

確率的逐次割当問題に関連した諸問題について : II

中井, 達

<https://doi.org/10.15017/4494352>

出版情報 : 経済学研究. 60 (3/4), pp.341-372, 1994-12-10. 九州大学経済学会
バージョン :
権利関係 :



確率的逐次割当問題に関連した諸問題について(II)

中 井 達

1 序

確率的逐次割当問題 (Sequential Stochastic Assignment Problem) に関する前稿 (中井 [28]) で述べたように、この問題は Derman, Lieberman and Ross [4] により紹介され、その後いろいろな発展をしている。確率的逐次割当問題とは、次のような問題である。重複する事になるが改めて述べることにしよう。この問題は、決定者 (decision-maker) が、 N 人の人間を雇っていて、それぞれの能力が $p_1, p_2, \dots, p_N$ とする。また、順序は一般性を失うことなく並べかえることができ、 $1 \geq p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_N \geq 0$ とする。ここで、大きさ x の仕事に完全な (perfect) 人間が当たれば、そのときの利得は x とし、能力が p の人間が当たれば x そのものを得ることはできず、そのときの利得は px とする。すなわち、この p は各人の能力により時間がかかる場合もあり、また失敗をする事もあるのでそれらをも含めてこの値を考える。一方、 N 個の仕事が逐次に出現するが、これらの仕事の大きさをあらかじめ知ることはできず、1 度に 1 つずつ観測していく。これらの値は、ある確率変数の実現値と考えられ、これらの確率変数はおおの独立でかつ同一の分布に従いその確率分布関数は既知とする。また、いったん割り当てられた人間は二度と割り当てられないとする。このとき、 N 人の人間を N 個の仕事にどのように割り当てれば総期待利得を最大にできるかを考えたものである。この問題に対しては、 $p_1, p_2, \dots, p_N$ とは独立な、確率変数の分布関数にのみ依存するしきい値 (threshold value) が求められ、これらの値により最適政策が得られることが知られている。

一方、次のような不等式に関する性質が成り立つことがよく知られており、(Hardy, Littlewood and Polya [5]) この確率的逐次割当問題はこの Hardy の補題の確率的一般化と考えられる。

補題 1 (Hardy の補題)

$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_N \geq 0$ および $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_N \geq 0$ とする。このとき

$$\max_{\sigma \in S_N} \sum_{i=1}^N a_i b_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^N a_i b_i$$

である。ただし、 S_N は N 次の対称群である。

この確率的逐次割当問題については、すでに Albright [1]・Albright and Derman [2]・Nakai [7]・[8]・[10]・[11]・[14]・[17]・[18]・中井 [9]・[15]・[24]・[25]・Richter [32]・[33]・Skaguchi [35]・[36]・[37] など、いろいろな場合について各種の性質が求められている。一方、1度に1つではなく複数の確率変数が観測できる場合に、それらの複数の観測値に対する確率的逐次割当問題についても考えられる。このような問題について、中井 [27]・中井, 寺岡 [30]・Nakai and Teraoka [31] で触れられている。また、Kennedy [6] では観測する確率変数が独立でない場合について扱っている。

第2節では、ポアソン過程の上での確率的逐次割り当て問題について考える。この問題では確率変数を逐次に観測することはこれまでと同様だが、観測する時点がこれまでのように決められた時間間隔で現れるのではなく、あるポアソン過程にしたがって観測時間が決まる場合にこの問題を考える。また、この節で考える問題では、いくつの確率変数が存在するかは未知とし、最適政策とそのもとでの総期待利得の性質について考える。

第3節では、これまで考えてきた確率的逐次割り当て問題をゲーム論的に定式化する。そのためにいくつかの方法があるが、ここでは拒否権のある2人0和ゲームとして定式化し、両プレイヤーの最適戦略とこのゲームの値について考える。この節で考えるように拒否権のある2人0和ゲームとして定式化することにより、この問題の近似的性質もあわせて求められる。この近似的性質は、Albright and Derman [2] の結果を応用して得られる。

つぎに1度に複数の値を観測できる場合の確率的逐次割り当て問題を考える。そのためにつぎのような準備を行う。複数の確率変数を同時に観測できる多段決定問題として最適選択問題を考え、この問題について最適政策とこの政策に従って最適に振る舞ったときに得られる総期待利得の性質について、いくつかの性質を求める。(Nakai [16]・中井 [25]・[27]) この最適選択問題は、逐次に出現する確率変数を決められた期間にわたって観測し、それら確率変数の観測値の中からあらかじめ決められた数だけ選択し、選択した観測値の総和を最大にすることを目的とする。このとき、決められた期間にわたって出現する確率変数の数はあらかじめ既知の場合とそうでない場合がある。このような問題の中で、それぞれの確率変数がどの期に観測できるかという確率が、独立かつ同一の確率分布に従う場合について、その最適政策とその政策のもとで最適に振る舞って得られる総期待利得の性質が研究されている。(Nakai [16])

まず、第4節では Nakai [16] で得られた結果について簡単に述べることにする。第4.1節ではこの問題を考えるときに必要となる基本的な数列を生成する。ここで求められる数列についてはいくつかの性質を持つことが知られている。第4.2節ではこれらの準備の後で、Nakai [16] で扱われた最適選択問題の最適政策とそのもとで最適に振る舞ったときに得られる総期待利得の性質について、基本的な結果について述べる。1度に複数の値を観測できる確率的逐次割当問題の性質を考えるために、この節で得られた結果を必要とする。

第4.3節では第4.2節とは異なり、決められた期間にわたって出現する仕事(確率変数)の数が未知の場合を考える。ここでは、各期でその期に観測できる確率変数の数の分布は判っているとする。こ

の場合の最適選択問題について第4.2節と同様にこの問題の最適政策とその政策に従ったときに得られる総期待利得の性質を考える。これらの準備の後、Nakai[16]で扱われた最適選択問題と同様にし、この問題についても基本的な結果が得られる。

第5節では1度に複数の値を観測できる確率的逐次割当問題を考える。もし、1度に1つずつしか観測できなければ従来の確率的逐次割当問題と同じ問題であり、一方1度にすべてのものを観測できれば、Hardyの補題(補題1)そのものである。したがって、ここで考える問題はこれらの問題の間に位置するものといえる。この問題では、基本的には従来の確率的逐次割当問題と同だが、1度に複数の値を観測できる点が異なっている。

第5.1節では、決められた期間にわたって出現する仕事(確率変数)の数が既知の場合を考える。いま、決定者(decision-maker)は、 N 人の人間を雇っていると、これら N 人を逐次に出現する N 個の仕事に割り当てる問題を考える。ただ、それら N 個の仕事(確率変数)が計画期間の間のどの期に観測できるかは、各々互いに独立であり、また観測される期に関しても独立であり、その確率は一様とする。したがって、決められた期間のそれぞれの期に観測できる確率変数の数は、残された仕事(確率変数)の数と計画期間により、その分布がわかる。このとき、 N 人の人間を N 個の仕事にどのように割り当てれば総期待利得を最大にできるかを考える。

第5.2節では、決められた期間にわたって出現する仕事(確率変数)の数が未知の場合について扱い、各期でのその数の分布は判っていると。この場合の確率的逐次割当問題について第5.1節と同様の問題を考える。ただし確率変数の数が未知だから、 N 個の値 $p_1, p_2, \dots, p_N$ すべてが割り当てられるとは限らず、また足りないこともあり、この点が前節で考えた問題とは異なっている。

2 ポアソン過程の上での確率的逐次割当問題

これまでに考えた問題では、計画期間が決められていてその間の各期での確率変数の実現値を観測できる場合を考えた。ここでは、決められた計画期間の間にいくつの確率変数を観測できるかわからない場合を考える。いま、出現する確率変数の数について事前に分布がわかっているが、それぞれの確率変数の観測時点は互いに独立で同一のポアソン過程にしたがう場合を考える。すなわち決められた期間内にすべての確率変数が現れるとは限らないような問題である。このような確率的逐次割当問題について、最適政策とこの政策に従って最適に振る舞ったときに得られる総期待利得について考える。同様の問題としては、Non-Homogeneousなポアソン過程の上での問題(Sakaguchi [36])や、同様の問題を別の角度から議論したもの(Sakaguchi [37])がある。また、同様のポアソン過程にしたがって確率変数が逐次に出現するが、いつまで決定を続けられるかわからない場合について、Righter [33]で触れられている。

いま、残り計画期間 $T(0 \leq T < \infty)$ の間に、 M 個の確率変数 $\{X_i\}_{i=1,2,\dots,M}$ が逐次に出現しその実現値を観測できるとする。ただし、 M は分布が既知の確率変数とし、それら M 個の確率変数の観測値に N 個の $\{p_1, \dots, p_N\}$ を割り当てる問題を考える。目的は総期待利得を最大にする最適政策とそのもとで

の総期待利得を求めることである。ここである確率変数の観測値 x に値 p を割り当てたときの利得は、これまでと同様に px に等しいと考える。また、いったん割り当てられた p は二度を割り当てられないとする。ここで、割り当てることのできる数 N と残っていると考えられる確率変数の数の最大値は等しいとしても一般性を失うことはない。また、残りの確率変数の数に関する情報は、 $\{0, 1, 2, \dots, M\}$ の上の確率分布 $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, \dots, q_M)$ によって表されているとし、既知とする。

このとき、残りの計画期間が T 、残りの確率変数の数に関する情報が $\mathbf{q}$ 、この期間内に割り当てられる p が $\{p_1, \dots, p_N\}$ であり、直前の決定を行ってからの経過時間が t のとき、 $(p_1, \dots, p_N; T, t, \mathbf{q})$ をこの問題の状態と呼び、この状態での確率逐次割当問題を $P^p(p_1, \dots, p_N; T, t, \mathbf{q})$ で表す。また状態が $(p_1, \dots, p_N; T, t, \mathbf{q})$ の確率的逐次割当問題で、確率変数の観測値が x のときの条件付きの部分問題を、 $P^p(p_1, \dots, p_N; T, t, \mathbf{q}|x)$ で表す。

まず始めに確率変数の到着過程について考える。各々の確率変数の到着時間間隔は、互いに独立であり、等しい平均 $\frac{1}{\lambda}$ を持つ指数分布に従うと考えられる。すなわち、確率変数の数が M のとき、最初の到着時間分布は、 $\min\{Z_1, Z_2, \dots, Z_M\}$ だから、平均 $\frac{1}{M\lambda}$ の指数分布となる。ただし、 Z_i は平均 $\frac{1}{\lambda}$ を持つ指数分布にしたがう確率変数とし、互いに独立とする。よって、指数分布の memoryless property から、最初の到着時間 Y の分布は、

$$\Pr(Y \leq t | M = k) = 1 - [e^{-\lambda t}]^k \quad (k = 1, 2, 3, \dots, N)$$

となる。

いま、残りの確率変数の数に関する事前の情報が $\mathbf{q}$ で、連続した確率変数の出現した時間の時間間隔が t のときの事後情報を考える。ベイズの定理を用いれば事後分布 $\bar{\mathbf{q}}$ は、

$$\bar{q}_k = cq_{k+1}e^{-k\lambda t}$$

となる。ただし、 $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 、 $\bar{q}_k = \Pr(\text{残りの確率変数の数が } k | \bar{\mathbf{q}})$ とし、 c は次の式を満足する定数である。

$$\sum_{k=0}^{N-1} \bar{q}_k = 1 \quad (t \geq 0)$$

また、 t 時間にわたって確率変数が1つも出現しない場合の残りの確率変数の数に関する情報 $\mathbf{q}^*$ は、

$$q_m^* = dq_m e^{-m\lambda t} \quad (1 \leq m \leq N)$$

となる。ただし、 $q_0^* = dq_0$ であり、 d は次の式を満足する定数である。

$$\sum_{m=0}^N q_m^* = 1 \quad (t \geq 0)$$

いま、これらの確率的逐次割当問題 $P^p(p_1, \dots, p_N; T, t, \mathbf{q})$ と $P^p(p_1, \dots, p_N; T, t, \mathbf{q}|x)$ で最適に振る舞ったときに得られる総期待利得をそれぞれ $v^p(p_1, \dots, p_N; T, t, \mathbf{q})$ と $v^p(p_1, \dots, p_N; T, t, \mathbf{q}|x)$ とする。このとき最適性の原理より、次の最適方程式を満足することがわかる。

$$v^p(p_1, \dots, p_N; T, t, \mathbf{q}) = E[v_k^p(p_1, \dots, p_N; T, t, \mathbf{q}) | \mathbf{q}] \quad (1)$$

$$v_m^p(p_1, \dots, p_N; T, t, \mathbf{q}) = E[v_k^p(p_1, \dots, p_N; T, t, \mathbf{q}) | M = m, \mathbf{q}] \quad (2)$$

$$v_m^p(p_1, \dots, p_N; T, t, \mathbf{q}|x) = E[v_m^p(p_1, \dots, p_N; T, t, \mathbf{q})|M = m, \mathbf{q}, X = x] \quad (3)$$

ここで、(1)式は残りの確率変数の数に関する情報が $\mathbf{q}$ のときの条件付き期待値であり、(2)式は残りの確率変数の数が m のときの期待値である。(3)式は残りの確率変数の数が m のとき、 $X = x$ を観測したときの期待値である。

つぎに、残りの確率変数の数に関する事前情報が $\mathbf{q}$ のとき、微小時間 Δt の間に起こる3つの場合を考える。確率 $M\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ で時間間隔 Δt の間に確率変数が1つ出現する場合、確率 $1 - M\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ で時間間隔 Δt の間に確率変数を1つも観測できない場合、最後に確率 $o(\Delta t)$ で2つ以上の確率変数を時間間隔 Δt の間に観測する場合である。したがってこのことから、

$$\begin{aligned} & v_M^p(p_1, \dots, p_N; T, t, \mathbf{q}) \\ &= M\lambda t \int_0^\infty \max_{1 \leq k \leq N} \{p_k x + v_{M-1}^p(p_1, \dots, p_{k-1}, p_{k+1}, \dots, p_N; T-t-\Delta t, 0, \bar{\mathbf{q}})\} dF(x) \\ & \quad + (1 - M\lambda\Delta t) v_M^p(p_1, \dots, p_N; T, t+\Delta t, \mathbf{q}) + o(\Delta t) \quad (\text{a. e.}) \end{aligned} \quad (4)$$

となる。ところで、

$$E[v_{M-1}^p(p_1, \dots, p_{k-1}, p_{k+1}, \dots, p_N; T-t, 0, \bar{\mathbf{q}})] = v^p(p_1, \dots, p_{k-1}, p_{k+1}, \dots, p_N; T-t, 0, \bar{\mathbf{q}})$$

