半順序サービス規律をもつ並列型待ち行列システム

児玉, 正憲

https://doi.org/10.15017/4493037

出版情報：經濟學研究. 57 (5/6), pp.85-100, 1992-09-10. 九州大学経済学会

半順序サービス規律をもつ並列型待ち行列システム

児　玉　正　憲

はしがき

順序サービス規律（1章(4)参照）の並列型待ち行列システムは，Disney(〔1〕，〔2〕)，Gupta(〔3〕)，Pritsker(〔4〕)，Elsayed et al.(〔5〕)，およびMatsui et al.(〔6〕)によって解析された。また，Lin et al.(〔7〕，〔8〕)は，上記のモデルを待合所の大きさが窓口ごとに異なる場合に拡張し，定常解および過渡解を数値的に求めた。

本論文は，順序サービス規律を半順序サービス規律（1章，(4)参照）に修正し，並列型待ち行列システムを検討する。このシステムの定常解および過渡解が数値的に得られ，2つのモデルの比較が行われる。このモデルは閉ループコンベアをもつ生産システムの解析に利用される。

1　モデルの定義と記号

ここで取り上げるモデルの定義および解析に必要な記号を述べる。

(1)　システムは $m(\geqq 2)$ 個の窓口をもち，各窓口はそれぞれ1番窓口，2番窓口，…，m 番窓口と名付けられる。$1, 2, \cdots m$ と略記する。

(2)　客は平均到着率 λ のポアソン分布に従って，共通の一つの窓口に到着する。

(3)　各窓口の待合所の大きさはサービス中を含めてすべて $N(\geqq 1)$ である。i 番目の窓口のサービス時間分布は，平均サービス率 μ_i のポアソン分布である $(i=1, \cdots, m)$。各窓口のサービス時間は互いに独立である。また，サービス時間は，前のすべての客のサービスの履歴，すべての客の占有時間および待合所の大きさには依存しない。

(4)　[1]　1)　順序サービス規律：共通の窓口へ到着した客は，1番目の窓口が塞がっていなければ，番号1の窓口に入る。塞がっていれば，番号2の窓口に入る。そして2番目の窓口が塞がっていれば番号3の窓口に入る。以下同様のサービス規律で窓口に入る。

2)　半順序サービス規律：共通の窓口へ到着した客は塞がっていない窓口の中で，待行列が最小な窓口を探す（1個とは限らない)。そして客は探した窓口の中の最小の番号の窓口に入る。

[2]　もしすべての窓口の前の待合所が塞がっていれば退去する。

(5)　状態確率の定義；

$P(t\,; a_1, a_2, \cdots, a_m)$：任意に与えられた時点 t で，番号1の窓口に客の数が a_1，番号2の窓口に

客の数が $a_2, \cdots$, 番号 m の窓口に客が a_m いる状態確率（$0 \leqq a_i \leqq N,\ i=1, 2, \cdots, m$）

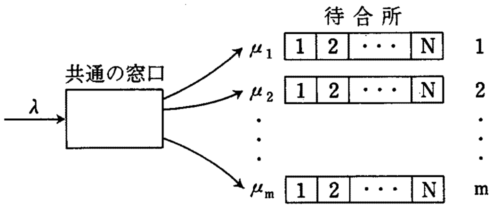

図1　システムの模式図

2　微分・差分方程式

状態確率 $P(t\,; a_1, a_2, \cdots, a_m)$ が与えられたとき，s を次のように定義する。

$s = Min\{a_1, a_2, \cdots, a_m\},\ 0 \leqq s \leqq N$

上の s と a_i に対して，$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k\}$ を $a_i = s,\ \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k,\ 1 \leqq k \leqq m$ なるチャンネル番号（窓口番号）i の集合とする。また $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k\}$ を $a_j = s+1,\ 1 \leqq j < \alpha_1$ なるチャンネル番号 j の集合とする。例えば，$a_1 = 2,\ a_2 = 1,\ a_3 = 3, \cdots, a_m = m$ のときは，$s = Min\{2, 1, 3, 4, \cdots, m\} = 1$, $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k\} = \{2\}$, $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k\} = \{1\}$ となる。

ここで，$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k\},\ B = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k\}$ とおく。

このモデルに対する微分・差分方程式を求めるために，まず $N=2,\ m=3$ の特殊な場合に対する微分・差分方程式の求め方を詳細に調べておく。この場合の可能な状態の数は $3^3 = 27$ となる。これを s の値によって分類し，全確率の定理を適用し，状態確率を求める。状態方程式の右辺の項で不可能な推移に対する確率の項は＼印，‖印，／印および×印をつけてある。この意味は，

＼：サービス中のものがないためサービス終了による推移が不可能

‖：待合所の制限のためサービス終了による推移が不可能

／：a_i は非負の整数のため客の到着による推移が不可能

×：半順序サービスのため客の到着による推移が不可能

である。

2.1　$s=0$ の場合

$$
\begin{aligned}
P(t+h\,; 0, 0, 0) &= P(t\,; 0, 0, 0)\{1-\lambda h-(\cancel{\mu_1}+\cancel{\mu_2}+\cancel{\mu_3})h\}+\mu_1 hP(t\,; 1, 0, 0)+\mu_2 hP(t\,; 0, 1, 0) \\
&\quad +\mu_3 hP(t\,; 0, 0, 1)+\lambda hP(t\,; \cancel{-1}, 0, 0)+\lambda hP(t\,; 0, \cancel{-1}, 0) \\
&\quad +\lambda hP(t\,; 0, 0, \cancel{-1})+0(h) = P(t\,; 0, 0, 0)(1-\lambda h-\sum_{i \notin A}\mu_i h)+\sum_{i=1}^{3}\{1-\delta(2, a_i)\} \\
&\quad \cdot \mu_i hP(t\,; a_1, a_i+1, a_3)+\sum_{j \in B}\lambda hP(t\,; a_1, a_j-1, a_3)+0(h) \\
&\quad (\because (0, 0, 0) \Rightarrow s=0,\ A=\{1, 2, 3\},\ B=\phi)
\end{aligned}
$$

右辺の第１項は $(t,\ t+h)$ 間，状態 $(0, 0, 0)$ にとどまっている確率を表わす。この場合状態 $(0, 0, 0)$ は番号１，番号２および番号３のチャンネルに客がいないことを表わすので，サービスが完了することはないので＼印を付けてある。

右辺の第２項，第３項および第４項は $(t,\ t+h)$ 間にそれぞれ状態 $(1, 0, 0)$，$(0, 1, 0)$，$(0, 0, 1)$ から状態 $(0, 0, 0)$ に推移する確率を表わす。

右辺の第５項，第６項および第７項は a_i が負の状態 $(-1, 0, 0)$，$(0, -1, 0)$，$(0, 0, -1)$ は存在しないので，$(t,\ t+h)$ 間に状態 $(0, 0, 0)$ に推移することができない（もし $(-1, 0, 0)$，$(0, -1, 0)$，$(0, 0, -1)$ が存在すれば状態 $(0, 0, 0)$ に推移することができる）。したがって，／印が付けてある。

$0(h)$ は $(t,\ t+h)$ 間に２回以上の推移があって $(0, 0, 0)$ に推移する確率は h より高位の無限小であることを意味している（例えば $(t,\ t+h)$ 間に $(2, 0, 0)\to(1, 0, 0)\to(0, 0, 0)$ の推移が起る確率は $(\mu_1\cdot h)^2(1-\lambda h)=0(h)$）

