同時系対逐次系 : 積分と最適化のために

岩本, 誠一
九州大学経済学部 : 教授

https://doi.org/10.15017/4493038

出版情報：經濟學研究. 57 (5/6), pp.101-119, 1992-09-10. 九州大学経済学会
バージョン：
権利関係：

同時系対逐次系

── 積分と最適化のために ──

岩　本　誠　一

1. 概　　　要

多変数実数値関数の領域上での最適化と積分の繰り返し計算について同時並行的に考えてみよう。繰り返し最適化に対しては動的計画法があり，積分の繰り返し計算としては適当な変数変換を施して一変数の積分の積の型に導いたり，積分領域を縦線型で表現して累次積分に持ち込む方法がある。

動的計画法は，与えられた最適化問題に含まれる(ｉ)目的式の単調性と再帰性および(ii)最適化領域の逐次性の両方を繰り返し用いて，n 変数同時最適化を n 段の繰り返し最適化で解く方法である[1,5,7,8]。他方，与えられた多重積分を計算する場合，(iii)積分領域の逐次性，に着目して n 回の累次積分で計算するのが実際的である。特に，(iv)被積分関数の加法性があるときは，対応する再帰式(漸化式ともいう)を導いて，これを解くことによって，求める多重積分の値を計算することができる[8]。すなわち，最適化と積分の繰り返し計算においては領域の逐次性(ii)，(iii)が共通に用いられている。その上に，動的計画法においては(ｉ)目的式の単調性と再帰性，重積分においては(iv)被積分関数の加法性がそれぞれ前提とされているとき，両者の計算にはともに再帰式が用いられることになる。

ところが，領域の逐次性(ii)，(iii)については，直接これは仮定されていないのが現実である。むしろ，領域は等式および不等式の連立系で規定される同時性を帯びていると言ってよかろう。

本論文では，等式・不等式系で規定される同時性をもった領域を逐次性をもつ領域に同値表現することに焦点をあてる。この表現が可能になれば，最適化（最大化・最小化）については

$$\operatorname*{Opt}_{x\in D} f(x) = \operatorname*{Opt}_{x_1\in D_1}\ \operatorname*{Opt}_{x_2\in D_2(x_1)} \cdots \operatorname*{Opt}_{x_n\in D_n(x_1\cdots x_{n-1})} f(x)$$

重積分については

$$\int_D f(x)dx = \int_{D_1}\int_{D_2(x_1)}\cdots\int_{D_n(x_1\cdots\cdots x_{n-1})} f(x)dx_n\cdots dx_2dx_1 \tag{1}$$

$$x = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$$

となり，両者ともに n 変数同時作用を n 回の（後向き）繰り返し作用に帰着できる[8,10,12]。しかも，作用される式 $f(x) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に(ｉ)単調性と再帰性，または(iv)加法性があれば，Opt

または $\int dx$ が事前に施されて，対応する再帰式が導けて，求める値が得られることになる。

第2節では同時系と逐次系の定義を与え，逐次系の特別な場合としてマルコフ系を導入する。第3節では連立一次方程式系が定める同時系が逐次系になることを確かめる。第4節では，線形不等式系に対しては逐次的であることと同時的であることは同値であることを証明する。さらに，マルコフ系を含めて種々の例について同時系といくつかの逐次系を同値表現しておく。第5節ではある非線形単調系が逐次的であることを証明して，若干の例を与える。

なお,個々の例に対応して最適化問題と重積分問題が考えられ，再帰式で解かれるが，本論文ではそこまで議論しない。これらは概[10-13]で解決されている。

2．同時系と逐次系

定義2.1　n 次元ユークリッド空間 R^n における閉領域 R は，有限個の連立不等式系

$$f_1(x) \leqq c_1,\ f_2(x) \leqq c_2,\ \cdots,\ f_m(x) \leqq c_m \tag{2}$$

で表されるとき，**同(瞬)時的** simultaneous という。ただし，$f_i : R^n \longrightarrow R^1$ は連続関数とし，c_i は定数である。この不等式系を**同時系**という。特に，最適化問題を意識しているときは**同時制約系**といい，積分を考えているときは**同時領域系**という。

定義2.2　n 次元ユークリッド空間 R^n における閉領域 R は，有限個の連立不等式系

$$\begin{gathered} c_1 \leqq x_1 \leqq d_1 \\ c_2(x_1) \leqq x_2 \leqq d_2(x_1) \\ c_3(x_1,\ x_2) \leqq x_3 \leqq d_3(x_1,\ x_2) \\ \vdots \\ c_n(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1}) \leqq x_n \leqq d_n(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1}) \end{gathered} \tag{3}$$

で表されるとき，(順序 $x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_n$ に関して)**逐次的** sequential という。ただし，$c_i(x_1, \cdots, x_{i-1})$, $d_i(x_1, \cdots, x_{i-1}) : R^{i-1} \longrightarrow [-\infty, \infty]$ は連続関数とする。この不等式系を**逐次系**という。特に，最適化問題に対しては**逐次制約系**といい，重積分のときは**逐次領域系**という。

定義2.1，2.2では式にすべて等号も込めて閉領域を考えているが，$\leqq$ のいくつかが不等号 $<$ になっている場合でも，同様に定義できることに注意しておこう。例えば，定義2.2において

$$c_i(x_1, \cdots, x_{i-1}) = -\infty,\ d_i(x_1, \cdots, x_{i-1}) = \infty$$

のとき，

$$c_i(x_1, \cdots, x_{i-1}) \leqq x_i \leqq d_i(x_1, \cdots, x_{i-1})$$

は $-\infty < x_i < \infty$ を表すものとする。

われわれは領域 R 上での n 重積分や n 変数最適化を意識している。逐次系は明らかに同時系である。したがって，本論文では同時系を同値な逐次系で表現することに焦点をあてる。もし，これが可能ならば，次の 2 点で有用である。

(i) n 重積分は n 回の繰り返し積分，すなわち累次積分で計算できる。

(ii) n 変数最適化は n 回の繰り返し最適化，すなわち動的計画法で計算できる。

本論文では逐次系のうち，特に，マルコフ系について詳しく調べる。

定義2.3 逐次系(3)は，特に $2 \leqq i \leqq n$ に対して

$$c_i(x_1, \cdots, x_{i-1}) = c_i(x_{i-1}), \quad d_i(x_1, \cdots, x_{i-1}) = d_i(x_{i-1}) \tag{4}$$