だから、(4)を整理して $\Delta t \rightarrow 0$ とすると、

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial t} v_M^p(p_1, \dots, p_N; T, t, \mathbf{q}) \\ &= M\lambda \int_0^\infty \max_{1 \leq k \leq N} \{p_k x + v^p(p_1, \dots, p_{k-1}, p_{k+1}, \dots, p_N; T-t, 0, \bar{\mathbf{q}})\} dF(x) \\ & \quad - M\lambda v_M^p(p_1, \dots, p_N; T; t, \mathbf{q}) \end{aligned} \quad (5)$$

となる。

ここで次のことに注意する。この問題では、動的計画法の考え方で定式化を行い、それぞれの状態で最後に観測した時点からの経過時間を変数として含んでいる。さらに決定は各確率変数を観測した時点でのみ行えるから、残りの確率変数の数に関する情報は、確率変数を観測する時間間隔から得られると考えれば十分である。したがって観測時点の間で、情報を常に改良することを考える必要がないことがわかる。

つぎに数列 $\{h_N^i(T, t, \mathbf{q})\}_{i=0, \dots, N}$ を次のように帰納的に定義する。

$$h_N^i(T, t, \mathbf{q}) = \sum_{m=1}^N q_m^* g_{N,m}^i(T, t, \mathbf{q}) \quad (6)$$

$$g_{N,m}^i(T, t, \mathbf{q}) = m\lambda e^{m\lambda t} \int_t^T f_N^i(T, t, \mathbf{q}) e^{-m\lambda t} dt \quad (7)$$

$$\begin{aligned} f_N^i(T, t, \mathbf{q}) &= \int_{h_{N-1}^{i-1}(T, t, \mathbf{q})}^\infty h_{N-1}^{i-1}(T, t, \mathbf{q}) dF(x) \\ & \quad + \int_{h_{N-1}^{i-1}(T, t, \mathbf{q})}^{h_{N-1}^i(T, t, \mathbf{q})} x dF(x) + \int_0^{h_{N-1}^i(T, t, \mathbf{q})} h_{N-1}^i(T, t, \mathbf{q}) dF(x) \\ &= S_F(h_{N-1}^i(T, t, \mathbf{q})) - T_F(h_{N-1}^{i-1}(T, t, \mathbf{q})) \end{aligned} \quad (8)$$

ただし、 $h_N^0(T, t, \mathbf{q}) = \infty$ と

$$h_N^i(T, 0, \mathbf{q}) = \sum_{m=1}^N q_m g_{N,m}(T, 0, \mathbf{q})$$

とする。また、関数 $T_F(a)$ と $S_F(a)$ は DeGroot [3] 等でよく知られた関数

$$T_F(z) = \int_z^\infty (x-z) dF(x), \quad S_F(a) = z + T_F(z)$$

である。

定理 1 確率的逐次割当問題 $P^p(p_1, \dots, p_N; T, t, \mathbf{q})$ の最適政策は次のようになる。

この問題の状態が $(p_1, \dots, p_N; T, t, \mathbf{q})$ のとき、確率変数を観測し、その観測値が x とする。このとき、 $h_N^i(T, t, \mathbf{q}) < x \leq h_N^{i+1}(T, t, \mathbf{q})$ ならば、この x を j 番目の p_j に割り当てるのが最適である。

定理 2 問題 $P^p(p_1, \dots, p_N; T, t, \mathbf{q})$ で最適に振る舞ったときの総期待利得 $v^p(p_1, \dots, p_N; T, t, \mathbf{q})$ は、

$$v^p(p_1, \dots, p_N; T, t, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^m p_i h_N^i(T, t, \mathbf{q}) \quad (9)$$

である。

これら 2 つの性質は、 N に関する帰納法によって示される。定理 1 と定理 2 をあわせて示す。

$N=1$ のとき、

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} v_M^k(p_1; T, t, \mathbf{q}) &= M\lambda \int_0^\infty p_1 x dF(x) - M\lambda v_M^k(p_1; T, t, \mathbf{q}) \\ &= p_1 \lambda \mu M - M\lambda v_M^k(p_1; T, t, \mathbf{q}) \end{aligned} \quad (10)$$

である。したがって、 $v_M^k(p_1; T, T, \mathbf{q}) = 0$ より、

$$\begin{aligned} v_M^k(p_1; T, t, \mathbf{q}) &= p_1 \mu M (1 - e^{-\lambda M(T-t)}) \\ &= p_1 g_{1,1}^1(T, t, \mathbf{q}) \end{aligned} \quad (11)$$

となる。また

$$v^p(p_1; T, t, \mathbf{q}) = E[v_M^k(p_1; T, t, \mathbf{q})] = p_1 q_1^* g_{1,1}^1(T, t, \mathbf{q}) = p_1 h_1^1(T, t, \mathbf{q})$$

となるから、 $N=1$ のときが求められる。 $N-1$ までこれらの定理を仮定して、 N のときに成り立つことを示す。

定理 1 の証明. (5) 式の第 1 項目は、

$$M\lambda \int_0^\infty \max_{1 \leq k \leq N} \{\phi_k(x)\} dF(x) \quad (12)$$

と表される。ただし、帰納法の仮定により

$$\begin{aligned} \phi_k(x) &= p_k x + v^p(p_1, \dots, p_{k-1}, p_{k+1}, \dots, p_N; T-t, 0, \bar{\mathbf{q}}) \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} p_j h_{N-1}^j(T-t, 0, \bar{\mathbf{q}}) + p_k x + \sum_{j=k+1}^N p_j h_{N-1}^j(T-t, 0, \bar{\mathbf{q}}) \end{aligned} \quad (13)$$

となる。一方、 $h_{N-1}^j(T-t, 0, \bar{\mathbf{q}})$ ($1 \leq j \leq N-1$) に関する仮定から、 $h_{N-1}^j(T-t, 0, \bar{\mathbf{q}}) < x \leq h_{N-1}^{j+1}(T-t, 0, \bar{\mathbf{q}})$ ならば ($1 \leq j \leq N$)、Hardy の補題 (補題 1) より

$$\max_{1 \leq k \leq N} \{\phi_k(x)\} = \phi_j(x)$$

となる。したがって、この定理が成り立つ。□

定理 2 の証明. 定理 1 より、(12)式は

$$M\lambda \sum_{j=1}^N \int_{h_{N-1}^j(T, t, \mathbf{q})}^{h_N^j(T, t, \mathbf{q})} \phi_j(x) dF(x)$$

となる。(13)式を代入して整理すれば、

$$M\lambda \sum_{j=1}^N p_j f_N^j(T, t, \mathbf{q})$$

となる。したがって $M = m$ のときの微分方程式(5)式の解は

$$v_m^p(p_1, \dots, p_N; T, t, \mathbf{q}) = \sum_{j=1}^N p_j g_{N,m}^j(T, t, \mathbf{q})$$

となり、したがって

$$v^p(p_1, \dots, p_N; T, t, \mathbf{q}) = E[v^p(p_1, \dots, p_N; T, t, \mathbf{q})] = \sum_{j=1}^N p_j h_N^j(T, t, \mathbf{q})$$

となる。一方、帰納法の仮定より

$$h_{N-1}^j(T-t, 0, \bar{\mathbf{q}}) \geq h_{N-1}^2(T-t, 0, \bar{\mathbf{q}}) \geq \dots \geq h_{N-1}^N(T-t, 0, \bar{\mathbf{q}})$$

だから、

$$f_N^j(T-t, 0, \mathbf{q}) \geq f_N^2(T-t, 0, \mathbf{q}) \geq \dots \geq f_N^N(T-t, 0, \mathbf{q})$$

となる。この不等式と $g_{N,m}^j(T, t, \mathbf{q})$ が微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} y(T, t, \mathbf{q}) - m\lambda y(T, t, \mathbf{q}) = -m\lambda f_N^j(T, t, \mathbf{q})$$

の解より、

$$g_{N,m}^j(T, t, \mathbf{q}) \geq g_{N,m}^{j-1}(T, t, \mathbf{q}) \quad (1 \leq j, m \leq N)$$

が成り立つ。したがって

$$h_N^j(T, t, \mathbf{q}) \geq h_N^{j-1}(T, t, \mathbf{q}) \quad (1 \leq j \leq N)$$

となり、この定理が成り立つ。□

3 確率的逐次割当問題に対するゲーム論的接近

これまでに考えた確率的逐次割当問題では、決定者がすべての観測値を獲得できたが、ここでは競合的状态のもとで割当を行う問題を考える。このような問題を拒否する権利がある 2 人 0 和ゲームとして定式化し、各プレイヤーの最適戦略とその最適戦略にしたがったときのゲームの値を考える。また、ポアソン過程の上での 2 人 0 和ゲームについては、Nakai [11] で考えられている。

いま、2 人のプレイヤー (プレイヤー I と II) を考え、これら 2 人のプレイヤーによって逐次に出現する確率変数の観測値の中から、 n 個の値を選択しプレイヤー I の n 個の $\{p_1, \dots, p_n\}$ を割り当てることを考える。いま、 $\{X_i\}_{i=1,2,\dots}$ を独立で同一の分布にしたがう確率変数の列とする。このとき、これらの確率変数が逐次に出現し、それらの実現値を観測できるとする。これらの実現値を観測するとともに、2 人のプレイヤーは同時にこの値を受け入れるか、それとも拒否するかを決定する。さらに、プ

プレイヤー I は、プレイヤー II がこの値を受け入れたときに n 個の $\{p_1, \dots, p_n\}$ の中のどの p をこの値に割り当てるかを同時に決めておく。いま、確率変数 X の観測値が x のとき、それぞれの決定に対するこの期での利得はつぎのようになる。どちらかのプレイヤーが拒否すれば、この期での利得は 0 であり、つぎの期に進み、新しい確率変数の実現値を観測する。この場合プレイヤー I が選択していた p はつぎの期以降の決定に用いられる。一方、両方のプレイヤーがこの値を受け入れることに同意し、プレイヤー I が大きさ p の値を選択していれば、プレイヤー I に対するこの期での利得は px となる。また、いったん割り当てられた p は二度と割り当てられないとする。このとき、両プレイヤーの拒否できる回数は決められており、この数と割り当てられる $\{p_1, \dots, p_n\}$ は両プレイヤーに既知とする。プレイヤー I と II の拒否できる回数を、それぞれ r と s とする。このゲームは、逐次に出現する確率変数の実現値の列から n 個の値を選択し、 n 個の $\{p_1, \dots, p_n\}$ に割り当てるまで続けられる。また、プレイヤー I は総期待利得を最大にすることを目的とし、プレイヤー II は反対に最小にすることを目的とする。

いま、このようなゲームを $G(p_1, \dots, p_n, r; s)$ で表す。またこのゲームで確率変数の観測値が x のときの条件付きの部分問題を、 $G(p_1, \dots, p_n, r; s|x)$ で表す。このとき、このゲームはつぎのように表現できる。

[Step 1] 両プレイヤーが確率変数 X の実現値 x を観測する。

[Step 2] プレイヤー I はこの観測値に対して、受け入れるかどうかを決定し、受け入れる場合にはどの p を割り当てるかを選択する。一方、プレイヤー II も同時にこの観測値を受け入れるかどうかを決定する。

[Step 3a] もし、どちらかのプレイヤーが受け入れないならば(拒否するならば)、プレイヤー I に対する利得は 0 となり、つぎの期に進む。つぎの期ではここで拒否したプレイヤーの拒否する権利の数が 1 つ減り、サブゲーム $G(p_1, \dots, p_n, r-1; s)$, $G(p_1, \dots, p_n, r; s-1)$ または $G(p_1, \dots, p_n, r-1; s-1)$ となる。このときプレイヤー I の $\{p_1, \dots, p_n\}$ は変わらない。

[Step 3b] もし両方のプレイヤーが受け入れ、プレイヤー I が j 番目の p_j を割り当てるならば、プレイヤー I は利得 $p_j x$ を獲得しつぎの期に進む。このとき、つぎの期ではゲーム $G(p_1, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_n, r; s)$ となる。

このとき、これらの確率的逐次割当ゲーム $G(p_1, \dots, p_n, r; s)$ と $G(p_1, \dots, p_n, r; s|x)$ の値をそれぞれ $v^g(p_1, \dots, p_n, r; s)$ と $v^g(p_1, \dots, p_n, r; s|x)$ と表すとする、最適性の原理より次の最適方程式を満足する。

$$\begin{aligned} v^g(p_1, \dots, p_n, r; s) &= E[v^g(p_1, \dots, p_n, r; s|X)] \\ v^g(p_1, \dots, p_n, r; s|x) & \end{aligned} \quad (14)$$

$$= \text{val} \left[\begin{array}{cc} \text{reject} & \text{accept} \\ \text{reject} & v^g(p_1, \dots, p_n, r-1; s-1) & v^g(p_2, \dots, p_n, r-1; s) \\ \text{select } p_1 & v^g(p_1, \dots, p_n, r; s-1) & p_1x + v^g(p_2, \dots, p_n, r; s) \\ \cdot & \dots & \dots \\ \cdot & \dots & \dots \\ \text{select } p_n & v^g(p_1, \dots, p_n, r; s-1) & p_nx + v^g(p_1, \dots, p_{n-1}, r; s) \end{array} \right] \quad (15)$$

ここで、 $p_1x + v^g(p_2, \dots, p_n, r; s)$ の場合について考えると、この場合は、プレイヤー I はこの実現値を受け入れ 1 番目の p_1 を割り当てる決定をし、プレイヤー II もこの値を受け入れるから、この期でのプレイヤー I の利得は p_1x であり、つぎの期で両プレイヤーの直面するゲームは p_1 を除いた $G(p_2, \dots, p_n, r; s)$ である。したがってこのゲームのプレイヤー I の期待利得は $v^g(p_2, \dots, p_n, r; s)$ だから、この場合のプレイヤー I の利得はあわせて $p_1x + v^g(p_2, \dots, p_n, r; s)$ となる。他の場合も同様となる。

つぎに数列 $\{a_N^i\}_{i=0, \dots, N}$ を次のように帰納的に定義する。

$$\begin{aligned} a_N^i &= \int_{a_{N-1}^{i-1}}^{\infty} a_{N-1}^{i-1} dF(x) + \int_{a_{N-1}^{i-1}}^{a_{N-1}^i} x dF(x) + \int_0^{a_{N-1}^{i-1}} a_{N-1}^i dF(x) \\ &= S_F(a_{N-1}^i) - T_F(a_{N-1}^{i-1}) \end{aligned} \quad (16)$$

ただし、 $a_N^0 = \infty$ とする。

このとき簡単な計算から、次の性質が得られる。

補題 2 任意の $N(\geq 1)$ と $i(1 \leq i \leq N)$ に対して、

$$a_N^{i-1} \geq a_{N-1}^{i-1} \geq a_N^i$$

である。

定理 3 確率的逐次割当ゲームの状態が $(p_1, \dots, p_n, r; s)$ のとき、確率変数 X を観測し、その観測値が x とする。このとき、両プレイヤーの最適戦略はつぎのようになる。(ただし $N = n + r + s$ とする)