記号 A，B を用いて書き直した式が第２番目の等号の右辺である。

以下の状態確率も同様にして得られる。

$$
\begin{aligned}
P(t+h\,;0,0,1) = {} & P(t\,;0,0,1)\{1-\lambda h-(\cancel{\mu_1}+\cancel{\mu_2}+\mu_3)h\}+\mu_1hP(t\,;1,0,1)+\mu_2hP(t\,;0,1,1) \\
& +\mu_3hP(t\,;0,0,2)+\lambda hP(t\,;\cancel{-}1,0,1)+\lambda hP(t\,;0,\cancel{-}1,1)+\lambda hP(t\,;0,0,\cancel{0}) \\
& +0(h)=P(t\,;0,0,1)(1-\lambda h-\sum_{i\notin A}\mu_ih)+\sum_{i=1}^{3}\{1-\delta(2,a_i)\}\mu_ihP(t\,;a_1,a_i \\
& +1,a_3)+\sum_{j\in B}\lambda hP(t\,;a_1,a_j-1,a_3)+0(h) \\
& (\because (0,0,1)\Rightarrow s=0,\ A=\{1,2\},\ B=\phi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(t+h\,;0,0,2) = {} & P(t\,;0,0,2)\{1-\lambda h-(\cancel{\mu_1}+\cancel{\mu_2}+\mu_3)h\}+\mu_1hP(t\,;1,0,2)+\mu_2hP(t\,;0,1,2) \\
& +\mu_3hP(t\,;0,0,3)+\lambda hP(t\,;\cancel{-}1,0,2)+\lambda hP(t\,;0,\cancel{-}1,2)+\lambda hP(t\,;\cancel{0},0,1) \\
& +0(h)=P(t\,;0,0,2)(1-\lambda h-\sum_{i\notin A}\mu_ih)+\sum_{i=1}^{3}\{1-\delta(2,a_i)\}\mu_ihP(t\,;a_1,a_i \\
& +1,a_3)+\sum_{j\in B}\lambda hP(t\,;a_1,a_j-1,a_3)+0(h) \\
& (\because (0,0,2)\Rightarrow s=0,\ A=\{1,2\},\ B=\phi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(t+h\,;0,1,0) = {} & P(t\,;0,1,0)\{1-\lambda h-(\cancel{\mu_1}+\mu_2-\cancel{\mu_3})h\}+\mu_1hP(t\,;1,1,0)+\mu_2hP(t\,;0,2,0) \\
& +\mu_3hP(t\,;0,1,1)+\lambda hP(t\,;\cancel{-}1,1,0)+\lambda hP(t\,;0,\cancel{0},0)+\lambda hP(t\,;0,1,\cancel{-}1) \\
& +0(h)=P(t\,;0,1,0)(1-\lambda h-\sum_{i\notin A}\mu_ih)+\sum_{i=1}^{3}\{1-\delta(2,a_i)\}\mu_ihP(t\,;a_1,a_i \\
& +1,a_3)+\sum_{j\in B}\lambda hP(t\,;a_1,a_j-1,a_3)+0(h) \\
& (\because (0,1,0)\Rightarrow s=0,\ A=\{1,3\},\ B=\phi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(t+h\,;0,1,1) = {} & P(t\,;0,1,1)\{1-\lambda h-(\cancel{\mu_1}+\mu_2+\mu_3)h\}+\mu_1hP(t\,;1,1,1)+\mu_2hP(t\,;0,2,1) \\
& +\mu_3hP(t\,;0,1,2)+\lambda hP(t\,;\cancel{-}1,1,1)+\lambda hP(t\,;0,\cancel{0},1)+\lambda hP(t\,;0,1,\cancel{0})+0(h) \\
= {} & P(t\,;0,1,1)(1-\lambda h-\sum_{i\notin A}\mu_ih)+\sum_{i=1}^{3}\{1-\delta(2,a_i)\}\mu_ihP(t\,;a_1,a_i+1,a_3)
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{j\in B}\lambda hP(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)+0(h)$$

$$(\because(0,\ 1,\ 1)\Rightarrow s=0,\ A=\{1\},\ B=\phi\ )$$

$$\begin{aligned}P(t+h\,;0,\ 1,\ 2)&=P(t\,;0,\ 1,\ 2)\{1-\lambda h-(\cancel{\mu_1}+\mu_2+\mu_3)h\}+\mu_1hP(t\,;1,\ 1,\ 2)+\mu_2hP(t\,;0,\ 2,\ 2)\\&\quad+\mu_3hP(t\,;0,\ 1,\ \cancel{3})+\lambda hP(t\,;\cancel{-1},\ 1,\ 2)+\lambda hP(t\,;0,\ \cancel{0},\ 2)+\lambda hP(t\,;0,\ 1,\ \cancel{1})+0(h)\\&=P(t\,;0,\ 1,\ 2)(1-\lambda h-\sum_{i\notin A}\mu_ih)+\sum_{i=1}^{3}\{1-\delta(2,\ a_i)\}\mu_ihP(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)\\&\quad+\sum_{j\in B}\lambda hP(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)+0(h)\end{aligned}$$

$$(\because(0,\ 1,\ 2)\Rightarrow s=0,\ A=\{1\},\ B=\phi\ )$$

$$\begin{aligned}P(t+h\,;0,\ 2,\ 0)&=P(t\,;0,\ 2,\ 0)\{1-\lambda h-(\cancel{\mu_1}+\mu_2+\cancel{\mu_3})h\}+\mu_1hP(t\,;1,\ 2,\ 0)+\mu_2hP(t\,;0,\ \cancel{3},\ 0)\\&\quad+\mu_3hP(t\,;0,\ 2,\ 1)+\lambda hP(t\,;\cancel{-1},\ 2,\ 0)+\lambda hP(t\,;0,\ \cancel{1},\ 0)+\lambda hP(t\,;0,\ 2,\ \cancel{-1})\\&\quad+0(h)=P(t\,;0,\ 2,\ 0)(1-\lambda h-\sum_{i\notin A}\mu_ih)+\sum_{i=1}^{3}\{1-\delta(2,\ a_i)\}\mu_ihP(t\,;a_1,\ a_i\\&\quad+1,\ a_3)+\sum_{j\in B}\lambda hP(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)+0(h)\end{aligned}$$

$$(\because(0,\ 2,\ 0)\Rightarrow s=0,\ A=\{1,\ 3\},\ B=\phi\ )$$

$$\begin{aligned}P(t+h\,;0,\ 2,\ 1)&=P(t\,;0,\ 2,\ 1)\{1-\lambda h-(\cancel{\mu_1}+\mu_2+\mu_3)h\}+\mu_1hP(t\,;1,\ 2,\ 1)+\mu_2hP(t\,;0,\ \cancel{3},\ 1)\\&\quad+\mu_3hP(t\,;0,\ 2,\ 2)+\lambda hP(t\,;\cancel{-1},\ 2,\ 1)+\lambda hP(t\,;0,\ \cancel{1},\ 1)+\lambda hP(t\,;0,\ 2,\ \cancel{0})+0(h)\\&=P(t\,;0,\ 2,\ 1)(1-\lambda h-\sum_{i\notin A}\mu_ih)+\sum_{i=1}^{3}\{1-\delta(2,\ a_i)\}\mu_ihP(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)\\&\quad+\sum_{j\in B}\lambda hP(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)+0(h)\end{aligned}$$

$$(\because(0,\ 2,\ 1)\Rightarrow s=0,\ A=\{1\},\ B=\phi\ )$$

$$\begin{aligned}P(t+h\,;0,\ 2,\ 2)&=P(t\,;0,\ 2,\ 2)\{1-\lambda h-(\cancel{\mu_1}+\mu_2+\mu_3)h\}+\mu_1hP(t\,;1,\ 2,\ 2)+\mu_2hP(t\,;0,\ \cancel{3},\ 2)\\&\quad\mu_3hP(t\,;0,\ 2,\ \cancel{3})+\lambda hP(t\,;\cancel{-1},\ 2,\ 2)+\lambda hP(t\,;0,\ \cancel{1},\ 2)+\lambda hP(t\,;0,\ 2,\ \cancel{1})+0(h)\\&=P(t\,;0,\ 2,\ 2)(1-\lambda h-\sum_{i\notin A}\mu_ih)+\sum_{i=1}^{3}\{1-\delta(2,\ a_i)\}\mu_ihP(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)\\&\quad+\sum_{j\in B}\lambda hP(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)+0(h)\end{aligned}$$