のとき，**マルコフ系** Markovian system という。

3．線形等式系

連立一次方程式系 $Ax = b$ すなわち

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

を条件：$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A, b) = r$ の下で考える。ここで

$$A = (a_{ij}) \quad m \times n; \qquad b = (b_i) \quad m \times 1; \qquad x = (x_i) \quad n \times 1$$

とすれば，系(I)は

$$\begin{aligned} f_i(x) &= (a_i, x) & c_i &= b_i \\ f_{m+i}(x) &= -(a_i, x) & c_{m+i} &= -b_i \qquad 1 \leqq i \leqq m \end{aligned}$$

なる同時系である。

行列 A のランクが r だから，適当に行と列を入れ替えて，小行列

$$A_r = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{bmatrix}$$

を正則としてよい。したがって，系(I)は系

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r &= b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots + a_{1n}x_n \\ &\vdots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r &= b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \cdots + a_{rn}x_n \end{aligned}$$

と同値である。これは逐次系

$$
\text{(III)}\quad
\begin{array}{c}
-\infty < x_n < \infty \\
-\infty < x_{n-1} < \infty \\
\vdots \\
-\infty < x_{r+1} < \infty \\
c_r + c_{rr+1}x_{r+1} + \cdots + c_{rn}x_n \leqq x_r \leqq c_r + c_{rr+1}x_{r+1} + \cdots + c_{rn}x_n \\
c_{r-1} + c_{r-1r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{r-1n}x_n \leqq x_{r-1} \leqq c_{r-1} + c_{r-1r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{r-1n}x_n \\
\vdots \\
c_1 + c_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{1n}x_n \leqq x_1 \leqq c_1 + c_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{1n}x_n
\end{array}
$$

に同値表現される。(III)の変数の順序を反転すると,

$$
\text{(IV)}\quad
\begin{array}{c}
-\infty < x_1 < \infty \\
-\infty < x_2 < \infty \\
\vdots \\
-\infty < x_{n-r} < \infty \\
d_{n-r+1} + d_{n-r+11}x_1 + \cdots + d_{n-r+1n-r}x_{n-r} \leqq x_{n-r+1} \leqq d_{n-r+1} + d_{n-r+11}x_1 + \cdots + d_{n-r+1n-r}x_{n-r} \\
d_{n-r+2} + d_{n-r+21}x_1 + \cdots + d_{n-r+2n-r}x_{n-r} \leqq x_{n-r+2} \leqq d_{n-r+2} + d_{n-r+21}x_1 + \cdots + d_{n-r+2n-}x_{n-r} \\
\vdots \\
d_n + d_{n1}x_1 + \cdots + d_{nn-r}x_{n-r} \leqq x_n \leqq d_n + d_{n1}x_1 + \cdots + d_{nn-r}x_{n-r}
\end{array}
$$

になる。

次の例では行列 A のランクは2である。4つの系はそれぞれ同値である。

例3.1

$$
\text{(I)}\quad
\begin{array}{r}
x + 2y + 3z + 4u = 0 \\
3x + y - z - 3u = 0 \\
4x + 3y + 2z + u = 0 \\
7x + 5y + 3z + u = 0
\end{array}
$$

$$
\text{(II)}\quad
\begin{array}{r}
3z + 4u = -x - 2y \\
z + 3u = 3x + y
\end{array}
$$

$$
\text{(III)} \quad
\begin{aligned}
&-\infty < x < \infty \\
&-\infty < y < \infty \\
&-3x-2y \leqq z \leqq -3x-2y \\
&2x+y \leqq u \leqq 2x+y
\end{aligned}
$$

$$
\text{(IV)} \quad
\begin{aligned}
&-\infty < u < \infty \\
&-\infty < z < \infty \\
&-3u-2z \leqq y \leqq -3u-2z \\
&2u+z \leqq x \leqq 2u+z.
\end{aligned}
$$

例3.2

$$
\text{(I)} \quad
\begin{aligned}
x+2y+3z+4u &= 2 \\
3x+y-z-3u &= 1 \\
4x+3y+2z+u &= 3 \\
7x+5y+3z+u &= 5
\end{aligned}
$$

$$
\text{(II)} \quad
\begin{aligned}
3z+4u &= 2-x-2y \\
z+3u &= -1+3x+y
\end{aligned}
$$

$$
\text{(III)} \quad
\begin{aligned}
&-\infty < x < \infty \\
&-\infty < y < \infty \\
&2-3x-2y \leqq z \leqq 2-3x-2y \\
&-1+2x+y \leqq u \leqq -1+2x+y
\end{aligned}
$$

$$
\text{(IV)} \quad
\begin{aligned}
&-\infty < u < \infty \\
&-\infty < z < \infty \\
&1-3u-2z \leqq y \leqq 1-3u-2z \\
&2u+z \leqq x \leqq 2u+z.
\end{aligned}
$$

4．線形不等式系

以下，実数値の集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ と $\{a, b\}$ の最大値，最小値をそれぞれ次で表す。

$$\bigvee_{i=1}^{n} a_i, \quad a \vee b; \quad \bigwedge_{i=1}^{n} a_i, \quad a \wedge b.$$

この節では線形不等式系が逐次的であることを証明して，マルコフ系を含む種々の例を与える。

4.1 基本定理

定理 1　線形不等式系

$$Ax \leqq b$$

すなわち

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\leqq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\leqq b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\leqq b_m \end{aligned}$$

は順序 $x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_n$ に関して逐次系

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{aligned} c_1 \leqq\ & x_1 \leqq d_1 \\ c_2(x_1) \leqq\ & x_2 \leqq d_2(x_1) \\ c_3(x_1, x_2) \leqq\ & x_3 \leqq d_3(x_1, x_2) \\ & \vdots \\ c_n(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \leqq\ & x_n \leqq d_n(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \end{aligned}$$

