

特異値分解法を用いたサイスミック・トモグラフィ の検討

中村, めぐみ

林田, 智宏

竹中, 博士

清水, 洋

他

<https://doi.org/10.15017/4494278>

出版情報：九州大学大学院理学研究院研究報告．地球惑星科学．21（1），pp.9-18，2000-12-25．九州大学大学院理学研究院

バージョン：

権利関係：



特異値分解法を用いたサイスミック・トモグラフィの検討

中村めぐみ・林田智宏・竹中博士・清水 洋・鈴木貞臣

Numerical experiments for seismic tomography
using the Singular Value Decomposition (SVD) technique

Megumi NAKAMURA, Tomohiro HAYASHIDA, Hiroshi TAKENAKA, Hiroshi SHIMIZU, Sadaomi SUZUKI

Abstract

The purpose of this study is to learn how to consider setting the borehole and arrangement of the measuring instruments for seismic tomography. For this purpose we made an underground structure model of Unzen Volcano based on the results of previous studies, and simulated the seismic tomography identifying this model with the true structure because one of some plans in "Scientific drilling project at Unzen Volcano" is seismic tomography by using a borehole approaching conduit. We located sources and receivers along the borehole and at the surface, and calculated synthetic seismograms at the receiver positions by a 2-D finite difference method. We measured the first P arrival time in the synthetic seismograms, and constructed the observational equation for seismic tomography. We investigated the solution of this equation by the Singular Value Decomposition (SVD) technique. We found we can consider borehole location and arrangement of sources and receivers through such a simulation by Singular values and eigenvalue that got in this way.

I.はじめに

ジオトモグラフィ探査技術は、近年飛躍的な発展を遂げつつある調査技術で、Fig.1に示すように地下に掘ったボーリング孔等の孔間を利用して発信点や受信点を配置し、地盤や岩盤の特性を解明しようとする技術である(例えば、佐々・他,1993)。ジオトモグラフィには、地震波を利用するサイスミック・トモグラフィ、電磁波を利用するレーダー・トモグラフィ、そして比

抵抗トモグラフィ等の種類がある。これらの方法からそれぞれ速度（減衰定数）、誘電率、比抵抗の分布が得られる。

本研究では、地震波を使い地下の速度構造等を調べるサイスミック・トモグラフィを対象としており、トモグラフィ解析を行うにあたって、速度構造モデルを作成し、このモデルからP波の初動走時を得、得られた初動走時を観測初動走時と見なして数値実験を行う。解析の方法には様々なものがあるが、今回は最小2乗法のひとつである特異値分解法(SVD法)を用いる。特異値分解では特異値や固有ベクトルが得られるが、これらがどんなものであるかを理解し、実際に用いることによってトモグラフィ解析の結果をどのように検討できるかを知ることを目的とする。

ひとつの例として、計画が進行中である「雲仙科学掘削プロジェクト」に注目し、雲仙火山浅部の溶岩ドームと火道からなる速度構造モデルを実際のターゲット構造に見立てて解析を行う。

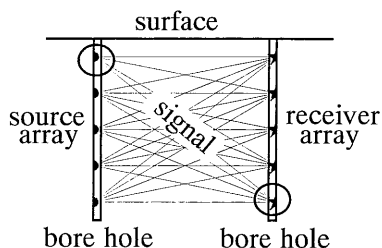


Fig. 1. Schematic view of geotomography.

II. トモグラフィ解析の概要

トモグラフィ解析は、得られた観測波線に対して断面をある大きさのセルに分割し、これらのセルに適当な初期値を与え、この初期モデルをもとにして速度解析を行う。そして最終的に得られた結果から速度構造などを画像処理して表示する。Fig.2に示した流れに従って、トモグラフィ解析の各段階で考慮すべき点について述べる。

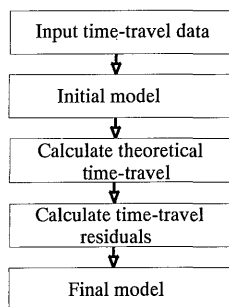


Fig. 2. Analysis flowchart.

2.1 データ

サイスミック・トモグラフィでは地震波を用いて地下構造を求める。そのために、発信点としてエアガン等の人工振源を、受信点としては地震計を配置する。対象箇所の地形やボーリング孔の状態を考慮してそれらを配置し、それぞれの位置データを得る。

実際に行われるトモグラフィ探査では、受信点にて初動走時が観測される。数値実験の場合は、ある速度構造モデルを想定し、それをもとに計算された理論記象から読み取った初動走時を観測走時とみなすことにする。

2.2 初期速度構造モデル

Fig.3に示すように、対象断面をいくつかの矩形セルに切り分ける。セル内の速度は一定であると仮定し、それぞれのセル内の速度を求めれば、対象の地下断面の二次元速度分布を得ることができる。