$$(\because(0,\ 2,\ 2)\Rightarrow s=0,\ A=\{1\},\ B=\phi\ )$$

$$\begin{aligned}P(t+h\,;1,\ 0,\ 0)&=P(t\,;1,\ 0,\ 0)\{1-\lambda h-(\mu_1+\cancel{\mu_2}+\cancel{\mu_3})h\}+\mu_1hP(t\,;2,\ 0,\ 0)+\mu_2hP(t\,;1,\ 1,\ 0)\\&\quad+\mu_3hP(t\,;1,\ 0,\ 1)+\lambda hP(t\,;0,\ 0,\ 0)+\lambda hP(t\,;1,\ \cancel{-1},\ 0)+\lambda hP(t\,;1,\ 0,\ \cancel{-1})\\&\quad+0(h)=P(t\,;1,\ 0,\ 0)(1-\lambda h-\sum_{i\notin A}\mu_ih)+\sum_{i=1}^{3}\{1-\delta(2,\ a_i)\}\mu_ihP(t\,;a_1,\ a_i\\&\quad+1,\ a_3)+\sum_{j\in B}\lambda hP(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)+0(h)\end{aligned}$$

$$(\because(1,\ 0,\ 0)\Rightarrow s=0,\ A=\{2,\ 3\},\ B=\{1\})$$

$$\begin{aligned}P(t+h\,;1,\ 0,\ 1)&=P(t\,;1,\ 0,\ 1)\{1-\lambda h-(\mu_1+\cancel{\mu_2}+\mu_3)h\}+\mu_1hP(t\,;2,\ 0,\ 1)+\mu_2hP(t\,;1,\ 1,\ 1)\\&\quad+\mu_3hP(t\,;1,\ 0,\ 2)+\lambda hP(t\,;0,\ 0,\ 1)+\lambda hP(t\,;1,\ \cancel{-1},\ 1)+\lambda hP(t\,;1,\ 0,\ \cancel{0})+0(h)\\&=P(t\,;1,\ 0,\ 1)(1-\lambda h-\sum_{i\notin A}\mu_ih)+\sum_{i=1}^{3}\{1-\delta(2,\ a_i)\}\mu_ihP(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)\end{aligned}$$

$$+\sum_{j\in B}\lambda hP(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)+0(h)$$

$$(\because(1,\ 0,\ 1)\Rightarrow s=0,\ A=\{2\},\ B=\{1\})$$

$$\begin{aligned}P(t+h\,;1,\ 0,\ 2)&=P(t\,;1,\ 0,\ 2)\{1-\lambda h-(\mu_1+\cancel{\mu_2}+\mu_3)h\}+\mu_1hP(t\,;2,\ 0,\ 2)+\mu_2hP(t\,;1,\ 1,\ 2)\\&\quad+\mu_3hP(t\,;1,\ 0,\cancel{3})+\lambda hP(t\,;0,\ 0,\ 2)+\lambda hP(t\,;1,\ \cancel{-1},\ 2)+\lambda hP(t\,;1,\ 0,\cancel{1})+0(h)\\&=P(t\,;1,\ 0,\ 2)(1-\lambda h-\sum_{i\notin A}\mu_ih)+\sum_{i=1}^{3}\{1-\delta(2,\ a_i)\}\mu_ihP(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)\\&\quad+\sum_{j\in B}\lambda hP(t\,;a_1,\ a_j+1,\ a_3)+0(h)\end{aligned}$$

$$(\because(1,\ 0,\ 2)\Rightarrow s=0,\ A=\{2\},\ B=\{1\})$$

$$\begin{aligned}P(t+h\,;1,\ 1,\ 0)&=P(t\,;1,\ 1,\ 0)\{1-\lambda h-(\mu_1+\mu_2+\cancel{\mu_3})h\}+\mu_1hP(t\,;2,\ 1,\ 0)+\mu_2hP(t\,;1,\ 2,\ 0)\\&\quad+\mu_3hP(t\,;1,\ 1,\ 1)+\lambda hP(t\,;0,\ 1,\ 0)+\lambda hP(t\,;1,\ 0,\ 0)+\lambda hP(t\,;1,\ 1,\ \cancel{-1})+0(h)\\&=P(t\,;1,\ 1,\ 0)(1-\lambda h-\sum_{i\notin A}\mu_ih)+\sum_{i=1}^{3}\{1-\delta(2,\ a_i)\}\mu_ihP(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)\\&\quad+\sum_{j\in B}\lambda hP(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)+0(h)\end{aligned}$$

$$(\because(1,\ 1,\ 0)\Rightarrow s=0,\ A=\{3\},\ B=\{1,\ 2\})$$

$$\begin{aligned}P(t+h\,;1,\ 2,\ 0)&=P(t\,;1,\ 2,\ 0)\{1-\lambda h-(\mu_1+\mu_2+\cancel{\mu_3})h\}+\mu_1hP(t\,;2,\ 2,\ 0)+\mu_2hP(t\,;1,\cancel{3},\ 0)\\&\quad+\mu_3hP(t\,;1,\ 2,\ 1)+\lambda hP(t\,;0,\ 2,\ 0)+\lambda hP(t\,;1,\ 1,\cancel{0})+\lambda hP(t\,;1,\ 2,\ \cancel{-1})+0(h)\\&=P(t\,;1,\ 2,\ 0)(1-\lambda h-\sum_{i\notin A}\mu_ih)+\sum_{i=1}^{3}\{1-\delta(2,\ a_i)\}\mu_ihP(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)\\&\quad+\sum_{j\in B}\lambda hP(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)+0(h)\end{aligned}$$

$$(\because(1,\ 2,\ 0)\Rightarrow s=0,\ A=\{3\},\ B=\{1\})$$

$$\begin{aligned}P(t+h\,;2,\ 0,\ 0)&=P(t\,;2,\ 0,\ 0)\{1-\lambda h-(\mu_1+\cancel{\mu_2}+\cancel{\mu_3})h\}+\mu_1hP(t\,;\cancel{3},\ 0,\ 0)+\mu_2hP(t\,;2,\ 1,\ 0)\\&\quad+\mu_3hP(t\,;2,\ 0,\ 1)+\lambda hP(t\,;1,\ \cancel{0},\ 0)+\lambda hP(t\,;2,\ \cancel{-1},\ 0)+\lambda hP(t\,;2,\ 0,\ \cancel{-1})\\&\quad+0(h)=P(t\,;2,\ 0,\ 0)(1-\lambda h-\sum_{i\notin A}^{3}\mu_ih)+\sum_{i=1}^{3}\{1-\delta(2,\ a_i)\}\mu_ihP(t\,;a_1,\ a_i\\&\quad+1,\ a_3)+\sum_{j\in B}\lambda hP(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)+0(h)\end{aligned}$$

$$(\because(2,\ 0,\ 0)\Rightarrow s=0,\ A=\{2,\ 3\},\ B=\phi)$$

$$\begin{aligned}P(t+h\,;2,\ 0,\ 1)&=P(t\,;2,\ 0,\ 1)\{1-\lambda h-(\mu_1+\cancel{\mu_2}+\mu_3)h\}+\mu_1hP(t\,;\cancel{3},\ 0,\ 1)+\mu_2hP(t\,;2,\ 1,\ 1)\\&\quad+\mu_3hP(t\,;2,\ 0,\ 2)+\lambda hP(t\,;1,\ \cancel{0},\ 1)+\lambda_2hP(t\,;2,\ \cancel{-1},\ 1)+\lambda_3hP(t\,;2,\ \cancel{0},\ 0)\\&\quad+0(h)=P(t\,;2,\ 0,\ 1)(1-\lambda h-\sum_{i\notin A}\mu_ih)+\sum_{i=1}^{3}\{1-\delta(2,\ a_i)\}\mu_ihP(t\,;a_1,\ a_i\\&\quad+1,\ a_3)+\sum_{j\in B}\lambda hP(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)+0(h)\end{aligned}$$

$$(\because(2,\ 0,\ 1)\Rightarrow s=0,\ A=\{2\},\ B=\phi)$$

$$\begin{aligned}P(t+h\,;2,\ 0,\ 2)&=P(t\,;2,\ 0,\ 2)\{1-\lambda h-(\mu_1+\cancel{\mu_2}+\mu_3)h\}+\mu_1hP(t\,;\cancel{3},\ 0,\ 2)+\mu_2hP(t\,;2,\ 1,\ 2)\\&\quad+\mu_3hP(t\,;2,\ 0,\cancel{3})+\lambda hP(t\,;1,\cancel{0},\ 2)+\lambda hP(t\,;2,\ \cancel{-1},\ 2)+\lambda hP(t\,;2,\cancel{0},\ 1)+0(h)\\&=P(t\,;2,\ 0,\ 2)(1-\lambda h-\sum_{i\notin A}\mu_ih)+\sum_{i=1}^{3}\{1-\delta(2,\ a_i)\}\mu_ihP(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)\end{aligned}$$