に同値表現される。ただし,

$$\begin{aligned} c_i(x_1, \cdots, x_{i-1}) &= \bigvee_{r=1}^{q_i} \ell_i^r(x_1, \cdots, x_{i-1}) \\ \ell_i^r(x_1, \cdots, x_{i-1}) &= c_i^r + c_{i1}^r x_1 + \cdots + c_{i\,i-1}^r x_{i-1} \qquad r = 1, \cdots, q_i \\ d_i(x_1, \cdots, x_{i-1}) &= \bigwedge_{s=1}^{p_i} k_i^s(x_1, \cdots, x_{i-1}) \\ k_i^s(x_1, \cdots, x_{i-1}) &= d_i^s + d_{i1}^s x_1 + \cdots + d_{i\,i-1}^s x_{i-1} \qquad s = 1, \cdots, p_i. \end{aligned}$$

ここに例えば, $q_i = 0$ のときは $\bigvee_{r=1}^{q_i} \ell_i^r(x_1, \cdots, x_{i-1}) = -\infty$ を意味する。したがって,このとき $c_i(x_1, \cdots, x_{i-1}) \leqq x_i$ は $-\infty < x_i$ を表すとする。同様に, $p_i = 0$ のときは, $x_i < \infty$ を意味することになる。

逆に,後者の型(II)の逐次系は適当な線形不等式系 $Ax \leqq b$ に同値表現される。

証明　前半を詳しく証明しておこう。まず,不等式系 $Ax \leqq b$ を次のように表現しておく。

$$
(\mathrm{P}_n)\quad
\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n &\leqq b_1\\
&\vdots\\
a_{p1}x_1+a_{p2}x_2+\cdots+a_{pn}x_n &\leqq b_p\\
a_{p+11}x_1+a_{p+12}x_2+\cdots+a_{p+1n}x_n &\leqq b_{p+1}\\
&\vdots\\
a_{p+q1}x_1+a_{p+q2}x_2+\cdots+a_{p+qn}x_n &\leqq b_{p+q}\\
a_{p+q+11}x_1+a_{p+q+12}x_2+\cdots+a_{p+q+1n}x_n &\leqq b_{p+q+1}\\
&\vdots\\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n &\leqq b_m.
\end{aligned}
$$

ただし，すべての係数は添字 n に依存しているとする：

$$a_{ij}=a_{ij}^n,\quad b_i=b_i^n$$

しかし，以下簡略化のために右上添字 n は省略しておく。したがって，特に

$$
\begin{aligned}
&\{i|a_{in}>0\}=\{1,2,\cdots,p\}\\
&\{i|a_{in}<0\}=\{p+1,p+2,\cdots,p+q\}\\
&\{i|a_{in}=0\}=\{p+q+1,p+q+2,\cdots,m\}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

としても一般性を失うことはない。このとき，不等式系 (P_n) は次の (P_n') に同値になる。

$$
(\mathrm{P}_n')\quad
\begin{aligned}
&x_n\leqq\frac{b_1}{a_{1n}}-\frac{a_{11}}{a_{1n}}x_1-\frac{a_{12}}{a_{1n}}x_2-\cdots-\frac{a_{1n-1}}{a_{1n}}x_{n-1}\\
&\qquad\vdots\\
&x_n\leqq\frac{b_p}{a_{pn}}-\frac{a_{p1}}{a_{pn}}x_1-\frac{a_{p2}}{a_{pn}}x_2-\cdots-\frac{a_{pn-1}}{a_{pn}}x_{n-1}\\
&\qquad\vdots\\
&\frac{b_{p+1}}{a_{p+1n}}-\frac{a_{p+11}}{a_{p+1n}}x_1-\frac{a_{p+12}}{a_{p+1n}}x_2-\cdots-\frac{a_{p+1n-1}}{a_{p+1n}}x_{n-1}\leqq x_n\\
&\frac{b_{p+q}}{a_{p+qn}}-\frac{a_{p+q1}}{a_{p+qn}}x_1-\frac{a_{p+q2}}{a_{p+qn}}x_2-\cdots-\frac{a_{p+qn-1}}{a_{p+qn}}x_{n-1}\leqq x_n\\
&a_{p+q+11}x_1+a_{p+q+12}x_2+\cdots+a_{p+q+1n}x_{n-1}\leqq b_{p+q+1}\\
&\qquad\vdots\\
&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn-1}x_{n-1}\leqq b_m.
\end{aligned}
$$

ここで

$$m_n=m,\quad p_n=p,\quad q_n=q,\quad r_n=r-p-q$$

とおくと

$$m_n=p_n+q_n+r_n$$

となる。したがって，不等式系 (P_n') は

$$(\mathrm{P}_n'')\quad \begin{aligned} & c_n(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \leqq x_n \leqq d_n(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \\ & a_{p+q+11}x_1 + a_{p+q+12}x_2 + \cdots + a_{p+q+1n}x_{n-1} \leqq b_{p+q+1} \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn-1}x_{n-1} \leqq b_m \end{aligned}$$

に同値表現される。ただし

$$c_n(x_1, \cdots, x_{n-1}) = \bigvee_{r=1}^{q_n} \ell_n^r(x_1, \cdots, x_{n-1})$$

$$\ell_n^r(x_1, \cdots, x_{n-1}) = \frac{b_{p+r}}{a_{p+rn}} - \frac{a_{p+r1}}{a_{p+rn}}x_1 - \frac{a_{p+r2}}{a_{p+rn}}x_2 - \cdots - \frac{a_{p+rn-1}}{a_{p+rn}}x_{n-1}$$

$$r = 1, 2, \cdots, q_n$$

$$d_n(x_1, \cdots, x_{n-1}) = \bigwedge_{s=1}^{p_n} k_n^s(x_1, \cdots, x_{n-1})$$

$$k_n^s(x_1, \cdots, x_{n-1}) = \frac{b_s}{a_{sn}} - \frac{a_{s1}}{a_{sn}}x_1 - \frac{a_{s2}}{a_{sn}}x_2 - \cdots - \frac{a_{sn-1}}{a_{sn}}x_{n-1}$$

