九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

航空機材割り当て逆問題について

岩本, 誠一
九州大学経済学部 : 教授

https://doi.org/10.15017/4494412

出版情報：經濟學研究. 64 (1/2), pp.1-14, 1997-09-30. 九州大学経済学会
バージョン：
権利関係：

KYUSHU UNIVERSITY

航空機材割り当て逆問題について

岩　本　誠　一

1．はじめに

M. J. Beckmann は *Dynamic Programming of Economic Decisions* においていわゆる航空機材割り当て問題 “Plane Assignment Problem”([1])に最適性の原理 “Principle of Optimality”([3])を直感的に適用した動的計画法 DP で解いている([2])。この割り当て問題は線形計画法 LP, 整数計画法 IP，組み合せ計画法 CP，全数列挙法 EM などでも解ける([4],[8],[9])。この論文では，新たに最適停止問題 Optimal Stopping Problem として定式化して，再帰式を導き，解いて，最適解として最適停止時間をも求める。さらにこの逆問題を導入して，問題としても最適解としても，与えられた本来の(主)問題との間に逆関係（逆定理)([5],[6],[7])が成り立つことを示す。

2．問題と定式化

Beckmann の機材割り当て問題は200(×10)人の乗客を38(×10)人乗りの中型機と58(×10)人乗りの大型機を何機か用いて運ぶにはそれぞれ何機ずつ用いればよいかという組み合わせ問題である。ただし，大型機の運航費用は中型機の1.4倍とする。

航空機材	定員	運航費用
中型機	38(×10)人	1.0(×千万円)
大型機	58(×10)人	1.4(×千万円)

以下，単位×10，×千万円を付けないで，簡単のために，この問題を5つの数値データ乗客200人；定員38人，費用1.0；定員58人，費用1.4で考える。

Beckmann はこの問題を発見的に解いている。すなわち，$v(m)$ を乗客 m 人を運ぶ最小費用とすると，再帰式

$$v(m) = \min[1.4+v(m-58),\ 1.0+v(m-38)] \qquad m=59,\ 60,\ \ldots$$

$$v(1) = \cdots = v(38)=1.0, \qquad v(39) = \cdots = v(58) = 1.4$$

が成り立つ，としている。

さて，我々はこの機材割り当て問題をある種の(すなわち確定的)**最適停止問題**として定式化して，逆理論を展開する。そのため，まず**費用関数** $f:\{1,...,38,...,58\}\to\{1.0,1.4\}$ を

$$f(1)=f(2)=\cdots=f(38):=1.0,\quad f(39)=\cdots=f(58):=1.4 \tag{1}$$

で定義する。Beckmann の機材割り当て問題は，制約条件式の下での目的関数の最適化といういわゆる**数理計画問題**で定式化すると，次の総費用最小化(主停止)問題で表される：

$$\text{MSP}(200)\qquad \begin{array}{ll} \text{minimize} & f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_t) \\ \text{subject to} & \text{(i)}\quad x_1+x_2+\cdots+x_t=200 \\ & \text{(ii)}\quad 1\le x_n\le 58\quad 1\le n\le t \\ & \text{(iii)}\quad 1\le t\le 200 \end{array} \tag{2}$$

この問題MSP(200)の最小値を $v(200)$ とする。一般に，右辺定数 200 をパラメータ m の値として持つ問題MSP(m)の最小値を $v(m)$ とする。ただし，m は自然数全体 $N=\{1,2,...,200,...\}$ を動くと考える。さて，離散区間 $<1.0,\infty>$ は 1.0 から始まるステップ幅 0.1 の離散値 1.0, 1.1, ... の集合とする：

$$<1.0,\infty>=\{1.0,1.1,...,5.2,...\}.$$

区間 $<1.0,\infty>$ は**最適値関数** v が取り得る可能な運航費用を含んでいる。まず，最小値関数 $v(\cdot)$ の単調性は次のようになる：

補題 2.1（主単調性Ⅰ）最小費用関数 $v:N\to<1.0,\infty>$ は単調非減少で，m が大きくなると ∞ に近づく。

証明　まず，$v(m)$ は，(2)の等式制約(i)を不等式制約

$$x_1+x_2+\cdots+x_t\ge m$$

に代えた最小化問題 MSP*(m) の最小値であることに注意する。したがって，v は非減少である。

次に，大きな整数 $M\in N$ を任意にとる。このとき，$m\ge 58M$ を満たす m を選ぶと，任意の実行可能な（すなわち制約条件(i),(ii),(iii)を満たす）$(x_1,...,x_t)$ は $t\ge M$ を満たす。なぜなら，$t<M$ とすると，$x_1+x_2+\cdots+x_t\le 58t<58M$ になり，実行可能性 $x_1+x_2+\cdots+x_t=m\ge 58M$ に矛盾する。したがって，任意の実行可能な $(x_1,...,x_t)$ は

