようなオプション購入と同時に基本となる株式基本証券の価格変動にともなうリスクをゼロにするためにデルタヘッジを行なう。この場合のBlack-Scholesモデルとしたコールプットのデルタは次のようになる。

$$\Delta_c = N(d), \delta_p = N(d) - 1 \quad (41)$$

これらを整理するとにおける利益は次のようになる。

$$R_t = C_t - C_m - \Delta_c(S_t - S_0) + p_t(\Delta_c S_0 - C_m) \quad (42)$$

ただし、 $C_t$ は時刻 $t$ におけるオプションの実現値であり、次のようになる。

$$C_t = S_t - K \quad (43)$$

また、 $N(d)$ は正規分布関数の $d$ における値である( $d$ は式(41)に定義する)。

なお、以上のオプション取引では最初にコールを買うが、コールを売る場合も同様に計算式を求めることができる。コールを売るのは、 $C_f < C_m$ の場合である。このコールを、時刻 $t$ において売却することとし、同様にデルタヘッジを行なう。最終的に得られる利益は次のようになる。

$$R(t) = -(C_{t+1} - C_t) + \Delta_c(S_{t+1} - S_t) - P_t(\Delta_c S_t - C_t) \quad (44)$$

プットオプションの場合も同様に、 $C_f < C_m$ の場合にはプットを購入し、 $C_f < C_m$ の場合にはプットを売る。これらの場合の利益は次のようにまとめられる。

$P_{t+1}^* > P_t$ の場合

$$R_t = P_{t+1} - P_t - \Delta_p(S_{t+1} - S_t) + p_t(\Delta_c P_t - P_t) \quad (45)$$

$P_{t+1}^* > P_t$ の場合

$$R(t) = -(P_{t+1} - P_t) + \Delta_c(P_{t+1} - P_t) + p_t(\Delta_c P_t - P_t) \quad (46)$$

#### 7.4 シミュレーションによる評価

以上のような投資戦略を、次の2つの取引にあてはめてみる。最初は日本のオプション取引である日経225について取引の評価であり、2番目はfBmとして発生させた仮想的な株価についてのオプション取引を、シミュレーション実験してみる。最初の日経225については、市場でオプション価格がしめされるので式(40)における $C_m$ は容易に求めることができる。これに対して、fBmにより発生された時系列に対しては、オプション価格は次に示す Black-Scholes モデルに従ってオプション価格が決定されていると仮定する。

株価の相対変化(対数線形変換)をブラウン運動としてモデル化したコールオプション価格(株を買い戻す権利) $C$ 、およびプットオプション価格(株を売る権利) $P$ の理論式(Black-Scholes モデル)は次のように与えられる。

$$C = SN(d) - Ke^{-r\tau}N(d - \sigma\sqrt{\tau}) \quad (47)$$

$$P = -SN(-d) + Ke^{-r\tau}N(d - \sigma\sqrt{\tau}) \quad (48)$$

ただし

$$d = [\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)\tau] / \sigma\sqrt{\tau} \quad (49)$$

であり、記号は次のようになる。

$C$  : コールの価格,  $S$  : 現在の株価,  $K$  : 行使(契約)価格,  $\tau$  : 1年を1とした満期までの期間,  $r$  : 非危険資産利子率,  $N(d)$  : 正規分布の累積関数

fBm株価の場合の市場のオプション価格, $C_m, P_m$ は Black-Scholes モデルにより決定されると仮定する。

##### (1)日経225

データは1987年から1991年までの記録データを用いる。オプション取引のある期日についてオプションを購入することを仮定し、最も限月が1ヵ月、2ヵ月、3ヵ月短いオプションのみを購入することにする。モデルには時系列の分散を含んでいるので、統計的な推定方法を用いて計算する。

結果について表にまとめている。結果から分かるように本論文の予測手法を用いた場合には、20ないし30の利益となっている。これは、平均して投資を開始した時点での株価に対して約2%利益をあげていることになる。