$$s = 1, 2, \cdots, p_n.$$

さらに，(P_n'') は次の (P_n''') に同値である。

$$(\mathrm{P}_n''')\quad \begin{aligned} & c_n(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \leqq x_n \leqq d_n(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \\ & \frac{b_{p+1}}{a_{p+1n}} - \frac{a_{p+11}}{a_{p+1n}}x_1 - \frac{a_{p+12}}{a_{p+1n}}x_2 - \cdots - \frac{a_{p+1n-1}}{a_{p+1n}}x_{n-1} \leqq \frac{b_1}{a_{1n}} - \frac{a_{11}}{a_{1n}}x_1 - \frac{a_{12}}{a_{1n}}x_2 - \cdots - \frac{a_{1n-1}}{a_{1n}}x_{n-1} \\ & \vdots \\ & \frac{b_{p+q}}{a_{p+qn}} - \frac{a_{p+q1}}{a_{p+qn}}x_1 - \frac{a_{p+q2}}{a_{p+qn}}x_2 - \cdots - \frac{a_{p+qn-1}}{a_{p+qn}}x_{n-1} \leqq \frac{b_1}{a_{1n}} - \frac{a_{11}}{a_{1n}}x_1 - \frac{a_{12}}{a_{1n}}x_2 - \cdots - \frac{a_{1n-1}}{a_{1n}}x_{n-1} \\ & \vdots \\ & \frac{b_{p+1}}{a_{p+1n}} - \frac{a_{p+11}}{a_{p+1n}}x_1 - \frac{a_{p+12}}{a_{p+1n}}x_2 - \cdots - \frac{a_{p+1n-1}}{a_{p+1n}}x_{n-1} \leqq \frac{b_p}{a_{pn}} - \frac{a_{p1}}{a_{pn}}x_1 - \frac{a_{p2}}{a_{pn}}x_2 - \cdots - \frac{a_{pn-1}}{a_{pn}}x_{n-1} \\ & \vdots \\ & \frac{b_{p+q}}{a_{p+qn}} - \frac{a_{p+q1}}{a_{p+qn}}x_1 - \frac{a_{p+q2}}{a_{p+qn}}x_2 - \cdots - \frac{a_{p+qn-1}}{a_{p+qn}}x_{n-1} \leqq \frac{b_p}{a_{pn}} - \frac{a_{p1}}{a_{pn}}x_1 - \frac{a_{p2}}{a_{pn}}x_2 - \cdots - \frac{a_{pn-1}}{a_{pn}}x_{n-1} \\ & a_{p+q+11}x_1 + a_{p+q+12}x_2 + \cdots + a_{p+q+1n-1}x_{n-1} \leqq b_{p+q+1} \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn-1}x_{n-1} \leqq b_m. \end{aligned}$$

(P_n''') の線形式の項を整理すると，同値な次の (P_{n-1}) が得られる。

$$
(\mathrm{P}_{n-1}) \quad
\begin{aligned}
c_n(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \leqq x_n \leqq d_n(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n-1}x_{n-1} \leqq b_1 \\
\vdots \\
a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn-1}x_{n-1} \leqq b_p \\
a_{p+11}x_1 + a_{p+12}x_2 + \cdots + a_{p+1n-1}x_{n-1} \leqq b_{p+1} \\
\vdots \\
a_{p+q1}x_1 + a_{p+q2}x_2 + \cdots + a_{p+qn-1}x_{n-1} \leqq b_{p+q} \\
a_{p+q+11}x_1 + a_{p+q+12}x_2 + \cdots + a_{p+q+1n-1}x_{n-1} \leqq b_{p+q+1} \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn-1}x_{n-1} \leqq b_m.
\end{aligned}
$$

ここでも係数 a_{ij}, b_i はすべて $n-1$ に依存しているので

$$a_{ij} = a_{ij}^{n-1}, \quad b_i = b_i^{n-1}$$

と書くべきだが，以下簡略化のために右上添字 $n-1$ は省略している。さて，この式では

$$m = m_{n-1} = p_n q_n + r_n.$$

この $m = m_{n-1}$ に対して(5)と同様に，不等式系 (P_{n-1}) において p_{n-1}, q_{n-1}, r_{n-1} を定める。すなわち

$$m_{n-1} = p_{n-1} + q_{n-1} + r_{n-1}$$

である。系 (P_{n-1}) においては p_{n-1} を p, q_{n-1} を q, r_{n-1} を r でそれぞれを表わしている。

さて，与えられた (P_n) から (P_{n-1}) を導いたのと同じ方法によれば，さらに同値な系 (P_{n-2})

$$
(\mathrm{P}_{n-2}) \quad
\begin{aligned}
c_n(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \leqq x_n \leqq d_n(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \\
c_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-2}) \leqq x_{n-1} \leqq d_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-2}) \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n-2}x_{n-2} \leqq b_1 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn-2}x_{n-2} \leqq b_m
\end{aligned}
$$

が得られる。ただし，ここでも

$$m = m_{n-2} = p_{n-2} + q_{n-2} + r_{n-2}.$$

係数 a_{ij}, b_i はすべて $n-2$ に依存しているが，省略している。

したがって，この手続きを繰り返せば，同値系の列

$$(\mathrm{P}_n) \to (\mathrm{P}_{n-1}) \to (\mathrm{P}_{n-2}) \to \cdots \to (\mathrm{P}_1)$$

が得られて，最後の (P_1) は

$$m_1 = p_2 q_2 + r_2$$

が3つに分割されて

$$p_1 + q_1 + r_1 = m_1$$

となり，添字1を省略して $m_1 = m,\ p_1 = p,\ q_1 = q,\ r_1 = r$ で表わすと，

$$(\mathrm{P}_1)\qquad \begin{aligned} c_n(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \leqq\ & x_n \leqq d_n(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \\ c_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-2}) \leqq\ & x_{n-1} \leqq d_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-2}) \\ & \vdots \\ c_2(x_1) \leqq\ & x_2 \leqq d_2(x_1) \\ a_{11}x_1 & \leqq b_1 \\ & \vdots \\ a_{p1}x_1 & \leqq b_p \\ a_{p+11}x_1 & \leqq b_{p+1} \\ & \vdots \\ a_{p+q1}x_1 & \leqq b_{p+q} \\ a_{p+q+11}x_1 & \leqq b_{p+q+1} \\ & \vdots \\ a_{m1}x_1 & \leqq b_m \end{aligned}$$

になる。これは同値な

$$\begin{aligned} c_1 \leqq\ & x_1 \leqq d_1 \\ c_2(x_1) \leqq\ & x_2 \leqq d_2(x_1) \\ c_3(x_1, x_2) \leqq\ & x_3 \leqq d_3(x_1, x_2) \\ & \vdots \\ c_n(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \leqq\ & x_n \leqq d_n(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \end{aligned}$$