いま、この二次元分布を速度そのものではなく、ある値からのずれ（あるいは異常）として表すことを考える。ここでいう「ある値」が速度の初期値である。切り分けたセルのそれぞれに初期値を与え、初期速度構造モデル（以後、簡単に初期モデルと呼ぶ）を作成する。ただし、トモグラフィ解析ではしばしば速度の

かわりに速度の逆数であるスローネスを与えるが、本研究においてもスローネスを用いることにする。

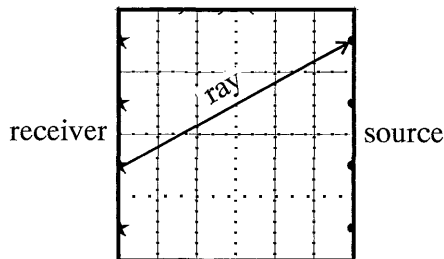


Fig. 3. An analysis field divided into some pieces. Stars are receivers. Solid circles are sources.

2.3 速度解析

最小2乗法を用いてスローネスを推定する。最小2乗法で走時残差（観測走時と理論走時との差）の2乗和が最も小さくなる時の解が求まる。その解を用いて画像処理をし、対象地下断面の速度構造を視覚的に表示する。

最小2乗法については次節で詳しく述べることにする。

III. 最小2乗法（特異値分解法）

ここでの記述は、斎藤(1983a,1983b)、松浦(1991)に負うところが大きい。

3.1 観測方程式

対象の地下断面を m 個のセルに切り分け、それぞれセルの未知パラメータ（スローネス）を x_j ($1 < j < m$)、観測される波線を n 本とし、その観測初動走時を y_i ($1 < i < n$)とする。また、 i 番目の波線が j 番目のセルを通過する距離を a_{ij} とすると、 x_j と y_i は行列を用いて以下のように表される。

$$y = Ax \quad (1)$$

ただし、太字は行列を表しており、

$$y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T \quad (2)$$

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_m]^T \quad (3)$$

(T は転置を表す)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad (4)$$

(1)式は観測方程式と呼ばれている。実際には観測走時 y と計算走時 Ax との差，すなわち走時残差 r を考えなくてはならないので，(1)式は次のように表されるのが相応しい。

$$y = Ax + r \quad (5)$$

ここで

$$r = [r_1, r_2, \dots, r_n]^T \quad (6)$$

(5)式において， r の2乗和 $r^T r$ が最小になるようなスローネス x を求める方法を最小2乗法という。このとき，求められるスローネス x を最小2乗解という（補足参照）。

スローネスの推定値，すなわち(1)式の最小2乗解 x は観測値 y に適当な逆演算行列 $A^\dagger$ を作用させて，

$$x = A^\dagger y \quad (7)$$

と表せる。この最小2乗解を与える $A^\dagger$ は一般化逆行列と呼ばれている。(7)式が最小2乗解になることについては次の小節で述べる。

3.2 特異値分解法

連立一次方程式の係数行列の行列式が0になるとき，その行列は特異であると言う。行列式が0になるかどうかは，数値計算では明確ではなく，丸め誤差のために0になるべき値が計算しても正確には0になることはない。つまりその行列が特異であるかどうかははっきりせず，特異であるにもかかわらず正則であると思つて得られた解では物理的には何の意味も持たない。そこで，行列の正則性をはかる尺度を与えるのが行列の特異値である。

ここで， A に関する固有値問題を考える。 A に関する固有値は次の1組の固有値方程式によって定義される。

$$\begin{aligned} Av &= \lambda u \\ A^T u &= \lambda v \end{aligned} \quad (8)$$

いま，(8)式の正の固有値を

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_p > 0 \quad (p > n, m)$$

とし，それに対応する(直交規格化されている)固有ベクトルを

$$u_1, u_2, \dots, u_p \quad (9)$$

$$v_1, v_2, \dots, v_p \quad (10)$$

とする。係数行列 A はこれらの固有ベクトルから作られる直交行列

$$\begin{aligned} U &= [U_p | U_0] \\ &= [u_1, u_2, \dots, u_p | u_{p+1}, \dots, u_n] \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} V &= [V_p | V_0] \\ &= [v_1, v_2, \dots, v_p | v_{p+1}, \dots, v_m] \end{aligned} \quad (12)$$

を用いて

$$A = U \Lambda V^T = U_p \Lambda_p V_p^T \quad (13)$$

と表される。ここで

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\Lambda_p = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix} \quad (15)$$

