

地震波散乱問題における積分方程式のウェーブレットを用いた解法の検討：大規模積分作用素行列の圧縮

竹中, 博士

藤原, 広行

<https://doi.org/10.15017/4493148>

出版情報：九州大学大学院理学研究院研究報告．地球惑星科学．21（2），pp.61-68，2002-02-07．九州大学大学院理学研究院

バージョン：

権利関係：



地震波散乱問題における積分方程式のウェーブレットを用いた 解法の検討: 大規模積分作用素行列の圧縮

竹中博士*・藤原広行**

A wavelet-based approach for solving integral equations in seismic wave scattering problems: Compression of large kernel data matrices

Hiroshi TAKENAKA* and Hiroyuki FUJIWARA**

Abstract

Wavelets can be an effective tool for compressing integral operator matrices arising from large-scale simulation of wave scattering problems. We propose an approach based on the Haar wavelets to compress the matrices in the standard collocation-type boundary element method for seismic wave problems. We describe the formulation and show some numerical examples. In the examples we confirm this approach can attain higher compressibility within small accuracy loss for larger problems.

Keywords: wavelets, integral equation, boundary element method, seismic wave, scattering

I. はじめに

近年の計算科学技術の飛躍的な発展により、現実的な地下構造モデルに対する地震波伝播の数値シミュレーションが可能となりつつあり、高度な強震動予測手法として期待されている。地震波伝播のシミュレーション手法には、大きく有限要素法や差分法などの領域法と境界要素法 (BEM) 等の境界法の2種類がある。領域法は計算領域を有限化しその領域全体を離散化して解く手法で、境界法に比べて精度が劣る反面、複雑な地下構造モデルにも対応できるという利点がある。中でも有限要素法や差分法は既にある程度確立された手法として用いられており、並列アルゴリズムの開発等の研究が実施されている (例えば, FURUMURA et al., 1998; 古村・他, 2000; 林田・他, 2001)。一方境界法は、境界積分方程式を構成してそれを離散化して解く手法で、無限に広がった領域を簡単に扱えるという利点を持っており (例えば, YOKOI and TAKENAKA, 1995)、例えば地震発生場に特有の非常に多くのクラックが分布したような媒質中での地震波の散乱問題等を解くのに適している。しかし、この方法で現れる積分方程式を離散

化した行列は密行列となるため、それを解くための計算量は間接法でも N^2 (N : 行数) に比例したオーダー ($O(N^2)$ と表記) になり、それが大規模な問題を扱う際のネックとなっていた。

最近、幾つかの分野でこの問題を克服するための研究が盛んに行われており、「高速多重極展開法」と「ウェーブレット法」の2つの解法が注目されている。両者とも、原理的には計算量を N のオーダー ($O(N)$) まで減らすことが可能なことが証明されている (AMARATUNGA, 2000)。特に高速多重極展開法は実際の問題を解くための研究が進んでおり、地震波の散乱問題についても実用的な解法が提案されている (FUJIWARA, 1998, 2000)。しかし、それに比べてウェーブレット法はまだ発展途上にある。ここでは、ウェーブレット法を地震波の散乱問題に適用するための検討を行ったので報告する。

II. 問題設定

ここでは、特に2次元SH波のクラック散乱問題をBEMで解く場合を例にして考える。地震波の散乱問題では、一定要素を用いた選点法タイプのBEMが用いら

平成13年9月10日受付, 平成13年11月8日受理

*九州大学大学院理学研究院 Dept. of Earth & Planetary Sciences, Kyushu Univ., Fukuoka 812-8581, Japan

**防災科学技術研究所 National Research Institute for Earth and Disaster Prevention, Tsukuba 305-0006, Japan

ることが多い (例えば, FUJIWARA and TAKENAKA, 1994; YOKOI and TAKENAKA, 1995)。BEMの解法にウエーブレット法を適用する研究ではガラーキン法タイプのBEMを対象にすることがほとんどであったが (例えば, BEYLKIN *et al.*, 1991; von PETERSDORFF *et al.*, 1997; LAGE and SCHWAB, 1999; AMARATUNGA, 2000), ガラーキン法タイプのBEMが地震波の散乱問題に用いられることは稀なので, ここでは特に選点法タイプのBEMを検討対象に選んだ。