1. プレイヤー I の最適戦略

$$\text{もし} \begin{cases} 0 \leq x < a_{N-1}^{s+n} \\ a_{N-1}^{s+n} \leq x < a_{N-1}^{s+n-1} \\ a_{N-1}^{s-1} \leq x \end{cases} \text{ならば} \begin{cases} \text{拒否する} \\ \text{受け入れて } p_j \text{ を選択する } (2 \leq j \leq n) \\ \text{受け入れて } p_1 \text{ を選択する} \end{cases}$$

2. プレイヤー II の最適戦略

$$\text{もし} \begin{cases} x < a_{N-1}^s \\ a_{N-1}^s \leq x \end{cases} \text{ならば} \begin{cases} \text{受け入れる} \\ \text{拒否する} \end{cases}$$

定理 4 確率的逐次割当ゲーム $G(p_1, \dots, p_n, r; s)$ の値 $v^g(p_1, \dots, p_n, r; s)$ は、 $N = n + r + s$ とすると

$$v^g(p_1, \dots, p_n, r; s) = \sum_{i=1}^n p_i a_N^{s+i} \quad (17)$$

である。

これら2つの性質は、定理3と定理4をあわせて N ($N = n + r + s$) に関する帰納法によって示される。

$N = 1$ のとき $a_0^0 = \infty$, $a_0^1 = 0$ であり, $\mu = E[X]$ だから $v^g(p_1, 0, 0) = p_1 a_1^1 = p_1 \mu$ となる。よって $N = 1$ の場合が成り立つ。つぎに, $N - 1$ までこれらの定理が成り立つことを仮定して, N のときにこれらの定理を示すことにする。

いま,

$$\begin{cases} \alpha = v^g(p_1, \dots, p_n, r; s-1) \\ \beta = v^g(p_1, \dots, p_n, r-1; s) \\ \gamma(x) = \max_{1 \leq k \leq N} \{p_k x + v^g(p_1, \dots, p_{k-1}, p_{k+1}, \dots, p_n, r; s)\} \end{cases} \quad (18)$$

とおく。このとき(15)式は

$$v^g(p_1, \dots, p_n, r; s) = E\left[\text{val} \begin{pmatrix} v^g(p_1, \dots, p_n, r-1; s-1) & \beta \\ \alpha & \gamma(X) \end{pmatrix}\right] \quad (19)$$

と表せる。いま, 定理4を $N - 1$ と $N - 2$ の場合に仮定したから,

$$\alpha = \sum_{j=1}^n p_j a_{N-1}^{s+j-1} \quad \text{と} \quad \beta = \sum_{j=1}^n p_j a_{N-2}^{s+j}$$

となり,

$$v^g(p_1, \dots, p_n, r-1; s-1) = \sum_{j=1}^n p_j a_{N-2}^{s+j-1}$$

となる。一方, 補題2より

$$a_{N-1}^{i-1} \geq a_{N-2}^{i-1} \geq a_{N-1}^i \quad (1 \leq i \leq N-1)$$

だから,

$$\beta \leq v^g(p_1, \dots, p_n, r-1; s-1) \leq \alpha$$

となる。このことから, プレイヤーIIが拒否権を行使すればそれはプレイヤーIにとって有利となるからつぎの性質が成り立つ。

補題3 もし両プレイヤーが最適に振る舞うならば, 同じ値に対して両方のプレイヤーが拒否することはない。

定理3の証明. まず始めに $rs \neq 0$ の場合を考える。補題3より,

$$v^g(p_1, \dots, p_n, r; s|x) = \min\{\alpha, \max\{\beta, \gamma(x)\}\} \quad (20)$$

となる。いま, つぎの3つの場合を考える。

a) $a_{N-1}^{s+j} \leq x < a_{N-1}^{s+j-1}$ ($1 \leq j \leq n$) のとき。補題1と補題2より,

$$\gamma = \max_{1 \leq k \leq N} \left\{ p_k x + \sum_{i=1}^{k-1} p_i a_{N-1}^{i+s} + \sum_{i=k+1}^m p_i a_{N-1}^{i+s-1} \right\}$$

$$= p_j x + \sum_{i=1}^{j-1} p_i a_{N-1}^{i+s} + \sum_{i=j+1}^m p_i a_{N-1}^{i+s-1}$$

となる。したがって、 $\beta \leq \gamma(x) < \alpha$ となり、

$$v^g(p_1, \dots, p_n, r; s|x) = \gamma(x)$$

が成り立つ。よってプレイヤー I (II) の最適戦略は、この値を受け入れ j 番目の p_j を割り当てることである。(受け入れることである。)

b) $x < a_{N-1}^{s+j}$ ($1 \leq j \leq n$) のとき。このとき、 $\gamma(x) \leq \beta \leq \alpha$ であり、 $v^g(p_1, \dots, p_n, r; s|x) = \beta$ となる。よって、プレイヤー I (II) の最適戦略はこの値を拒否することである。(受け入れることである。)

c) $a_{N-1}^s \leq x$ のとき、 $\beta \leq \alpha \leq \gamma(x)$ となり、 $v^g(p_1, \dots, p_n, r; s) = \alpha$ となる。したがって、プレイヤー I (II) の最適戦略はこの値を受け入れ p_1 を割り当てることである。(拒否することである。)

最後に、 $rs = 0$ の場合について考える。 $r = 0$ ならば、 $v^g(p_1, \dots, p_n, 0; s|x) = \min\{\alpha, \gamma(x)\}$ であり、 $s = 0$ ならば、 $v^g(p_1, \dots, p_n, r; 0|x) = \max\{\beta, \gamma(x)\}$ となるから、同様にしてゲーム

$G(p_1, \dots, p_n, r; s)$ の最適戦略が求められる。□

定理 4 の証明. (16) 式で定められた、 a_N^{s+j} がゲーム $G(p_1, \dots, p_n, r; s)$ で最適戦略にしたがったとき、 j 番目の p_j によって得られる総期待利得に等しいことがつぎのように示される。このことから、(17) 式は明かである。 $N-1$ まで成り立つと仮定して、 N の場合にこのことを示す。 $(N = n+s+r)$

定理 3 から、確率変数 X の実現値 x が区間 $[a_{N-1}^{s+j}, a_N^{s+j-1})$ に含まれるならば、 p_j はこのゲームの最初の期で割り当てられ、その値は x に等しい。もし、 $x \geq a_N^{s+j-1}$ ならば、この期では p_j は割り当てられないが、 p_j より大きい値を持つ p が割り当てられ、つぎの期では $n-1$ 個の p の中で $j-1$ 番目に大きい値となるから、帰納法の仮定よりこの p_j によって得られる総期待利得は a_{N-1}^{s+j-1} である。最後に、 $x < a_{N-1}^{s+j}$ のとき、同様にしてこの p_j によって得られる総期待利得は a_N^{s+j} である。

したがって、 j 番目の p_j が選択され割り当てられる値の期待値は

$$\begin{aligned} & \int_{a_{N-1}^{s+j-1}}^{\infty} a_{N-1}^{s+j-1} dF(x) + \int_{a_{N-1}^{s+j}}^{a_N^{s+j-1}} x dF(x) + \int_0^{a_{N-1}^{s+j}} a_N^{s+j} dF(x) \\ & = S_F(a_N^{s+j}) - T_F(a_{N-1}^{s+j-1}) \end{aligned}$$

となり、この値は a_N^{s+j} に等しい。よって、

$$v^g(p_1, \dots, p_n, r; s) = \sum_{i=1}^n p_i a_N^{s+i} \quad (n+r+s = N)$$

となり、この定理は示された。□

つぎにすべての p が 1 に等しい場合を考える。この場合、簡単のためにゲーム $G(p_1, \dots, p_n, r; s)$ の代わりに記号 $G(n, r; s)$ と $v^g(n, r; s)$ を用いる。すると定理 4 より、

$$v^g(n, r; s) = \sum_{i=1}^n a_N^{s+i} \quad (n+r+s = N) \quad (21)$$

となり、 $v^g(n, r-1; s) - v^g(n-1, r; s) = a_N^{s+n}$ と $v^g(n, r; s-1) - v^g(n-1, r; s) = a_{N-1}^s$ となる。こ

ここで、 N が充分大きい場合に近似的性質を考える。いま、 $0 < k_1 < k_2 < 1$ とし、 $s = N - [k_2 N]$ 、 $r = [k_1 N]$ とおく。 $(n + r + s = N$ および、 $[\cdot]$ はガウス記号とする) このとき (21) 式は

$$v^g(n, r; s) = \sum_{i=[k_1 N]}^{[k_2 N]} a_N^i \quad (22)$$

となる。一方、つぎの性質が Albright and Derman [2] より得られる。

定理 5 $F(x)$ を連続な分布関数とし、 $0 < \pi < 1$ とする。このとき

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=[N\pi]+1}^N a_N^i = \int_{F^{-1}(\pi)}^{\infty} x dF(x)$$

かつ

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{[N\pi]} a_N^i = \int_{-\infty}^{F^{-1}(\pi)} x dF(x)$$

であり、 $\lim_{N \rightarrow \infty} a_N^{[N\pi]} = F^{-1}(\pi)$ となる。ただし、 F^{-1} は分布関数 $F(x)$ の order π の quantile 点である。

この定理よりつぎの性質が得られる。

系 1 $F(x)$ を連続な分布関数とし、 $0 < k_1 < k_2 < 1$ とする。このときゲーム $G(n, r; s)$ ($s = N - [k_2 N]$ 、 $r = [k_1 N]$ 、 $n + r + s = N$) に対して

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} v^g(n, r; s) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=[k_1 N]+1}^{[k_2 N]} a_N^k \\ &= \int_{F^{-1}(k_1)}^{F^{-1}(k_2)} x dF(x) \end{aligned}$$

となる。

4 最適選択問題

確率的逐次割り当て問題を考えるとき、一般性を失うことなく $1 \geq p_1 \geq \dots \geq p_N \geq 0$ を仮定した。いま、特に $p_1 = \dots = p_k = 1$ と $p_{k+1} = \dots = p_N = 0$ とおけば、この場合もこの条件を満足する。これまで考えてきた問題では、大きさ x の観測値に大きさ p のものを割り当てたときの利得が p_x としたから、 $p_1 = \dots = p_k = 1$ 、 $p_{k+1} = \dots = p_N = 0$ の場合、逐次に現れる N 個の確率変数の実現値から k 個を選択して、総期待値を最大にする問題に等しくなる。すなわち、 N 個の観測値から k 個を選択する最適選択問題は確率的逐次割当問題の特別な場合と考えられる。さらに、これまでに考えてきた問題で、最適政策のもとでの総期待利得は、ある単調減少する正数列となるしきい値 (threshold value) の和となることが示されたが、これらの値は最適選択問題で選択できる回数と密接な関係がある。すなわち、これらの値が 1 回選択する回数が増えることによる総期待利得の増加分となることがわかる。そこで、1 度に複数の値を観測できる場合の確率的逐次割り当て問題を考えるために、まず始めに最適選択問題を考えることが糸口となる。

4.1 準備

まず、1 度に k 個の独立で同一の分布関数に従う確率変数 $\{X_i\}_{i=1,\dots,k}$ を観測できる場合を考える。いま、それらの k 個の確率変数の観測値が $x_1, \dots, x_k$ のとき、 $x_{(1)}, \dots, x_{(k)}$ を k 個の確率変数 $X_1, \dots, X_k$ の観測値 $x_1, \dots, x_k$ の順序統計量とする。 $(x_{(1)} \geq \dots \geq x_{(k)}, X_{(1)} \geq \dots \geq X_{(k)})$ 一般に順序統計量という場合は、小さいものから順に並べ替えることが多いが、ここでは大きいものから順に並べることにする。以下では、 k 個の確率変数 $\{X_i\}_{i=1,\dots,k}$ に対して、それらの順序統計量を $\{X_{(i)}\}_{i=1,\dots,k}$ で表す。

このとき、よく知られているように k 個の確率変数の大きい方から i 番目の順序統計量 $X_{(i)}$ の確率密度関数は、

$$g_{k,i}(x_{(i)}) = \frac{k!}{(i-1)!(k-i)!} (F(x_{(i)}))^{k-i} (1-F(x_{(i)}))^{i-1} f(x_{(i)}) \quad (23)$$

である。ここでは、観測できる k 個の確率変数 $\{X_i\}_{i=1,\dots,k}$ は絶対連続であり、すべての確率変数が独立かつ同一の分布に従う場合を扱い、それらの確率密度関数を $f(x)$ とする。

まず、 i に関して減少する正数列 $\{a_i\}$ ($a_0 = \infty$) に対して関数 $U_k(a_i, a_{i-1}|l, y)$ を

$$\begin{aligned} U_k(a_i, a_{i-1}|l, y) &= \int_0^{a_i \wedge y} a_i h_{k,i}(x_{(i)}) f(x_{(i)}) dx_{(i)} + \int_{a_i \wedge y}^{a_{i-1} \wedge y} x_{(i)} h_{k,i}(x_{(i)}) f(x_{(i)}) dx_{(i)} \\ &\quad + \int_{a_{i-1} \wedge y}^y U_k(a_{i-1}, a_{i-2}|l+1, x_{(i)}) f(x_{(i)}) dx_{(i)} \end{aligned} \quad (24)$$

で定義する。ただし、

$$U_k(a_i, a_{i-1}|k+1, y) = a_i \quad (y \geq 0) \quad (25)$$

とし、

$$h_{k,i}(x_{(i)}) = \frac{k!}{(k-i)!} (F(x_{(i)}))^{k-i} \quad (26)$$

とする。

つぎに、任意の減少する正数列 $\{a_i\}_{i=0,1,\dots}$ から、新しい数列 $\{a_{i,k}\}_{i=0,1,\dots}$ を次のように生成する。すなわち、

$$a_{i,k} = U_k(a_i, a_{i-1}|1, \infty) \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (27)$$

とし、 $a_{0,k} = \infty$ とおく。このとき、つぎの基本的な性質が成り立つ。(補題 4, 補題 5, 補題 6 と補題 7) これらの結果はすでに Nakai [16]・中井 [24] で述べられているので詳しい証明は省く事にする。

