尤度比を用いた二つの順序と不完備情報の多段決定問題の性質について

中井, 達
九州大学経済学部 : 助教授

https://doi.org/10.15017/4493027

出版情報：經濟學研究. 57 (3/4), pp.251-279, 1992-08-10. 九州大学経済学会
バージョン：

尤度比を用いた二つの順序と不完備情報の多段決定問題の性質について

中井　達

1　序

多段決定問題には，最適停止問題・逐次割当問題など多くの問題を含んでおり，部分観測が可能な場合すなわち不完備情報の決定問題について，最適政策，および最適政策のもとで最適に振る舞ったときに得られる値と，学習の関係について考えることは重要であり，また特に最適政策との関係について考えておくことが必要である。特に，不完備情報のマルコフ決定過程における多段決定問題についてこれらの問題を考えることは重要である。ここではマルコフ連鎖の状態に関して不完備な情報しか与えられておらず，事前情報はマルコフ連鎖の状態空間の上に定義された確率ベクトルとして表されるものと考え，マルコフ連鎖の状態と情報過程から観測できる値を表す確率変数との関係は既知であるものとする。マルコフ連鎖の状態に関する学習はベイズの方法に従って行う場合について考える。ここで扱う多段決定問題については第2節で説明をする。

そこでまず始めに，ここで考えるマルコフ連鎖の状態に関する情報全体，すなわち状態空間上の確率ベクトル全体に尤度比 (likelihood ratio) の考えを用いて順序を導入することを考える。この順序は尤度比順序と呼ばれ，それらの性質と上に述べたような多段決定問題の最適政策およびその最適政策のもとでの値の関係を考えていく。このとき，尤度比順序に関して第3節において，いくつかの仮定を設ける。特にベイズの定理を用いて学習を行うために，学習法則の性質についていろいろ複雑な状況が起こることがよく知られており，その為に第3節で与える仮定のもとで考える必要があり，これらの仮定のもとでマルコフ連鎖の状態に関する学習の性質について考える。第3節で与えた仮定のもとで，事前分布と事後分布の間に，いくつかの基本的な関係があり，特にそれらの性質は多段決定問題を考える上で基本的なものであり，いくつかの性質について考える。また，この順序に関連する最適停止問題・逐次割り当て問題等の問題については，Nakai [9]・[10]・[11] においても述べられている。

つぎに，第3節で考えたものとは異なるが，やはり尤度比を用いたもう一つの順序について考える。この順序は，shifted likelihood ratio ordering と呼ばれ，尤度比順序の場合と同様にいくつかの仮定のもとで考える。この順序は，尤度比順序に比べてより強いものであるが，尤度比順序では得られない性質がなりたつ。また，この順序に関して必要となる仮定も異なるが，第3節で与えた仮定とそれぞれ対応するものである。この順序に関しても，尤度比順序の場合と同じように，事前情報と事後情

報の間にいくつかの基本的な関係が成り立ち，これらについては，第4節において示される。

第5節および第6節では，第3節・第4節で議論した二つの順序のもとで，これらの順序と多段決定問題の解との関係について考える。特にここでは，複数回停止することができる最適停止問題について考え，この場合の最適政策とその最適政策のもとで最適に振る舞って得られる値と，事前情報との関係について議論する。この節で考えた問題の特別な場合については Nakai [9]・[10] においても述べられている。

2　問題の定式化

以下の議論においては，情報過程の任意の観測値と事前情報に対して，事後情報が存在するものと仮定し，それはベイズの定理によって求められるものとする。

ここで考える情報過程とは，つぎのようなものであるとする。いま，$\{Y_t; t=1,2,\cdots\cdot\}$ を状態空間が $\{1, 2, 3, \cdots\cdot\}$ であるマルコフ連鎖とし，マルコフ連鎖の遷移確率は既知であるとし，それを $\boldsymbol{P}=(p_{ij}), \{i, j=1, 2, \cdots\cdot\}$ であるとする。いま $\boldsymbol{S}$ を

$$\boldsymbol{S}=\{\boldsymbol{P}|\boldsymbol{P}=(p_1, p_2, \cdots\cdot), p_i\geq 0, \sum_{i=1}^{\infty}p_i=1\}$$

によって定義されているものとする。すなわち $\{1, 2, 3, \cdots\cdot\}$ 上の確率ベクトル全体を表すものとする。このとき，このマルコフ連鎖の状態がどのようなものであるかについての情報は，全て $\boldsymbol{S}$ に含まれる確率分布 $\boldsymbol{P}$ によって表されるものと考える。ここでは，状態空間が可算集合である場合について扱うが，有限の場合にも以下で得られる性質は全て成立する。