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_t)\ge t\ge M$$

を満たす。ゆえに，$v(m)\ge M$. また，M は任意だから，$v(m)$ は ∞ に近づくことがわかる。　□

さらに，最小値関数 $v(\cdot)$ は次の再帰式を満たす：

定理 2.1（主再帰式Ⅰ）

$$v(m)=\min[1.4+v(m-58),1.0+v(m-38)]\qquad m=59,60,.... \tag{3}$$

$$v(1)=v(2)=\cdots=v(38)=1.0,\quad v(39)=v(40)=\cdots=v(58)=1.4 \tag{4}$$

証明　m を $m\ge 59$ にとる。いま，$v(m)$ が条件

$$x_1+x_2+\cdots+x_t=m$$

,(ii)および(iii)を満たす点 $\{t,(x_1,...,x_t)\}$ で到達されているとする：

$$v(m) = f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_t).$$

このとき，点 $\{t-1, (x_2,\ldots,x_t)\}$ は対応する条件

$$x_2+x_3+\cdots+x_t = m-x_1$$

,(ii)および(iii)を満たす。したがって，

$$f(x_2)+f(x_3)+\cdots+f(x_t) \geq v(m-x_1).$$

ゆえに，

$$\begin{aligned} v(m) &= f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_t) \\ &\geq f(x_1)+v(m-x_1) \\ &\geq \min_{1\leq x\leq 58}[f(x)+v(m-x)] \\ &= \min_{x=38,58}[f(x)+v(m-x)] \end{aligned} \tag{5}$$

が成り立つ。ここで，等式(5)は v の単調非減少より従う。

他方，不等式

$$f(x)+v(m-x) \geq v(m) \qquad x=38, 58$$

が成立するから，逆向きの不等式

$$\min_{x=38,58}[f(x)+v(m-x)] \geq v(m)$$

も成り立つ。 □

ここで，**最適政策** $\pi^*: N \to \{38, 58\}$ を次のように定義する：

$$\pi^*(m)=\begin{cases}58\\38\end{cases} \quad \text{それぞれ} \begin{cases}1.4+v(m-58)\\1.0+v(m-38)\end{cases} \tag{6}$$

が(3)の最小値に到達するとき。

3．人数最大化問題

前節の問題は，総運航人数一定(200人)のときの，総運航費用最小化問題であった。この節では，逆に総運航費用一定以下での総運航人数最大化問題を考えよう。総運航人数最大(逆停止)問題：

$$\begin{array}{lll} & \text{Maximize} & x_1+x_2+\cdots+x_t \\ \text{ISP}(c) & \text{subject to} & \text{(i)}' \quad f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_t) \leq c \\ & & \text{(ii)} \quad 1\leq x_n\leq 58 \quad 1\leq n\leq t \\ & & \text{(iii)} \quad t\geq 1. \end{array} \tag{7}$$

の最大値を $u(c)$ とする。ただし，c は離散区間 $<1.0,\infty>$ 全体を動く：

$$c \in \{1.0, 1.1, 1.2, \ldots, 5.2, \ldots\}.$$

さて，**最大値関数** $u(\cdot)$ の単調性と再帰式は次のようになる：

補題 3.1（逆単調性Ⅰ）最大人数関数 $u: <1.0,\infty> \to N$ は非減少で，c が大きくなると ∞ に近づく。

定理 3.1（逆再帰式Ⅰ）

$$u(c) = \mathrm{Max}[58+u(c-1.4),\ 38+u(c-1.0)] \qquad c = 1.5, 1.6, \ldots. \tag{8}$$

$$u(0.1) = u(0.2) = \cdots = u(0.9) = 0,$$

$$u(1.0) = u(1.1) = \cdots = u(1.3) = 38, \qquad u(1.4) = 58. \tag{9}$$

また，**最適政策** $\hat{\sigma} : <1.0,\infty> \to \{38, 58\}$ を次で定義する：

$$\hat{\sigma}(c)=\begin{cases}58\\38\end{cases} \quad \text{それぞれ} \begin{cases}58+u(c-1.4)\\38+u(c-1.0)\end{cases} \tag{10}$$

が(8)の最大値に到達するとき。

このとき，主問題の最小値関数と逆問題の最大値関数には間には次の合成関係が成立する：

定理 3.2（弱逆定理Ⅰ）

$$\text{(i)} \quad v(u(c)) \leq c \qquad c \in <1.0,\infty> \tag{11}$$

$$\text{(ii)} \quad u(v(m)) \geq m \qquad m \in N. \tag{12}$$

証明　(i)も同様に証明されるから，(ii)を示せば，十分である。さて，任意に $m \in N$ をとって，$c := v(m)$ とする。MSP(m) には条件

$$v(m) = c = f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_t),$$

$$x_1+x_2+\cdots+x_t = m$$

,(ii)および(iii)を満たす最適点 $\{t, (x_1,\ldots,x_t)\}$ が存在する。条件 $c=f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_t)$, (ii)および(iii)より点 $\{t,(x_1,\ldots,x_t)\}$ は ISP(c) の実行可能解になる。したがって，等式 $x_1+x_2+\cdots+x_t=m$ より，$u(c)\geq m$ である。$c=v(m)$ だから，$u(v(m))\geq m$ が成り立つ。　□