周波数領域において2次元SH波のクラック散乱問題に現れる積分方程式は,

$$\int_S K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = t(\mathbf{x}) \quad (1)$$

と書くことができる。ここで, S はクラック面, $u(\mathbf{y})$ はクラック面上の変位, $t(\mathbf{x})$ はクラック面上に入射したSH波による応力, $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は積分作用素の核関数で, 時間依存性が $\exp(i\omega t)$ (ω は角周波数, t は時間) のとき

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{i\mu}{4} \frac{\partial^2}{\partial n(\mathbf{y}) \partial n(\mathbf{x})} H_0^{(2)}(k_\beta |\mathbf{y} - \mathbf{x}|) \quad (2)$$

となる (FUJIWARA, 1998)。 $H_0^{(2)}(x)$ は零次の第二種ハンケル関数で, k_β は波数 (= ω/β , β : S波速度), $\partial/\partial n(\mathbf{x})$ は点 \mathbf{x} におけるクラック面の法線方向の微分 (方向微分) である。(1)式のタイプの方程式は, 地震波散乱問題で現れる最も典型的な積分方程式である。

一定要素を用いて積分方程式(1)の解 $u(\mathbf{y})$ を近似すると, 近似解 (数値解) $\hat{u}(\mathbf{y})$ は

$$\hat{u}(\mathbf{y}) = \sum_{j=0}^{N-1} u(\mathbf{y}_j) \psi_j(\mathbf{y}) \quad (3)$$

と表現できる。ここで, N は要素の数, $\psi_j(\mathbf{y})$ は N 個の要素のうち j 番目の要素でのみ1の値をとりそれ以外の要素ではゼロの値をとる (すなわち j 番目の要素を台とする) ボックス関数, \mathbf{y}_j は j 番目の要素の midpoint の位置ベクトルである。この式を積分方程式(1)に代入し, 選点法を用いて積分方程式を離散化すると, $u(\mathbf{y}_j)(j=0, 1, \dots, N-1)$ についての連立一次方程式

$$\sum_{j=0}^{N-1} u(\mathbf{y}_j) \int_{\Delta S_j} K(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = t(\mathbf{x}_i) \quad (4)$$

を得る。ここで, $\mathbf{x}_i(i=0, 1, \dots, N-1)$ は積分方程式が成立する選点で, 一定要素では要素の midpoint を選ぶことが多い。 ΔS_j は j 番目の要素で, この要素積分は解析的またはガウス積分を用いて数値的に評価する。連立一

次方程式(4)は, 直接法あるいは間接法のルーチンを用いて解くことができるが, 一般に係数行列が密行列なのでそのままでは直接法で $O(N^3)$, 間接法でも $O(N^2)$ の計算量がかかってしまう。計算量を減らすためには係数行列を疎行列化する必要がある。その一つの方法がウエーブレットの利用である。積分方程式の解法にウエーブレットを利用する研究は, 主にポテンシャルや電磁波の分野で進められており (例えば, WAGNER and CHEW, 1995; AMARATUNGA, 2000), 地震波のような弾性波の分野ではまだ皆無である。以下本論文では(1)式をもとに, ウエーブレットを利用するための準備とその有効性を検討する。

III. シングル・スケールの式の導出

まずウエーブレットを用いた解法を導入する前準備として, 上記の選点法タイプのBEMをガラーキン法の立場で捉え直し, シングル・スケールの式を導出する。選点法はガラーキン法を用いて定式化することができる。これは本研究でわかったことのひとつである。