マルコフ連鎖の状態に関する情報は，情報過程 $\{X_{it}; i, t=1,2,\cdots\cdot\}$ を通して得られるものと考える。ここで X_{it} は時点 t でのマルコフ連鎖の状態に依存した値をとる実数値確率変数であり，その確率分布関数は決定者に対し既知であるものと考える。これらの部分観測可能なマルコフ連鎖と情報過程の間の関係は，既知の確率分布関数によって定義されており，それはつぎのようなものである。すなわち

$$Pr\{X_{it}\leq x|Y_t=k\}=F_k(x),\ x\in R,\ k\in\{1, 2, \cdots\cdot\}, \tag{1}$$

ここで，$i, t=1,2,\cdots\cdot$ とする。逐次に観測することのできる確率変数は $X_1, X_2, \cdots\cdot$ であるとし，これらの条件付き確率分布は(1)式の確率分布関数によって規定されているものとする。

この部分観測が可能なマルコフ連鎖の上での決定問題を考えるために，多段決定問題の中からつぎのような最適停止問題を取り上げ，その最適政策と求めた最適政策に従って得られる値と学習の過程との関係について考える。この問題はつぎのようなものである。決定期間は有限期間である場合を考え，その期間をN期間とする。一方，決定者は情報過程をN期間にわたって観測することができ，それらN期の中でk回停止することができるものとし，総期待利得を最大にすることを目的とする。各期の状態は，上に述べたようなマルコフ連鎖に従って変化するが，決定者はマルコフ連鎖の状態がどのようなものか直接に知ることはできず，情報過程を通して知ることができるものと考える。ただ，

あらかじめ事前知識として状態空間の上での確率分布として状態に関する情報を持っているとする。各期の始めに決定者はマルコフ連鎖の状態に依存する確率変数の実現値を情報過程から観測し，その実現値をもとにしてその期に停止するかそれとも見送って次の期に進むかを決定することができる。もし決定者がこの期において停止することに決定すれば，この期に観測した情報過程の観測値に依存した利得を得ることができ，その後この情報過程で観測した実現値をもとにしてマルコフ連鎖の状態についての情報をベイズの方法に従って改善し，次の期に進む。一方，そうでなければ単に情報過程の実現値を観測してベイズの方法に従って学習を行い，次の期に進むことになる。もし，$k=N$ であるならば，決定者は常に停止し，各期ごとに得られる情報過程の観測値に依存した利得を得ることになる。このとき，決定者は総期待利得を最大にすることを目的とし，そのための最適政策とその最適政策に従って得られる値を求める。以下の議論では，この問題をもとにして，情報過程を通した学習のプロセスが最適政策にどう関係するかについていくつかの仮定のもとで考える。この問題については第5節および第6節において考える。

つぎに，マルコフ連鎖の状態に関する事前の情報がこのマルコフ連鎖の状態空間上の確率分布 $\boldsymbol{P}(\in \boldsymbol{S})$ によって表され，残りの決定期間がNであり，そのうち k 回停止することができるという状態を，ここで考える最適停止問題の状態と言い，$(\boldsymbol{P}, k, N)$ により表す。つぎに，この問題の状態が $(\boldsymbol{P}, k, N)$ であるとき，この問題を $P_N^k(\boldsymbol{P})$ であらわし，この問題 $P_N^k(\boldsymbol{P})$ において最適に振る舞って得られる総期待利得を $v_N^k(\boldsymbol{P})$ とする。

ここで考える問題は，つぎのように行われる。この問題の状態が $(\boldsymbol{P},\ k,\ N)$ であるとき，決定者（decision-maker）はマルコフ連鎖の状態に依存する確率変数 $\{X_t\}$ の実現値 x を情報過程より観測する。この観測値 x をもとにして，決定者はこの値に依存した利得 $u(\boldsymbol{P}, x)$ を得てこの値を取り，認められた停止する権利を行使するか，それともこの値を見逃して次の期に進むか決定を行う。もし，値 x を観測したこの期で停止することが決定すれば，決定者は利得 $u(\boldsymbol{P}, x)$ を得，次の期に進む。そして次の期の状態は残りの決定期間が $N-1$ であり，取り得る決定の数が $k-1$ となるから $(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)},\ k-1,\ N-1)$ と表される。ここで $\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)}$ は，情報過程の確率変数 $\{X_t\}$ の実現値 x を観測したとき，その値をもとにしてマルコフ連鎖の状態についてベイズの定理に従って学習を行ったときの事後分布を表し，つぎに述べる(2)式と(3)式で求められる。もし，観測値 x に対して，この期で停止せずにこの値を見送り次の期に進むことにすれば，この期では，利得を得ることはなく，停止した場合と同じようにマルコフ連鎖の状態に関して学習を行い次の期に進み，問題の状態は $(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)}, k, N)$ となる。$N=k$ ならば，常に停止し出現した値 x に依存した利得 $u(\boldsymbol{P},\ x)$ を各期毎に得ることになる。