表2および1より，不等式(11),(12)がそれぞれ成立していることが分かる。

さて，$X, Y \subset R^1$ を1次元ユークリッド空間 R^1 の空でない離散部分集合として，非減少関数 $w : X \to Y$ を考える。このとき，2種類の逆関数**上半逆関数** w^{-1}, **下半逆関数** $w_{-1} : Y \to X$ をそれぞれ次で定義する：

$$w^{-1}(y) := \min\{x \in X \mid w(x) \geq y\} \tag{13}$$

$$w_{-1}(y) := \mathrm{Max}\{x \in X \mid w(x) \leq y\}. \tag{14}$$

特に，値 $y \in Y$ は，ある $x \in X$ が $w(x)=y$ を満たすとき，**到達可能**という。このとき，

補題 3.2

$$w_{-1}(y) \geq w^{-1}(y) \quad \text{到達可能な } y \in Y \text{のとき} \tag{15}$$

$$w_{-1}(y) < w^{-1}(y) \quad \text{その他.} \tag{16}$$

特に，到達不可能な $y \in Y$ に対しては，二つの値 $w_{-1}(y)$, $w^{-1}(y)$ は X 上で相い隣る値を取る(表3参照)。

この逆関数を用いると，弱逆定理は次のように強められる：

定理 3.3（強逆定理Ⅰ）

$$\text{(i)}' \quad v_{-1}(c) = u(c) \qquad c \in <1.0,\infty> \tag{17}$$

$$\text{(ii)}' \quad u^{-1}(m) = v(m) \qquad m \in N. \tag{18}$$

証明 (i)′を証明すれば，十分である。(ii)′も同様に示される。さて，任意に $c \in <1.0,\infty>$ を与える。このとき，まず，$v(m) \leq c$ より $m \leq u(c)$ であることに注意する。したがって，$v_{-1}(c) \leq u(c)$. 次に，$v(u(c)) \leq c$ から，$v_{-1}(c) \geq u(c)$ が成り立つことがわかる。これで等式が証明された。 □

さらに，最適値関数と最適政策の対については逆の意味で一方の対が他方を特徴づけている：

定理 3.4（厳逆定理Ⅰ）

$$\text{(iii)}' \quad \hat{\sigma}(c) = \pi^*(v_{-1}(c)) \qquad c \in <1.0,\infty> \tag{19}$$

$$\text{(iv)}' \quad \pi^*(m) = \hat{\sigma}(u^{-1}(m)) \qquad m \in N. \tag{20}$$

この関係をシンボリックに

$$\hat{\sigma} = \pi^* \circ v_{-1} \quad \text{on} \quad <1.0,\infty>, \qquad \pi^* = \hat{\sigma} \circ u^{-1} \quad \text{on} \quad N \tag{21}$$

で表す。ただし，演算 o は関数の合成である。

証明 ここでは(iii)′を証明する。(iv)′も同様である。さて，任意に $c \in <1.0,\infty>$ をとって，$m := v_{-1}(c)$ とおく。強逆定理Ⅰより，$u(c) = m$ である。したがって，

$$\hat{\sigma}(c) = \pi^*(m)$$

を示す。

第一に，$\hat{\sigma}(c) = 58$ として $\pi^*(m) = 58$ を導こう。(同様に，$\hat{\sigma}(c) = 38$ から $\pi^*(m) = 38$ が示される。) このとき，$m = 58 + u(c-1.4) > 38 + u(c-1.0)$ だから，

$$m - 58 = u(c-1.4) \tag{22}$$

$$m - 38 > u(c-1.0) \tag{23}$$

が成り立つ。等式(22)，不等式(23)より，それぞれ

$$1.4 + v(m-58) \leq c \tag{24}$$

$$c < 1.0 + v(m-38) \tag{25}$$

が導かれる。二つの不等式(24),(25)より今度は $1.4 + v(m-58) < 1.0 + v(m-38)$ が成立するから，求める性質 $\pi^*(m) = 58$ が導かれたことになる。