積分方程式(1)をガラーキン法を用いて離散化する場合, (3)式を $u(\mathbf{y})$ の基底 (試験関数) $\psi_j(\mathbf{y})(j=0, 1, \dots, N-1)$ による展開式とみなし, (3)式を(1)式に代入した後, $\psi_j(\mathbf{x})(j=0, 1, \dots, N-1)$ の双対基底 $\tilde{\psi}_i(\mathbf{x})(i=0, 1, \dots, N-1)$ を両辺にかけて S 上の積分を施すと連立一次方程式

$$\sum_{j=0}^{N-1} u(\mathbf{y}_j) \int_S \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi_j(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) dS(\mathbf{x}) = \int_S \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) t(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \quad (5)$$

が得られる。ただし,

$$\int_S \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}) \psi_j(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \delta_{ij} \quad (6)$$

ここで, δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。一定要素の場合, 逆基底 $\tilde{\psi}_i(\mathbf{x})$ は基底 $\psi_i(\mathbf{x})$ と定数倍を除いて全く同じ関数であり, (5)式の両辺の積分は選点法の(4)式左辺と同様に実際には要素積分になる。

以上がガラーキン法による離散化である。ガラーキン法による離散化は, 選点法の場合に比べて積分の回数が激増するので, 要素積分を解析的に評価できる場合を除いて, 計算量が激増してしまう。このためガラーキン法タイプのBEMが地震波の散乱問題に用いられることはほとんどなかった。

解 $u(\mathbf{y})$ だけでなく, 核関数 $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ と入力 $t(\mathbf{x})$ についても一定要素近似を用いると形式的にガラーキン法の方程式から選点法の方程式を導くことができる。すな

わち, $K(x, y)$ と $t(x)$ のところに, それぞれ

$$\hat{K}(x, y) = \sum_{k=0}^{N-1} K(x_k, y) \psi_k(x), \quad \hat{t}(x) = \sum_{k=0}^{N-1} t(x_k) \psi_k(y) \quad (7)$$

を代入して, (6)式を用いて x についての積分を実行すると選点法の方程式(4)が得られる。

ガラーキン法の方程式(5)は, 一定要素のサイズすなわちひとつのスケールを表す空間関数 $\psi_j(x)$ で離散化されているので, いわば「シングル・スケール」の方程式である。これをウェーブレットを用いて「マルチスケール」化することができる。次にそれを説明する。

IV. マルチスケール化とウェーブレット

境界要素の数を $N=N_0 2^L$ とする。一定要素を表す N 個のボックス関数 $\psi_j(x) (j=0, 1, \dots, N-1)$ を基底とする関数空間を V^L とすると, 方程式(4)の解はこの関数空間に属する。 V^L を最も細かいスケール (第 L レベル) の空間と考え, 以下のようにして順次より粗いスケールの関数空間 $V^l (l=L-1, \dots, 0)$ を定義する。

$$V^l = \text{span} \{ \phi_i^l(x) | i = 0, 1, \dots, N_l - 1 \}, \quad (8)$$

$$\phi_j^l(x) = \psi_j(x), \quad \phi_i^l(x) = \phi_{2i}^{l+1}(x) + \phi_{2i+1}^{l+1}(x) \quad (9)$$

ただし, $N_l = N_0 2^l$ である。第 l レベルの関数空間 V^l は 1 段階細かい第 $l+1$ レベルのスケールの空間 V^{l+1} の部分空間になっている。すなわち,

$$V^l \subset V^{l+1} \quad (10)$$

ここで, V^l の直交補空間 W^l

$$V^{l+1} = V^l \oplus W^l \quad (11)$$

を考え, この基底としてハール・ウェーブレット

$$w_i^l(x) = \phi_{2i}^{l+1}(x) - \phi_{2i+1}^{l+1}(x) \quad (12)$$

を採用する。ハール・ウェーブレット $w_i^l (i=0, 1, \dots, N_l-1)$ は W^l の直交基底になっている。このとき, 解 $u(x)$ の一定要素近似解 $\hat{u}(x)$ は, 次のようにマルチスケール表現できる。

$$\hat{u}(x) = \sum_{j=0}^{N_0-1} s_j^0 \phi_j^0(x) + \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{N_l-1} d_j^l w_j^l(x) \quad (13)$$