このとき，マルコフ連鎖の状態に関して，情報過程から観測値 x を得たときの事後分布は，ベイズの定理に従って学習を行う。従って，まず情報過程からの観測値 $x \in R=(-0, \infty)$ に対してマルコフ連鎖の状態に関する事後確率分布が全ての $j=1, 2, \cdots\cdot$ に対して，つぎのように求められる。

$$\begin{cases} T_j(\boldsymbol{P},\,x) = \dfrac{p_j f_j(x)}{\sum_{i=1}^{n} p_i f_i(x)} \\ T(\boldsymbol{P},\,x) = (T_1(\boldsymbol{P},\,x),\ T_2(\boldsymbol{P},\,x),\ \cdots\cdot) \end{cases} \tag{2}$$

さらに，ここで考えられているマルコフ連鎖は，あらかじめ与えられた遷移行列 $\boldsymbol{P}$ に従って状態が遷移するから，次の期の始めのマルコフ連鎖の状態に関する事前情報 $\overline{T(\boldsymbol{P},\,x)}$ は，全ての $\boldsymbol{P}\in\boldsymbol{S}$ に対して

$$\begin{cases} \overline{T_j(\boldsymbol{P},\,x)} = \sum_{i=1}^{n} T_i(\boldsymbol{P},\,x) p_{ij}, \\ \overline{T(\boldsymbol{P},\,x)} = (\overline{T_1(\boldsymbol{P},\,x)},\ \overline{T_2(\boldsymbol{P},\,x)},\ \cdots\cdot) \end{cases} \tag{3}$$

のように求められる。

ここで考える問題においては決定者は総期待利得を最大にするような最適政策を求めることを目的とする。また，利得関数 $u(\boldsymbol{P},x)$ は，与えられた関数であり，マルコフ連鎖の状態に関する情報 $\boldsymbol{P}$ に依存した関数であると考える。このような関数としては，例えば

$$u(\boldsymbol{P},\,x) = (\sum_{i=1}^{n} a_i p_i)x$$

のような関数を考えれば良い。ただし，$a_i,\ i = 1,\ 2,\ \cdots\cdot$ は，マルコフ連鎖の状態が i であるときの期待利得と考え，

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots\ldots \geq 0$$

であるとする。

多段決定問題における最適停止問題は決定者が2回のみ停止することができる場合，すなわち $k = 2$ の場合について Häggstrom [5]において考えられている。しかし，最終利得関数は全ての停止の決定に依存した関数である場合である。また，もう一つ別の多段決定問題における最適停止問題は，Miller [7]においても扱われている。ここで扱われているものは，再生過程の上での問題として考えられている。すなわち，決定者が停止することを決めたとき，この問題で考えられている過程が初期状態に戻る場合を扱っている。さらに，決定者は考えている過程の状態について正確に知っている場合が扱われている。

3　S における尤度比順序（Likelihood Ratio Ordering）

この節では，$\boldsymbol{S}$ に含まれるマルコフ連鎖の状態空間上の確率分布に対して，尤度比（Likelihood ratio）を用いてつぎのような順序を導入することを考える。

定義 1　$\boldsymbol{S}$ に含まれる任意の $\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{Q}$ に対して，$\boldsymbol{P} >_l \boldsymbol{Q}$ であるとは，全ての i と $j(j\leq i,\ i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots\ldots)$ に対して，

$$p_i q_j \leq p_j q_i,\ \text{すなわち}\ \begin{vmatrix} q_i & q_j \\ p_i & p_j \end{vmatrix} \geq 0 \tag{4}$$

が成立し，少なくとも一つの i と j の組み合わせに対して，

$$p_i q_j < p_j q_i,$$

が成り立つ場合を言う。もし，$p_i = q_i$ が任意の $i = 1, 2, ...$ に対して成り立つとき $\boldsymbol{P} =_l \boldsymbol{Q}$ であるとする。また，$\boldsymbol{P} \geq_l \boldsymbol{Q}$ であるとは，$\boldsymbol{P} =_l \boldsymbol{Q}$ かつ，$\boldsymbol{P} >_l \boldsymbol{Q}$ が成り立つことを言う。

上で定義した順序を尤度比順序と呼び，この順序に関して以下のような性質が成り立つ。

補題 1　定義 1 において定義した，S における順序は半順序である。

補題 2　S に含まれる任意の $\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{Q}$ に対して，$\boldsymbol{P} \geq_l \boldsymbol{Q}$ であるならば，つぎの不等式を満足するような $1 < k$ が存在する。

$$\frac{p_k}{q_k} > 1 \geq \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$$

証明. 定義 1 より，つぎのような不等式が得られる。

$$\frac{p_1}{q_1} \geq \frac{p_2}{q_2} \geq \ldots \frac{p_n}{q_n} \geq \ldots$$

ただし，ここで

$$\frac{a}{0} = \infty,\ a \in R$$

であるものと考える。このとき，もし

$$\frac{p_1}{q_1} < 1$$

または，

$$\frac{p_n}{q_n} > 1$$

がすべての $n < 0$ に対して成り立つならば，$\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{Q}$ は，S_n に含まれる確率分布関数であることから