$$+\sum_{j\in B}\lambda hP(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)+0(h)$$

$$(\because(2,\ 0,\ 2)\Rightarrow s=0,\ A=\{2\},\ B=\phi\,)$$

$$\begin{aligned}P(t+h\,;2,\ 1,\ 0)&=P(t\,;2,\ 1,\ 0)\{1-\lambda h-(\mu_1+\mu_2+\cancel{\mu_3})h\}+\mu_1hP(t\,;3,\ 1,\ 0)+\mu_2hP(t\,;2,\ 2,\ 0)\\&\quad+\mu_3hP(t\,;2,1,1)+\lambda hP(t\,;1,1,\cancel{0})+\lambda hP(t\,;2,0,0)+\lambda hP(t\,;2,1,\cancel{-}1)+0(h)\\&=P(t\,;2,\ 1,\ 0)(1-\lambda h-\sum_{i\notin A}\mu_ih)+\sum_{i=1}^{3}\{1-\delta(2,\ a_i)\}\mu_ihP(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)\\&\quad+\sum_{j\in B}\lambda hP(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)+0(h)\end{aligned}$$

$$(\because(2,\ 1,\ 0)\Rightarrow s=0,\ A=\{3\},\ B=\{2\})$$

$$\begin{aligned}P(t+h\,;2,\ 2,\ 0)&=P(t\,;2,\ 2,\ 0)\{1-\lambda h-(\mu_1+\mu_2+\cancel{\mu_3})h\}+\mu_1hP(t\,;3,\ 2,\ 0)+\mu_2hP(t\,;2,\ 3,\ 0)\\&\quad+\mu_3hP(t\,;2,2,1)+\lambda hP(t\,;1,2,\cancel{0})+\lambda hP(t\,;2,1,\cancel{0})+\lambda hP(t\,;2,2,\cancel{-}1)+0(h)\\&=P(t\,;2,\ 2,\ 0)(1-\lambda h-\sum_{i\notin A}\mu_ih)+\sum_{i=1}^{3}\{1-\delta(2,\ a_i)\}\mu_ihP(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)\\&\quad+\sum_{j\in B}\lambda hP(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)+0(h)\end{aligned}$$

$$(\because(2,\ 2,\ 0)\Rightarrow s=0,\ \{A\}=\{3\},\ B=\phi\,)$$

以上の諸関係式より微分差分方程式を求めるには，例えば最初の関係式より

$$\frac{P(t+h\,;0,\ 0,\ 0)-P(t\,;0,\ 0,\ 0)}{h}=-(\lambda+\sum_{i\notin A}\mu_i)P(t\,;0,\ 0,\ 0)+\sum_{i=1}^{3}\{1-\delta(2,\ a_i)\}$$

$$\cdot\mu_iP(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)+\lambda\sum_{j\in B}P(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)+\frac{0(h)}{h}$$

となり，ここで $h\to0$ とすれば

$$\frac{dP(t\,;0,\ 0,\ 0)}{dt}=-(\lambda+\sum_{i\notin A}\mu_i)P(t\,;0,\ 0,\ 0)+\sum_{i=1}^{3}\{1-\delta(2,\ a_i)\}\mu_iP(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)$$

$$+\lambda\sum_{j\in B}P(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)$$

という微分差分方程式を得る。これを次のように表わす

$$\left\{\frac{d}{dt}+\lambda+\sum_{i\notin A}\mu_i\right\}P(t\,;0,\ 0,\ 0)$$

$$=\sum_{i=1}^{3}(1-\delta(2,\ a_i))\mu_iP(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)+\lambda\sum_{i\in B}P(t\,;a_1,\ a_i-1,\ a_3),\ A=\{1,\ 2,\ 3\},\ B=\phi\,,(a_1,\ a_2,\ a_3)$$

$$=(0,\ 0,\ 0)\tag{2.1}$$

以下同様にして次の微分差分方程式を得る。

$$\left\{\frac{d}{dt}+\lambda+\sum_{i\notin A}\mu_i\right\}P(t\,;0,\ 0,\ 1)$$

$$=\sum_{i=1}^{3}(1-\delta(2,\ a_i))\mu_iP(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)+\lambda\sum_{j\in B}P(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3),\ A=\{1,\ 2\},\ B=\phi\,,(a_1,\ a_2,\ a_3)$$

$$=(0,\ 0,\ 1)\tag{2.2}$$

$$\left\{\frac{d}{dt}+\lambda+\sum_{i\notin A}\mu_i\right\}P(t\,;0,\ 0,\ 2)$$

$$= \sum_{i=1}^{3}(1-\delta(2,\ a_i))\mu_i P(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)+\lambda\sum_{j\in B}P(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3),\ A=\{1,\ 2\},\ B=\phi,\ (a_1,\ a_2,\ a_3) = (0,\ 0,\ 2) \tag{2.3}$$

$$\left\{\frac{d}{dt}+\lambda+\sum_{i\notin A}\mu_i\right\}P(t\,;0,\ 1,\ 0)$$

$$= \sum_{i=1}^{3}(1-\delta(2,\ a_i))\mu_i P(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)+\sum_{j\in B}\lambda P(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3),\ A=\{1,\ 3\},\ B=\phi,\ (a_1,\ a_2,\ a_3) = (0,\ 1,\ 0) \tag{2.4}$$

$$\left\{\frac{d}{dt}+\lambda+\sum_{i\notin A}\mu_i\right\}P(t\,;0,\ 1,\ 1)$$

$$= \sum_{i=1}^{3}(1-\delta(2,\ a_i))\mu_i P(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)+\sum_{j\in B}\lambda P(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3),\ A=\{1\},\ B=\phi,\ (a_1,\ a_2,\ a_3) = (0,\ 1,\ 1) \tag{2.5}$$

$$\left\{\frac{d}{dt}+\lambda+\sum_{i\notin A}\mu_i\right\}P(t\,;0,\ 1,\ 2)$$

$$= \sum_{i=1}^{3}(1-\delta(2,\ a_i))\mu_i P(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)+\sum_{j\in B}\lambda P(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3),\ A=\{1\},\ B=\phi,\ (a_1,\ a_2,\ a_3) = (0,\ 1,\ 2) \tag{2.6}$$

$$\left\{\frac{d}{dt}+\lambda+\sum_{i\notin A}\mu_i\right\}P(t\,;0,\ 2,\ 0)$$

$$= \sum_{i=1}^{3}(1-\delta(2,\ a_i))\mu_i P(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)+\lambda\sum_{j\in B}\lambda P(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3),\ A=\{1,\ 3\},\ B=\phi,\ (a_1,\ a_2,\ a_3) = (0,\ 2,\ 0) \tag{2.7}$$

$$\left\{\frac{d}{dt}+\lambda+\sum_{i\notin A}\mu_i\right\}P(t\,;0,\ 2,\ 1)$$

$$= \sum_{i=1}^{3}(1-\delta(2,\ a_i))\mu_i P(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)+\lambda\sum_{j\in B}P(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3),\ A=\{1\},\ B=\phi,\ (a_1,\ a_2,\ a_3) = (0,\ 2,\ 1) \tag{2.8}$$

$$\left\{\frac{d}{dt}+\lambda+\sum_{i\notin A}\mu_i\right\}P(t\,;0,\ 2,\ 2)$$

$$= \sum_{i=1}^{3}(1-\delta(2,\ a_i))\mu_i P(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)+\lambda\sum_{j\in B}P(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3),\ A=\{1\},\ B=\phi,\ (a_1,\ a_2,\ a_3) = (0,\ 2,\ 2) \tag{2.9}$$

$$\left\{\frac{d}{dt}+\lambda+\sum_{i\notin A}\mu_i\right\}P(t\,;1,\ 0,\ 0)$$

$$= \sum_{i=1}^{3}(1-\delta(2,\ a_i))\mu_i P(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)+\lambda\sum_{j\in B}P(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3),\ A=\{2,\ 3\},\ B=\{1\},\ (a_1,\ a_2,\ a_3) = (1,\ 0,\ 0) \tag{2.10}$$