$\hat{u}(x)$ からウェーブレット係数 $s_0^0, s_1^0, \dots, s_{N_0-1}^0, d_0^0, \dots, d_{N-1}^{L-1}$ を求める操作

$$s_j^0 = \int_S \hat{u}(x) \tilde{\phi}_j^0(x) dS(x), \quad d_j^l = \int_S \hat{u}(x) \tilde{w}_j^l(x) dS(x) \quad (14)$$

が, ウェーブレット変換で, 逆にウェーブレット係数から $\hat{u}(x)$ を求める (すなわち(13)式) のが, 逆変換である。

ウェーブレット変換を W で表すと, $W\hat{u}$ の実際の計算は, $u(x_i) (i=0, 1, \dots, N-1)$ に高速ウェーブレット変換を適用して離散的に行うことができる。計算量は $O(N)$ である。ハール・ウェーブレットの場合, 高速ウェーブレット変換は

$$s_j^l = (s_{2j}^l + s_{2j+1}^l) / \sqrt{2}, \quad d_j^l = (s_{2j}^l - s_{2j+1}^l) / \sqrt{2} \quad (15)$$

に従ってウェーブレット係数を求めていく。ここで, 右辺で $\sqrt{2}$ で割っているのは, ウェーブレット変換をユニタリー変換にするためである。逆変換も同様のアルゴリズムで高速に実行できる。著者が作成したハール・ウェーブレットの高速ウェーブレット変換 (順変換と逆変換) のFORTRANコードをAppendixに示す。

V. 積分方程式への適用

解くべき積分方程式(1)を

$$Ku = t \quad (16)$$

と表示すると, ウェーブレットを試験関数とするガラーキン法の方程式は

$$(W\hat{K}W^{-1})(W\hat{u}) = W\hat{t} \quad (17)$$

となる。ただし, $\hat{\cdot}$ は一定要素近似を表している。(17)式は連立一次方程式で, その係数行列 $\hat{K}(W\hat{K}W^{-1}$ の行列表現) と右辺の $W\hat{t}$ は, 連立一次方程式(4)の係数行列と右辺の項に高速ウェーブレット変換や高速逆ウェーブレット変換を施して計算することができる。(17)式の解 $W\hat{u}$ から \hat{u} を得る際にも高速逆ウェーブレット変換を用いる。

方程式(17)の係数行列 \hat{K} は, 一般に密行列であるが, 閾値を設定し, それ以下の絶対値の成分をゼロに置き換えることによって疎行列化することができる。このような疎行列化は, 計算量を N のオーダーまで減らすものではないが, 一種の行列の圧縮であり, 共役勾配

法等の疎行列用の解法を用いることによって、圧縮率に応じてトータルの計算量を減らすことができる。ただし、当然のことながら、圧縮率と解の精度との間にはトレードオフがあり、圧縮率を高くすると誤差は増える。誤差を許容量以下に保ったままで圧縮率を高くできることが望ましい。以下、計算例によってその効果を示す。

VI. 計算例

ハール・ウェーブレットを用いた行列の疎行列化の例をシングル・クラックの散乱問題とマルチ・クラックによる散乱問題の2つのケースについて示す。

以下、閾値を方程式(17)の係数行列 \mathbf{K} の要素の中で絶対値が最大のものの δ 倍と定義する。また、行列の圧縮率を全要素数を非ゼロ要素の数で割った値で定義する。解の精度は、通常の選点法によって得られた解を真の解とみなして、ウェーブレット法で疎行列化したときの解と真の解の残差の絶対値を真の解の絶対値で割った値の全要素にわたるRMS(相対誤差)で測る。ここでは、解の誤差の許容量を相対誤差1.0%以下とした。

6.1. シングル・クラック

1個のクラックに平面波がクラック面に垂直に入射する問題 (Fig. 1) を解いた。

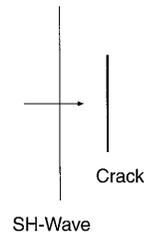


Fig.1. Configuration of a single-crack scattering problem.