にまとめられる。ただし

$$c_1 = \bigvee_{r=1}^{q_1} \frac{b_{q+r}}{a_{p+r1}}, \qquad d_1 = \bigwedge_{t=1}^{p_1} \frac{b_t}{a_{t1}}.$$

後半は不等式

$$\bigvee_{r=1}^{q} k_r \leqq x \leqq \bigwedge_{t=1}^{p} \ell_t$$

が不等式系

$$\begin{aligned} -x \leqq -k_r \qquad & r = 1, \cdots, q \\ x \leqq \ell_t \qquad & t = 1, \cdots, p \end{aligned}$$

に同値であることに注意すれば十分である。これで証明を終る。

注 1　定理の証明は連立一次方程式系のガウスの消去法を線形不等式系に一般化した Fourier の消去法[2,p.84；3,14；15,p.11]に基づいている。

系　線形不等式系 $Ax \leqq b$ は任意の順序に関して逐次的である。したがって，順序 $x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_n$ に対してももちろん順序 $x_n \to x_{n-1} \to \cdots \to x_1$ に対しても逐次的となり，反転的である。

4.2　マルコフ系

この節ではマルコフ系において互いに同値な例を 4 つ示す。

例4.1　([1,p.47,10])　$a_i \in R^1$　$1 \leqq i \leqq N-1,\ N \geqq 2$ とする。

$$
(\mathrm{I})\quad
\begin{array}{l}
x_1 + x_2 \geqq a_1 \\
x_2 + x_3 \geqq a_2 \\
\qquad \ddots \qquad \vdots \\
x_{N-1} + x_N \geqq a_{N-1} \\
x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{N-1},\ x_N \geqq 0
\end{array}
$$

$$
(\mathrm{II})\quad
\begin{array}{l}
x_1 + x_2 \geqq a_1^+ \\
x_2 + x_3 \geqq a_2^+ \\
\qquad \ddots \qquad \vdots \\
x_{N-1} + x_N \geqq a_{N-1}^+ \\
x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{N-1},\ x_N \geqq 0
\end{array}
$$

$$
(\mathrm{III})\quad
\begin{array}{l}
x_1 \geqq 0 \\
x_2 \geqq (a_1 - x_1)^+ \\
x_3 \geqq (a_2 - x_2)^+ \\
\quad \vdots \\
x_N \geqq (a_{N-1} - x_{N-1})^+
\end{array}
\qquad
(\mathrm{IV})\quad
\begin{array}{l}
x_N \geqq 0 \\
x_{N-1} \geqq (a_{N-1} - x_N)^+ \\
x_{N-2} \geqq (a_{N-2} - x_{N-1})^+ \\
\quad \vdots \\
x_1 \geqq (a_1 - x_2)^+.
\end{array}
$$

ただし

$$b^+ = b \vee 0.$$

例4.2　([10,12])　$N \geqq 2$とする。

$$(\mathrm{I})\quad \begin{array}{llllll} y_1 & & & & & \leqq 1 \\ y_1 & + y_2 & & & & \leqq 1 \\ & y_2 & + y_3 & & & \leqq 1 \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & y_{N-2} & + y_{N-1} & \leqq 1 \\ & & & & y_{N-1} & \leqq 1 \\ y_1 & y_2, & \cdots, & y_{N-2}\ , & y_{N-1} & \geqq 0 \end{array}$$

$$(\mathrm{II})\quad \begin{array}{l} 0 \leqq y_1 \leqq 1 \\ 0 \leqq y_2 \leqq 1-y_1 \\ 0 \leqq y_3 \leqq 1-y_2 \\ \quad\vdots \\ 0 \leqq y_{N-1} \leqq 1-y_{N-2} \end{array} \qquad (\mathrm{III})\quad \begin{array}{l} 0 \leqq y_{N-1} \leqq 1 \\ 0 \leqq y_{N-2} \leqq 1-y_{N-1} \\ 0 \leqq y_{N-3} \leqq 1-y_{N-2} \\ \quad\vdots \\ 0 \leqq y_1 \leqq 1-y_2. \end{array}$$

例4.3　([10,12])　$a_i \geqq 0 \quad 1 \leqq i \leqq N-1, N \geqq 2$とする。

$$(\mathrm{I})\quad \begin{array}{llllll} x_1 & + x_2 & & & & \leqq a_1 \\ & x_2 & + x_3 & & & \leqq a_2 \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & x_{N-1} & + x_N & \leqq a_{N-1} \\ x_1, & x_2, & \cdots, & x_{N-1}, & x_N & \geqq 0 \end{array}$$

$$(\mathrm{II})\quad \begin{array}{l} 0 \leqq x_1 \leqq a_1 \\ 0 \leqq x_2 \leqq (a_1-x_1) \wedge a_2 \\ 0 \leqq x_3 \leqq (a_2-x_2) \wedge a_3 \\ \quad\vdots \\ 0 \leqq x_{N-1} \leqq (a_{N-2}-x_{N-2}) \wedge a_{N-1} \\ 0 \leqq x_N \leqq (a_{N-1}-x_{N-1}) \end{array}$$

$$(\mathrm{III})\quad \begin{array}{l} 0 \leqq x_N \leqq a_{N-1} \\ 0 \leqq x_{N-1} \leqq (a_{N-1}-x_N) \wedge a_{N-2} \\ 0 \leqq x_{N-2} \leqq (a_{N-2}-x_{N-1}) \wedge a_{N-3} \\ \quad\vdots \\ 0 \leqq x_2 \leqq (a_2-x_3) \wedge a_1 \\ 0 \leqq x_1 \leqq (a_1-x_2). \end{array}$$