注 1 (24) 式で定義した $U_k(a_i, a_{i-1}|l, y)$ に関してつぎのことに注意する。すなわち、

$$\begin{aligned} a_{1,k} &= U_k(a_1, a_0|1, \infty) \\ &= \int_0^{a_1} a_1 h_{k,1}(x_{(1)}) f(x_{(1)}) dx_{(1)} + \int_{a_1}^{a_0} x_{(1)} h_{k,1}(x_{(1)}) f(x_{(1)}) dx_{(1)} \\ &\quad + \int_{a_0}^y U_k(a_0, a_{-1}|2, x_{(1)}) f(x_{(1)}) dx_{(1)} \end{aligned} \quad (28)$$

であり、また

$$\begin{aligned} \alpha_{1,k} &= U_k(a_1, \infty | 1, \infty) \\ &= \int_0^{a_1} a_1 h_{k,1}(x_{(1)}) f(x_{(1)}) dx_{(1)} + \int_{a_1}^{\infty} x_{(1)} h_{k,1}(x_{(1)}) f(x_{(1)}) dx_{(1)} \end{aligned} \quad (29)$$

となる。

補題 4 $\{a_i\}_{i=0,1,\dots} (a_0 = \infty)$ が減少する正数列ならば, (27)式で定義した新しい数列 $\{\alpha_{i,k}\}_{i=0,1,\dots}$ もまた, i に関して減少する数列, すなわち,

$$\alpha_{1,k} \geq \alpha_{2,k} \geq \dots \geq \alpha_{i,k} \geq 0$$

である。

補題 5 $\{a_i\}_{i=0,1,\dots} (a_0 = \infty)$ が減少する正数列ならば, (27)式で定義した新しい数列 $\{\alpha_{i,k}\}_{i=0,1,\dots}$ はつぎのように表せる。

$$\begin{aligned} \alpha_{i,k} &= \sum_{j=1}^{k \wedge i} \int_{a_{i-j+1}}^{a_{i-j}} x_{(j)} g_{k,j}(x_{(j)}) dx_{(j)} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{k \wedge (i-1)} a_{i-j-k} C_j (1 - F(a_{i-j}))^j (F(a_{i-j}))^{k-j} \end{aligned}$$

補題 6 $\{a_i\}_{i=0,1,\dots} (a_0 = \infty)$ が減少する正数列ならば, (27)式で定義した新しい数列 $\{\alpha_{i,k}\}_{i=0,1,\dots}$ に対して, $a_0 = \infty$ かつ $a_1 = a_2 = \dots = 0$ ならば,

$$\alpha_{i,k} = E[X_{(i)}], (1 \leq i \leq k) \quad \alpha_{i,k} = 0 \quad (i > k)$$

となる。

補題 7 i に関して減少する2つの正数列 $\{a_i\}_{i=1,2,\dots}$ と $\{b_i\}_{i=1,2,\dots}$ に対して, $a_i > b_i (i = 1, 2, \dots)$ とする。このとき, (24)式で定義された関数 $U_k(a_i, a_{i-1} | l, y)$ は,

$$U_k(a_i, a_{i-1} | l, y) - U_k(b_i, b_{i-1} | l, y) \geq 0$$

を満足する。

4.2 最適選択問題 (確率変数の数が既知の場合)

次のような最適選択問題を考える。この問題は逐次に出現する確率変数を決められた期間にわたって観測し, それら確率変数の観測値の中から決められた数だけ選択して, 選択した観測値の総和を最大にすることを目的とする。このとき, 決められた期間にわたって観測できる確率変数の数は既知の場合とそうでない場合があるが, ここでは既知の場合について扱う。ただ, それらの確率変数が, 計画期間の間のどの期に観測されるかは, 各々の確率変数について互いに独立であり, その確率は一様とする。すなわち, 計画期間が N のとき, ある確率変数が最初の期に出現する確率は $\frac{1}{N}$ である。そこで, 残り N 期の計画期間の間に, m 個の i. i. d. (独立かつ同一の分布関数に従う) 確率変数 $\{X_i\}_{i=1,\dots,m}$ が観測できるとする。このとき, これら m 個の確率変数の中から n 個を選択し, 選択した観測値の総和の期待値を最大にする問題を考える。したがって, 1 度に観測できる確率変数の数は常に

1 個とは限らず、複数の値を観測することになる。また、1 度観測して選択しなかった観測値は、再び選択できないとする。

つぎに、残り N 期の間に、 m 個の独立で同一の分布に従う確率変数 $\{X_i\}_{i=1,\dots,m}$ を観測し、それら m 個の確率変数の中から n 個を選択して、選択した観測値の総和の期待値を最大にする問題を考えると、この (N, m, n) を最適選択問題の状態と呼び、このような問題を $S_{N,m}^k(n)$ で表す。また問題の状態が (N, m, n) のとき、 k 個の確率変数を観測できるという部分問題を $S_{N,m}^k(n; k)$ で表す。また、 k 個の確率変数の観測値が $x_{(1)}, \dots, x_{(k)}$ のとき、この最適選択問題の部分問題を $S_{N,m}^k(n; k|x_{(1)}, \dots, x_{(k)})$ と表す。

一般に計画期間の間のそれぞれの期に観測できる確率変数の数は、あらかじめ与えられた確率分布に従うとし、残り N 期で m 個の確率変数が残っている場合、この期に出現する確率変数の数の分布を $\{p_{N,m}(k)\}_{k=0,1,\dots,m}$ と表す。もし、 m 個の確率変数が、上で考えたように N 期間の間に互いに独立に一樣に出現する場合、この $\{p_{N,m}(k)\}_{k=0,1,\dots,m}$ は、

$$P_{N,m}(k) = {}_m C_k \frac{(N-1)^{m-k}}{N^m} \quad (0 \leq k \leq m, p_{1,m}(m) = 1) \quad (30)$$

と表せる。ここでは、この場合について考えるが一般の場合についても同様の議論ができる。

ここで、利得は観測値の値に等しいとし、この問題の目的は選択した n 個の観測値の総和を最大にするような最適政策と、そのもとで最適に振る舞ったときの総期待利得を求めることである。一般の利得関数の場合も、適当な条件のもとで同様の議論ができる。

問題 $S_{N,m}^k(n)$, $S_{N,m}^k(n; k)$ と $S_{N,m}^k(n; k|x_{(1)}, \dots, x_{(k)})$ で、最適に振る舞ったときに得られるこれらの問題の総期待利得をそれぞれ $w_{N,m}^k(n)$, $w_{N,m}^k(n; k)$ と $w_{N,m}^k(n; k|x_{(1)}, \dots, x_{(k)})$ とする。よく知られているように、最適性の原理により次の最適方程式を満足する。

$$w_{N,m}^k(n) = \sum_{k=0}^m w_{N,m}^k(n; k) p_{N,m}(k) \quad (31)$$

$$w_{N,m}^k(n; k) = E[w_{N,m}^k(n; k|X_{(1)}, \dots, X_{(k)})] \quad (32)$$

$$w_{N,m}^k(n; k|x_{(1)}, \dots, x_{(k)}) = \max_{1 \leq i \leq k} \{ \sum_{j=1}^i x_{(j)} + w_{N-1,m-k}^k(n-i) \} \quad (33)$$

いま、この最適選択問題では観測値の総和を最大をすることを目的とするから問題 $S_{N,m}^k(n; k|x_{(1)}, \dots, x_{(k)})$ で、もし i 個の観測値を選択すれば、それらは大きい方から i 個となることは明らかである。したがって(33)式ではこのことを利用している。

つぎに数列 $\{a_{N,m}^i\}_{i=1,2,\dots}$ と $\{a_{N,m}^i(k)\}_{i=1,2,\dots}$ を次のように帰納的に定義する。 ($0 \leq k \leq m$)

$$a_{N,m}^i = \sum_{k=0}^m a_{N,m}^i(k) p_{N,m}(k) \quad (34)$$

$$a_{N,m}^i(k) = U_k(a_{N-1,m-k}^i, a_{N-1,m-k}^{i-1} | 1, \infty) \quad (35)$$

$$a_{N,m}^i(0) = a_{N-1,m}^i \quad (36)$$

ただし、

$$a_{N,m}^0 = a_{N,m}^0(k) = \infty, \quad a_{0,0}^i = 0$$

とする。

このとき、この最適選択問題の解は、次のようになる。(Nakai [16])

定理 6 最適選択問題 $S_{N,m}^k(n)$ の最適政策は次のようになる。

問題の状態が (N, m, n) のとき、 k 個の確率変数を観測でき、それらの観測値の順序統計量が $x_{(1)}, \dots, x_{(k)}$ とする。いま j を $x_{(j)} \geq a_{N-1, m-k}^{k-j+1}$ かつ $1 \leq j \leq k \wedge n$ を満足する最大の数、すなわち $x_{(j+1)} < a_{N-1, m-k}^{k-j}$ または $j = k \wedge n$ を満足する最大の数とする。このとき、大きい方から j 個の値、すなわち $x_{(1)}, \dots, x_{(j)}$ を選択することが最適である。

定理 7 問題 $S_{N,m}^k(n)$ と $S_{N,m}^k(n; k)$ で最適に振る舞ったときの総期待利得 $w_{N,m}^k(n)$ と $w_{N,m}^k(n; k)$ は、

$$w_{N,m}^k(n) = \sum_{i=1}^n a_{N,m}^i \quad (37)$$

$$w_{N,m}^k(n; k) = \sum_{i=1}^k a_{k,m}^i(k) \quad (38)$$

である。

定理 6 の証明：いま

$$\delta_i^k = x_{(1)} + \dots + x_{(i)} + w_{N-1, m-k}^k(n-i) \quad (1 \leq i \leq k \wedge n)$$

とし、 j を $x_{(j)} \geq a_{N-1, m-k}^{k-j+1}$ ($1 \leq j \leq k \wedge n$) を満足する j の値の最大値とする。このとき、 $a_{N-1, m-k}^{k-j+1}$ は、 j に関して単調増加かつ非負な関数である。(Nakai [16]) したがって、もし $j \geq i$ ならば、

$$\begin{aligned} \delta_i^k - \delta_{i-1}^k &= x_{(i)} + w_{N-1, m-k}^k(n-i) - w_{N-1, m-k}^k(n-i+1) \\ &= x_{(i)} - a_{N-1, m-k}^{k-i+1} \geq 0 \end{aligned}$$

である。それ以外のときは、

$$\begin{aligned} \delta_i^k - \delta_{i+1}^k &= -(x_{(i+1)} + w_{N-1, m-k}^k(n-i-1) - w_{N-1, m-k}^k(n-i)) \\ &= a_{N-1, m-k}^{k-i} - x_{(i+1)} \geq 0 \end{aligned}$$

となる。よって、

$$w_{N,m}^k(n; k | x_{(1)}, \dots, x_{(k)}) = \delta_j^k$$

となり、定理 6 に表された最適政策が得られる。また、 $j = 0$ の場合にも同じようにして最適政策が求められる。□

定理 7 の証明：始めに問題 $S_{N,m}^k(1)$ を考える。もし、 $x_{(1)} \geq a_{N-1, m-k}^1$ ならば、1 番大きい観測値 $x_{(1)}$ を選択し、そうでなければ値 $x_{(1)}$ はこの期では拒否され、つぎの期に進む。したがって、値 $w_{N,m}^k(1)$ は、 $a_{N-1, m-k}^1$ を用いて次のように表せる。すなわち、帰納法の仮定から $w_{N-1, m-k}^k(1) = a_{N-1, m-k}^1$ であり、一方 $h_{k,1}(x_{(1)})f(x_{(1)}) = g_{k,1}(x_{(1)})$ だから、

$$w_{N,m}^k(1) = \int_0^{a_{N-1, m-k}^1} a_{N-1, m-k}^1 g_{k,1}(x_{(1)}) dx_{(1)} + \int_{a_{N-1, m-k}^1}^{\infty} x_{(1)} g_{k,1}(x_{(1)}) dx_{(1)} \quad (39)$$

となる。したがって、 $n = 1$ の場合にはこの定理が成り立つ。

つぎに、2つの値 $w_{N,m}^k(n)$ と $w_{N,m}^k(n-1)$ の差について考える。いま、

$$\begin{aligned} u_{N,m,n}(k) &= w_{N,m}^k(n; k) - w_{N,m}^k(n-1; k) \\ &= E[u_{N,m,n}(k; X_{(1)}, \dots, X_{(k)})] \end{aligned}$$

$$u_{N,m,n}(k; x_{(1)}, \dots, x_{(k)}) = w_{N,m}^k(n; k | x_{(1)}, \dots, x_{(k)}) - w_{N,m}^k(n-1; k | x_{(1)}, \dots, x_{(k)})$$

とおき、 $1 \leq j \leq k$ のときは、

$$u_{N,m,n}(k; x_{(1)}, \dots, x_{(j)}) = E[u_{N,m,n}(k; X_{(1)}, \dots, X_{(k)}) | X_{(1)} = x_{(1)}, \dots, X_{(j)} = x_{(j)}]$$

とする。

このとき次の(*)が成り立つことに注意する。すなわち、

(*) 定理6に示された最適政策に対して、次のような状況を考える。いま、問題 $S_{N,m}^k(n; k)$ と問題 $S_{N,m}^k(n-1; k)$ で、 $x_{(1)}, \dots, x_{(j)}$ ($j < k \wedge n$) が選択され、 $(j+1)$ 番目に大きい値 $x_{(j+1)}$ を考慮している状態を考える。すなわち、 $x_{(j)} \geq a_{N-1,m-k}^{k-j+1}$ の場合である。このとき、

$$u_{N,m,n}(k; x_{(1)}, \dots, x_{(j)}) = U_k(a_{N-1,m-k}^{k-j}, a_{N-1,m-k}^{k-j-1} | j+1, x_{(j)})$$

となる。

$k > 1$ の場合は j に関する帰納法により次のようにして示される。

初期状態すなわち $j = (k \wedge n) - 1$ のときは、以下と同じようにして求められるので省略する。いま、 j より小さい値に対して(*)が成り立つとする。定理6で述べられた最適政策に対して次の3つの場合を考える。

$$1) \ x_{(j+1)} \leq a_{N-1,m-k}^{k-j}$$

このとき、 $x_{(j+1)}$ は両方の問題 $S_{N,m}^k(n; k)$ と $S_{N,m}^k(n-1; k)$ で拒否される(選択されない)。すなわち、仮定より両方の問題で、観測した k 個の中で大きい方から j 個の値が選択されるから、

$$u_{N,m,n}(k; x_{(1)}, \dots, x_{(j)}) = w_{N-1,m-k}^k(n-j) - w_{N-1,m-k}^k(n-j-1) = a_{N-1,m-k}^{k-j}$$