S波速度2.9 km/s, クラックの長さ19.2 km, 入射平面波の周期 8 sのとき, 1個のクラックを64個の要素で離散化($N=64$)し, $N_0=1$, $L=6$, 閾値を $\delta=10^{-3}$ とした。このときの(17)式の係数行列(サイズ: 64×64)の中身をグラフィカルに示したのがFig. 2である。縦方向が i 行, 横方向が j 列で, 絶対値が閾値より大きい要素のみを黒い四角で表示している。疎行列化によって白い部分の要素は全てゼロで置き換えられる。このときの非ゼロ要素数は全体の26.9%, 行列の圧縮率は3.7, 解の相対誤差は1.0%であった。

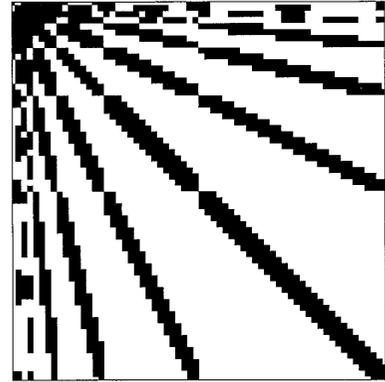


Fig.2. Compression of integral operator matrices arising from the application of a Haar wavelet representation to the single-crack scattering problem shown in Fig. 1. 64 degrees of freedom, threshold $=10^{-3}$. The wavelet-transformed 64×64 matrix is represented graphically. In wavelet basis, the matrix can become sparse: Elements with the absolute values larger than 10^{-3} times the maximum absolute value of all elements are shown as black, and smaller-magnitude elements are white. Values of the white elements are replaced by zero. The matrix indices i and j number from the upper left.

尚, この問題の場合, 入射波による応力 t はクラック面上で一定なので, ウェーブレット変換すると s_0^0 成分 (すなわち, (17)式右辺の $\mathbf{W}\hat{t}$ の第1成分) 以外は全てゼロである。

6.2. マルチ・クラック

1列に4個あるクラックが4列平行に並んでいる (クラックの数は合計16個)。このクラック群に平面波がクラック面に垂直に入射する問題 (Fig. 3) を解いた。

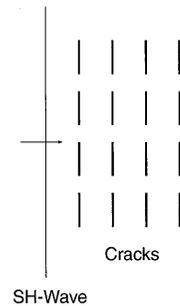


Fig.3. Configuration of a multi-crack scattering problem.

S波速度, 1個のクラックの長さ, 入射平面波の周期は, シングル・クラックのときと同じで, クラックの横方向の間隔は25 km, 縦方向の間隔はひとつのクラ

ックの上端からすぐ上または下のクラックの上端までの距離が25 km (すなわちクラックの間隔は5.8 km)とした。1個のクラックを64個の要素で離散化し(すなわち $N=1024$)、 $N_0=1$ 、 $L=10$ 、閾値を $\delta=10^{-4}$ とした。このときの疎行列化後の行列をFig. 4に示す。行列のサイズは 1024×1024 で、非ゼロ要素数は全体の5.9%、このときの行列の圧縮率は17.0、解の相対誤差は0.8%であった。この結果とシングル・クラックの場合の結果と比べると、解の相対誤差は同程度(むしろ若干良い)であるが、圧縮率が5倍近く大きくなっている。このことから、問題の規模が大きい程、係数行列の圧縮率(疎行列化)を大幅に向上させることができることがわかる。

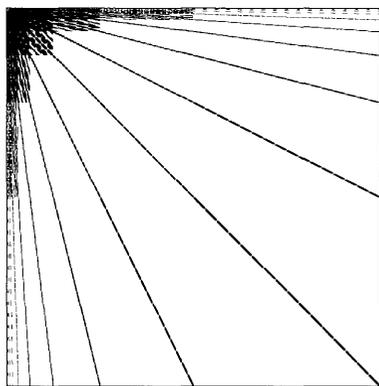


Fig.4. Compression of integral operator matrices arising from the application of a Haar wavelet representation to the multi-crack scattering problem shown in Fig. 3. 1024 degrees of freedom, threshold $=10^{-4}$. The wavelet-transformed 1024×1024 matrix is represented graphically. In wavelet basis, the matrix can become sparse: Elements with the absolute values larger than 10^{-4} times the maximum absolute value of all elements are shown as black, and smaller-magnitude elements are white. Values of the white elements are replaced by zero. The matrix indices i and j number from the upper left.