$$\left\{\frac{d}{dt}+\lambda+\sum_{i\notin A}\mu_i\right\}P(t\,;1,\ 0,\ 1)$$

$$= \sum_{i=1}^{3}(1-\delta(2,\ a_i))\mu_i P(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)+\lambda\sum_{j\in B}P(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3),\ A=\{2\},\ B=\{1\},\ (a_1,\ a_2,\ a_3)$$

$$= (1, 0, 1) \tag{2.11}$$

$$\left\{\frac{d}{dt}+\lambda+\sum_{i\notin A}\mu_i\right\}P(t\,;1,0,2)$$

$$=\sum_{i=1}^{3}(1-\delta(2, a_i))\mu_i P(t\,;a_1, a_i+1, a_3)+\lambda\sum_{j\in B}P(t\,;a_1, a_j-1, a_3),\ A=\{2\},\ B=\{1\},\ (a_1, a_2, a_3)$$

$$= (1, 0, 2) \tag{2.12}$$

$$\left\{\frac{d}{dt}+\lambda+\sum_{i\notin A}\mu_i\right\}P(t\,;1,1,0)$$

$$=\sum_{i=1}^{3}(1-\delta(2, a_i))\mu_i P(t\,;a_1, a_i+1, a_3)+\lambda\sum_{j\in B}P(t\,;a_1, a_j-1, a_3),\ A=\{3\},\ B=\{1, 2\},\ (a_1, a_2, a_3)$$

$$= (1, 1, 0) \tag{2.13}$$

$$\left\{\frac{d}{dt}+\lambda+\sum_{i\notin A}\mu_i\right\}P(t\,;1,2,0)$$

$$=\sum_{i=1}^{3}(1-\delta(2, a_i))\mu_i P(t\,;a_1, a_i+1, a_3)+\lambda\sum_{j\in B}P(t\,;a_1, a_j-1, a_3),\ A=\{3\},\ B=\{1\},\ (a_1, a_2, a_3)$$

$$= (1, 2, 0) \tag{2.14}$$

$$\left\{\frac{d}{dt}+\lambda+\sum_{i\notin A}\mu_i\right\}P(t\,;2,0,0)$$

$$=\sum_{i=1}^{3}(1-\delta(2, a_i))\mu_i P(t\,;a_1, a_i+1, a_3)+\lambda\sum_{j\in B}P(t\,;a_1, a_j-1, a_3),\ A=\{2, 3\},\ B=\phi,\ (a_1, a_2, a_3)$$

$$= (2, 0, 0) \tag{2.15}$$

$$\left\{\frac{d}{dt}+\lambda+\sum_{i\notin A}\mu_i\right\}P(t\,;2,0,1)$$

$$=\sum_{i=1}^{3}(1-\delta(2, a_i))\mu_i P(t\,;a_1, a_i+1, a_3)+\lambda\sum_{j\in B}P(t\,;a_1, a_j-1, a_3),\ A=\{2\},\ B=\phi,\ (a_1, a_2, a_3)$$

$$= (2, 0, 1) \tag{2.16}$$

$$\left\{\frac{d}{dt}+\lambda+\sum_{i\notin A}\mu_i\right\}P(t\,;2,0,2)$$

$$=\sum_{i=1}^{3}(1-\delta(2, a_i))\mu_i P(t\,;a_1, a_i+1, a_3)+\lambda\sum_{j\in B}P(t\,;a_1, a_j-1, a_3),\ A=\{2\},\ B=\phi,\ (a_1, a_2, a_3)$$

$$= (2, 0, 2) \tag{2.17}$$

$$\left\{\frac{d}{dt}+\lambda+\sum_{i\notin A}\mu_i\right\}P(t\,;2,1,0)$$

$$=\sum_{i=1}^{3}(1-\delta(2, a_i))\mu_i P(t\,;a_1, a_i+1, a_3)+\lambda\sum_{j\in B}P(t\,;a_1, a_j-1, a_3),\ A=\{3\},\ B=\{2\},\ (a_1, a_2, a_3)$$

$$= (2, 1, 0) \tag{2.18}$$

$$\left\{\frac{d}{dt}+\lambda+\sum_{i\notin A}\mu_i\right\}P(t\,;2,2,0)$$

$$=\sum_{i=1}^{3}(1-\delta(2, a_i))\mu_i P(t\,;a_1, a_i+1, a_3)+\lambda\sum_{j\in B}P(t\,;a_1, a_j-1, a_3),\ A=\{3\},\ B=\phi,\ (a_1, a_2, a_3)$$

$$= (2, 2, 0) \tag{2.19}$$

式(3.1)～(3.19)は次のようにまとめられる。

$$\left\{\frac{d}{dt}+\lambda+\sum_{\substack{i=1\\(i\notin A)}}^{3}\mu_i\right\}P(t\,;a_1,\ a_2,\ a_3)$$

$$=\sum_{i=1}^{3}(1-\delta(2,\ a_i))\mu_i P(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)+\lambda\sum_{i\in B}P(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3) \tag{2.20}$$

2.2 $0<s<2(s=1)$ の場合

$$\begin{aligned}
P(t+h\,;1,1,1)&=P(t\,;1,1,1)\{1-\lambda h-(\mu_1+\mu_2+\mu_3)h\}+\mu_1 hP(t\,;2,1,1)+\mu_2 hP(t\,;1,2,1)\\
&\quad+\mu_3 hP(t\,;1,1,2)+\lambda hP(t\,;0,1,1)+\lambda hP(t\,;1,0,1)+\lambda hP(t\,;1,1,0)+0(h)\\
&=P(t\,;1,1,1)(1-\lambda h-\sum_{i=1}^{3}\mu_i h)+\sum_{i=1}^{3}\{1-\delta(2,\ a_i)\}\mu_i hP(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)\\
&\quad+\sum_{j\in A}\lambda hP(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)+\sum_{j\in B}\lambda hP(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)+0(h)\\
&\quad(\because(1,1,1)\Rightarrow s=1,\ A=\{1,2,3\},\ B=\phi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(t+h\,;1,1,2)&=P(t\,;1,1,2)\{1-\lambda h-(\mu_1+\mu_2+\mu_3)h\}+\mu_1 hP(t\,;2,1,2)+\mu_2 hP(t\,;1,2,2)\\
&\quad+\mu_3 hP(t\,;1,1,3)+\lambda hP(t\,;0,1,2)+\lambda hP(t\,;1,0,2)+\lambda hP(t\,;\cancel{1},1,1)+0(h)\\
&=P(t\,;1,1,2)(1-\lambda h-\sum_{i=1}^{3}\mu_i h)+\sum_{i=1}^{3}\{1-\delta(2,\ a_i)\}\mu_i hP(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)\\
&\quad+\sum_{j\in A}\lambda hP(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)+\sum_{j\in B}\lambda hP(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)+0(h)\\
&\quad(\because(1,1,2)\Rightarrow s=1,\ A=\{1,2\},\ B=\phi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(t+h\,;1,2,1)&=P(t\,;1,2,1)\{1-\lambda h-(\mu_1+\mu_2+\mu_3)h\}+\mu_1 hP(t\,;2,2,1)+\mu_2 hP(t\,;1,3,1)\\
&\quad+\mu_3 hP(t\,;1,2,2)+\lambda hP(t\,;0,1,2)+\lambda hP(t\,;\cancel{1},1,1)+\lambda hP(t\,;1,2,0)+0(h)\\
&=P(t\,;1,2,1)(1-\lambda h-\sum_{i=1}^{3}\mu_i h)+\sum_{i=1}^{3}\{1-\delta(2,\ a_i)\}\mu_i hP(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)\\
&\quad+\sum_{j\in A}\lambda hP(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)+\sum_{j\in B}\lambda hP(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)+0(h)\\
&\quad(\because(1,2,1)\Rightarrow s=1,\ A=\{1,3\},\ B=\phi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(t+h\,;1,2,2)&=P(t\,;1,2,2)\{1-\lambda h-(\mu_1+\mu_2+\mu_3)h\}+\mu_1 hP(t\,;2,2,2)+\mu_2 hP(t\,;1,3,2)\\
&\quad+\mu_3 hP(t\,;1,2,3)+\lambda hP(t\,;0,2,2)+\lambda hP(t\,;\cancel{1},1,2)+\lambda hP(t\,;\cancel{1},2,1)+0(h)\\
&=P(t\,;1,2,2)(1-\lambda h-\sum_{i=1}^{3}\mu_i h)+\sum_{i=1}^{3}\{1-\delta(2,\ a_i)\}\mu_i hP(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)\\
&\quad+\sum_{j\in A}\lambda hP(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)+\sum_{j\in B}\lambda hP(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)+0(h)\\
&\quad(\because(1,2,2)\Rightarrow s=1,\ A=\{1\},\ B=\phi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(t+h\,;2,1,1)&=P(t\,;1,1,1)\{1-\lambda h-(\mu_1+\mu_2+\mu_3)h\}+\mu_1 hP(t\,;3,1,1)+\mu_2 hP(t\,;2,2,1)\\
&\quad+\mu_3 hP(t\,;2,1,2)+\lambda hP(t\,;1,1,1)+\lambda hP(t\,;2,0,1)+\lambda hP(t\,;2,1,0)+0(h)\\
&=P(t\,;1,1,1)(1-\lambda h-\sum_{i=1}^{3}\mu_i h)+\sum_{i=1}^{3}\{1-\delta(2,\ a_i)\}\mu_i hP(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)\\
&\quad+\sum_{j\in A}\lambda hP(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)+\sum_{j\in B}\lambda hP(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)+0(h)
\end{aligned}$$