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} q_i = 1$$

を満足することに反する。従ってこの補題は成立する。

補題 3　S に含まれる任意の $\boldsymbol{P}$ に対して，$(1, 0, \ldots, 0) \geq_l \boldsymbol{P}$ である。また状態空間が有限集合であれば $\boldsymbol{P} \leq_l (0, \ldots 0, 1)$ である。

つぎに，この節で定義した尤度比による順序すなわち尤度比順序 (likelihood ratio ordering) のもとでの決定問題を考えるために，ここで確率分布関数と確率遷移行列 $\boldsymbol{P}$ に関して，つぎのような 4 つの仮定を設ける。

仮定 1　マルコフ連鎖の状態が k であるとき，この状態 k に依存した確率変数の条件付き期待値は有界であり，それを μ_k で表す。また，確率分布関数 $F_k(x)$ は確率密度関数 $f_k(x)$ を持つとし，

$$dF_k(x) = f_k(x)dx$$

とする。

仮定 2　もし，$j \leq i (i, j = 1, 2, \ldots, n)$ であれば $x \leq y$ に対して

$$f_j(x)f_i(y) \leq f_j(y)f_i(x) \text{すなわち} \begin{vmatrix} f_i(x) & f_i(y) \\ f_j(x) & f_j(y) \end{vmatrix} \geq 0 \tag{5}$$

を満足する。すなわち，

$$\frac{f_j(x)}{f_i(x)}$$

は，$x \in \{x \mid f_i(x) \neq 0\}$の範囲で$x$の非減少関数である。

仮定 3　$1 \leq m < k$, であれば,

$$x_{mk} = \sup\{x \mid f_m(x) \leq f_k(x)\},$$

となるx_{mk}で，つぎの条件を満足するものが存在する。

(1) $x > x_{mk}$ ならば $f_m(k) > f_k(x) > f_{k+1}(x) > \ldots\ldots$

(2) $x \leq x_{mk}$ ならば $f_k(x) \geq f_m(x) \geq f_{m-1}(x) \geq \ldots\ldots \geq f_1(x)$

例えば，正規分布の確率密度関数

$$f_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu_k)^2}{2\sigma^2}\right\},\ \mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \geq \ldots\ldots,$$

を考えれば，これらの確率密度関数は，上の三つの条件を満足することは簡単な計算から明かである。

仮定2は$i, j(i>j, i, j=1, 2, \ldots, n)$であるとき，$X_j$は$X_i$より尤度比（likelihood ratio）の意味で大きいことを表している。このことから，X_iは，iに関して故障率 (failure rate) の意味での増加確率変数であるといえる。これらのことは，Ross [17] に詳しい。また，尤度比による順序については Brown and Solomon [2] においても述べられており，failure rate ordering については Pinedo and Ross [13] においても述べられている。さて，ここでは遷移確率行列$\boldsymbol{P}$に関してつぎのような仮定を設ける。

仮定 4　任意の$i, j(i \geq j, i, j=1, 2, \ldots\ldots)$に対して，

$$p_{mj}p_{ni} \geq p_{nj}p_{mi} \text{すなわち} \begin{vmatrix} p_{ni} & p_{nj} \\ p_{mi} & p_{mj} \end{vmatrix} \geq 0 \tag{6}$$

が$m \leq n(m, n=1, 2, \ldots\ldots)$を満足する全ての$m$と$n$に対して成り立つ。もし，状態空間が$\{1, 2\}$の2状態空間であればこの仮定は，不等式

$$p_{11} \geq p_{21},$$

と同じである。この仮定は Ross [16] および Monahan [18] においても述べられているよく知られた仮定である。仮定4はこれらの一般化であると考えられる。

つぎに$\boldsymbol{S}$の上の関数$u(\boldsymbol{P})$に対して，この関数が$\boldsymbol{P}$に関して増加関数であるとは，$\boldsymbol{P} \geq_l \boldsymbol{Q}$となる$\boldsymbol{P}$と$\boldsymbol{Q}$に関して$u(\boldsymbol{P}) \geq u(\boldsymbol{Q})$を満足することを言う。

ここでは，利得関数$u(\boldsymbol{P}, x)$は，$\boldsymbol{P}$に関して非減少，とつな関数であり非負で有限な値を取る関数とする。また，xに関して可測であり増加関数であるとする。このような関数は，例えば

$$u(\boldsymbol{P}, x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i p_i\right)x,\ a_1 \geq a_2 \geq \ldots\ldots \geq a_n \geq 0$$

の様な関数を考えれば，上に述べた条件を満足することは明かである。また，$u(\boldsymbol{P}, x) = p_1$と言う関

数を考えればやはり上に述べた条件を満足する。この場合は，n 個の箱の中に一つの目的物が隠されているとき第一番目の箱にその目的物がいる確率を最大にするような部分観測が可能なマルコフ連鎖の上での探索問題と考えることができ，Pollok [14]において考えられているものである。