ちなみに、この計算では閾値をさらに緩めて $\delta=10^{-3}$ とすると、係数行列の圧縮率は47.8(非ゼロ要素数は全体の2.1%)にも向上するが、解の相対誤差が14.3%となつて、ここで決めた誤差の許容量を大きく越えてしまう。このように達成できる係数行列の圧縮率と解の精度(誤差の許容量)の間には大きなトレードオフがある。

VII. 結論

クラックの散乱問題を通して、選点法タイプのBEMの方程式をハール・ウェーブレットを用いて解

く方法を提示し、その効率について行列の疎行列化という観点から検討した。その結果、問題の規模が大きい程、係数行列の圧縮率(疎行列化)を飛躍的に高くできることがわかった。このことは、大規模な問題で高い計算効率を得られることを意味している。ただ、一般にBEMでは、行列要素の計算に必要なグリーン関数の計算(核関数(2)式の計算に当たる)にかなりの計算量を必要とすることが多いので、この計算量の減少を伴うような方向に疎行列化の方法を改善することができればさらに効率化が図れる。これは今後の課題である。

謝 辞

Fig. 2とFig. 4の作成にはGMTマッピング・ツール(WESSEL and SMITH, 1998)を使用しました。匿名の査読者のコメントは原稿を修正する上で参考になりました。本研究は、科学技術庁「計算科学技術共同研究推進制度」(平成11~12年度;課題名「FMM及びウェーブレットを用いた波動散乱問題に対する積分方程式の高速計算法の開発」)により実施しました。

参考文献

- AMARATUNGA, K. (2000) A wavelet-based approach for compressing kernel data in large-scale simulations of 3D integral problems. *Computing in Science & Engineering*, **2**(4), 34–45.
- BEYLKIN, G., COIFMAN, R. and ROKHLIN, V. (1991) Fast wavelet transforms and numerical algorithms I. *Comm. Pure and Applied Mathematics*, **44**(2), 141–183.
- FUJIWARA, H. (1998) The fast multipole method for integral equations of seismic scattering problems. *Geophys. J. Int.*, **133**(3), 773–782.
- (2000) The fast multipole method for solving integral equations of three-dimensional topography and basin problems. *Geophys. J. Int.*, **140**(1), 198–210.
- and TAKENAKA, H. (1994) Calculation of surface waves for a thin basin structure using a direct boundary element method with normal modes. *Geophys. J. Int.*, **117**(1), 69–91.
- FURUMURA, H., KENNETT, B.L.N. and TAKENAKA, H. (1998) Parallel 3-D pseudospectral simulation of seismic wave propagation. *Geophysics*, **63**(1), 279–289.
- 古村孝志・額綱一起・竹中博士(2000) 大規模3次元地震波動場(音響場)モデリングのためのPSM/FDMハイブリッド型並列計算. *物理探査*, **53**(4), 294-308.

- 林田智宏・藤井雄士郎・竹中博士(2001) 変位-応力型スタガード不規則格子差分法を用いた大規模3次元地震波動場の並列計算. 地球惑星科学関連学会2001年合同大会予稿集(CD-ROM), Sr-P003.
- LAGE, C. and SCHWAB, C. (1999) Wavelet Galerkin algorithms for boundary integral equations. *SIAM J. Comput.*, **20**(6), 2195–2222
- VON PETERSDORFF, T., SCHWAB, C. and SCHNEIDER, R. (1997) Multiwavelets for second-kind integral equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, **34**(6), 2212–2227
- WAGNER, R.L. and CHEW, W.C. (1995) A study of wavelets for the solution of electromagnetic integral equations. *IEEE Antennas Propag.*, **43**, 802–810
- WESSEL, P. and SMITH, W.H.F. (1998) New, improved version of the Generic Mapping Tools released. *EOS Trans. AGU*, **79**, 579.
- YOKOI, T. and TAKENAKA, H. (1995) Treatment of an infinitely extended free surface for indirect formulation of the boundary element method. *J. Phys. Earth*, **43**(1), 79–103.