例4.4 ([10]) $N \geqq 2$とする。

$$
(\mathrm{I})\quad
\begin{array}{l}
y_1 \geqq 1 \\
y_1 + y_2 \geqq 1 \\
y_2 + y_3 \geqq 1 \\
\quad \ddots \qquad \vdots \\
y_{N-2} + y_{N-1} \geqq 1 \\
y_{N-1} \geqq 1 \\
y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{N-2},\ y_{N-1} \geqq 0
\end{array}
$$

$$
(\mathrm{II})\quad
\begin{array}{l}
y_1 \geqq 1 \\
y_2 \geqq (1-y_1)^+ \\
y_3 \geqq (1-y_2)^+ \\
\quad \vdots \\
y_{N-2} \geqq (1-y_{N-3})^+ \\
y_{N-1} \geqq 1
\end{array}
\qquad
(\mathrm{III})\quad
\begin{array}{l}
y_{N-1} \geqq 1 \\
y_{N-2} \geqq (1-y_{N-1})^+ \\
y_{N-3} \geqq (1-y_{N-2})^+ \\
\quad \vdots \\
y_2 \geqq (1-y_3)^+ \\
y_1 \geqq 1.
\end{array}
$$

4.3 逐次系

この節ではマルコフ的でない逐次系の例を示しておこう。

例4.5 $a_i \geqq 0 \quad 1 \leqq i \leqq n,\ n \geqq 2$とする。

$$
(\mathrm{I})\quad
\begin{array}{l}
x_1 \leqq a_1 \\
x_1 + x_2 \leqq a_2 \\
\vdots \\
x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqq a_n \\
x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n \geqq 0
\end{array}
$$

$$
(\mathrm{II})\quad
\begin{array}{l}
0 \leqq x_1 \leqq a_1 \\
0 \leqq x_2 \leqq a_2 - x_1 \\
\quad \vdots \\
0 \leqq x_n \leqq a_n - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1}
\end{array}
$$

(III)

$$\begin{aligned}
&0 \leqq x_n \leqq a_n \\
&0 \leqq x_{n-1} \leqq a_{n-1} \wedge (a_n - x_n) \\
&0 \leqq x_{n-2} \leqq a_{n-2} \wedge (a_{n-1} - x_{n-1}) \wedge (a_n - x_{n-1} - x_n) \\
&\qquad \vdots \\
&0 \leqq x_3 \leqq a_3 \wedge (a_4 - x_4) \wedge \cdots \wedge (a_{n-1} - x_4 - \cdots - x_{n-1}) \wedge (a_n - x_4 - \cdots - x_n) \\
&0 \leqq x_2 \leqq a_2 \wedge (a_3 - x_3) \wedge \cdots \wedge (a_{n-1} - x_3 - \cdots - x_{n-1}) \wedge (a_n - x_3 - \cdots - x_n) \\
&0 \leqq x_1 \leqq a_1 \wedge (a_2 - x_2) \wedge (a_3 - x_2 - x_3) \cdots \wedge (a_{n-1} - x_2 - x_3 - \cdots - x_{n-1}) \\
&\qquad\qquad \wedge (a_n - x_2 - x_3 - \cdots - x_n).
\end{aligned}$$

例4.6 $a_i \leqq b_i \quad 1 \leqq i \leqq n,\ n \geqq 2$ とする。

(I)

$$\begin{aligned}
a_1 &\leqq x_1 \leqq b_1 \\
a_2 &\leqq x_1 + x_2 \leqq b_2 \\
&\vdots \\
a_n &\leqq x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqq b_n
\end{aligned}$$

(II)

$$\begin{aligned}
a_1 &\leqq x_1 \leqq b_1 \\
a_2 - x_1 &\leqq x_2 \leqq b_2 - x_1 \\
&\vdots \\
a_n - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1} &\leqq x_n \leqq b_n - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1}
\end{aligned}$$

(III)

$$\begin{aligned}
&a_n - b_{n-1} \leqq x_n \leqq b_n - a_{n-1} \\
&(a_{n-1} - b_{n-2}) \vee (a_n - b_{n-2} - x_n) \leqq x_{n-1} \leqq (b_{n-1} - a_{n-2}) \wedge (b_n - a_{n-2} - x_n) \\
&\qquad \vdots \\
&(a_2 - b_1) \vee (a_3 - b_1 - x_3) \vee \cdots \vee (a_n - b_1 - x_3 \cdots - x_{n-1} - x_n) \leqq x_2 \leqq (b_2 - a_1) \wedge (b_3 - a_1 - x_3) \wedge \cdots \wedge (b_n - a_1 - x_3 - \cdots - x_{n-1} - x_n) \\
&a_1 \vee (a_2 - x_2) \vee (a_3 - x_2 - x_3) \vee \cdots \vee (a_n - x_2 - x_3 - \cdots - x_{n-1} - x_n) \leqq x_1 \leqq b_1 \wedge (b_2 - x_2) \wedge (b_3 - x_2 - x_3) \wedge \cdots \wedge (b_n - x_2 - x_3 - \cdots - x_{n-1} - x_n).
\end{aligned}$$

例4.7 $a_i \geqq 0 \quad 1 \leqq i \leqq 3$ とする。

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{aligned} &0 \leqq x_1+x_2+x_3 \leqq a_1 \\ &0 \leqq x_1+x_2-x_3 \leqq a_2 \\ &0 \leqq x_1-x_2-x_3 \leqq a_3 \end{aligned}$$

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{gathered} 0 \leqq x_1 \leqq \frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2}a_3 \\ (-x_1) \vee \left(-\frac{1}{2}a_3\right) \leqq x_2 \leqq \left(\frac{1}{2}(a_1+a_2)-x_1\right) \wedge \left(\frac{1}{2}a_2\right) \\ (-x_1-x_2) \vee (-a_2+x_1+x_2) \vee (-a_3+x_1-x_2) \leqq x_3 \leqq (a_1-x_1-x_2) \wedge (x_1+x_2) \wedge (x_1-x_2) \end{gathered}$$

$$(\mathrm{III}) \qquad \begin{gathered} -\frac{1}{2}a_2 \leqq x_3 \leqq \frac{1}{2}\left(a_1+\frac{1}{2}(a_2+a_3)\right) \\ \left(-\frac{1}{2}a_3\right) \vee \left(-\frac{1}{2}a_3-x_3\right) \leqq x_2 \leqq \left(\frac{1}{2}a_1-x_3\right) \wedge \left(\frac{1}{2}a_2\right) \\ (-x_2-x_3) \vee (-x_2+x_3) \vee (x_2+x_3) \leqq x_1 \leqq (a_1-x_2-x_3) \wedge (a_2-x_2+x_3) \wedge (a_3+x_2+x_3). \end{gathered}$$