$$(\because (2,\ 1,\ 1) \Rightarrow s=1,\ A=\{2,\ 3\},\ B=\{1\})$$

$$\begin{aligned}P(t+h\,;2,\ 1,\ 2) &= P(t\,;2,\ 1,\ 2)\{1-\lambda h-(\mu_1+\mu_2+\mu_3)h\}+\mu_1 hP(t\,;3,\ 1,\ 2)+\mu_2 hP(t\,;2,\ 2,\ 2)\\ &\quad +\mu_3 hP(t\,;2,\ 1,\ 3)+\lambda hP(t\,;1,\ 1,\ 2)+\lambda hP(t\,;2,\ 0,\ 2)+\lambda hP(t\,;2,\ \cancel{1},\ 1)+0(h)\\ &= P(t\,;2,\ 1,\ 2)(1-\lambda h-\sum_{i=1}^{3}\mu_i h)+\sum_{i=1}^{3}\{1-\delta(2,\ 0)\}\mu_i hP(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)\\ &\quad +\sum_{j\in A}\lambda hP(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)+\sum_{j\in B}\lambda hP(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)+0(h)\end{aligned}$$

$$(\because (2,\ 1,\ 2) \Rightarrow s=1,\ A=\{2\},\ B=\{1\})$$

$$\begin{aligned}P(t+h\,;2,\ 2,\ 1) &= P(t\,;2,\ 2,\ 1)\{1-\lambda h-(\mu_1+\mu_2+\mu_3)h\}+\mu_1 hP(t\,;3,\ 2,\ 1)+\mu_2 hP(t\,;2,\ 3,\ 1)\\ &\quad +\mu_3 hP(t\,;2,\ 2,\ 2)+\lambda hP(t\,;1,\ 2,\ 1)+\lambda hP(t\,;2,\ 1,\ 1)+\lambda hP(t\,;2,\ 2,\ 0)+0(h)\\ &= P(t\,;2,\ 2,\ 1)(1-\lambda h-\sum_{i=1}^{3}\mu_i h)+\sum_{i=1}^{3}\{1-\delta(2,\ a_i)\}\mu_i hP(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)\\ &\quad +\sum_{j\in A}\lambda hP(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)+\sum_{j\in B}\lambda hP(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)+0(h)\end{aligned}$$

$$(\because (2,\ 2,\ 1) \Rightarrow s=1,\ A=\{3\},\ B=\{1,\ 2\})$$

$$\left\{\frac{d}{dt}+\lambda+\sum_{i=1}^{3}\mu_i\right\}P(t\,;1,\ 1,\ 1)$$

$$=\sum_{i=1}^{3}(1-\delta(2,\ a_i))\mu_i P(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)+\lambda\sum_{j\in A}P(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)+\lambda\sum_{j\in B}P(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)$$

$$A=\{1,\ 2,\ 3\},\ B=\phi,\ (a_1,\ a_2,\ a_3)=(1,\ 1,\ 1) \tag{2.21}$$

$$\left\{\frac{d}{dt}+\lambda+\sum_{i=1}^{3}\mu_i\right\}P(t\,;1,\ 1,\ 2)$$

$$=\sum_{i=1}^{3}(1-\delta(2,\ a_i))\mu_i P(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)+\lambda\sum_{j\in A}P(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)+\lambda\sum_{j\in B}P(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)$$

$$A=\{1,\ 2\},\ B=\phi,\ (a_1,\ a_2,\ a_3)=(1,\ 1,\ 2) \tag{2.22}$$

$$\left\{\frac{d}{dt}+\lambda+\sum_{i=1}^{3}\mu_i\right\}P(t\,;1,\ 2,\ 1)$$

$$=\sum_{i=1}^{3}(1-\delta(2,\ a_i))\mu_i P(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)+\lambda\sum_{j\in A}P(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)+\lambda\sum_{j\in B}P(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)$$

$$A=\{1,\ 3\},\ B=\phi,\ (a_1,\ a_2,\ a_3)=(1,\ 2,\ 1) \tag{2.23}$$

$$\left\{\frac{d}{dt}+\lambda+\sum_{i=1}^{3}\mu_i\right\}P(t\,;1,\ 2,\ 2)$$

$$=\sum_{i=1}^{3}(1-\delta(2,\ a_i))\mu_i P(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)+\lambda\sum_{j\in A}P(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)+\lambda\sum_{j\in B}P(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)$$

$$A=\{1\},\ B=\phi,\ (a_1,\ a_2,\ a_3)=(1,\ 2,\ 2) \tag{2.24}$$

$$\left\{\frac{d}{dt}+\lambda+\sum_{i=1}^{3}\mu_i\right\}P(t\,;2,\ 1,\ 1)$$

$$=\sum_{i=1}^{3}(1-\delta(2,\ a_i))\mu_i P(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)+\lambda\sum_{j\in A}P(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)+\lambda\sum_{j\in B}P(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)$$

$$A=\{2,\ 3\},\ B=\{1\},\ (a_1,\ a_2,\ a_3)=(2,\ 1,\ 1) \tag{2.25}$$

$$\left\{\frac{d}{dt}+\lambda+\sum_{i=1}^{3}\mu_i\right\}P(t\,;2,\ 1,\ 2)$$

$$= \sum_{i=1}^{3}(1-\delta(2,\ a_i))\mu_i P(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)+\lambda\sum_{j\in A}P(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)+\lambda\sum_{j\in B}P(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)$$

$$A=\{2\},\ B=\{1\},\ (a_1,\ a_2,\ a_3)=(2,\ 1,\ 2) \qquad (2.26)$$

$$\left\{\frac{d}{dt}+\lambda+\sum_{i=1}^{3}\mu_i\right\}P(t\,;2,\ 2,\ 1)$$

$$= \sum_{i=1}^{3}(1-\delta(2,\ a_i))\mu_i P(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)+\lambda\sum_{j\in A}P(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)+\lambda\sum_{j\in B}P(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)$$

$$A=\{3\},\ B=\{1,\ 2\},\ (a_1,\ a_2,\ a_3)=(2,\ 2,\ 1) \qquad (2.27)$$

式(2.20)～(2.26)は次のようにまとめられる。

$$\left\{\frac{d}{dt}+\lambda+\sum_{i=1}^{3}\mu_i\right\}P(t\,;a_1,\ a_2,\ a_3)$$

$$= \sum_{i=1}^{3}(1-\delta(2,\ a_i))\mu_i P(t\,;a_1,\ a_i+1,\ a_3)+\lambda\sum_{j\in A}P(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3)+\lambda\sum_{j\in B}P(t\,;a_1,\ a_j-1,\ a_3) \qquad (2.28)$$