さて，不等式(24)と(25)を導いておこう。まず，等式(22)より，条件

$$m - 58 = x_1 + x_2 + \cdots + x_t,$$

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_t) \leq c - 1.4$$

,(ii)および(iii)を満たす点 $\{t, (x_1,\ldots,x_t)\}$ が存在する。これより，不等式(24)が成り立つことがわかる。次に，$c - 1.0 \geq v(m-38)$ を仮定すること，条件

$$f(y_1) + f(y_2) + \cdots + f(y_s) = v(m-38) \leq c - 1.0$$

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_s = m - 38$$

,(ii)および(iii)を満たす点 $\{s, (y_1,...,y_s)\}$ が存在するから，$u(c-1.0) \geq m-38$ となり，不等式(23)に矛盾する。したがって，不等式(25)も導かれたことになる。

第二に，$\pi^*(m) = 38$または58 から $\tilde{\sigma}(c) = 38$または58 を導こう。このとき，$v(m) = 1.0+v(m-38) = 1.4+v(m-58)$ だから，等式

$$v(m)-1.0 = v(m-38) \tag{26}$$

$$v(m)-1.4 = v(m-58) \tag{27}$$

が成り立つ。弱逆定理Ｉより，$v(m) = v(u(c)) \leq c$ である。したがって，それぞれ

$$c-1.0 \geq v(m-38) \tag{28}$$

$$c-1.4 \geq v(m-58) \tag{29}$$

が成立する。二つの不等式(28),(29)より，今度はそれぞれ

表 1　主問題の最適解と合成解

運航人数 m	最小費用 $v(m)$	最適政策 $\pi^*(m)$	合成関数 $u(v(m))$	上半逆関数 $u^{-1}(m)$	合成政策 $\tilde{\sigma}(u^{-1}(m))$
1	1.0	38	38	1.0	38
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
38	1.0	38	38	1.0	38
39	1.4	58	58	1.4	58
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
58	1.4	58	58	1.4	58
59	2.0	38	76	2.0	38
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
76	2.0	38	76	2.0	38
77	2.4	38 or 58	96	2.4	38 or 58
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
96	2.4	38 or 58	96	24	38 or 58
97	2.8	58	116	2.8	58
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
116	2.8	58	116	2.8	58
117	3.4	38 or 58	134	3.4	38 or 58
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
134	3.4	38 or 58	134	3.4	38 or 58
135	3.8	38 or 58	154	3.8	38 or 58
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
154	3.8	38 or 58	154	3.8	38 or 58
155	4.2	58	174	4.2	58
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
174	4.2	58	174	4.2	58
175	4.8	38 or 58	192	4.8	38 or 58
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
192	4.8	38 or 58	192	4.8	38 or 58
193	5.2	38 or 58	212	5.2	38 or 58
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
200	5.2	38 or 58	212	5.2	38 or 58

$$38+u(c-1.0) \geq m \tag{30}$$

$$58+u(c-1.4) \geq m \tag{31}$$

が成立する。ここで，$m = u(c) = \mathrm{Max}[38+u(c-1.0), 58+u(c-1.4)]$ だから，等式

$$u(c) = 38+u(c-1.0) = 58+u(c-1.4)$$

が成り立つ。すなわち，$\hat{\sigma}(c) = 38$または58 が導かれた。これで証明を終わる。 □

表 1 は主問題 MSP の最適解 $\{v(\cdot), \pi^*(\cdot)\}$ が逆問題 ISP の最適解 $\{u(\cdot), \hat{\sigma}(\cdot)\}$ からの上半逆合成解に一致値していることを示している。表 2 は逆問題 ISP の最適解 $\{u(\cdot), \hat{\sigma}(\cdot)\}$ が主問題 MSP の最適解 $\{v(\cdot), \pi^*(\cdot)\}$ からの下半逆合成解に一致していることを示している。

次頁の図 1 は，$m=200$ からの最適政策 $\pi^*(\cdot)$ による行動（状態と決定の交互列）を追跡することによって，200人を運ぶには，4 通りの組み合せがあるが，いずれにしろ大型機 3 機，中型機 1 機を用い

表 2　逆問題の最適解と合成解

総費用 c	最大人数 $v(c)$	最適政策 $\hat{\sigma}(c)$	合成関数 $v(u(c))$	下半逆関数 $u_{-1}(c)$	合成政策 $\pi^*(v_{-1}(c))$
1.0	38	38	1.0	38	38
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.3	38	38	1.0	38	38
1.4	58	58	1.4	58	58
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.9	58	58	1.4	58	58
2.0	76	38	2.0	76	38
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.3	76	38	2.0	76	38
2.4	96	38 or 58	2.4	96	38 or 58
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.7	96	38 or 58	2.4	96	38 or 58
2.8	116	58	2.8	116	58
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
3.3	116	58	2.8	116	58
3.4	134	38 or 58	3.4	134	38 or 58
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
3.7	134	38 or 58	3.4	134	38 or 58
3.8	154	38 or 58	3.8	154	38 or 58
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
4.1	154	38 or 58	3.8	154	38 or 58
4.2	174	58	4.2	174	58
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
4.7	174	58	4.2	174	58
4.8	192	38 or 58	4.8	192	38 or 58
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5.1	192	38 or 58	4.8	192	38 or 58
5.2	212	38 or 58	5.2	212	38 or 58