5．非線形不等式系

まず，乗加法型不等式は次のように逐次型になる[11]。

補題5.1 関数 $g_i : R^1_+ \longrightarrow R^1_+$ は上への連続狭義増加で，関数 $\beta_i : R^1_+ \longrightarrow R^1_+$ は連続で，$\beta_i(x_i) > 0$ とする。$c > 0$ のとき，次の(I)，(II)は同値である。

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{aligned} &g_1(x_1) + \beta_1(x_1)g_2(x_2) + \cdots + \beta_1(x_1) \cdots \beta_{n-1}(x_{n-1})g_n(x_n) \leqq c \\ &x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ \cdots,\ x_n > 0 \end{aligned}$$

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{aligned} &0 < x_1 < g_1^{-1}(c) \\ &0 < x_2 < g_2^{-1}\left(\frac{1}{\beta_1(x_1)}(c - g_1(x_1))\right) \\ &\qquad\vdots \\ &0 < x_n \leqq g_n^{-1}\left(\frac{1}{\beta_{n-1}(x_{n-1})}\left(\cdots\left(\frac{1}{\beta_1(x_1)}(c-g_1(x_1)) - g_2(x_2)\right)\cdots\right.\right. \\ &\qquad\qquad\qquad \left.\left. - g_{n-2}(x_{n-2})\right) - g_{n-1}(x_{n-1})\right). \end{aligned}$$

次に，加法型不等式系については次の補題にしめされる。

補題5.2 関数 $f_i, g_i : R^1_+ \longrightarrow R^1_+$ は上への連続狭義増加とする。$a \geqq 0,\ b \geqq 0$ のとき，次の(i)，(ii)はそれぞれ同値である。

(i)

$$
\text{(I)}\quad
\begin{aligned}
&f_1(x_1) + \cdots + f_n(x_n) \leqq a\\
&x_1 \geqq 0, \cdots, x_n \geqq 0
\end{aligned}
$$

$$
\text{(II)}\quad
\begin{aligned}
&0 \leqq x_1 \leqq f_1^{-1}(a)\\
&0 \leqq x_2 \leqq f_2^{-1}(a - f_1(x_1))\\
&\qquad\vdots\\
&0 \leqq x_n \leqq f_n^{-1}(a - f_1(x_1) - \cdots - f_{n-1}(x_{n-1})).
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
\text{(I)}\quad
\begin{aligned}
&f_1(x_1) + \cdots + f_n(x_n) \leqq a\\
&g_1(x_1) + \cdots + g_n(x_n) \leqq b\\
&x_1 \geqq 0, \cdots, x_n \geqq 0
\end{aligned}
$$

$$
\text{(II)}\quad
\begin{aligned}
&0 \leqq x_1 \leqq f_1^{-1}(a) \wedge g_1^{-1}(b)\\
&0 \leqq x_2 \leqq f_2^{-1}(a - f_1(x_1)) \wedge g_2^{-1}(b - g_1(x_1))\\
&\qquad\vdots\\
&0 \leqq x_n \leqq f_n^{-1}(a - f_1(x_1) - \cdots - f_{n-1}(x_{n-1})) \wedge g_n^{-1}(b - g_1(x_1) - \cdots - g_{n-1}(x_{n-1})).
\end{aligned}
$$

次の例は2次の巡回不等式系が逐次的であることを示している。

例5.1

$$
\text{(I)}\quad
\begin{array}{lllllr}
x_1^2 & + \; x_2^2 & & & & \leqq 1\\
& x_2^2 & + \; x_3^2 & & & \leqq 1\\
& & & \ddots & & \\
& & & x_{n-1}^2 & + \; x_n^2 & \leqq 1\\
x_1^2 & & & & + \; x_n^2 & \leqq 1
\end{array}
$$

$$
\text{(II)}\quad
\begin{aligned}
-1 &\leqq x_1 \leqq 1\\
-\sqrt{1-x_1^2} &\leqq x_2 \leqq \sqrt{1-x_1^2}\\
&\ \ \vdots\\
-\sqrt{1-x_{n-2}^2} &\leqq x_{n-1} \leqq \sqrt{1-x_{n-2}^2}\\
-(\sqrt{1-x_1^2} \wedge \sqrt{1-x_{n-1}^2}) &\leqq x_n \leqq \sqrt{1-x_1^2} \wedge \sqrt{1-x_{n-1}^2}.
\end{aligned}
$$

例5.2

$$
(\mathrm{I})\quad
\begin{array}{l}
x_1^2 + x_2^2 \leqq 1 \\
x_2^2 + x_3^2 \leqq 1 \\
\qquad \ddots \\
x_{n-1}^2 + x_n^2 \leqq 1 \\
x_1^2 + x_n^2 \leqq 1 \\
x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_{n-1},\ x_n \geqq 0
\end{array}
$$

$$
(\mathrm{II})\quad
\begin{array}{l}
0 \leqq x_1 \leqq 1 \\
0 \leqq x_2 \leqq \sqrt{1-x_1^2} \\
\quad \vdots \\
0 \leqq x_{n-1} \leqq \sqrt{1-x_{n-2}^2} \\
0 \leqq x_n \leqq \sqrt{1-x_1^2} \wedge \sqrt{1-x_{n-1}^2}.
\end{array}
$$

最後に，除加法型と乗加法型の例を与える。以下，$N \geqq 2$, $c > 0$ とする。

例5.3 ([1,p.74；4,p.270；6,p.15；9,p.380])

$$
(\mathrm{I})\quad
\begin{array}{l}
x_1 + \dfrac{x_2}{x_1} + \dfrac{x_3}{x_1x_2} + \cdots + \dfrac{x_N}{x_1x_2\cdots x_{N-1}} \leqq c \\
x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ \cdots,\ x_N > 0
\end{array}
$$

$$
(\mathrm{II})\quad
\begin{array}{l}
0 < x_1 < c \\
0 < x_2 < x_1(c - x_1) \\
0 < x_3 < x_2(x_1(c - x_1) - x_2) \\
\quad \vdots \\
0 < x_{N-1} < x_{N-2}(x_{N-3}(\cdots x_2(x_1(c - x_1) - x_2)\cdots - x_{N-3}) - x_{N-2}) \\
0 < x_N \leqq x_{N-1}(x_{N-2}(\cdots x_2(x_1(c - x_1) - x_2)\cdots - x_{N-2}) - x_{N-1}).
\end{array}
$$