この正の固有値 λ を特異値と呼び，このような行列の分解を特異値分解と言う。ここで，

$$\text{観測値 } y \rightarrow U^T y$$

$$\text{スローネス } x \rightarrow V^T x$$

$$\text{係数行列 } A \rightarrow U^T A V = \Lambda$$

と変換すると，観測方程式(1)式は

$$U^T y = \Lambda V^T x \quad (16)$$

となる。さらに，固有値が0の部分と，0でない部分とに分離すると，

$$U_0^T y = 0 \quad (17)$$

$$U_p^T y = \Lambda_p V_p^T x \quad (18)$$

となる．ここで注意すべき点は，スローネス x の V_0 空間への射影成分 $V_0^T x$ は全く現れていないので，任意の値を取り得るということである．Fig.4は，スローネス x が存在するモデル空間と観測値 y が存在するデータ空間との関係を表している．

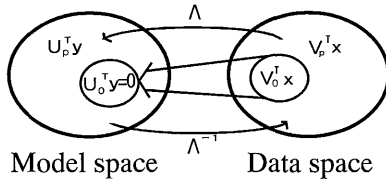


Fig. 4. Relation between model space and data space.

(17)式の条件の下で，観測方程式(1)式の解は存在し，形式的に

$$x = V_p \Lambda_p^{-1} U_p^T y + V_0 V_0^T x \quad (19)$$

と書ける．右辺第2項は，不定の部分である． $p=m$ のとき，この項はなくなるので解は一意に決まる．しかし， $p < m$ のときには解は無限に存在する．このとき(19)式右辺第2項を無視した解がノルム（ベクトルの長さ）最小の解となる．

一方， $p=n$ のとき，すなわち U_0 空間が存在しない場合，観測値を完全に説明するスローネスが存在するはずである．しかし， $p < n$ のときは，(17)式が満たされないとき観測値 y の U_0 空間への射影成分 $U_0^T y$ は，スローネス x の値をどのようにとろうとも説明することができないので，観測値 y をノルムの意味で最も良く説明するスローネス x を，観測方程式の解とすることにする．ここで(19)式は実際に最小2乗解であるのかどうかということについてみる．観測値 y と(19)式のスローネス x による予測値 Ax との差の2乗和をとると，

$$\|y - Ax\|^2 = \|U_0^T y\|^2 \quad (20)$$

となり， $U_0^T y$ はどのように値をとろうとも説明のつかない部分なので， x は確かに最小2乗解である．そのときの残差2乗和 $r^T r$ が $\|U_0^T y\|^2$ である．また，上で述べたように $V_0^T x$ はどのようにしても観測値から決めることはできないので，最小2乗解は無限に存在すること

になる．そこで，特に解ベクトル自身のノルムが最小となる解，すなわち

$$\hat{x} = V_p \Lambda_p^{-1} U_p^T y \quad (21)$$

を最適な解とする．このときの

$$A^\dagger = V_p \Lambda_p^{-1} U_p^T \quad (22)$$

が(7)式の一般化逆行列である．(21)式は，残差と自分自身のノルムの両方の意味での最小2乗解になっている．

以上のことから，特異値分解することによって一般化逆行列をつくり，結果的に最小2乗解を求めることができることがわかる．

次に，観測値が誤差 e を含んでいる場合を考える．この場合の観測方程式は，

$$y = Ax + e \quad (23)$$

簡単のために，すべての誤差は互いに統計的に独立であり，平均0のまわりに同じ分散 σ^2 を持つものとする．このとき

$$x = V_p \Lambda_p^{-1} U_p^T y \quad (24)$$

にも誤差が生じていることになる．(18)式を書き換えると

$$x = \sum_{i=1}^p \left(\frac{U_i^T y}{\lambda_i} \right) v_i \quad (25)$$

となり，観測値 y に含まれる誤差の小さな特異値に対応する成分が，誤差の伝播によってスローネス x の誤差を大きくしてしまう．ことがわかる．また， x の誤差の共分散行列 C は

$$C = \sigma^2 V_p \Lambda_p^{-2} V_p^T \quad (26)$$

これよりそれぞれの x の誤差分散を行列要素で表すと

$$\sigma_i^2 = \sigma^2 \sum_{j=1}^p \left(\frac{V_{ij}}{\lambda_j} \right)^2 \quad (1 < i < m) \quad (27)$$

この(27)式から， A が極めて0に近い特異値を持つとき，分散は非常に大きくなってしまふ．従って，(18)

式のような解は数学的には存在しても、物理的には全く意味がないものであることがわかる。数値的に特異値を求めた場合には、本来0であるべき固有値が計算誤差のために極めて小さな特異値として現れてくるかもしれないし、また、元来Aの特異値の中に小さなものがあるかもしれない。そこで、Aの特異値の中で0に近いものは切り捨てるという操作を行う。それをふまえてAのp個の正の特異値の中から大きい順に選んだq個($q < p$)の特異値と、それに対応する固有ベクトルを用いて

$$A_q^\dagger = V_q \Lambda_q^{-1} U_q^T \quad (28)$$

を定義すると、そのときの最小2乗解は

$$\begin{aligned} x &= A_q^\dagger y \\ &= V_q \Lambda_q^{-1} U_q^T y \\ &= \sum_{i=1}^q \left(\frac{u_i^T y}{\lambda_i} \right) v_i \end{aligned} \quad (29)$$