2.3　$s=2$ の場合

$$\begin{aligned}P(t+h\,;2,\ 2,\ 2) &= P(t\,;2,\ 2,\ 2)\{1-\lambda h-(\mu_1+\mu_2+\mu_3)h\}+\mu_1 hP(t\,;3,\ 2,\ 2)+\mu_2 hP(t\,;2,\ 3,\ 2)\\ &\quad +\mu_3 hP(t\,;2,\ 2,\ 3)+\lambda hP(t\,;1,\ 2,\ 2)+\lambda hP(t\,;2,\ 1,\ 2)+\lambda hP(t\,;2,\ 2,\ 1)+0(h)\\ &= P(t\,;2,\ 2,\ 2)(1-\sum_{i=1}^{3}\mu_i h)+\lambda h\{P(t\,;1,\ 2,\ 2)+P(t\,;2,\ 1,\ 2)+P(t\,;2,\ 2,\ 1)\}+0(h)\\ &\quad (\because (2,\ 2,\ 2)\Rightarrow \varDelta=2,\ A=\{1,\ 2,\ 3\},\ B=\phi)\end{aligned}$$

$$\left\{\frac{d}{dt}+\sum_{i=1}^{3}\mu_i\right\}P(t\,;2,\ 2,\ 2)$$

$$=\lambda\{P(t\,;1,\ 2,\ 2)+P(t\,;2,\ 1,\ 2)+P(t\,;2,\ 2,\ 1)\} \qquad (2.29)$$

3　一般的モデル

各チャンネルの待合所の広さがすべて同じで，サービス中を含めて自然数Nで表される場合を解析する。

$N=2,\ m=3$ の場合と同様な議論より次の状態方程式および微分差分方程式を得る。

3.1　$s=0$ の場合

$$\begin{aligned}P(t+h\,;a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m) &= P(t\,;a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m)\{1-\lambda h-\sum_{\substack{i=1\\(i\notin A)}}^{m}\mu_i h\}\\ &\quad +\sum_{i=1}^{m}\{1-\delta(N,\ a_i)\}\mu_i hP(t\,;a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{i-1},\ a_i+1,\ a_{i+1},\ \cdots,\ a_m)\\ &\quad +\sum_{j\in B}\lambda hP(t\,;a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{j-1},\ a_j-1,\ a_{j+1},\ \cdots,\ a_m)+0(h)\end{aligned}$$

$$\left\{\frac{d}{dt}+\lambda+\sum_{\substack{i=1\\(i\notin A)}}^{m}\mu_i\right\}P(t\,;a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\{1-\delta(N,\ a_i)\}\mu_i P(t\,;a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{i-1},\ a_i+1,\ a_{i+1},\ \cdots,\ a_m)$$

$$+\lambda\sum_{j\in B}P(t\,;a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{j-1},\ a_j-1,\ a_{j+1},\ \cdots,\ a_m) \qquad (3.1)$$

3.2　$0<s<N$ の場合

$$P(t+h\,;a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m) = P(t\,;a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m)\{1-\lambda h-\sum_{i=1}^{m}\mu_i h\}$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\{1-\delta(N,\ a_i)\}\mu_i hP(t\,;a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{i-1},\ a_i+1,\ a_{i+1},\ \cdots,\ a_m)$$

$$+\sum_{j\in A}\lambda hP(t\,;a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{j-1},\ a_j-1,\ a_{j+1},\ \cdots,\ a_m)$$

$$+\sum_{j\in B}\lambda hP(t\,;a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{j-1},\ a_j-1,\ a_{j+1},\ \cdots,\ a_m)+0(h)$$

$$\left\{\frac{d}{dt}+\lambda+\sum_{i=1}^{m}\mu_i\right\}P(t\,;a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\{1-\delta(N,\ a_i)\}\mu_i P(t\,;a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{i-1},\ a_i+1,\ a_{i+1},\ \cdots,\ a_m)$$

$$+\lambda[\sum_{j\in A}P(t\,;a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{j-1},\ a_j-1,\ a_{j+1},\ \cdots,\ a_m)+\sum_{j\in B}P(t\,;a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{j-1},\ a_j-1,\ a_{j+1},\ \cdots,\ a_m)] \qquad (3.2)$$

3.3　$s=N$ の場合

$$P(t+h\,;N,\ N,\ \cdots,\ N) = P(t\,;N,\ N,\ \cdots,\ N)\left(1-\sum_{i=1}^{m}\mu_i h\right)$$

$$+[\lambda hP(t\,;N-1,\ N,\ \cdots,\ N)+\lambda hP(t\,;N,\ N-1,\ \cdots,\ N)+\cdots+\lambda hP(t\,;N,\ N,\ \cdots,\ N-1)]+0(h)$$

$$\left\{\frac{d}{dt}+\sum_{i=1}^{m}\mu_i\right\}P(t\,;N,\ N,\ \cdots,\ N)$$

$$= \lambda[P(t\,;N-1,\ N,\ \cdots,\ N)+P(t\,;N,\ N-1,\ \cdots,\ N)+\cdots+P(t\,;N,\ N,\ \cdots,\ N-1)] \qquad (3.3)$$

システムを記述するために必要な方程式の数は $(N+1)^m$ である。一般のシステムは次のように記述される。

$$\frac{dP(t)}{dt} = \boldsymbol{A}P(t) \qquad (3.4)$$

ここに $\boldsymbol{A}$ は平方行列で，その要素は式(3.1)～(3.3)の定状確率の係数である。式(3.4)を用いて初期条件，

$P(0\,;0,\ \cdots,\ 0)=1$；任意の a_i に対して $P(0\,;a_1,\ \cdots,\ a_m)=0$

で解かれる。

いま

$$P(0)=\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad P(t)=\begin{pmatrix}P_1(t)\\\vdots\\P_m(t)\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}a_{12}\cdots a_{1m}\\a_{21}a_{22}\cdots a_{2m}\\\vdots\\a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mm}\end{pmatrix}$$

とおくと，この解は

$$\begin{aligned}P(t)&=e^{At}I\\&=(E+\boldsymbol{A}t+\cdots+\frac{\boldsymbol{A}^n\mathrm{t}^n}{\mathrm{n}!}+\cdots)\boldsymbol{I}\\&=\mathrm{E}\boldsymbol{I}+\boldsymbol{AI}t+\frac{\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{I}t^2}{2!}+\cdots+\frac{\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{I}t^n}{n!}+\cdots\end{aligned}$$

となる。ここに E は単位行列である。

次の節で特殊な場合について上記の数値解を求め順序サービス規律の場合と比較する。

4 数 値 例

この節では Lin et al.〔8〕によって得られた結果と比較するために，論文〔8〕で使用されたデータを用いる。すなわちサービス中を含む待合所の大きさ $N=2$，窓口の数 $m=3$ で，平均サービス率(μ_i, μ_j, μ_k) は（1.0, 0.8, 0.6）である。ここに（i, j, k）は 1, 2, 3 の任意の順列である。

図 2 と図 3 はそれぞれシステムの空きおよび客が退去する確率に対するサービス工の配置の効果（平均サービス率の配分の効果）を示している。これらの図から任意の時点 t における客の退去の確率を減少さすことおよびサービスされた個数を増加させるためには，平均サービス率に関して減少順$(\mu_1=1.0\to\mu_2=0.8\to\mu_3=0.6)$に配置すべきであることがわかる。この結論は，論文〔8〕の結果と同じである。

図 4 と図 5 は図 2 と図 3 に対応する順序サービス規律の場合である。これらの図から半順序サービス規律の場合が順序サービス規律の場合よりも，任意時点 t におけるサービスされた客の数を増加させるためには効果的であることがわかる。また，平均サービス率の順列（6 個）に対して，得られる客の退去の確率の範囲は，半順序サービス規律の場合が順序サービス規律の場合より小である。これは任意時点においてサービスされた客の数に対する各チャンネルの平均サービス率の違いによる影響は，半順序サービス規律の場合が順序サービス規律の場合より小さいことを示している。