なお、この投資方法の有効性を確認するためにオプション評価の理論式である Black-Sholes モデルをオプション価格の予測値として用いた場合の結果も表に合わせて示している。すなわち、式(40)の売買取引において、予測値として式で計算される値を用いて、例えばとなるケースごとに投資方法を選択する。一般に、Black-Sholes モデルによるオプション価格は市場で示される最高値と安値の中間に位置しているといわれる。従って、理論値を用いることにより大きな損はないが大きな利益もない。表より本論文の予測方式が有効であることが示される。

(2)fBm

fBmの場合には、以下を仮定する。

$$S=100, r=0.12, \sigma=1.0 \quad (50)$$

表13は、2つのオプション取引に対する利益を整理して示している。なお、fBmの場合の市場でのオプション価格としては Black-Sholes モデルの価格を採用している。原理的には無数のオプション価格が存在して、そのままでは評価を行ないにくい。従って、ここでは市場では ATM の取引が主流であることを考慮して、ATM (At The Money) についてのみを対象としている。

これより分かるように、本予測方式をとることにより、株価がフラクタル時系列に従っている場合に本論文の予測手法を用いることにより、少なくとも Black-Sholes モデルに従ってオプション価格を呈示している市場より高い利益をあげることができる。

8. むすび

本論文では、フラクタル時系列の典型である株価時系列に注目して、フラクタル性をもつ根拠、予測手法の適合性、株価予測の具体的な応用について述べた。これらは、著者らが以前より示しているフラクタル時系列予測手法の適用に当たっての課題として残されていることがらであり、本論文では、これらの基本的な性質を整理している。ここでは、ブラウン運動などをコンピュータにより発生させ

表13 日経225オプション取引シミュレーションの評価

	1カ月先	2カ月先	3カ月先
本論文の手法による利益	20.8	36.3	54.9
理論価格による利益	3.8	0.3	0.09

表14 fBm オプション取引シミュレーションの評価

	1カ月先	2カ月先	3カ月先
本論文の手法による利益	15.8	26.3	34.6

る手法を応用してシミュレーションによりさまざまな時系列を発生させ、時系列がフラクタル性をもつための条件を整理した。また、計算誤差の原因、その解決方法、計算時間の短縮方法などについて考察し、本論文で示すフラクタル時系列の予測手法を証券投資に応用する基本的な枠組みについて述べた。

今後の課題として、非フラクタル時系列の近似問題と予測手法の実際的な応用分野の拡大があり、検討を進めていきたい。

## 文 献

- 1) Mandelbrot, B. and Van.N.: The Fractional Brownian motions, fractional noises and applications, *SIAM Rev.* 10, pp. 422-436 (Oct. 1968).
- 2) 高安秀樹：フラクタル，朝倉書店，1986.
- 3) 時永祥三，森保洋，宮崎明雄，島津宣之：“時系列のフラクタル性質を用いた予測手法とその応用”，*信学論 (A)*，J79-A, 11, pp. 1793-1800 (1996-11).
- 4) 時永祥三，森保洋，宮崎明雄，島津宣之：“スケール伸長変換およびウェーブレット変換によるパラメータ推定を用いた時系列予測”，*信学論 (A)*，J79-A, 12, pp. 1-9 (1996-12).
- 5) 時永祥三，池田欽一：“時系列のフラクタル性を利用した株価の予測手法”，97年度日本オペレーションズリサーチ学会春季発表大会，pp. 52-53, 1997.
- 6) 池田欽一，時永祥三：“ウェーブレット変換係数を用いた株価時系列のフラクタル性の検証について”，97年度日本オペレーションズリサーチ学会春季発表大会，pp. 54-55, 1997.
- 7) Wornell, G. W. and Oppenheim . A. V.: “Estimation of fractal signals from noisy measurement using Wavelets “, *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 40, No. 3, pp. 611-623 (March 1992)
- 8) Wornell, G. W.: “Wavelet-based representation for the 1/f family of fractal processes “, *Proc IEEE*, Vol. 81, No. 10, pp. 1428-1450 (Oct. 1993)
- 9) Daubechies. I. “Orthonormal bases of compactly supported wavelets,” *Commun. Pure Appl. Math.*, Vol.41,
- 10) Black, F. and Scholes, M.: The pricing of options and corporate liabilities,” *Journal of Political Economy*, Vol. 81, pp. 637-659 (1973)