となる。

$$2) \ a_{N-1,m-k}^{k-j} < x_{(j+1)} \leq a_{N-1,m-k}^{k-j-1}$$

このとき、 $x_{(j+1)}$ は問題 $S_{N,m}^k(n; k)$ では選択され、問題 $S_{N,m}^k(n-1; k)$ では選択されない。さらに、 $a_{N-1,m-k}^{k-j-1} \geq x_{(j+1)} > x_{(j+2)}$ だから、 $(j+2)$ 番目大きい値はもし存在したとしても、問題 $S_{N,m}^k(n; k)$ では選択されない。したがって、1)の場合と同じように

$$u_{N,m,n}(k; x_{(1)}, \dots, x_{(j)}) = (x_{(j+1)} + w_{N-1,m-k}^k(n-j-1)) - w_{N-1,m-k}^k(n-j-1) = x_{(j+1)}$$

となる。

$$3) \ x_{(j)} > x_{(j+1)} \geq a_{N-1,m-k}^{k-j-1}$$

この場合には、 $x_{(j+1)}$ はどちらの問題でも選択され、 $j < (k \wedge n) - 1$ のときは、 $(j+2)$ 番目の値について選択するかどうかを考えることになる。もし、 $j = (k \wedge n) - 1$ であれば、帰納法の仮定より

$$\begin{aligned} u_{N,m,n}(k; x_{(1)}, \dots, x_{(j)}) &= w_{N-1,m-k}^k(n-j-1) - w_{N-1,m-k}^k(n-j-2) \\ &= a_{N-1,m-k}^{k-j-1} = a_{N-1,m-k}^{k-(k \wedge n)} \end{aligned}$$

となる。また、そうでなければ、

$$u_{N,m,n}(k; x_{(1)}, \dots, x_{(j+1)}) = U_k(a_{N-1,m-k}^{k-j-1}, a_{N-1,m-k}^{k-j-2}|j+2, x_{(j+1)})$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} & u_{N,m,n}(k; x_{(1)}, \dots, x_{(j)}) \\ &= \int_0^{a_{N-1,m-k}^{k-j-1}} a_{N-1,m-k}^{k-j} h_{k,j+1}(x_{(j+1)}) f(x_{(j+1)}) dx_{(j+1)} \\ & \quad + \int_{a_{N-1,m-k}^{k-j-1}}^{a_{N-1,m-k}^{k-j-1}} x_{(j+1)} h_{k,j}(x_{(j+1)}) f(x_{(j+1)}) dx_{(j+1)} \\ & \quad + \int_{a_{N-1,m-k}^{k-j-1}}^{x_{(j)}} U_k(a_{N-1,m-k}^{k-j-1}, a_{N-1,m-k}^{k-j-2}|j+2, x_{(j+1)}) f(x_{(j+1)}) dx_{(j+1)} \\ &= U_k(a_{N-1,m-k}^{k-j}, a_{N-1,m-k}^{k-j-1}|j+1, x_{(j)}) \end{aligned}$$

となる。よって (*) が成り立つ。 $n=1$ の場合も同じように求められ、

$$u_{N,m,n}(k) = U_k(a_{N-1,m-k}^k, a_{N-1,m-k}^{k-1}|1, \infty) = a_{N,m}^n(k)$$

となり、

$$w_{N,m}^k(n; k) - w_{N,m}^k(n-1; k) = a_{N,m}^n(k)$$

が成り立つ。またここで、 $w_{N,m}^k(0; k) = 0$ は明らかである。

また、

$$w_{N,m}^k(n) = \sum_{k=0}^{\infty} w_{N,m}^k(n; k) p_N(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^n a_{N,m}^i(k) = \sum_{i=1}^n a_{N,m}^i$$

だから、(37)式が求められる。残りの部分については明らかである。□

補題5から、つぎの定理が求められる。

定理8 数列 $\{a_{N,m}^i\}_{i=1,2,\dots}$ と $\{a_{N,m}^i(k)\}_{i=1,2,\dots}$ は、

$$\begin{aligned} a_{N,m}^i(k) &= \sum_{j=1}^{m \wedge i} \int_{a_{N-1,m-k}^{i-j-1}}^{a_{N-1,m-k}^{i-j-1}} x_{(j)} g_{M,j}(x_{(j)}) dx_{(j)} \\ & \quad + \sum_{j=0}^{k \wedge (i-1)} a_{N-1,m-k}^{i-j} C_j (1 - F(a_{N-1,m-k}^{i-j}))^j (F(a_{N-1,m-k}^{i-j}))^{m-j} \end{aligned} \quad (40)$$

$$a_{N,m}^i = \sum_{m=0}^m a_{N,m}^i(k) p_{N,m}(k) \quad (41)$$

を満足する。

補題6から、

$$a_{i,m}^i = E[X_{(i)}]$$

が導かれる。また、次のことが成り立つ。(Nakai [16] の Proposition 2)

系2 $\{a_{N,m}^i\}_{i=1,2,\dots}$ と $\{a_{N,m}^i(k)\}_{i=1,2,\dots}$ は i に関して減少する数列である。

注2 この系により $\{a_{N,m}^i\}_{i=1,2,\dots}$ は i に関して減少する数列となることが示されるが、 $w_{N,m}^k(n)$ と $w_{N,m}^k(n; k)$ が N に関して増加または減少することは示されない。このことは、ここで考えた最適選択

問題で決められた計画期間に出現する確率変数の数があらかじめ決められており、計画期間が長くなってもそれがそのまま有利になるとは限らないからである。したがって、これらの値に関してはそのような性質は得られない。

4.3 最適選択問題（確率変数の数が未知の場合）

次に、決められた期間にわたって観測できる確率変数の数が未知の場合に最適選択問題を考える。いま、残り N 期の計画期間の間に、i. i. d. (独立かつ同一の分布関数に従う) 確率変数 $\{X_i\}_{i=1, \dots, \infty}$ を観測できるとする。このとき、これら N 期間の間に出現する確率変数の観測値の中から n 個を選択し、選択した観測値の総和の期待値を最大にする問題を考える。ただし、これらの確率変数が計画期間の間のどの期に出現するかについては、互いに独立で一様に出現すると考える。計画期間の間のそれぞれの期に観測できる確率変数の数は、あらかじめ与えられた確率分布に従い、残り N 期の時、この期に出現する確率変数の数の分布を、 $\{p_N(k)\}_{k=0, 1, \dots, \infty}$ と表す。 $(\sum_{k=1}^{\infty} k p_N(k) < \infty)$

ここでは、観測できる m 個の確率変数 $\{X_i\}_{i=1, \dots, \infty}$ は独立かつ同一の分布に従う絶対連続な確率変数とし、その確率密度関数を $f(x)$ とする。

つぎに、残り N 期の間に独立で同一の分布に従う確率変数 $\{X_i\}_{i=1, \dots, \infty}$ を観測し、それらの確率変数の中から n 個を選択して、選択した観測値の総和の期待値を最大にする問題を考えるとき、この (N, n) を最適選択問題の状態と呼び、このような問題を $S_N^*(n)$ で表す。また問題の状態が (N, n) のとき、 k 個の確率変数が観測できるという部分問題を $S_N^*(n; k)$ で表す。また、それら観測できる k 個の確率変数の観測値が $x_{(1)}, \dots, x_{(k)}$ のとき、この最適選択問題の部分問題を $S_N^*(n; k | x_{(1)}, \dots, x_{(k)})$ と表す。ただし、 $x_{(1)}, \dots, x_{(k)}$ は k 個の確率変数 $X_1, \dots, X_k$ の観測値 $x_1, \dots, x_k$ の順序統計量である。

ここで、選択したときの利得は、その観測値の値に等しいと考え、この問題の目的は選択した n 個の観測値の総和を最大にする最適政策と、そのもとで最適に振る舞ったときの総期待利得を求めることである。一般の利得関数の場合も、適当な条件のもとで同様の議論ができる。

いま、問題 $S_N^*(n)$, $S_N^*(n; k)$ と $S_N^*(n; k | x_{(1)}, \dots, x_{(k)})$ で、最適に振る舞ったときに得られるこれらの問題の総期待利得をそれぞれ $w_N^*(n)$, $w_N^*(n; k)$ と $w_N^*(n; k | x_{(1)}, \dots, x_{(k)})$ とする。このとき、よく知られているように、最適性の原理により次の最適方程式を満足する。

$$w_N^*(n) = \sum_{k=0}^{\infty} w_N^*(n; k) p_N(k) \quad (42)$$

$$w_N^*(n; k) = E[w_N^*(n; k | X_{(1)}, \dots, X_{(k)})] \quad (43)$$

$$w_N^*(n; k | x_{(1)}, \dots, x_{(k)}) = \max_{1 \leq i \leq k} \{ \sum_{j=1}^i x_{(j)} + w_{N-i}^*(n-i) \} \quad (44)$$

ここで、この最適選択問題では観測値の総和を最大にすることを目的とするから問題 $S_N^*(n; k | x_{(1)}, \dots, x_{(k)})$ で、もし i 個の観測値を選択すれば、それらは大きい方から i 個となる。したがって (44) 式ではこのことを利用している。

つぎに数列 $\{a_N^i\}_{i=1, 2, \dots}$ と $\{a_N^k(k)\}_{i=1, 2, \dots}$ を次のように帰納的に定義する。 $(0 \leq k \leq \infty)$

$$a_N^i = \sum_{k=0}^{\infty} a_N^i(k) p_N(k) \quad (45)$$

$$a_N^i(k) = U_k(a_{N-1}^i, a_{N-1}^{i-1} | 1, \infty) \quad (46)$$

$$a_N^i(0) = a_{N-1}^i \quad (47)$$

ただし,

$$a_N^0 = a_N^0(k) = \infty, \quad a_0^i = 0$$

とする。

注 3 ここで, 前節で考えた確率変数の数の数が既知の場合には,

$$a_{1,k}^i = a_{1,k}^i(k) = U_k(0, \infty | i, \infty) = E[X_{(i)}^k]$$

として求められた。ここで考える確率変数の数が未知の場合では,

$$a_i^i = \sum_{k=0}^{\infty} a_i^i(k) p_1(k)$$

$$a_i^i(k) = U_k(0, \infty | i, \infty) = E[X_{(i)}^k], \quad (1 \leq i < k)$$

となる。ただし, $X_{(i)}^k$ は k 個の独立かつ同一の分布に従う確率変数の i 番目の順序統計量を表す確率変数とする。

このとき, この最適選択問題の解は, 次のようになる。(Nakai [16]) これらの証明は, 定理 6・7 と 8 と同様にして求められるので省略する。

定理 9 最適選択問題 $S_N^u(n)$ の最適政策は次のようになる。

問題の状態が (N, n) のとき, k 個の確率変数を観測でき, それらの観測値の順序統計量が $x_{(1)}, \dots, x_{(k)}$ とする。いま j を $x_{(j)} \geq a_{N-1}^{k-j+1}$ かつ $1 \leq j \leq k \wedge n$ を満足する最大数, すなわち $x_{(j+1)} < a_{N-1}^{k-j}$ または $j = k \wedge n$ を満足する最大の数とする。このとき, 大きい方から j 個の値, すなわち $x_{(1)}, \dots, x_{(j)}$ を選択することが最適である。

定理 10 問題 $S_N^u(n)$ と $S_N^u(n; k)$ で最適に振る舞ったときの総期待利得 $w_N^u(n)$ と $w_N^u(n; k)$ は,

$$w_N^u(n) = \sum_{i=1}^n a_N^i \quad (48)$$

$$w_N^u(n; k) = \sum_{i=1}^k a_N^i(k) \quad (49)$$

である。

補題 5 から, つぎの性質が得られる。

定理 11 数列 $\{a_N^i\}_{i=1,2,\dots}$ と $\{a_N^i(k)\}_{i=1,2,\dots}$ は,

$$\begin{aligned} a_N^i(k) &= \sum_{j=1}^i \int_{a_{N-1}^{k-j+1}}^{a_{N-1}^{k-j}} x_{(j)} g_{M,j}(x_{(j)}) dx_{(j)} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{k \wedge (i-1)} a_{N-1}^{k-j} {}_k C_j (1 - F(a_{N-1}^{k-j}))^j (F(a_{N-1}^{k-j}))^{i-j} \end{aligned} \quad (50)$$

$$a_N^i = \sum_{k=0}^{\infty} a_N^i(k) p_N(k) \quad (51)$$

を満足する。

補題 6 から,

$$a_i^i = \sum_{k=0}^{\infty} a_i^i(k) p_k$$

$$a_i^i(k) = E[X_{(i)}^k]$$

が導かれる。また、次のこと成り立つ。(Nakai [16] の Proposition 2)

系 3 $\{a_N^i\}_{i=1,2,\dots}$ と $\{a_N^i(k)\}_{i=1,2,\dots}$ は i に関して減少する数列である。

補題 8 $w_N^k(n; k)$ は N に関して増加する。

注 4 系 2 と同様の性質が成り立ち、 $\{a_N^i\}_{i=1,2,\dots}$ は i に関して減少する数列となることがわかる。一方、補題 8 より $w_N^k(n)$ と $w_N^k(n; k)$ は N に関して増加することがわかる。このことは、前節で考えた問題とは異なり期間が長くなればなる程、出現する確率変数の数の期待値が増加することによって考えられる。

5 1 度に複数の仕事を観測できる確率的逐次割当問題

第 4 節で考えた、同時に複数の確率変数を観測できる逐次決定過程で、確率的逐次割り当て問題を考える。そのために第 4 節で考えた最適選択問題の結果を利用することにより容易に解決できる。すなわち前節ですでに述べたように、最適選択問題または最適停止問題は確率的逐次割り当て問題の特別な場合と考えられることに注意すれば理解できる。

5.1 仕事の数が既知の場合

次のような確率的逐次割当問題を考える。このとき、決められた期間に出現する仕事（確率変数）の数は既知で、それらの仕事（確率変数）が計画期間の間のどの期に観測できるかは、各々互いに独立であり、また観測される期に関しても独立であり、その確率は一樣とする。したがって、1 度に複数の値を観測でき、決められた期間のそれぞれの期に観測できる確率変数の数は残された仕事（確率変数）の数と計画期間によりその分布がわかる。一方、決定者（decision-maker）は、 n 人の人間を雇っており、それぞれの能力を $p_1, p_2, \dots, p_n$ とする。 $(1 \geq p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n \geq 0)$ このとき、 n 個の仕事が出現するが、これらの仕事の大きさはある確率変数の実現値と考える。これらの確率変数は、おのおの独立でかつ同一の分布に従いその確率分布関数は既知とする。また、いったん割り当てられた人