ここで，(2)式および(3)式で与えられた事後情報の性質を，仮定1から仮定4のもとで考えてみる。まずつぎのような性質が成り立つことがわかる。

補題 4　$x \leq y$を満たす任意の x と y に対して

$$T(\boldsymbol{P}, x) \leq_l T(\boldsymbol{P}, y)$$

が全ての$\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{S}$ に対して成り立つ

証明. $\boldsymbol{S}$ における順序の定義から，任意の $j<i(i, j=1, 2, ..., n)$ に対して

$$T_j(\boldsymbol{P}, x) T_i(\boldsymbol{P}, y) \leq T_i(\boldsymbol{P}, x) T_j(\boldsymbol{P}, y)$$

であることが示されれば，この補題に述べられた性質が成り立つことが示される。従ってそのために，

$$T_j(\boldsymbol{P}, x) T_i(\boldsymbol{P}, y) - T_i(\boldsymbol{P}, x) T_j(\boldsymbol{P}, y)$$

を考える。この式の分母を払えば，

$$\begin{aligned} & p_j f_j(x) p_i f_i(y) - p_i f_i(x) p_j f_j(y) \\ &= p_j p_i (f_j(x) f_i(y) - f_i(x) f_j(y)) \leq 0 \end{aligned}$$

となる。ここで，最後の不等式は確率密度関数に関する仮定2より求められる。

定理 1　$x \leq y$ を満たす任意の x と y に対して

$$\overline{T(\boldsymbol{P}, x)} \leq_l \overline{T(\boldsymbol{P}, y)}$$

が全ての $\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{S}$ に対して成り立つ

証明. $\boldsymbol{S}$ における順序の定義から，任意の $j<i(i, j=1, 2, ..., n)$ に対して

$$\overline{T_j(\boldsymbol{P}, x)}\ \overline{T_i(\boldsymbol{P}, y)} \leq \overline{T_i(\boldsymbol{P}, x)}\ \overline{T_j(\boldsymbol{P}, y)}$$

であることが示されれば，この定理に述べられた性質が成り立つことが示される。従ってそのために，

$$\overline{T_j(\boldsymbol{P}, x)}\ \overline{T_i(\boldsymbol{P}, y)} - \overline{T_i(\boldsymbol{P}, x)}\ \overline{T_j(\boldsymbol{P}, y)}$$

を考える。この値は

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{l=1}^{n} T_l(\boldsymbol{P}, x) p_{lj}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} T_k(\boldsymbol{P}, y) p_{ki}\right) - \left(\sum_{l=1}^{n} T_l(\boldsymbol{P}, x) p_{li}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} T_k(\boldsymbol{P}, y) p_{kj}\right) \\ &= \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} T_l(\boldsymbol{P}, x) T_k(\boldsymbol{P}, y)(p_{lj} p_{ki} - p_{li} p_{kj}) \\ &= \sum_{\substack{l=1 \\ l \geqq k}}^{n}\sum_{k=1}^{n} (T_l(\boldsymbol{P}, x) T_k(\boldsymbol{P}, y) - T_k(\boldsymbol{P}, x) T_l(\boldsymbol{P}, y))(p_{lj} p_{ki} - p_{li} p_{kj}) \leq 0 \end{aligned}$$

となり，補題4とマルコフ連鎖の遷移確率行列に関する仮定4より，この定理は成り立つ。

補題 5　$\boldsymbol{S}$ に含まれる任意の $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$ に対して，$\boldsymbol{P} \geq_l \boldsymbol{Q}$ であるならば，

$$T(\boldsymbol{P}, x) \geq_l T(\boldsymbol{Q}, x)$$

が全ての $x \in \boldsymbol{R}$ に対して成り立つ。

証明. $\boldsymbol{S}$ における順序の定義から，任意の $j<i\ (i, j=1, 2, ..., n)$ に対して

$$T_i(\boldsymbol{P}, x) T_j(\boldsymbol{Q}, x) \leq T_j(\boldsymbol{P}, x) T_i(\boldsymbol{Q}, x)$$

であることが示されれば良いから，補題4と同じように

$$T_j(\boldsymbol{P}, x)T_i(\boldsymbol{Q}, x)-T_i(\boldsymbol{P}, x)T_j(\boldsymbol{Q}, x)$$

を考える。この分母を払えば，

$$p_jf_j(x)q_if_i(x)-p_if_i(x)q_jf_j(x)$$
$$=f_j(x)f_i(x)(p_jq_i-p_iq_j)\geq 0$$

となる。ここで，最後の不等式は確率分布の尤度比順序に関する定義1より求められる。□

定理 2　$\boldsymbol{S}$ に含まれる任意の $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$ に対して，$\boldsymbol{P}\geq_l\boldsymbol{Q}$ であるならば，

$$\overline{T(\boldsymbol{P}, x)}\geq_l\overline{T(\boldsymbol{Q}, x)}$$

が全ての $x\in\boldsymbol{R}$ に対して成り立つ。

証明. $\boldsymbol{S}$ における順序の定義から，任意の $j<i(i, j=1, 2, \ldots, n)$ に対して

$$\overline{T_j(\boldsymbol{P}, x)}\ \overline{T_i(\boldsymbol{Q}, x)}\leq\overline{T_i(\boldsymbol{P}, x)}\ \overline{T_j(\boldsymbol{Q}, x)}$$