図 1　200人運ぶときの MSP(200) の最適決定ツリー

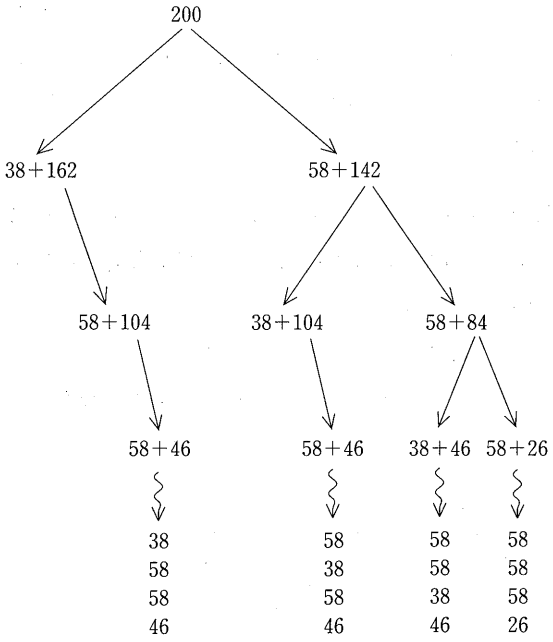

図 2　総費用5.2のときの ISP(5.2) の最適決定ツリー

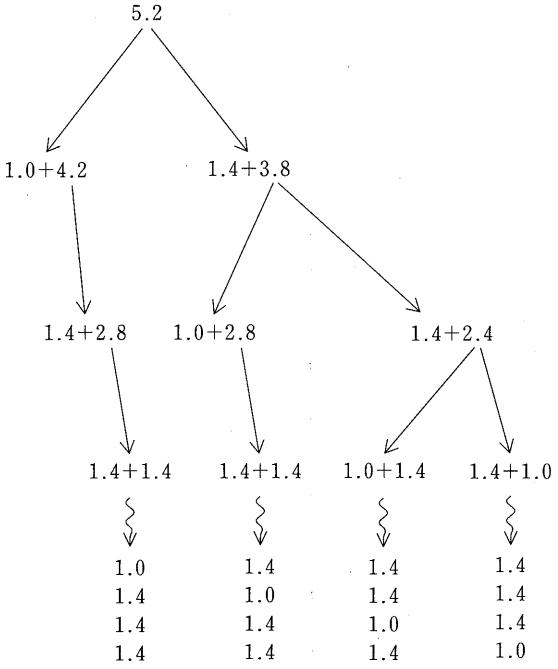

表 3　下半逆関数および上半逆関数

所与費用 c	下半逆関数 $v_{-1}(c)$	上半逆関数 $v^{-1}(c)$
1.0	38	1
1.1	38	39
⋮	⋮	⋮
1.3	38	39
1.4	58	39
1.5	58	59
⋮	⋮	⋮
1.9	58	59
2.0	76	59
2.1	76	77
⋮	⋮	⋮
2.3	76	77
2.4	96	77
2.5	96	97
⋮	⋮	⋮
2.7	96	97
2.8	116	97
2.9	116	117
⋮	⋮	⋮
3.3	116	117
3.4	134	117
3.5	134	135
⋮	⋮	⋮
3.7	134	135
3.8	154	135
3.9	154	155
⋮	⋮	⋮
4.1	154	155
4.2	174	155
4.3	174	175
⋮	⋮	⋮
4.7	174	175
4.8	192	175
4.9	192	193
⋮	⋮	⋮
5.1	192	193
5.2	212	193

ればよいことを示している。図2は，$c=5.2$ からの最適政策 $\hat{\sigma}(\cdot)$ による(最適)行動を追跡することによって，総費用 5.2 でも大型機3機，中型機1機を用いればよいこと示している。両行動と最適な組み合せは共に一致している。

4．非停止問題

前節までの問題は，第3制約条件 (iii) $t \geq 1$ が示しているように，確定的最適停止時間 t をも求める最適停止問題でもあった。この節ではこの第3条件を課さない(非停止)問題 Nonstopping Problem を考える。すなわち，各 $n \in N$ 毎に2条件：

$$\text{(i)} \quad x_1+\cdots+x_n = m \in N_n$$
$$(f(x_1)+\cdots+f(x_n) \leq c \in C_n)$$
$$\text{(ii)} \quad 1 \leq x_i \leq 58 \qquad 1 \leq i \leq n$$

下で主問題 MNP$(n;m)$ と逆問題 INP$(n;c)$ を考える。ただし

$$N_n := \{n,\ n+1,\ \ldots,\ 58n\} \tag{32}$$
$$C_n := \{1.0n,\ 1.0n+0.1,\ \ldots,\ 1.4n+0.5\}. \tag{33}$$