となる。A_qは有効一般化逆行列と呼ばれている。以上のことから、p個の正の特異値から大きい順にq個だけ選ぶことによって数値的な誤差を小さくすることが可能であることがわかる。

IV. 数値実験

4.1 速度構造モデル-雲仙科学掘削プロジェクトより-

今回の研究では、長崎県の雲仙火山を一例にあげ、計画が進行中の雲仙火山科学掘削プロジェクトに注目した。雲仙火山の噴火現象は、地球物理学、地質学、測地学等の分野からの様々な観測や研究が進められ、マグマ上昇・噴火モデルに進歩をもたらした。さらなる科学的発展のために、モデルの検証を経てよりレベルの高いモデルを構築するための実証的研究が必要である。そこで、科学掘削を中心とした雲仙火山の実態解明を目的としたプロジェクトが考案された(地震予知総合研究振興会,1999)。

固体地球科学において科学掘削は有力な手段であるが、実施するには、科学掘削による研究を効率良く進めるための事前の検討が必要である。そこで、ボーリング孔を利用したサイスミック・トモグラフィ探査を行った場合に、掘削位置や地震計・人工振源の配置の仕方によってどのような結果が予想されるかを検討する手段として特異値分解法をあげる。本研究では特異値分解法で得られる特異値や固有ベクトルを用いてい

かなる検討ができるかを知ることが目的とし、雲仙火山下の速度構造モデルを作成し、そのモデルをもとに数値実験を行う。

雲仙火山浅部におけるトモグラフィ探査のターゲットを溶岩ドームと火道にあて、Fig.5のような速度構造モデルを考える(図中の各数字はP波スローネス)。

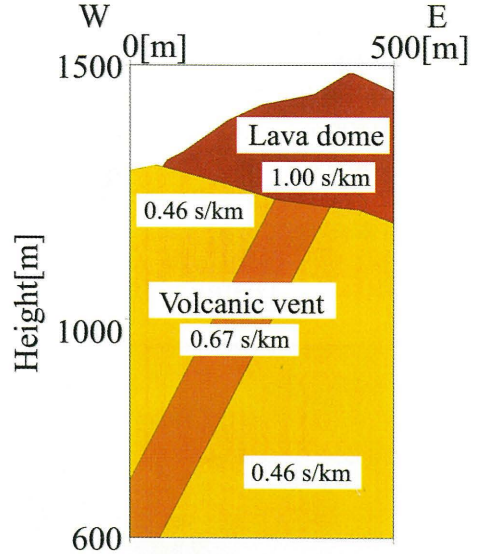


Fig. 5. Velocity structure model of Unzen Volcano used as true velocity structure.

4.2 データ作成

発信点と受信点の位置データと各波線の観測走時データを次のように作成する。

まず、位置データについて述べる。雲仙火山に東西方向の測線を考え、地表に受信点を20点並べる。また、雲

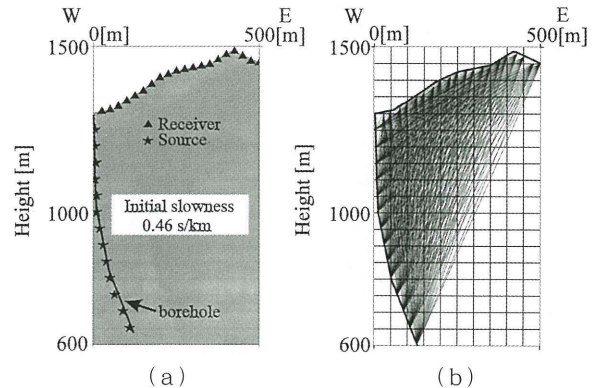


Fig. 6. (a) Location of sources and receivers in a homogeneous initial model. (b) Schematic view of raypaths.

仙火山浅部にボーリング孔を想定し(地震予知総合研究振興会,1999), ボーリング孔に発信点を14点並べる. Fig.6はボーリング孔と, 発信点・受信点の配置, ならびに全波線の様子を表している. ★は発信点, ▲は受信点を表している. 得られるべき観測走時の数は発信点と受信点の数の積であるから, 14×20 すなわち280個となる.

次に観測走時データについて述べる. 観測走時データを得るため, 作成したモデルをもとに, 時間二次精度, 空間四次精度の二次元速度一応力型スタガード格子差分法(林田・他,1999)を用いて計算を行う. そこで得られた理論波形からP波の初動走時を読みとり, そのデータを観測走時データとする. Fig.7 は計算時に実際に使用した速度構造モデルで, ボックス内は今回のトモグラフィ解析領域である.