Appendix

Fig.A-1に高速ハール・ウェーブレット変換の順変換, Fig. A-2に逆変換のFORTRANサブルーチンを示す。いずれも倍精度複素数型データ用になっているが, Y(NL), X(NL)の型宣言を変更すれば, 実数データにもそのまま適用できる。例えば, 倍精度実数型に変更するためには, 現在コメントになっているREAL*8の宣言文を有効にし, 次の行のCOMPLEX*16の宣言文をコメントアウトするだけで利用できる。単精度実数型データであれば, さらにREAL*8をREALに変更すればよい。また, 単精度複素数型データで使用したければ, COMPLEX*16をCOMPLEXにするだけである。

これらのサブルーチンは $N_0=1$ 用に作られており, 順変換のサブルーチンでは, サイズ $NL(=2^{NP})$ の1次元配列Yに格納されたデータを入力すると同じ配列Yにウェーブレット係数が

$$(s_0^0, d_0^0, d_1^1, d_1^1, \dots, d_0^{NP-1}, \dots, d_{NL/2-1}^{NP-1})$$

の順番で格納されるようになっている。

```

      SUBROUTINE HAART(Y, NL, NP, X)
      *****
      *   FAST Haar wavelet transform                               *
      *   -- Normalized version --                                *
      *   Coded by H. Takenaka on 11 Sept. 2000.                 *
      *   NL, NP: input: NL = 2**NP                               *
      *   Y(NL): input & output: original & transformed signal *
      *   X(NL): work array                                       *
      *****
c     REAL*8 Y(NL), X(NL)
      COMPLEX*16 Y(NL), X(NL)
      r2 = sqrt(2.0d0)
      IF( NL .NE. 2**NP ) THEN
        WRITE(6,*) 'Check NL and NP! NL should be 2**NP.'
        STOP
      END IF
      DO I=1,NL
        X(I) = Y(I)
      END DO
      N=NL
      DO 10 J=1, NP
        NH=N/2
        K=1
        DO I=1,N-1,2
          Y(K) = ( X(I) + X(I+1) ) / r2
          Y(NH+K) = ( X(I) - X(I+1) ) / r2
          K = K + 1
        END DO
        DO I=1,NH
          X(I) = Y(I)
        END DO
        N = NH
      10 CONTINUE
      RETURN
      END

```

Fig. A - 1

```

      SUBROUTINE INVHAA(Y, NL, NP, X)
      *****
      *   Inverse fast Haar wavelet transform                               *
      *   -- Normalized version --                                         *
      *           Coded by H. Takenaka on 11 Sept. 2000.                 *
      *   NL, NP: input: NL = 2**NP                                       *
      *   Y(NL): input & output: original & transformed signal          *
      *   X(NL): work array                                               *
      *****
c     REAL*8 Y(NL), X(NL)
      COMPLEX*16 Y(NL), X(NL)
      r2 = sqrt(2.0D0)
      IF( NL .NE. 2**NP ) THEN
        WRITE(6,*) 'Check NL and NP! NL should be 2**NP.'
        STOP
      END IF
      DO I=1,NL
        X(I) = Y(I)
      END DO
      N=2
      DO 10 J=1, NP
        NH=N/2
        K=1
        DO I=1,NH
          Y(K) = ( X(I) + X(NH+I) ) / r2
          Y(K+1) = ( X(I) - X(NH+I) ) / r2
          K = K + 2
        END DO
        DO I=1,N
          X(I) = Y(I)
        END DO
        N = N*2
      10 CONTINUE
      RETURN
      END

```

Fig. A-2