例5.4

$$
(\mathrm{I})\quad
\begin{array}{l}
x_1 + \dfrac{x_2}{x_1} + \dfrac{x_3}{x_1x_2} + \cdots + \dfrac{x_N}{x_1x_2\cdots x_{N-1}} + \dfrac{1}{x_1x_2\cdots x_N} \leqq c \\
x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ \cdots,\ x_N > 0
\end{array}
$$

$$
\text{(II)}\quad
\begin{aligned}
&0 < x_1 < c\\
&0 < x_2 < x_1(c - x_1)\\
&0 < x_3 < x_2(x_1(c - x_1) - x_2)\\
&\qquad \vdots\\
&0 < x_{N-1} < x_{N-2}(x_{N-3}(\cdots x_2(x_1(c - x_1) - x_2)\cdots - x_{N-3}) - x_{N-2})\\
&\begin{cases} 0 < x_N < \infty \\ \underline{k}(g_{N-1}(c, x_1, \cdots, x_{N-1})) \leqq x_N \leqq \bar{k}(g_{N-1}(c, x_1, \cdots, x_{N-1})) \end{cases}
\begin{cases} 0 < g_{N-1}(c, x_1, \cdots, x_{N-1}) < 2 \\ \text{のとき} \\ g_{N-1}(c, x_1, \cdots, x_{N-1}) \geqq 2 \\ \text{のとき}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

ただし

$$g_{N-1}(c, x_1, \cdots, x_{N-1}) = x_{N-1}(x_{N-2}(\ \cdots\ x_2(x_1(c - x_1) - x_2)\ \cdots\ - x_{N-2}) - x_{N-1})$$

$$\underline{k}(g) = \frac{1}{2}(g - \sqrt{g^2 - 4})$$

$$\bar{k}(g) = \frac{1}{2}(g + \sqrt{g^2 - 4}).$$

例5.5

$$
\text{(I)}\quad
\begin{aligned}
&x_1 + x_1x_2 + x_1x_2x_3 + \cdots + x_1x_2 \cdots x_N \leqq c\\
&x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ \cdots,\ x_N > 0
\end{aligned}
$$

$$
\text{(II)}\quad
\begin{aligned}
&0 < x_1 < c\\
&0 < x_2 < \frac{c}{x_1} - 1\\
&0 < x_3 < \frac{c}{x_2x_1} - \frac{1}{x_2} - 1\\
&\qquad \vdots\\
&0 < x_{N-1} < \frac{c}{x_{N-2}x_{N-3}\cdots x_2x_1} - \frac{1}{x_{N-2}x_{N-3}\cdots x_2} - \cdots - \frac{1}{x_{N-2}x_{N-3}} - \frac{1}{x_{N-2}} - 1\\
&0 < x_N \leqq \frac{c}{x_{N-1}x_{N-2}\cdots x_2x_1} - \frac{1}{x_{N-1}x_{N-2}\cdots x_2} - \cdots - \frac{1}{x_{N-1}x_{N-2}} - \frac{1}{x_{N-1}} - 1.
\end{aligned}
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
&\frac{c}{x_{N-1}x_{N-2}\cdots x_2x_1} - \frac{1}{x_{N-1}x_{N-2}\cdots x_2} - \cdots - \frac{1}{x_{N-1}x_{N-2}} - \frac{1}{x_{N-1}} - 1\\
&= \frac{1}{x_{N-1}}\left(\frac{1}{x_{N-2}}\left(\cdots \frac{1}{x_2}\left(\frac{1}{x_1}(c - x_1)\right) \cdots - x_{N-2}\right) - x_{N-1}\right)
\end{aligned}
$$

になっている。

参 考 文 献

[1] R. Bellman, Dynamic Programming, Princeton Univ. Press, Princeton NJ, 1957.

[2] G. B. Dantzig, Linear Programming and Extensions, Princeton Univ. Press, NJ, 1963; 小山昭夫訳,「線形計画法とその周辺」, ホールト・サウンダース, 1983.

[3] J. -B. J. Fourier, Solution d'une question particulière du calcul des inégalités. 1826, Oeuvres **II**, 317-328.

[4] S. Iwamoto, Inverse theorem in dynamic programming II, III, J. Math. Anal. Appl, **58**(1977), 249-279; 439-448.

[5] 岩本誠一,「逐次決定過程としての動的計画論(1), (2), オペレーションズ・リサーチ **22** (1977) 427-434; 496-501.

[6] S. Iwamoto, Reverse function, reverse program and reverse theorem in mathematical programming, J. Math. Anal. Appl. **95**(1983), 1-19.

[7] 岩本誠一,「動的計画論」, 九州大学出版会, 1987年.

[8] 岩本誠一, 動的計画と累次積分について, 経済学研究(九大経済学会), 第 **53** 巻(1989年) 4・5号, pp. 211-226.

[9] S. Iwamoto, A three-mirror problem on dynamic programming, Lecture Note in Control and Information Sciences **121**(1989), Ed. A. Blaquière: Proceedings of the 3rd Bellman Continuum Workshop(pp. 363-382).

[10] 岩本誠一, パラメトリックな線形計画と動的計画(1), (2), 経済学研究(九大経済学会), 第 **55** 巻(1989年)4・5号, pp. 173-185, ; 第 **56** 巻(1990年) 1・2号, pp. 295-318.

[11] 岩本誠一, 動的計画の最近の進歩, 第 2 回 RAMP シンポジウム論文集, 1990, pp. 129-140.

[12] 岩本誠一, 線形積分と動的計画, 発表予定.

[13] S. Iwamoto, Iterative integral versus dynamic programming, Proceedings of the 4th Bellman Continuum Workshop, May 21, 22(1990), Kansas State University; Computers Math. Applic. Vol. **21**, No11/12, pp. 23-39, 1991.

[14] T. S. Motzkin, Beiträge zur Theorie der Linearen Ungleichungen, Jerusalem, 1936 (Doctoral Thesis, University of Zurich).

[15] J. Stoer and C. Witzgall, Convexity and Optimization in Finite Dimension I, Springer, NY, 1970.

[16] 岩本誠一, 動的計画の図解, オペレーションズ・リサーチ **32** (1987). 399-403.