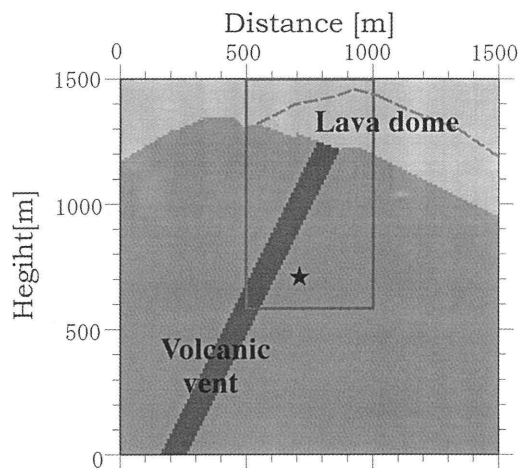


Fig. 7. A model for the calculation of arrival time using 2-D finite difference method. Star is hypocenter. The box shows are of analysis.

今回のトモグラフィ解析ではP波の初動走時が必要であるため, 差分法の計算では計算領域全ての端に一次の吸収境界条件(Clayton and Engquist,1977)を適用する. そのことにより境界条件による数値分散を軽減し, P波の立ち上がりを明瞭にする. 震源は爆発震源である. Fig.8 はP波のスナップショットの例であり, 火道と山体, 溶岩ドームと山体の境界に即したパターンが見られ, 地形の効果が良く現れていることがわかる. また, Fig.9 は計算で得られた波形の例である.

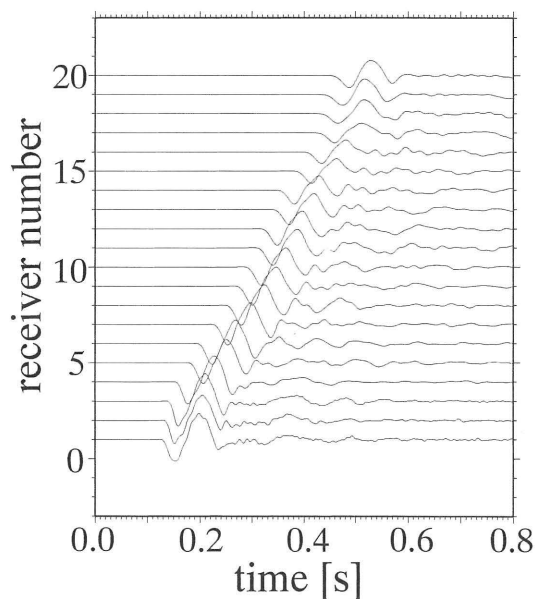


Fig. 9. Theoretical seismograms by 2-D finite difference method.

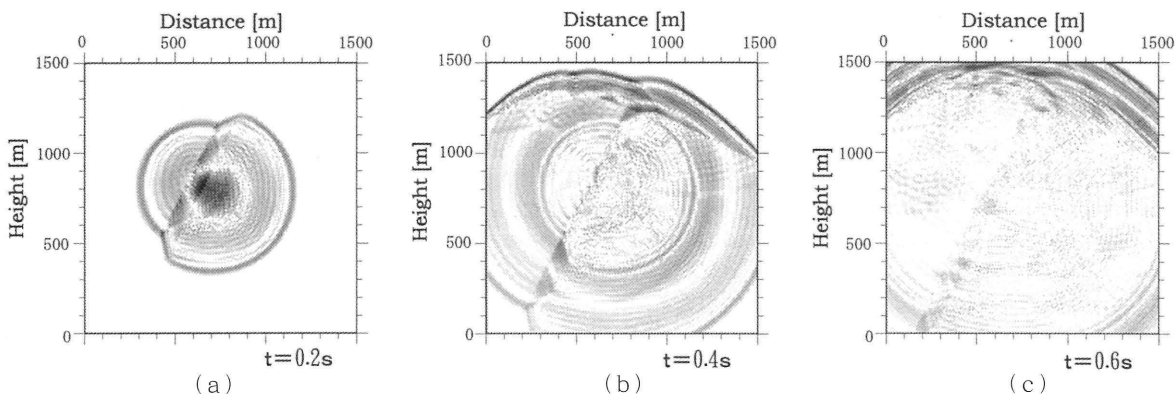


Fig. 8. P-wave snumshots. Time is measured from the occurence of an event.