N_n は組み合せ可能な n 機の機材で運び得る総運航人数の集合である。ただし，どの航空機も1人以上運ぶものとする。C_n は，その総費用以下では n 機の機材を運航させることが可能な総費用を含む 0.1 刻みの集合のなかで，一番自然な集合である。ここで“自然な”とは以下の逆理論を成立させる上で妥当だと考えられるからである。総費用 $1.4n+0.5$ では(余裕費用 0.5 残して)確かに大型機を n 機運航させることができるので，を $1.4n+0.5 \in C_n$ である。しかし，総費用が $1.4n+0.6$ では大型機を $(n-1)$ 機と中型機を2機合わせて合計 $(n+1)$ 機を(余裕費用を残すことなく)運航させることができるから，$1.4n+0.6 \notin C_n$ である。

本節の結果は前節と同様に証明されるので，以下では結果のみを中心に述べ，証明は省いて具体的な数値を表で与える。

さて，まず $m \in N_n$ を満たす正の数 n, m を与える。このとき，総勢 m 人を1人から58人のいずれかの n グループに分けて全体で n 機の飛行機で運ぶとき，総費用が最小になるようにグループ分けする問題を考えよう。これは数理計画問題で表すと

$$\text{MNP}(m;n) \qquad \begin{array}{ll} \text{minimize} & f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n) \\ \text{subject to} & \text{(i)} \quad x_1+x_2+\cdots+x_n = m \\ & \text{(ii)} \quad 1 \leq x_i \leq 58 \qquad 1 \leq i \leq n \end{array} \tag{34}$$

になる。この最小値(費用)を $v_n(m)$ とする。**最小費用関数列**の単調性と再帰性は次のようになる。

補題 4.1（主単調性II）(i) 最小費用関数 $v_n : N_n \to C_n$ は非減少である：

$$v_n(m) \leq v_n(m+1) \qquad m, m+1 \in N_n.$$

(ii) 最小費用関数列 $\{v_n\}_{n \geq 1}$ は非減少である：

$$v_n(m) \leq v_{n+1}(m) \qquad m \in N_n \cap N_{n+1}.$$

定理 4.1（主再帰式II）

$$v_1(m) = f(m) \qquad m \in N_1 \tag{35}$$

$$v_{n+1}(m) = \min_{x:*}[f(x)+v_n(m-x)] \qquad m \in N_{n+1},\ n \geq 1 \tag{36}$$

ただし $x:*$ は条件

$$1 \leq x \leq 58, \qquad m-x \in N_n \tag{37}$$

を満たすすべての x についての最小化を意味する。特に，$\{m-38, m-58\} \subset N_n$ のとき，式(36)は

$$v_{n+1}(m) = \min[1.0+v_n(m-38),\ 1.4+v_n(m-58)] \tag{38}$$

に帰着する。

さて，$\pi^*_{n+1}(m) \subset \{1, 2, ..., 58\}$ を(36)で最小になる x の全体としよう。ただし，

$$\pi^*_1(1) = \cdots = \pi^*_1(38) = 38, \quad \pi^*_1(39) = \cdots = \pi^*_1(58) = 58 \tag{39}$$

とする。点対集合値関数 $\pi^*_n : N_n \to \{1, 2, ..., 58\}$ を**第 n 最適決定関数**といい，その列 $\pi^* = \{\pi_1^*, \pi_2^*, ..., \pi_n^*, ...\}$ を主非停止問題 MNP$(m\,;n)$ の**最適政策**と呼ぶ。

このとき，前節の停止問題とこの非停止問題との間には次の包絡性が成り立つ：

定理 4.2（主包絡定理）

$$v(m) = \min_{n \mid m \in N_n} v_n(m) \quad m \in N. \tag{40}$$

さらに，$t^*(m)$ を等式 $v(m)=v_n(m)$ が成り立つ最小の正整数 n で定義すると，t^* はMSPの最適停止時間である：

$$v(m) = v_{t*}(m) \qquad m \in N. \tag{41}$$

主包絡性(40)と式(41)の最適停止時間 $t^*(m)$ については，表4参照。

次に，$c \in C_n$ を満たす正の数 n,c を与える。このとき，総費用 c 以下で，n 機の飛行機で運ぶとき，総運航人数が最大になるようにするには，c をどのように n 個に分割すればよいかという問題を考えよう。ここでは分割された個々の費用で大型機か中型機のいずれかを1機運航する費用に割り当てるとする。この問題は数理計画問題で表すと

$$\begin{array}{lll} & \text{Maximize} & x_1+x_2+\cdots+x_n \\ \text{INP}(c;n) & \text{subject to} & \text{(i)}' \quad f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n) \leq c\ (\in C_n) \\ & & \text{(ii)} \quad 1 \leq x_i \leq 58 \quad 1 \leq i \leq n \end{array} \tag{42}$$