であることが示されれば良いから，定理1と同じように

$$\overline{T_j(\boldsymbol{P}, x)}\ \overline{T_i(\boldsymbol{Q}, x)}-\overline{T_i(\boldsymbol{P}, x)}\ \overline{T_j(\boldsymbol{Q}, x)}$$

を考える。このとき補題5より，定理1と同様にして求められる。□

つぎの補題は，多段決定問題において，最適政策のもとでの総期待利得を最大にしたときの値に関する性質を求めるときに必要な性質である。

補題 6　今，$\{f_i(x)\}_{i=1,2,\cdots,n}$ を，仮定3の性質を満足するような，確率密度関数の有限列と考える。ただし，$n\geq 2$ とする。つぎに $\{a_i\}_{i=1,2,\cdots,n}$ を，実数の列とし，

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=0$$

を満足するものとする。

このとき，適当な $1\leq k<n$ が存在し，

$$a_i\geq 0,\ j\leq k,$$
$$a_j\leq 0,\ j>k$$

であるとする。以上の仮定のもとで，いま

$$g(x)=\sum_{i=1}^{n}a_if_i(x)$$

とおけば，

$$\int_0^\infty h(x)g(x)dx\geq 0$$

が成り立つ。

証明. ここでは，n に関する帰納法を用いる。まず，$n=2$ ときは，仮定から

$$g(x)=a_1(f_1(x)-f_2(x))$$

である。従って，適当な $x_{12}\geq 0$ が存在して

$$f_1(x)\leq f_2(x),\ x\leq x_{12},$$
$$f_1(x)>f_2(x),\ x>x_{12}$$

であるから

$$\int_0^{\infty} h(x)g(x)dx = \int_0^{x_{12}} h(x)g(x)dx + \int_{x_{12}}^{\infty} h(x)g(x)dx$$
$$\geq h(x_{12})\int_0^{x_{12}} g(x)dx + h(x_{12})\int_{x_{12}}^{\infty} g(x)dx = 0$$

となる。ここで不等式は $h(x)$ が x に関して増加関数であることから得られる。

つぎに一般の場合について考えてみる。まず，$a_j \neq 0 (1 \leq j \leq n)$ の場合を考えればよい。もしそうでなければ，帰納法の仮定からこの補題は明らかである。まず，$k \geq 2$ の場合を考える。関数 $g(x)$ に対して二つの関数 $g_1(x)$ および $g_2(x)$ をつぎのように定義する。すなわち，

$$g_2(x) = \sum_{i=1}^{k-1} a_i f_i(x) + \sum_{i=k+1}^{n} (a_i + \varepsilon_{i-k}) f_i(x),$$

かつ

$$g_1(x) = g(x) - g_2(x) = a_k f_k(x) - \sum_{i=k+1}^{n} \varepsilon_{i-k} f_i(x)$$

とする。ここに

$$\varepsilon_i = \min\{\varepsilon_0 - \sum_{j=1}^{i-1} \varepsilon_j,\ -a_{k+1}\},\ 1 \leq i \leq n-k$$
$$\varepsilon_0 = a_k \geq 0,$$

とおく。このとき，構成方法から

$$\varepsilon_i \geq 0$$

であることも明らかである。さらにこれらの関数 $g_1(x)$ および $g_2(x)$ はこの補題の条件を満足することは明らかである。従って，

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x)$$

であることから

$$\int_0^{\infty} h(x)g(x)dx = \int_0^{\infty} h(x)g_1(x)dx + \int_0^{\infty} h(x)g_2(x)dx \geq 0$$

は，帰納法の仮定より導かれる。

$k \geq 2$ である場合と同じように，$k=1$ のときは関数 $g_1(x)$ および $g_2(x)$ をつぎのように定義する。すなわち，

$$g_2(x) = (a_1 + a_2) f_1(x) + \sum_{i=3}^{n} a_i f_i(x),$$
$$g_1(x) = g(x) - g_2(x) = -a_2 f_1(x) + a_2 f_2(x)$$

とする。このとき

$$a_2 < 0 \quad \text{かつ} \quad a_1 = -\sum_{i=2}^{n} a_i,$$

であるから，$g_1(x)$ および $g_2(x)$ はこの補題の条件を満足する。従って上に述べたと同じような議論をこの場合もすることができる。従って，どちらの場合にもこの補題が成り立つ。□