4.3 初期モデル

初期モデルを作成するために、まず対象地下断面をいくつかの矩形セルに分割する。セルの大きさは様々に変えることができる。例えば、雲仙火山浅部における火道のような低速度域が予想される場合、そこではセルの大きさを細かくすることもできる。しかし、それでは波線が全く通過しないセルが増えてしまうという問題も生じる。また、最小2乗法を用いる場合には、方程式の数（データ数、あるいは波線の数）が未知パラメータの数（セルの数）を上回っていることが必須である。このようなことも含めてセルの大きさを考えなくてはならない。本研究では、Fig.6(b)で示されるような波線の通過状況をふまえ、水平方向、深さ方向ともに幅40mの計180個の正方形セルに分割する。

続いて、分割したそれぞれのセルに適当な初期値を与え、初期モデルを作成する。簡単のために、初期値は雲仙火山浅部の平均的速度2.3km/sをすべてのセルに与え、Fig.6(a)に示すような均質な初期モデルを採用する。

4.4 結果

セルの中には波線が通過していないものもある。このような場合には、係数行列の中から該当するセルに

関する成分を抜いて計算することができる。つまり、波線が通過していないセルのスローネスは求めることができないので、初めから抜いておくのである。そうすると、特異値の数と固有ベクトルの数は抜いたセルの分だけ減る。

Fig.10(a) は波線が通過していないセルも含めて計算した場合の特異値、Fig.10(b) は波線が通過していないセルは抜いて計算した場合の特異値を示している。Fig.10(a)を見ると、特異値は1番目から値の大きい順に並んでいるが、途中で急に極端に値が小さくなっている。しかし、Fig.10(b)では一部のセルの除くことによって極端に小さな特異値が現れなくなることがわかる。そこで、今回は波線が全く通過していないセルは抜いて考えることにし、計算上91個のセルを除いた。

次に、Fig.11にそれぞれの特異値に対応する固有ベクトルを示す。図に示されているように固有ベクトルはいわゆる解のパターンで、解はそれらの線形結合によって表現される。(23)式からわかるように、得られる解は特異値をいくつまで選ぶかによって変化する。選ぶ特異値の数を変えて得た速度構造をFig.12に示す。図の空白箇所は波線が全く通過していない部分であり、また黒い箇所はセルの持つ解の値が極端に大きい、または小さい部分である。

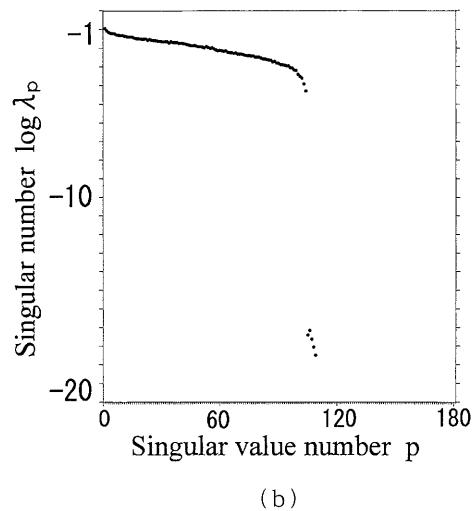
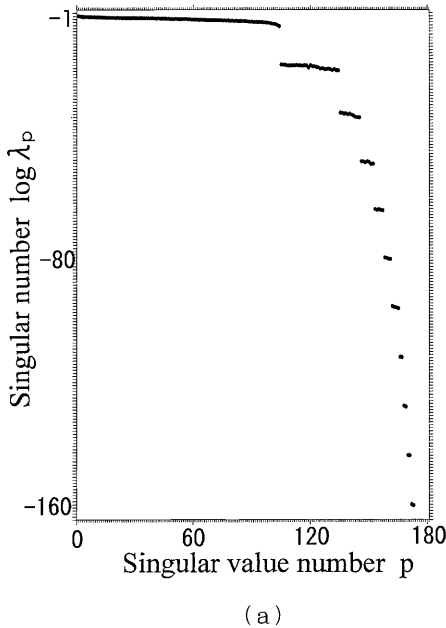


Fig. 10. Distribution of Singular Values. Singular Value number(p) is numbered Singular Value in order of size. (a)included cells that ray don't pass.(b)except cells that ray don't pass.