になる。ただし，$n \geq 1$. この最大値(運航人数)を $u_n(c)$ とすると，**最大運航人数関数列**の単調性と再帰性は次になる：

補題 4.2（逆単調性II）(i) 最大運航人数関数 $u_n : C_n \to N_n$ は非減少である：

$$u_n(c) \leq u_n(c+0.1) \qquad c,\ c+0.1 \in C_n.$$

(ii) 最大運航人数関数列 $\{u_n\}_{n \geq 1}$ は非減少である：

$$u_n(c) \leq u_{n+1}(c) \qquad c \in C_n \cap C_{n+1}.$$

定理 4.3（逆再帰式II）

$$u_1(1.0) = u_1(1.1) = \cdots = u_1(1.3) = 38, \quad u_1(1.4) = \cdots = u_1(1.9) = 58 \tag{43}$$

$$u_{n+1}(c) = \underset{x:**}{\mathrm{Max}}[x + u_n(c - f(x))] \qquad c \in C_{n+1} \tag{44}$$

ただしx:＊＊は条件

表 4　主問題に対する包絡性と最適停止時間

m	$v(m)$	$v_1(m)$	$v_2(m)$	$v_3(m)$	$v_4(m)$	$\cdots$	$t^*(m)$
1	1.0	1.0					1
2	1.0	1.0	2.0				1
3	1.0	1.0	2.0	3.0			1
4	1.0	1.0	2.0	3.0	4.0		1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	$\cdots$	⋮
38	1.0	1.0	2.0	3.0	4.0	$\cdots$	1
39	1.4	1.4	2.0	3.0	4.0	$\cdots$	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	$\cdots$	⋮
58	1.4	1.4	2.0	3.0	4.0	$\cdots$	1
59	2.0		2.0	3.0	4.0	$\cdots$	2
⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	$\cdots$	⋮
76	2.0		2.0	3.0	4.0	$\cdots$	2
77	2.4		2.4	3.0	4.0	$\cdots$	2
⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	$\cdots$	⋮
96	2.4		2.4	3.0	4.0	$\cdots$	2
97	2.8		2.8	3.0	4.0	$\cdots$	2
⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	$\cdots$	⋮
114	2.8		2.8	3.0	4.0	$\cdots$	2
115	2.8		2.8	3.4	4.0	$\cdots$	2
116	2.8		2.8	3.4	4.0	$\cdots$	2
117	3.4			3.4	4.0	$\cdots$	3
⋮	⋮			⋮	⋮	$\cdots$	⋮
134	3.4			3.4	4.0	$\cdots$	3
135	3.8			3.8	4.0	$\cdots$	3
⋮	⋮			⋮	⋮	$\cdots$	⋮
152	3.8			3.8	4.0	$\cdots$	3
153	3.8			3.8	4.4	$\cdots$	3
154	3.8			3.8	4.4	$\cdots$	3
155	4.2			4.2	4.4	$\cdots$	3
⋮	⋮			⋮	⋮	$\cdots$	⋮
172	4.2			4.2	4.4	$\cdots$	3
173	4.2			4.2	4.8	$\cdots$	3
174	4.2			4.2	4.8	$\cdots$	3
175	4.8				4.8	$\cdots$	4
⋮	⋮				⋮	$\cdots$	⋮
192	4.8				4.8	$\cdots$	4
193	5.2				5.2	$\cdots$	4
⋮	⋮				⋮	$\cdots$	⋮
200	5.2				5.2	$\cdots$	4

$$1 \leq x \leq 58, \quad c - f(x) \in C_n \tag{45}$$

を満たすすべてのxについての最大化を表す。特に，$\{c-1.0,\ c-1.4\} \subset C_n$ のとき，式(44)は

$$u_{n+1}(c) = \mathrm{Max}[38 + u_n(c-1.0),\ 58 + u_n(c-1.4)] \tag{46}$$

になる。

さて，$\hat{\sigma}_{n+1}(c) \subset \{1, 2, ..., 58\}$ を(44)が最大になる x の全体とする。ただし，

$$\hat{\sigma}_1(1.0) = \cdots = \hat{\sigma}_1(1.3) = 38, \quad \hat{\sigma}_1(1.4) = \cdots = \hat{\sigma}_1(1.9) = 58. \tag{47}$$

点対集合値関数 $\hat{\sigma}_n : C_n \to \{1, 2, ..., 58\}$ を**第 n 最適決定関数**といい，その列 $\hat{\sigma} = \{\hat{\sigma}_1,\ \hat{\sigma}_2, ...,\ \hat{\sigma}_n, ...\}$