間は二度と割り当てられないとする。このとき、 n 人の人間を n 個の仕事にどのように割り当てれば総期待利得を最大にできるかを考える。

この問題に対しては、これまでに考えてきた確率的逐次割当問題と同様に、 $p_1, p_2, \dots, p_n$ とは独立な確率変数の分布関数にのみ依存するしきい値 (threshold value) が存在し、これらの値によって、最適政策とその政策に従ったときに得られる総期待利得の性質が求められる。いま出現する仕事の数を m とするとき、もし、 $m < n$ ならば、この問題の目的が総期待利得を最大にすることだから、 $\{p_1, \dots, p_n\}$ の中の大きい方から m 個、すなわち $\{p_1, \dots, p_m\}$ を考えればよい。一方、 $m > n$ のときは、自明な値 $p_{n+1} = \dots = p_m = 0$ をつけ加えても利得の定義から問題は起こらない。従って、一般性を失うことなく、 $m = n$ と仮定する。したがって、以下では残りの確率変数の数を表す n を省略する。

つぎに、残り N 期の間に n 個の独立で同一の分布に従う確率変数 $\{X_i\}_{i=1, \dots, n}$ を観測し、それら n 個の確率変数にそれぞれ決められた n 個の値 $\{p_1, \dots, p_n\}$ を割り当てるとき、この $(N; p_1, \dots, p_n)$ を確率的逐次割当問題の状態と呼び、このような問題を $P_N^k(p_1, \dots, p_n)$ で表す。またこの問題の状態が $(N; p_1, \dots, p_n)$ のとき、 k 個の確率変数が観測できるという部分問題を $P_N^k(p_1, \dots, p_n; k)$ で表す。また、それら観測できる k 個の確率変数の観測値が $x_{(1)}, \dots, x_{(k)}$ のとき、この確率的逐次割当問題の部分問題を $P_N^k(p_1, \dots, p_n; k|x_{(1)}, \dots, x_{(k)})$ と表す。ただし、 $x_{(1)}, \dots, x_{(k)}$ は k 個の確率変数 $X_1, \dots, X_k$ の観測値 $x_1, \dots, x_k$ の順序統計量である。 $(x_{(1)} \geq \dots \geq x_{(k)}, X_{(1)} \geq \dots \geq X_{(k)})$

この問題の目的は観測する n 個の観測値に n 個の $\{p_1, \dots, p_n\}$ を割り当てたとき、それらの利得の総和を最大にする最適政策と、そのもとで最適に振舞ったときの総期待利得を求めることである。ここで、大きさ x の仕事に完全な (perfect) 人間が当たれば、そのときの利得は x とし、能力が p の人間が当たればそのときの利得は p_x とする。

このとき、問題 $P_N^k(p_1, \dots, p_n)$, $P_N^k(p_1, \dots, p_n; k)$ と $P_N^k(p_1, \dots, p_n; k|x_{(1)}, \dots, x_{(k)})$ で、最適に振舞ったときの得られるこれらの問題の総期待利得を、それぞれ $v_N^k(p_1, \dots, p_n)$, $v_N^k(p_1, \dots, p_n; k)$ と $v_N^k(p_1, \dots, p_n; k|x_{(1)}, \dots, x_{(k)})$ とする。このとき、Ross [34] などによく知られているように、最適性の原理により次の最適方程式を満足する。

$$v_N^k(p_1, \dots, p_n) = \sum_{k=0}^n v_N^k(p_1, \dots, p_n; k) p_N(k) \quad (52)$$

$$v_N^k(p_1, \dots, p_n; k) = E[v_N^k(p_1, \dots, p_n; k|X_{(1)}, \dots, X_{(k)})] \quad (53)$$

$$v_N^k(p_1, \dots, p_n; k|x_{(1)}, \dots, x_{(k)}) = \max_{\{\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_k\} \subset \{p_1, \dots, p_n\}} \max_{\sigma \in S_k} \left\{ \sum_{j=1}^k \bar{p}_{\sigma(j)} x_{(j)} + v_{N-1}^k(p_1^*, \dots, p_{n-k}^*) \right\} \quad (54)$$

ただし、 $\{p_1^*, \dots, p_{n-k}^*\}$ は、 n 個の $\{p_1, \dots, p_n\}$ の中から、この期で割り当てられた k 個の $\{\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_k\}$ を除いた残りの $n-k$ 個である。 $(p_1^* \geq \dots \geq p_{n-k}^*, \bar{p}_1 \geq \dots \geq \bar{p}_k)$ このとき、この確率的逐次割当問題の利得関数の性質から問題 $P_N^k(p_1, \dots, p_n; k|x_{(1)}, \dots, x_{(k)})$ で、もし i 個の観測値を選択するとすれば、それらは大きい方から i 個となることは明らかである。したがって (54) 式ではこのことを利用している。このとき次の基本的性質が得られる。以下で $\{a_{N,k}^i\}_{i=1,2,\dots}$ は第4.2節で定義したものである。

定理12 確率的逐次割当問題 $P_N^k(p_1, \dots, p_n)$ の最適政策は次のようになる。

この問題の状態が $(N; p_1, \dots, p_n)$ のとき, k 個の確率変数を観測し, それらの観測値の順序統計量が $x_{(1)}, \dots, x_{(k)}$ とする。いま $\{x_{(i)}\}_{i=1, \dots, k}$ と $\{a_{N-1, n-k}^i\}_{i=1, \dots, n-k}$ のあわせて n 個の値を大きさの順に並べ替えたものを $\{b_j\}_{j=1, 2, \dots, n}$ とする。このとき, $b_j = x_{(i)} (j=1, \dots, n, i=1, \dots, k)$ ならば, $x_{(i)}$ を j 番目の p_j に割り当てるのが最適である。また, $b_j = a_{N-1, n-k}^i (j=1, \dots, n, i=1, \dots, n-k)$ ならば, この j に対応する p_j にはこの期では割り当てないことが最適である。

定理13 問題 $P_N^k(p_1, \dots, p_n)$ と $P_N^k(p_1, \dots, p_n; k)$ で最適に振る舞ったときの総期待利得 $v_N^k(p_1, \dots, p_n)$ と $v_N^k(p_1, \dots, p_n; k)$ は,

$$v_N^k(p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^n p_i a_{N, n}^i \quad (55)$$

$$v_N^k(p_1, \dots, p_n; k) = \sum_{i=1}^n p_i a_{N, n}^i(k) \quad (56)$$

である。

これら2つの性質は, N に関する帰納法によって示される。定理12と定理13をあわせて示す。

$N=1$ のとき, この問題は

$$\max_{\sigma \in S_k} \left\{ \sum_{j=1}^k \bar{p}_{\sigma(j)} x_{(j)} \right\}$$

と等しくなるから, Hardy の補題 (補題1) より, 定理12は明らかである。また,

$$\begin{aligned} v_1^k(p_1, \dots, p_n) &= \sum_{i=1}^n p_i E[X_{(i)}^k] \\ &= \sum_{i=1}^n p_i a_{N, n}^i \end{aligned}$$

より, 定理13が成り立つ。次に, $N-1$ までこれらの定理が成り立つことを仮定して, N のときにこれらの定理を示す。

定理12の証明。 まず始めに次の値を考える。

$$\max_{\sigma \in S_k} \left\{ \sum_{j=1}^k \bar{p}_{\sigma(j)} x_{(j)} + v_{N-1}^k(p_1^*, \dots, p_{n-k}^*) \right\}$$

帰納法の仮定から,

$$v_{N-1}^k(p_1^*, \dots, p_{n-k}^*) = \sum_{i=1}^{n-k} p_i^* a_{N-1, n-k}^i$$

である。したがって,

$$\begin{aligned} \max_{\sigma \in S_k} \left\{ \sum_{j=1}^k \bar{p}_{\sigma(j)} x_{(j)} + v_{N-1}^k(p_1^*, \dots, p_{n-k}^*) \right\} &= \max_{\sigma \in S_k} \left\{ \sum_{j=1}^k \bar{p}_{\sigma(j)} x_{(j)} + \sum_{i=1}^{n-k} p_i^* a_{N-1, n-k}^i \right\} \\ &= \max_{\sigma \in S_k} \left\{ \sum_{j=1}^k \bar{p}_{\sigma(j)} x_{(j)} \right\} + \sum_{i=1}^{n-k} p_i^* a_{N-1, n-k}^i \end{aligned} \quad (57)$$

となる。よって, Hardy の補題 (補題1) より, (57)式は,

$$\max_{\sigma \in S_k} \left\{ \sum_{j=1}^k \bar{p}_{\sigma(j)} x_{(j)} \right\} + \sum_{i=1}^{n-k} p_i^* a_{N-1, n-k}^i = \sum_{j=1}^k \bar{p}_j x_{(j)} + \sum_{i=1}^{n-k} p_i^* a_{N-1, n-k}^i$$

となる。すなわち、この期で

$$\{\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_k\} \subset \{p_1, \dots, p_n\}$$

を割り当てることにすれば、大きさの順に j 番目の p_j を、 j 番目の $x_{(j)}$ に割り当てるのが最適となる。よって、

$$\begin{aligned} v_N^k(p_1, \dots, p_n; k | x_{(1)}, \dots, x_{(k)}) &= \max_{\{\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_k\} \subset \{p_1, \dots, p_n\}} \max_{\sigma \in S_k} \left\{ \sum_{j=1}^k \bar{p}_{\sigma(j)} x_{(j)} + v_{N-1}^k(p_1^*, \dots, p_{n-k}^*) \right\} \\ &= \max_{\{\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_k\} \subset \{p_1, \dots, p_n\}} \left\{ \sum_{j=1}^k \bar{p}_j x_{(j)} + \sum_{i=1}^{n-k} p_i^* a_{N-1, n-k}^i \right\} \end{aligned} \quad (58)$$

となる。

したがって、ここで観測した k 個の値 $\{x_{(i)}\}_{i=1, \dots, k}$ と、つぎの期以降で最適に振る舞ったときに得られる $n-k$ 個の値 $\{a_{N-1, n-k}^i\}_{i=1, \dots, n-k}$ に対して、どのように n 個の $\{p_1, \dots, p_n\}$ を割り当てれば良いかという問題となる。よって $\{x_{(i)}\}_{i=1, \dots, k}$ と $\{a_{N-1, n-k}^i\}_{i=1, \dots, n-k}$ の n 個の値をあわせ大きさの順に並べ替えたものを $\{b_j\}_{j=1, 2, \dots, n}$ とすると (57) 式は、

$$\max_{\sigma \in S_n} \left\{ \sum_{i=1}^n p_i b_{\sigma(i)} \right\}$$

となり、また、

$$b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$$

だから、Hardy の補題 (補題 1) より、

$$\max_{\sigma \in S_n} \left\{ \sum_{i=1}^n p_i b_{\sigma(i)} \right\} = \sum_{i=1}^n p_i b_i$$

となる。したがって、 $b_j = x_{(j)}$ ($j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, k$) ならば、 $x_{(i)}$ を j 番目の p_j に割り当てるのが最適である。また、 $b_j = a_{N-1, n-k}^i$ ($j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, n-k$) ならば、この j に対応する p_j には、この期では割り当てないことが最適である。□

定理13の証明. (34)式・(35)式と(36)式で定められた $a_{N,n}^i$ が問題 $P_N^k(p_1, \dots, p_n)$ で i 番目の p_i によって得られる総期待利得に等しいことを帰納法によって示す。このことが示されれば、(55)式は明かである。同様に、 $a_{N,n}^i(k)$ が問題 $P_N^k(p_1, \dots, p_n; k)$ で i 番目の p_i によって得られる総期待利得に等しいことが示されればよい。よってここでは、このことが成立することを示す。まず、 $N-1$ まで成り立つと仮定する。

さて、 $\{a_{N,n}^i\}_{i=1, \dots, \infty}$ がつぎの式で定義されていることに注意する。

$$a_{N,n}^i(k) = U_k(a_{N-1, n-k}^i, a_{N-1, n-k}^{i-1} | 1, \infty)$$

注1で述べたように、

$$\begin{aligned} a_{1,k} &= U_k(a_1, \infty | 1, \infty) \\ &= \int_0^{a_1} a_1 h_{k,1}(x_{(1)}) f(x_{(1)}) dx_{(1)} + \int_{a_1}^{\infty} x_{(1)} h_{k,1}(x_{(1)}) f(x_{(1)}) dx_{(1)} \end{aligned} \quad (59)$$

である。ところでこれは、1番大きい値を持つ p_1 によって得ることのできる総期待利得に等しい。すなわち、 $x_{(1)} \geq a_1$ ならば、この値に1番大きい p_1 を割り当てるのが最適であり、 $x_{(1)} \leq a_1$ ならば、この値に対しては、この期で p_1 を割り当てないことが最適だから、(59)式の第2項はこの期で割り当てた場合の期待利得を表し、(59)式の第1項は帰納法の仮定より、次の期以降最適に振る舞ったときの期待値だから、このことが求められる。

つぎに、一般の場合を考えると、

$$\begin{aligned} \alpha_{i,k} &= U_k(a_i, a_{i-1}|l, \infty) \\ &= \int_0^{a_1} a_i h_{k,1}(x_{(1)}) f(x_{(1)}) dx_{(1)} + \int_{a_1}^{a_{i-1}} x_{(1)} h_{k,1}(x_{(1)}) f(x_{(1)}) dx_{(1)} \\ &\quad + \int_{a_{i-1}}^y U_k(a_{i-1}, a_{i-2}|2, x_{(1)}) f(x_{(1)}) dx_{(1)} \end{aligned} \quad (60)$$

だから、これらの各項について考える。

(60)式より、

$$\begin{aligned} \alpha_{i,k} &= U_k(a_{N-1,n-k}^i, a_{N-1,n-k}^{i-1}|1, \infty) \\ &= \int_0^{a_{N-1,n-k}^i} a_{N-1,n-k}^i h_{k,1}(x_{(1)}) f(x_{(1)}) dx_{(1)} + \int_{a_{N-1,n-k}^i}^{a_{N-1,n-k}^{i-1}} x_{(1)} h_{k,1}(x_{(1)}) f(x_{(1)}) dx_{(1)} \\ &\quad + \int_{a_{N-1,n-k}^{i-1}}^y U_k(a_{N-1,n-k}^{i-1}, a_{N-1,n-k}^{i-2}|2, x_{(1)}) f(x_{(1)}) dx_{(1)} \end{aligned} \quad (61)$$

となる。まず、 $x_{(1)} \leq a_{N-1,n-k}^i$ ならば、このとき p_i はもちろん、 $p_1, \dots, p_{i-1}$ すべてがこの期では割り当てられず、つぎの期に進みその期ではやはり p_i は大きい方から i 番目のままである。したがって、この場合に p_i が割り当てられる値の期待値は帰納法の仮定より $a_{N-1,n-k}^i$ だから、(61)式の第1項で表せる。

つぎに、 $a_{N-1,n-k}^i \leq x_{(1)} \leq a_{N-1,n-k}^{i-1}$ のとき、 $p_1, \dots, p_{i-1}$ すべてがこの期では割り当てられないが、 i 番目の p_i は、この期で値 $x_{(1)}$ に割り当てられる。したがって、この場合の期待値は(61)式の第2項で表せる。