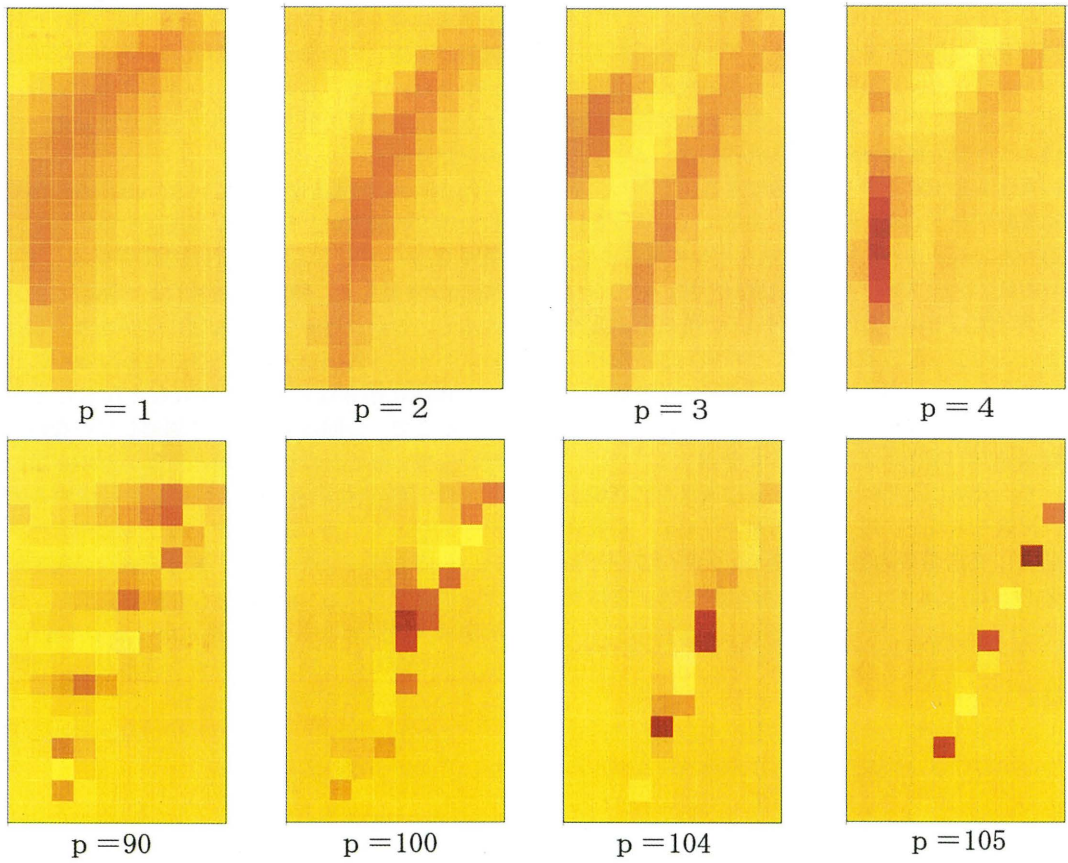


Fig. 11. Spatial distribution of eigenvalues corresponded to Singular Value numbers. Small slowness is shown in yellow. Large slowness is shown in red.

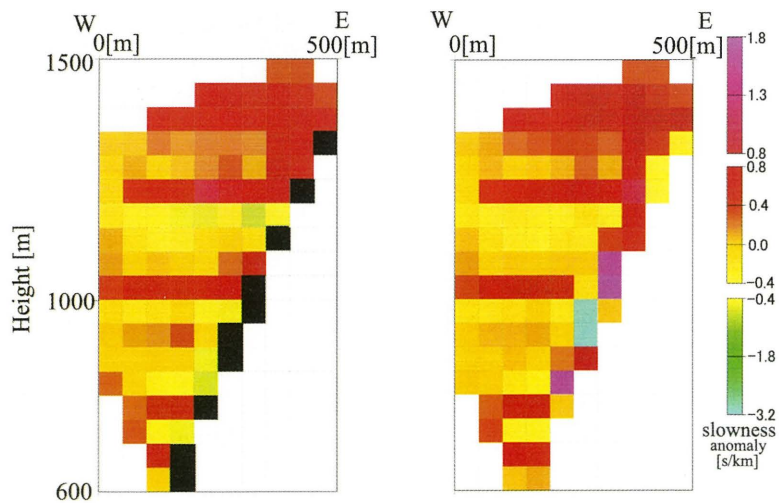


Fig. 12. P-wave velocity tomograms deduced from the Singular Value Analysis. The tomograms depend on the number of Singular Values. (a) use all of Singular Value, (b) $p=104$, (c) $p=68$, (d) $p=22$

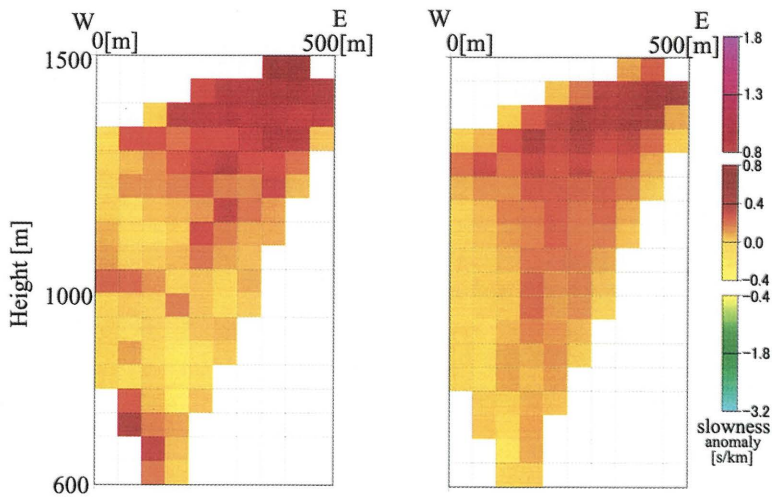


Fig. 12. Continued

V. 考察

特異値を考慮せずに求めた最小2乗解を画像表示することによって得られた結果では、仮想モデルにあるような火道や溶岩ドームがいずれもはっきりとは見られないが、値を見ながら特異値の数を選べば、仮想モデルにより近い結果が得られる場合があることがわかった。固有ベクトルを具体的に見ていくと、 $p=1$ や $p=2$ の時は溶岩ドームや火道の様子が伺える。しかし、特異値が小さくなるに従って認識し難くなる。前述の(25)式からもわかるように、固有ベクトルを特異値の逆数を重みとして重ねあわせていくことによって得られるものなので、小さい特異値は誤差を増幅させるという影響をもたらし、誤差のせいで解が物理的に意味を持たなくなることがある。