系 1　今，$\{f_i(x)\}_{i=1,2,\ldots\ldots}$ を，仮定 3 の性質を満足するような，確率密度関数の列と考える。つぎに，

$\{a_i\}_{i=1,2,\cdots\cdots}$ を，実数の列とし，

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 0$$

を満足するものとする。

このとき，適当な $1 \leq k < n$ が存在し，

$$a_i \geq 0,\ j \leq k,$$
$$a_j \leq 0,\ j > k$$

であるとする。以上の仮定のもとで，いま

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(x)$$

とおけば，

$$\int_0^{\infty} h(x) g(x) dx \geq 0$$

が成り立つ。

証明. $\{a_i\}_{i=1,2,\cdots\cdots}$ が有限個の値を除いて全て0であれば，補題6より明らかである。そうでなければ，数列 $\{a_i\}_{i=1,2,\cdots\cdots}$ に対して $n > k$ となる n に対して，新しい数列 $\{b_i\}_{i=1,2,\cdots\cdots}$ をつぎのように構成する。

$$a_i = b_i (i < n),\quad \text{および} \quad b_n = -\sum_{j=n}^{\infty} a_j$$

とすれば，この数列 $\{b_i\}_{i=1,2,\cdots,n}$ は，補題6の条件を満足することは明らかである。いま

$$g_n(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i f_i(x)$$

とおけば，$n \to \infty$ とするとき

$$\int_0^{\infty} h(x) g_n(x) dx \to \int_0^{\infty} h(x) g(x) dx$$

となり

$$\int_0^{\infty} h(x) g_n(x) dx \geq 0$$

であるから，この性質は成り立つ。□

補題7　関数 $u(\boldsymbol{P})$ が $\boldsymbol{P}$ に関して増加かつ生な関数であれば

$$u^*(\boldsymbol{P}) = \int_0^{\infty} u(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)}) dF_p(x)$$

もまた $\boldsymbol{P}$ に関して増加かつとつな関数である。

証明. とつ性は Aström [1] において用いられたと同じ方法により求められる。ここでは，この補題の残りの部分について証明する。

$\boldsymbol{P},\ \boldsymbol{Q} \in \boldsymbol{S}$ で，$\boldsymbol{P} \geq_l \boldsymbol{Q}$ を満足するものに対して

$$u^*(\boldsymbol{P}) - v^*(\boldsymbol{Q}) = \int_0^{\infty} u(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)}) dF_P(x) - \int_0^{\infty} u(\overline{T(\boldsymbol{Q},\ x)} dF_Q(x)$$
$$\geq \int_0^{\infty} u(\overline{T(\boldsymbol{Q},\ x)}) d(F_P(x) - F_Q(x))$$

$$= \int_0^\infty u(\overline{T(\boldsymbol{Q}, x)}) \sum_{i=1}^\infty (p_i - q_i) dF_i(x)$$

である。ここで不等式は，定理 2 により得られる。つぎに補題 2 から不等式

$$\frac{p_k}{q_k} > 1 \geq \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$$

を満足するような $1<k<n$ が存在する。従って仮定 3 より

$$dF_i(x) = f_i(x)dx$$

となるから，いま，

$$g(x) = \sum_{i=1}^\infty (p_i - q_i) f_i(x)$$

と置く。すると定理 1 より $\overline{T(\boldsymbol{Q}, x)}$ は x に関して増加する関数であり，$u(\boldsymbol{P}, x)$ は $\boldsymbol{P}$ に関する増加関数であるから，補題 6 の系 1 により不等式

$$\int_0^\infty u(\overline{T(\boldsymbol{Q}, x)}) g(x) dx \geq 0$$

が成り立つ。従ってこの補題が成立する。□

4 Shifted Likelihood Ratio Ordering

この節では，状態空間上の確率ベクトル全体 $\boldsymbol{S}$ に，第 3 節で定義した尤度比順序とは異なる新しい順序を導入し，第 3 節で考えた問題を改めて考える。また，この順序に関しても第 3 節で考えた尤度比順序の場合と同じようにベイズの定理に従って学習を行うことを考えるから第 3 節で仮定したと同様の仮定が必要になる。そこでまず，つぎの順序を考える。

定義 2 $\boldsymbol{S}$ に含まれる二つの確率ベクトル $\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{Q}$ に対して，$\boldsymbol{P} >_S \boldsymbol{Q}$ であるとは，任意の整数 i と $j (i \leq j)$ に対して，$a \geq 0$ ならば

$$p_j q_{i+a} \geq p_i q_{j+a} \text{ すなわち } \begin{vmatrix} q_{i+a} & q_{j+a} \\ p_i & q_j \end{vmatrix} \geq 0 \tag{7}$$

が成り立ち，少なくとも一つの i と j の組に対して，$p_j q_{i+a} > p_i q_{j+a}$ が成り立つことをいう。また，全ての i に対して，$p_i = q_i$ であるとき $\boldsymbol{P} =_S \boldsymbol{Q}$ ということにする。つぎに，$\boldsymbol{P} \geq_S \boldsymbol{Q}$ であるとは，$\boldsymbol{P} >_S \boldsymbol{Q}$ または，$\boldsymbol{P} =_S \boldsymbol{Q}$ が成り立つ場合をいう。最後に，全ての $\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{S}$ に対して，$\boldsymbol{P} \geq_S \boldsymbol{P}$ であるとする。