図 6 と図 7 は，半順序サービス規律と順序サービス規律の場合について，i 番目の窓口がサービス中である確率，すなわち $\eta_i=\sum_{a_i\neq 0}P(t\,;a_1, a_2, \cdots, a_m)$ に対する平均サービス率の配置の効果を示している。これらの図から平均サービス率に関して，減少順の配置が増加順の配置よりも η_i が小さいことがわかる。半順序サービス規律の場合は，順序サービス規律の場合に比較して η_i を一様化していることがわかる（η_i の変化の範囲が小さくなっている)。ある生産システムに適当なサービス規律を採用し，η_i を一様化することは望ましいことであり，その意味でも半順序サービス規律は有用である。

表 1　遊休確率，退去確率および窓口利用率
（半順序サービス規律，N=2，m=3，λ=1.4，（　）内は順序サービス規律の値）

平均サービス率			確率		窓口利用率		
μ_1	μ_2	μ_3	遊休確率	退去確率	窓口 1	窓口 2	窓口 3
1.0	0.8	0.6	0.169 (0.137)	0.032 (0.043)	0.660 (0.771)	0.542 (0.512)	0.437 (0.265)
1.0	0.6	0.8	0.156 (0.121)	0.033 (0.049)	0.662 (0.771)	0.616 (0.600)	0.402 (0.252)
0.8	1.0	0.6	0.153 (0.109)	0.033 (0.047)	0.715 (0.828)	0.513 (0.502)	0.447 (0.284)
0.8	0.6	1.0	0.131 (0.086)	0.037 (0.058)	0.720 (0.828)	0.645 (0.657)	0.386 (0.262)
0.6	1.0	0.8	0.124 (0.072)	0.036 (0.055)	0.782 (0.886)	0.546 (0.565)	0.418 (0.283)
0.6	0.8	1.0	0.116 (0.065)	0.038 (0.061)	0.784 (0.886)	0.604 (0.633)	0.393 (0.276)

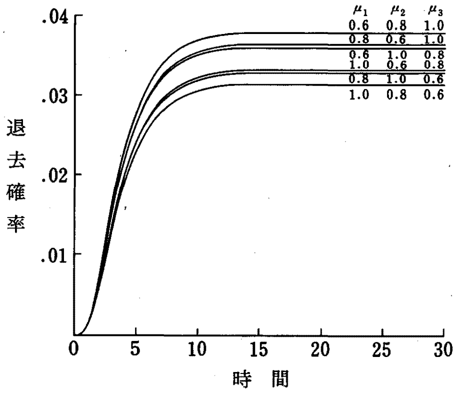

図 2　客の退去確率に対する平均サービス率の配分の効果
（半順序サービス規律，N=2，m=3）

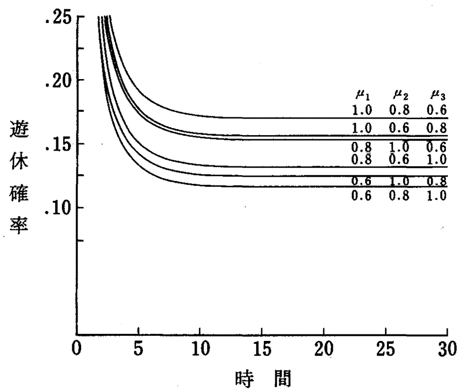

図 3　システムの遊休確率に対する平均サービスの配分の効果
（半順序サービス規律，N=2，m=3）

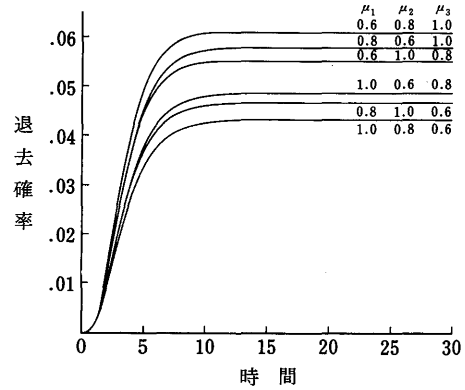

図 4 客の退去確率に対する平均サービス率の配分の効果
(順序サービス規律, N=2, m=3)

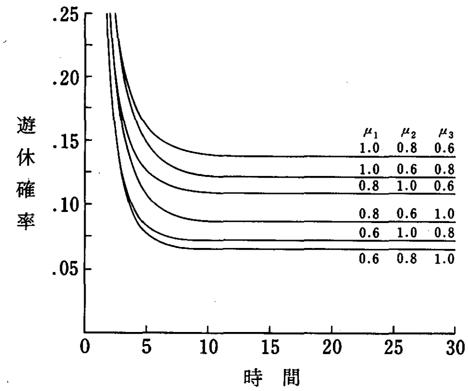

図 5 システムの遊休確率に対する平均サービス率の配分の効果
(順序サービス規律, N=2, m=3)

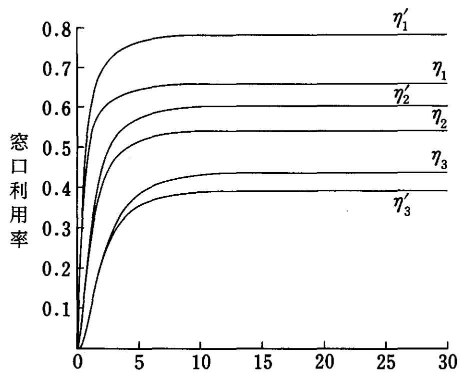

図 6 窓口利用率に対する平均サービス率の配分の効果
(半順序サービス規律, N=2, m=3)
η_i : $\mu_1=1.0, \mu_2=0.8, \mu_3=0.6$の場合の窓口 i の利用率
η'_i : $\mu_1=0.6$, $\mu_2=0.8$, $\mu_3=1.0$の場合の窓口 i の利用率

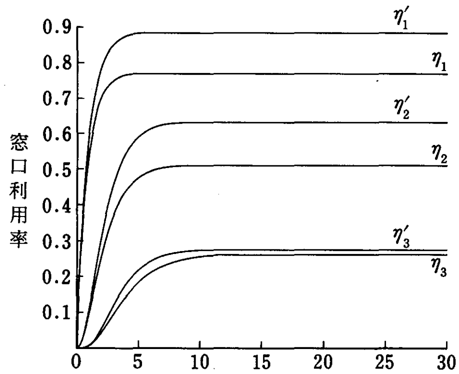

図 7 窓口利用率に対する平均サービス率の配分の効果
(順序サービス規律, N=2, m=3)
η_i : $\mu_1=1.0, \mu_2=0.8, \mu_3=0.6$の場合の窓口 i の利用率
η'_i : $\mu_1=0.6$, $\mu_2=0.8$, $\mu_3=1.0$の場合の窓口 i の利用率

む す び

第 4 節の数値例から半順序サービス規律をもつ待ち行列システムは順序サービス規律をもつ待ち行列システムよりシステムの効率上のぞましい性質をもっていると結論づけられる。

待合所の大きさが窓口ごとに異なる場合の解析は次稿で検討したい。

参 考 文 献

[1] Disney, R. L, Some multichannel queueing problems with ordered entry, J. ind. Engng, 13, 46, 1962.
[2] —, Some results of multichannel queueing problems with ordered entry: an application to conveyor theory, J. ind. Engng, 14, 105, 1963.
[3] Gupta, G. S., Analysis of a two channel queueing poblem with ordered entry, J. ind. Engng, 17, 54, 1966.
[4] Pritsker, A. A. B., Applications of multichannel queueing results to the analysis of conveyor system, J. ind. Engng. 17, 14, 1966.
[5] Elsayed, A. R., Proctor, C. L., and Elayat, H. A., Analysis of closed-loop conveyor systems with multiple Poisson inputs and outputs, Int., J. Prod. Res., 14, 99, 1976.
[6] Matsui, M., and Fukuta, J., On a multichannel queueing system with ordered entry and heterogeneous servers, A. I. I. E. Trans., 9, 209, 1977.
[7] Lin, B. W., and Elsayed, E. A., Ageneral solution for multichannel queueing systems with ordered entry, Int. J. Computer Ops. Res., 5, 219, 1978.
[8] Elsayed, E. A. and Lin, B. W., Transient behaviour of ordered-entry mulichannel queueing system, Int. J. Pord. Res., 18, 491, 1980.