表 5　逆問題に対する包絡性と最適停止時間

c	$u(c)$	$u_1(c)$	$u_2(c)$	$u_3(c)$	$u_4(c)$	$\cdots$	$\hat{\tau}(c)$
1.0	38	38					1
⋮	⋮	⋮					⋮
1.3	38	38					1
1.4	58	58					1
⋮	⋮	⋮					⋮
1.9	58	58					1
2.0	76		76				2
⋮	⋮		⋮				⋮
2.3	76		76				2
2.4	96		96				2
⋮	⋮		⋮				⋮
2.7	96		96				2
2.8	116		116				2
2.9	116		116				2
3.0	116		116	114			2
⋮	⋮		⋮	⋮			⋮
3.3	116		116	114			2
3.4	134			134			3
⋮	⋮			⋮			⋮
3.7	134			134			3
3.8	154			154			3
3.9	154			154			3
4.0	154			154	152		3
4.1	154			154	152		3
4.2	174			174	152		3
4.3	174			174	152		3
4.4	174			174	172		3
⋮	⋮			⋮	⋮		⋮
4.7	174			174	172		3
4.8	192				192		4
⋮	⋮				⋮		⋮
5.0	192				192	$\cdots$	4
5.1	192				192	$\cdots$	4
5.2	212				212	$\cdots$	4

を逆非停止問題NIP$(c;n)$ の**最適政策**と呼ぶ。このとき，逆問題についても包絡性が成り立つ：

定理 4.4（逆包絡定理）

$$u(c) = \underset{n \mid c \in C_n}{\mathrm{Max}}\ u_n(c) \qquad c \in <1.0,\infty>. \tag{48}$$

さらに，$\hat{t}(c)$ を等式 $u(c) = u_n(c)$ が成立する最初の正整数 n とすると，$\hat{t}$ は ISP の最適停止時間になる：

$$u(c) = u_{\hat{t}}(c) \qquad c \in <1.0,\infty>. \tag{49}$$

表5では逆包絡性(48)と式(49)の逆最適停止時間を示している。さらに，停止問題についても三つの逆関係が成立する：

定理 4.5（弱逆定理II）$n \geq 1$に対して

$$\text{(i)} \quad v_n(u_n(c)) \leq c \qquad c \in C_n$$
$$\text{(ii)} \quad u_n(v_n(m)) \geq m \qquad m \in N_n.$$

定理 4.6（強逆定理II）$n \geq 1$に対して

$$\text{(i)}' \quad (v_n)_{-1}(c) = u_n(c) \qquad c \in C_n$$
$$\text{(ii)}' \quad (u_n)^{-1}(m) = v_n(m) \qquad m \in N_n.$$

定理 4.7（厳逆定理II）$n \geq 1$に対して

$$\text{(iii)}' \quad \hat{\sigma}_n(c) = \pi_n^*((v_n)_{-1}(c)) \qquad c \in C_n$$
$$\text{(iv)}' \quad \pi_n^*(m) = \hat{\sigma}_n((u_n)^{-1}(m)) \qquad m \in N_n.$$

すなわち

$$\hat{\sigma}_n = \pi_n^* \mathrm{o} (v_n)_{-1} \quad \text{on} \quad C_n, \qquad \pi_n^* = \hat{\sigma}_n \mathrm{o} (u_n)^{-1} \quad \text{on} \quad N_n. \tag{50}$$

さらに，主問題，逆問題の最適停止時刻 $t^*(m)$, $\hat{t}(c)$の間には，次の逆関係が成り立つ：

定理 4.8（逆停止時間定理）

$$\hat{t} = t^* \mathrm{o} v_{-1} \quad on \quad <1.0,\infty>, \qquad t^* = \hat{t}\, \mathrm{o} u^{-1} \quad on \quad N. \tag{51}$$

参 考 文 献

[1] M. J. Beckmann and J. Laderman, A bound on the use of inefficient indivisible units, *Naval Research Logistics Quartely* **3** (1956), 245-252

[2] M. J. Beckmann, *Dynamic Programming of Economic Decisions*, Springer, NY, 1968.

[3] R. E. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton Univ. Pressm NJ, 1957.

[4] T. Ibaraki and N. Katoh, *Resource Allocation Problems : Algorithmic Approaches*, MIT Press, MA, 1988.

[5] S. Iwamoto, Inverse theorem in dynamic programming I, *J. Math. Anal. Appl.* **58** (1977), 113-134.

[6] S. Iwamoto, Inverse theorem in dynamic programming II, *J. Math. Anal. Appl.* **58** (1977), 249-279.

[7] S. Iwamoto, Inverse theorem in dynamic programming III, *J. Math. Anal. Appl.* **58** (1977), 439-448.

[8] 岩本誠一,「動的計画論」, 九大出版会, 1987.

[9] 田畑吉雄, ダイナミック・プログラミング（I), 学生のためのOR入門（9), BASIC数学, 1979年6月, 47-55.