最後に $a_{N-1,n-k}^{i-1} \leq x_{(1)}$ の場合は、 p_i は $x_{(1)}$ に割り当てられないが、 $a_{N-1,n-k}^{i-1} \leq x_{(1)}$ だから、最適政策に従えば $p_1, \dots, p_{i-1}$ の中のどれかが割り当てられる。この場合には、2番目に大きい観測値 $x_{(2)}$ の大きさによって3つの場合が考えられる。すなわち、 $x_{(2)} \leq a_{N-1,n-k}^{i-1}$ 、 $a_{N-1,n-k}^{i-1} \leq x_{(2)} \leq a_{N-1,n-k}^{i-2}$ と、 $a_{N-1,n-k}^{i-2} \leq x_{(2)}$ の3つの場合である。これらの場合は、 $x_{(1)}$ に対する場合分けに対応している。定義よりこのときの期待値を表すのが(61)式の第3項である。したがって、 a_N^i は i 番目の p_i によって得られる総期待利得に等しいことがわかる。このことからこの定理が成り立つ。□

注5 定理13で、 $p_1 = \dots = p_n = 1$ と $p_{n+1} = \dots = p_m = 0$ とおけば、定理7の結果と等しくなる。すなわち、ここで考えた確率的逐次割当問題は前節の最適選択問題の一般化と考えられる。

5.2 仕事の数が未知の場合

つぎに、決められた期間にわたって出現する仕事（確率変数）の数が未知の場合について考える。この問題は第5.1節で扱った確率的逐次割り当て問題と同じであるが、期間全体に現れる仕事の数未知である点が基本的に異なっている。したがって問題の詳しい説明等は前節にゆずることにして省略する。この問題に対しても、第5.1節で考えてきた確率的逐次割り当て問題と同様に、 $p_1, p_2, \dots, p_n$ とは独立な、確率変数の分布関数にのみ依存するしきい値（threshold value）が存在し、これらの値によって最適政策と、その政策に従ったときに得られる総期待利得の性質が求められる。

つぎに、残り N 期の間に、独立で同一の分布に従う確率変数 $\{X_i\}_{i=1, \dots, \infty}$ を観測し、それらの確率変数の観測値に決められた n 個の値 $\{p_1, \dots, p_n\}$ を割り当て、利得の総和の期待値を最大にする問題を考えると、この $(N; p_1, \dots, p_n)$ を確率的逐次割り当て問題の状態と呼び、このような問題を $P_N^u(p_1, \dots, p_n)$ で表す。また、この問題の状態が $(N; p_1, \dots, p_n)$ のとき、 k 個の確率変数が観測できるという部分問題を $P_N^u(p_1, \dots, p_n; k)$ で表す。また、観測できる k 個の確率変数の観測値が $x_{(1)}, \dots, x_{(k)}$ のとき、この確率的逐次割り当て問題の部分問題を $P_N^u(p_1, \dots, p_n; k | x_{(1)}, \dots, x_{(k)})$ と表す。ただし、 $x_{(1)}, \dots, x_{(k)}$ は k 個の確率変数 $X_1, \dots, X_k$ の観測値 $x_1, \dots, x_k$ の順序統計量とする。 $(x_{(1)} \geq \dots \geq x_{(k)}, X_{(1)} \geq \dots \geq X_{(k)})$

この問題の目的は確率数の観測値に n 個の $\{p_1, \dots, p_n\}$ を割り当てたとき、それらの利得の総和を最大にするような最適政策と、そのもとで最適に振る舞ったときの総期待利得を求めることである。ここで、利得は前節までで考えたものと同様する。

このとき、問題 $P_N^u(p_1, \dots, p_n)$, $P_N^u(p_1, \dots, p_n; k)$ と $P_N^u(p_1, \dots, p_n; k | x_{(1)}, \dots, x_{(k)})$ で、最適に振る舞ったときに得られるこれらの問題の総期待利得をそれぞれ $v_N^u(p_1, \dots, p_n)$, $v_N^u(p_1, \dots, p_n; k)$ と $v_N^u(p_1, \dots, p_n; k | x_{(1)}, \dots, x_{(k)})$ とする。このとき、最適性の原理により次の最適方程式を満足する。

$$v_N^u(p_1, \dots, p_n) = \sum_{k=0}^{\infty} v_N^u(p_1, \dots, p_n; k) p_N(k) \quad (62)$$

$$v_N^u(p_1, \dots, p_n; k) = E[v_N^u(p_1, \dots, p_n; k | X_{(1)}, \dots, X_{(k)})] \quad (63)$$

$$v_N^u(p_1, \dots, p_n; k | x_{(1)}, \dots, x_{(k)}) = \max_{0 \leq l \leq k} \max_{\{\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_l\} \subset \{p_1, \dots, p_n\}} \max_{\sigma \in S_l} \left\{ \sum_{j=1}^l \bar{p}_{\sigma(j)} x_{(j)} + v_{N-1}^u(p_1^*, \dots, p_{n-l}^*) \right\} \quad (64)$$

ただし、 $\{p_1^*, \dots, p_{n-l}^*\}$ は、 n 個の $\{p_1, \dots, p_n\}$ の中から、この期で割り当てられた l 個の $\{\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_l\}$ を除いた残りの $n-l$ 個である。 $(p_1^* \geq \dots \geq p_{n-l}^*, \bar{p}_1 \geq \dots \geq \bar{p}_l)$ このとき、この確率的逐次割り当て問題の利得関数の性質から問題 $P_N^u(p_1, \dots, p_n; k | x_{(1)}, \dots, x_{(k)})$ で、もし i 個の観測値を選択するとすれば、それらは大きい方から i 個となることは明かである。したがって(64)式ではこのことを利用している。以下で、 $\{a_N^i\}_{i=1,2,\dots}$ は第4.3節で定義したものである。

定理14 確率的逐次割り当て問題 $P_N^u(p_1, \dots, p_n)$ の最適政策は次のようになる。

この問題の状態が $(N; p_1, \dots, p_n)$ のとき、 k 個の確率変数を観測し、それらの観測値の順序統計量が $x_{(1)}, \dots, x_{(k)}$ とする。いま $\{x_{(i)}\}_{i=1, \dots, k}$ と $\{a_{N-1}^i\}_{i=1, \dots, n}$ の $n+k$ 個の値をあわせて大ききの順に並べ替

えたものを $\{b_j\}_{j=1,2,\dots,n+k}$ とする。このとき、 $b_j = x_{(j)}$ ($j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, k$) ならば、 $x_{(i)}$ を j 番目の p_j に割り当てるのが最適である。また、 $b_j = a_{N-1}^i$ ($j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, n$) ならば、この j に対応する p_j には、この期では割り当てないことが最適である。

定理15 問題 $P_N^u(p_1, \dots, p_n)$ と $P_N^u(p_1, \dots, p_n; k)$ で最適に振る舞ったときの総期待利得 $v_N^u(p_1, \dots, p_n)$ と $v_N^u(p_1, \dots, p_n; k)$ は、

$$v_N^u(p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^n p_i a_N^i \quad (65)$$

$$v_N^u(p_1, \dots, p_n; k) = \sum_{i=1}^n p_i a_N^i(k) \quad (66)$$

である。

これら2つの性質は、 N に関する帰納法によって示される。

$N = 1$ のとき、この問題は、

$$\max_{\sigma \in S_n} \left\{ \sum_{j=1}^{k \wedge n} \bar{p}_{\sigma(j)} x_{(j)} \right\}$$

となる。すなわち、 $k < n$ のときは、大きい方から k 個の $p_1, \dots, p_k$ を割り当てるのが最適となることは明かである。したがって、Hardy の補題 (補題1) より、定理14は成り立つ。また、

$$\begin{aligned} v_1^u(p_1, \dots, p_n) &= \sum_{i=1}^n p_i \sum_{k=0}^{\infty} p^k E[X_{(i)}^k] \\ &= \sum_{i=1}^n p_i a_1^i \end{aligned}$$

より、定理15が成り立つ。(注3)

次に、 $N-1$ までこれらの定理が成り立つことを仮定して、 N のときにこれらの定理を示す。

定理14の証明。 まず始めに次の値を考える。

$$\max_{\sigma \in S_l} \left\{ \sum_{j=1}^l \bar{p}_{\sigma(j)} x_{(j)} + v_{N-1}^u(p_1^*, \dots, p_{n-l}^*) \right\}$$

帰納法の仮定より、

$$v_{N-1}^u(p_1^*, \dots, p_{n-l}^*) = \sum_{i=1}^{n-l} p_i^* a_{N-1}^i$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \max_{\sigma \in S_l} \left\{ \sum_{j=1}^l \bar{p}_{\sigma(j)} x_{(j)} + v_{N-1}^u(p_1^*, \dots, p_{n-l}^*) \right\} &= \max_{\sigma \in S_l} \left\{ \sum_{j=1}^l \bar{p}_{\sigma(j)} x_{(j)} + \sum_{i=1}^{n-l} p_i^* a_{N-1}^i \right\} \\ &= \max_{\sigma \in S_l} \left\{ \sum_{j=1}^l \bar{p}_{\sigma(j)} x_{(j)} \right\} + \sum_{i=1}^{n-l} p_i^* a_{N-1}^i \end{aligned} \quad (67)$$

となる。よって、Hardy の補題 (補題1) から (67) 式は、

$$\max_{\sigma \in S_l} \left\{ \sum_{j=1}^l \bar{p}_{\sigma(j)} x_{(j)} \right\} + \sum_{i=1}^{n-l} p_i^* a_{N-1}^i = \sum_{j=1}^l \bar{p}_j x_{(j)} + \sum_{i=1}^{n-l} p_i^* a_{N-1}^i$$

となる。すなわち、この期で

$$\{\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_l\} \subset \{p_1, \dots, p_n\}$$

を割り当てることに決めれば、大きさの順に j 番目の p_j を、 j 番目の $x_{(j)}$ に割り当てるのが最適となる。よって、

$$\begin{aligned} v_N^u(p_1, \dots, p_n; k|x_{(1)}, \dots, x_{(k)}) \\ &= \max_{1 \leq l \leq k} \max_{\{\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_l\} \subset \{p_1, \dots, p_n\}} \max_{\sigma \in S_l} \left\{ \sum_{j=1}^l \bar{p}_{\sigma(j)} x_{(j)} + v_{N-l}^u(p_1^*, \dots, p_{n-l}^*) \right\} \\ &= \max_{1 \leq l \leq k} \max_{\{\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_l\} \subset \{p_1, \dots, p_n\}} \left\{ \sum_{j=1}^l \bar{p}_j x_{(j)} + \sum_{i=1}^{n-l} p_i^* a_{N-1}^i \right\} \end{aligned} \quad (68)$$

となる。

したがって、ここで観測した k 個の値 $\{x_{(i)}\}_{i=1, \dots, k}$ の中の大きい方から l 個の値 $\{x_{(i)}\}_{i=1, \dots, l}$ と、つぎの期以降で最適に振る舞ったときに得られる $n-l$ 個の値 $\{a_{N-1}^i\}_{i=1, \dots, n-l}$ に対して、どのように n 個の $\{p_1, \dots, p_n\}$ を割り当てれば良いかという問題となる。いま $\{x_{(i)}\}_{i=1, \dots, l}$ と $\{a_{N-1}^i\}_{i=1, \dots, n-l}$ の n 個の値をあわせて大きさの順に並べ替えたものを $\{b_j^l\}_{j=1, 2, \dots, n}$ とする。よって

$$\max_{\{\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_l\} \subset \{p_1, \dots, p_n\}} \left\{ \sum_{j=1}^l \bar{p}_j x_{(j)} + \sum_{i=1}^{n-l} p_i^* a_{N-1}^i \right\} = \max_{\sigma \in S_n} \left\{ \sum_{i=1}^n p_i b_{\sigma(i)}^l \right\}$$

となり、また、

$$b_1^l \geq b_2^l \geq \dots \geq b_n^l$$

だから、Hardy の補題（補題1）より、

$$\max_{\sigma \in S_l} \left\{ \sum_{i=1}^n p_i b_{\sigma(i)}^l \right\} = \sum_{i=1}^n p_i b_i^l$$

となる。このことから、観測した k 個の中から l 個の値を選ぶならば、 $b_j^l = x_{(i)}$ ($j=1, \dots, n, i=1, \dots, l$) ならば、 $x_{(i)}$ を j 番目の p_j に割り当てること最適であり、 $b_j = a_{N-1}^i$ ($j=1, \dots, n, i=1, n-l$) ならばこの j に対応する p_j には、この期では割り当てないことが最適である。

つぎに、観測した k 個の値 $\{x_{(i)}\}_{i=1, \dots, k}$ の中から幾つを選べば良いかを考える。 k 個の値 $\{x_{(i)}\}_{i=1, \dots, k}$ の中の大きい方から l 個の値を選ぶとすれば、ここまでの議論より、(68)式は、

$$v_N^u(p_1, \dots, p_n; k|x_{(1)}, \dots, x_{(k)}) = \max_{1 \leq l \leq k} \left\{ \sum_{i=1}^n p_i b_i^l \right\} \quad (69)$$

となる。いま

$$\xi_l = \sum_{i=1}^n p_i b_i^l$$

とおく。

一方、観測した k 個の値 $\{x_{(i)}\}_{i=1, \dots, k}$ と $\{a_{N-1}^i\}_{i=1, \dots, n}$ のあわせて $n+k$ 個の値を大きさの順に並べ替えたものを $\{b_j\}_{j=1, 2, \dots, n+k}$ とする。いま、これら $n+k$ 個の中から、大きい方から n 個を取り出し、それら $\{b_j\}_{j=1, 2, \dots, n}$ に対して、

$$\xi = \sum_{i=1}^n p_i b_i^l$$

とおく。このとき、 $\{b_j\}_{j=1, 2, \dots, n}$ に含まれる $\{x_{(i)}\}_{i=1, \dots, k}$ の数を l^* とする。すなわち、 $\xi = \xi_{l^*}$ である。

$l^* \leq l$ のとき、 $b_j = x_{(i^*)}$ ($1 \leq j \leq n$) とすると、 $l^* \leq l$ だから、

$$\xi - \xi_l = \xi_{l^*} - \xi_l$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^n p_i b_i^{l^*} - \sum_{i=1}^n p_i b_i^l \\
 &= \sum_{i=j}^n p_i b_i^{l^*} - \sum_{i=j}^n p_i b_i^l \\
 &= \sum_{i=j}^n p_i a_{N-1}^{i-l^*} - \sum_{i=j}^n p_i b_i^l \\
 &= \sum_{i=j}^n p_i \{a_{N-1}^{i-l^*} - b_i^l\}
 \end{aligned} \tag{70}$$