今回求めた全ての固有ベクトルの特徴を述べると、右上から左下へ向かっているパターンを持っている。さらに、Fig.6(b)の波線の様子を見ると、ほとんどの波線が西側から東側へ斜め上向きに走っている。実は、それぞれの固有ベクトルは、波線の走り方のパターンを反映しており、本研究で用いた特異値分解法において解は初期値には依存せず、そのパターンは波線の走り方、すなわち発信点と受信点の位置関係で決まるものであることがわかる。サイスミック・トモグラフィにおいて発信点と受信点の配置は解に大きな影響を及ぼすのである。

Fig.5の速度構造モデルと比較した結果、今回の数値

実験で溶岩ドームや火道の様子がわかるような比較的良好な結果が得られたのには次の原因が考えられる。まず、溶岩ドームの部分では比較的様々な方向に波線が走っていること、また、火道付近では波線の数はないが火道とほぼ平行方向に走っていることである。もし、ボーリング孔が西側でなく東側にあったり、火道が東に向かって傾斜しているとしたら、今回の発信点-受信点配置では得られる結果は仮想モデルとは全く異なるものになることが予想される。

従って、サイスミック・トモグラフィを実際の地盤に適用する際には、対象断面を取り囲むような発信点・受信点の配置が最も望ましい。しかし、数値実験で対象とした雲仙火山の溶岩ドームの上から実際にボーリング孔を掘ることは実現性が低く、断面を取り囲むような配置は難しいと言える。それだけに対象部分の地質構造や速度構造に関する情報を十分に得た上で、発信点と受信点の配置を考えることが必要である。

VI. まとめ

今回は雲仙火山の速度構造モデルを作成し、特異値分解法を用いてトモグラフィ解析の数値実験を行った。特異値分解法で得られる特異値と固有ベクトルの特徴を考慮し、用いることによって、発信点や受信点の配置の仕方という点からのトモグラフィ解析の結果の検討が可能であることがわかった。

謝 辞

特異値分解法については、斎藤正徳(1983b)のプログラムを使わせていただきました。

また、本研究を進めるにあたって、九州大学大学院理学研究院の亀 伸樹博士、同理学研究科の藤井 雄士郎氏をはじめ同研究科の方々には多くの助言と熱心なご指導をいただきました。本研究のために多くの時間を割いてくださった方々に、深く感謝の意を表すとともに、厚く御礼申し上げます。

本研究の一部は科学技術庁科学技術振興調整費(雲仙火山：科学掘削による噴火機構とマグマ活動解明のための国際共同研究)によるものです。

参考文献

- CLAYTON,R.AND ENGQUIST,B.,(1977):Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations, Bull. Seis. Soc. Am., **67**, 1529-1540
- 佐々宏一, 芦田 譲, 菅野 毅(1993):建設・防災技術者のための物理探査;森北出版
- 林田智宏, 竹中博士, 岡元太郎(1999):速度一応力型のスタガード格子差分法を用いた2次元及び3次元地震波計算コードの作成;九州大学理学部研究報告地球惑星科学, **20**, 3, 99-110.
- 地震予知総合研究振興会(1999);雲仙火山:科学掘削による噴火機構とマグマ活動解明に関する調査報告書, 1-260.
- 斎藤正徳(1983a):最小2乗法の計算法;物理探査, **36**, 72-86.
- (1983b):特異値分解と最小2乗法;物理探査, **36**, 146-158.
- 松浦充宏(1991):地球物理学におけるインバージョン理論の発展;地震, **44**, 53-62.

補 足

スローネス x が,

$$x = x^0 + \Delta x \quad (30)$$

と与えられるとする。ここで、 x^0 はスローネスの初期値、 Δx はスローネスである。(30)式に(1)式を代入すると、

$$y = Ax^0 + A \Delta x \quad (31)$$

となる。 Ax^0 は初期モデルにおける走時 y^0 に等しい。 Δy を走時残差とすると、

$$\Delta y = y - y^0 \quad (32)$$

という関係があることから、(8)式は

$$\Delta y = A \Delta x \quad (33)$$

と書くことができ、最小2乗解 Δx を求めることができる。