となる。ここで、観測した k 個の値 $\{x_{(i)}\}_{i=1, \dots, k}$ と $\{a_{N-1}^i\}_{i=1, \dots, n}$ の合わせて $n+k$ 個の値を大きさの順に並べ替えたものが $\{b_j\}_{j=1, 2, \dots, n+k}$ だから、 ξ_l と $\xi = \xi_{l^*}$ を大きさの順に並べたときに比較すると ξ_l と $\xi = \xi_{l^*}$ は j 番目までは等しいが、 $j+1$ 番目以降は次のようになる。すなわち、 $\xi = \xi_{l^*}$ では $j+1$ 番目以降は、

$$\{a_{N-1}^{j-l^*}, a_{N-1}^{j+1-l^*}, \dots, a_{N-1}^{n-l^*}\}$$

となる。一方、 ξ_l では、 $l = l^* + \bar{l} + 1$ とおくと、

$$\{a_{N-1}^{j-l^*}, a_{N-1}^{j+1-l^*}, \dots, a_{N-1}^{n-l^*-1}, x_{(l-\bar{l})}, \dots, x_{(l-1)}, x_{(l)}\}$$

となる。ここで、 $l - \bar{l} = l^* + 1$ より、

$$x_{(l)} \leq \dots \leq x_{(l^*+1)} \leq a_{N-1}^{n-l^*}$$

に注意する。すなわち、 $\{a_{N-1}^{j-l^*}, a_{N-1}^{j+1-l^*}, \dots, a_{N-1}^{n-l^*-1}, x_{(l-\bar{l})}, \dots, x_{(l-1)}, x_{(l)}\}$ と $\{a_{N-1}^{j-l^*}, a_{N-1}^{j+1-l^*}, \dots, a_{N-1}^{n-l^*}\}$ を比較すれば(70)式より、

$$\xi - \xi_l = \xi_{l^*} - \xi_l = \sum_{j=l-\bar{l}}^l p_j \{a_{N-1}^{n-(l-j)} - x_{(j)}\} \geq 0 \tag{71}$$

となり、

$$\xi \geq \xi_l$$

が示される。 $l < l^*$ の場合も同様となる。よって、定理に述べた政策が最適となる。□

定理15の証明. (45)式・(46)式と(47)式で定められた a_N^i が問題 $P_N^N(p_1, \dots, p_n)$ で i 番目の p_i によって得られる総期待利得に等しいことを帰納法によって示す。 $(i \leq m)$ のことが示されれば、(65)式は明かである。同様に、 $a_N^i(k)$ が問題 $P_N^N(p_1, \dots, p_n; k)$ で i 番目の p_i によって得られる総期待利得に等しいことが示される。これらのことから、この定理が成り立つことは明かである。よって、このことが成り立つことを帰納法で示す。 $N-1$ まで成り立つことを仮定する。

まず、 $\{a_N^i\}_{i=1, \dots, \infty}$ がつぎの式で定義されていることに注意する。

$$a_N^i(k) = U_k(a_{N-1}^i, a_{N-1}^{i-1}|1, \infty)$$

注1で述べたように、

$$\begin{aligned}
 a_{1,k} &= U_k(a_1, \infty|1, \infty) \\
 &= \int_0^{a_1} a_1 h_{k,1}(x_{(1)}) f(x_{(1)}) dx_{(1)} + \int_{a_1}^{\infty} x_{(1)} h_{k,1}(x_{(1)}) f(x_{(1)}) dx_{(1)}
 \end{aligned} \tag{72}$$

である。したがって

$$a_N^1 = U_k(a_{N-1}^1, \infty|1, \infty)$$

$$= \int_0^{a_{N-1}^1} a_{N-1}^1 h_{k,1}(x_{(1)}) f(x_{(1)}) dx_{(1)} + \int_{a_{N-1}^1}^{\infty} x_{(1)} h_{k,1}(x_{(1)}) f(x_{(1)}) dx_{(1)} \quad (73)$$

となる。これは、1番大きい値を持つ p_1 によって得ることのできる総期待利得に等しい。すなわち、 $x_{(1)} > a_{N-1}^1$ ならば、この値に1番大きい p_1 を割り当てるのが最適であり、 $x_{(1)} < a_{N-1}^1$ ならば、この値に対してはこの期で p_1 を割り当てないことが最適だから、(72)式の第2項はこの期で割り当てた場合の期待利得を表し、(72)式の第1項は帰納法の仮定より、次の期以降最適に振る舞ったときの期待利得だから、このことが得られる。

つぎに、一般の場合には、

$$\begin{aligned} \alpha_{i,k} &= U_k(a_i, a_{i-1}|1, \infty) \\ &= \int_0^{a_i} a_i h_{k,1}(x_{(1)}) f(x_{(1)}) dx_{(1)} + \int_{a_i}^{a_{i-1}} x_{(1)} h_{k,1}(x_{(1)}) f(x_{(1)}) dx_{(1)} \\ &\quad + \int_{a_{i-1}}^y U_k(a_{i-1}, a_{i-2}|2, x_{(1)}) f(x_{(1)}) dx_{(1)} \end{aligned} \quad (74)$$

より、これらの各項について考える。

(74)式より、

$$\begin{aligned} \alpha_{i,k} &= U_k(a_{N-1}^i, a_{N-1}^{i-1}|1, \infty) \\ &= \int_0^{a_{N-1}^i} a_{N-1}^i h_{k,1}(x_{(1)}) f(x_{(1)}) dx_{(1)} + \int_{a_{N-1}^i}^{a_{N-1}^{i-1}} x_{(1)} h_{k,1}(x_{(1)}) f(x_{(1)}) dx_{(1)} \\ &\quad + \int_{a_{N-1}^{i-1}}^y U_k(a_{N-1}^{i-1}, a_{N-1}^{i-2}|2, x_{(1)}) f(x_{(1)}) dx_{(1)} \end{aligned} \quad (75)$$

となる。まず、 $x_{(1)} \leq a_{N-1}^i$ ならば、このとき p_i はもちろん、 $p_1, \dots, p_{i-1}$ すべてがこの期では割り当てられず、つぎの期に進みその期ではやはり p_i は大きい方から i 番目のままである。したがって、この場合に p_i が割り当てられる値の期待値は帰納法の仮定より a_{N-1}^i だから、(75)式の第1項で表せる。

つぎに、 $a_{N-1}^i \leq x_{(1)} \leq a_{N-1}^{i-1}$ のとき、 $p_1, \dots, p_{i-1}$ すべてがこの期では割り当てられないが、 i 番目の p_i は、この期で値 $x_{(1)}$ に割り当てられる。したがって、この場合の期待値は(75)式の第2項で表せる。

最後に $a_{N-1}^{i-1} \leq x_{(1)}$ の場合は、 p_i は $x_{(1)}$ に割り当てられないが、 $a_{N-1}^{i-1} \leq x_{(1)}$ だから、最適政策に従えば $p_1, \dots, p_{i-1}$ の中のどれかが割り当てられる。この場合には、2番目に大きい観測値 $x_{(2)}$ の大きさによって3つの場合が考えられる。すなわち、 $x_{(2)} \leq a_{N-1}^{i-1}$ 、 $a_{N-1}^{i-1} \leq x_{(2)} \leq a_{N-1}^{i-2}$ と、 $a_{N-1}^{i-2} \leq x_{(2)}$ の3つの場合である。これらの場合は、 $x_{(1)}$ に対する場合分けに対応している。このときの期待値を表すのが定義より(75)式の第3項である。したがって、 a_N^i は i 番目の p_i によって得られる総期待利得に等しい。よって、この定理が成り立つ。□

注6 定理15で、 $p_1 = \dots = p_n = 1$ と $p_{n+1} = \dots = p_m = 0$ とおけば、定理11の結果と等しくなる。すなわち、ここで考えた確率的逐次割当問題は前節で考えた観測できる数が未知の場合の最適選択問題の一般化と考えられる。いまこの問題を簡単に P_N^k と表すことにすると定理15の証明で示されたように a_N^i が問題 $P_N^k(p_1, \dots, p_m)$ で i 番目の p_i によって得られる総期待利得に等しいことから、 P_N^k で i 番目の選択権により得られる総期待利得と考えらる。 $(i \leq m)$ このことから、最適選択問題で a_N^i は、問

題 P_{i-1}^n にさらにもう 1 つ選択する権利をつけ加えたときに獲得できる総期待利得の増加分と考えられる。すなわち、 i 番目の行動の価値とも考えることができる。

参 考 文 献

- [1] S. C. Albright, Optimal Sequential Assignments with Random Arriving Time, *Management Science*, vol. 21, 60-67, 1974.
- [2] S. C. Albright and C. Derman, Asymptotic Optimal Policies for the Stochastic Assignment Problem, *Management Science*, vol. 19, 46-51, 1972.
- [3] M. H. DeGroot, *Optimal Statistical Decisions*, McGraw-Hill, New York, New York, 1970.
- [4] C. Derman, G. J. Lieberman and S. M. Ross, A Sequential Stochastic Assignment Problem, *Management Science*, vol. 18, 349-355, 1972.
- [5] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Polya, *Inequality*, Cambridge University Press, 1934.
- [6] D. P. Kennedy, Optimal Sequential Assignment, *Mathematics of Operations Research*, vol. 11, 619-626, 1986.
- [7] T. Nakai, Optimal Assignment for a Random Sequence with an Unknown Parameter, *Journal of Information & Optimization Sciences*, vol. 1, 129-138 1980.
- [8] T. Nakai, Sequential Stochastic Assignment Problem with Rejection, *Journal of Information & Optimization Sciences*, vol. 2, 169-181, 1981.
- [9] 中井 達, ある Sequential Assignment Problem について, 京都大学数理解析研究所講究録「マルコフ・ゲームとその周辺」, vol. 460, 17-26, 1982.
- [10] T. Nakai, A Time Sequential Game Related to the Sequential Assignment Problem, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, vol. 25, 129-138, 1982.
- [11] T. Nakai, Game of the Sequential Assignment for the Randomly Arriving Jobs, *Reports of Statistical Applications Research, Union of Japanese Scientists and Engineers*, vol. 29, 1-6, 1982.
- [12] T. Nakai, Optimal Stopping Problem in a Finite State Partially Observable Markov Chain, *Journal of Information & Optimization Sciences*, vol. 4, 159-176, 1983.
- [13] T. Nakai, The Problem of Optimal Stopping in a Partially Observable Markov Chain, *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 45, 425-442, 1985.
- [14] T. Nakai, Optimal Assignment for a Random Sequence with an Unknown Number of Jobs, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, vol. 28, 179-194, 1985.
- [15] 中井 達, ある Sequential Stochastic Assignment Problem について, 京都大学数理解析研究所講究録「学習と制御とその周辺」, vol. 557, 164-187, 1985.
- [16] T. Nakai, An Optimal Selection Problem with a Random Number of Applicants per Period, *Operations Research*, vol. 34, 478-485, 1986.
- [17] T. Nakai, A Sequential Stochastic Assignment Problem in a Partially Observable Markov Chain, *Mathematics of Operations Research*, vol. 11, 230-240, 1986.
- [18] T. Nakai, A Sequential Stochastic Assignment Problem in a Stationary Markov Chain, *Mathematica Japonica*, vol. 31, 741-757, 1986.
- [19] 中井 達, ある部分観測可能なマルコフ過程における最適停止問題について, 京都大学数理解析研究所講究録「計画数学とその周辺」, vol. 611, 69-89, 1987.
- [20] 中井 達, 部分観測可能なセミマルコフ決定問題について, 京都大学数理解析研究所講究録「計画数学とその関連分野」, vol. 680, 174-182, 1989.
- [21] T. Nakai, A Stochastic Ordering and Related Sequential Decision Problems, *Journal of Information & Optimization Sciences*, vol. 11, 49-65, 1990.
- [22] 中井 達, 尤度比を用いた二つの順序と不完備情報の多段決定問題の性質について, 経済学研究(九州大学経済学会), vol. 57, 251-280, 1991.

- [23] 中井 達, 尤度比を用いた順序と多段決定問題について, 京都大学数理解析研究所講究録「数理計画モデルにおける最適化理論」, vol. 798, 191-201, 1992.
- [24] 中井 達, 一度に複数の値を観測することのできる確率的逐次割当問題について, 経済学研究 (九州大学経済学会), vol. 58, 161-192, 1992.
- [25] 中井 達, ある Markov chain の上での最適選択問題について, 京都大学数理解析研究所講究録「最適化の数理とその応用」, vol. 835, 153-164, 1993.
- [26] T. Nakai, A Partially Observable Decision Problem under a Shifted Likelihood Ratio Ordering, *Proceedings of the Australia-Japan Workshop on Stochastic Models in Engineering, Technology and Management* (Eds. S. Osaki and D. N. Pra Murthy), World Scientific Publishing, 413-422, 1993.
- [27] 中井 達, 部分観測可能なマルコフ連鎖の上での最適選択問題について, 経済学研究 (九州大学経済学会), vol. 59, No. 3・4, 1993.
- [28] 中井 達, 確率的逐次割当問題に関連した諸問題について (I), 経済学研究 (九州大学経済学会), vol. 59, No. 5・6, 1993.
- [29] T. Nakai, A Partially Observable Decision Problem under a Shifted Likelihood Ratio Ordering, *Computer and Mathematical Modelling*, (in submission) 1994.
- [30] 中井 達, 寺岡 義伸, 同時に複数の割当が可能な Sequential Stochastic Assignment Problem について, 京都大学数理解析研究所講究録「最適化理論とその関連分野」, vol. 747, 1-12, 1991.
- [31] T. Nakai and Y. Teraoka, A Sequential Stochastic Assignment Problem for a Random Sequence with Unknown Number of Values per Period, *Bulletin of Informatics and Cybernetics*, 1994,
- [32] R. Richter, The Stochastic Sequential Assignment Problem with Random Deadlines, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, vol. 1, 189-202, 1987.
- [33] R. Richter, Stochastically Maximizing the Number of Success in a Sequential Assignment Problem, *Journal of Applied Probability*, vol. 27, 351-364, 1990.
- [34] S. M. Ross, *Applied Probability Models with Optimization Applications*, Holden-Day, San Francisco, California, 1970.
- [35] M. Sakaguchi, A Sequential Assignment Problem for Randomly Arriving Jobs, *Reports of Statistical Applications Research, JUSE*, vol. 19, 99-109, 1972.
- [36] M. Sakaguchi, A Sequential Stochastic Assignment Problem Associated with Non-homogeneous Markov Process, *Mathematica Japonica*, vol. 29, 13-22, 1984.
- [37] M. Sakaguchi, A Sequential Stochastic Assignment Problem with an Unknown Number of Jobs, *Mathematica Japonica*, vol. 29, 141-152, 1984.