この定義 2 によって定められた順序を，shifted likelihood ratio ordering という。また，$k=0$ ならば，この定義は尤度比順序（likelihood ratio ordering）に等しく，ここで定義した順序は尤度比順序の条件を満足する。この順序については，Shanthikumar and Yao [18] および Keilson and Sumita [6] において，いろいろな性質が調べられている。この節では，この順序に対しても第 3 節で考えたものと同様の問題を改めて考える。第 3 節で考えたようないくつかの仮定のもとで，この順序の性質に関して考える。また，ここでは，仮定 1 と仮定 3 は，先の尤度比順序と同様に成り立つものと考える。

また，$\boldsymbol{P} \geq_s \boldsymbol{P}$ であることを仮定したことから，$\boldsymbol{P}$がPF_2 (Polya frequency of order 2) である。ここに，PF_2 であるとは，この場合では

$$\frac{p_{i-1}}{p_i}$$

が i に関して増加する関数であることを表す。この PF_2 については，Shanthikumar and Yao [18] 等にも述べられている。

仮定 5　もし，$j<i(i,\ j=1,\ 2,\ \ldots\ldots)$ であれば $x \leq y$ に対して，$a \geq 0$ ならば

$$f_j(y)f_{i+a}(x) \geq f_i(y)f_{j+a}(x) \text{ すなわち } \begin{vmatrix} f_{i+a}(x) & f_{j+a}(x) \\ f_i(y) & f_j(y) \end{vmatrix} \geq 0 \qquad (8)$$

を満足する。

仮定 6　任意の $i,\ j(i \geq j,\ i,\ j=1,\ 2,\ \ldots\ldots)$ に対して，$k \geq 0$ ならば

$$p_{n i+k}p_{mj} \geq p_{nj+k}p_{mi} \text{ すなわち } \begin{vmatrix} p_{n\ i+k} & p_{n\ j+k} \\ p_{mi} & p_{mj} \end{vmatrix} \geq 0 \qquad (9)$$

が $m \leq n(m,\ n=1,\ 2,\ \ldots\ldots)$ を満足する全てのmと n に対して成り立つ。

仮定 7　任意の $i,\ j(i \geq j,\ i,\ j=1,\ 2,\ \ldots\ldots)$ に対して，$a \geq 0$ならば

$$\begin{vmatrix} p_{n\ i+a} & p_{n\ j+a} \\ p_{mi} & p_{mj} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} p_{m\ i+a} & p_{m\ j+a} \\ p_{ni} & p_{nj} \end{vmatrix} \geq 0 \qquad (10)$$

が $m \leq n(m,\ n=1,\ 2,\ \ldots\ldots)$ を満足する全てのmと n に対して成り立つ。

注 1　仮定5および仮定6において，$a=0$ の場合には，尤度比順序における仮定2および仮定3にそれぞれ対応する。従って，shifted likelihood ratio ordering は尤度比順序に比べてより強い順序となっている。また，仮定7においても同じ様に $a=0$ とすれば，この仮定は当たり前の等式となり，この仮定はこの常識的な性質の一般化と考えることができる。

注 2　確率変数 $\{X_i\}$ の確率密度関数に関して，これらの確率変数に shifted likelihood ratio ordering を導入すれば，もし，$j<i(i,\ j=1,\ 2,\ \ldots\ldots)$ と $x \leq y$ に対して，$a \geq 0$ ならば

$$f_j(x)f_i(y+a) \leq f_j(y)f_i(x+a) \text{ すなわち } \begin{vmatrix} f_i(x+a) & f_i(y+a) \\ f_j(x) & f_j(y) \end{vmatrix} \geq 0 \qquad (11)$$

としなければならないが，ここでは事後分布の性質を考える上で仮定5を用いる。

注 3　shifted likelihood ratio ordering は尤度比順序とは異なり，たたみ込みに対しても順序を保存することが知られている。すなわち，Y_1^i と Y_2^i を $(i=1,\ 2)$ 独立な確率変数の組とするとき，

$$Y_j^1 \geq_s Y_j^2 (j=1,\ 2) \text{ ならば } Y_1^1 + Y_2^1 \geq_s Y_1^2 + Y_2^2 (j=1,\ 2)$$

が成り立つ。(Shanthikumar and Yao [18])

ここで定義した shifted likelihood ratio ordering についても仮定3が成り立つことを仮定したことにより尤度比順序の場合に成立した期待値に関する基本的な二つの補題，すなわち補題6と補題7が，この場合にも成り立つ。従って，shifted likelihood ratio ordering に関しても尤度比順序の場合と同じように補題6と補題7を用いることができる。

補題 8　定義 1 において定義した，$\boldsymbol{S}$ における順序は半順序である。

補題 9　shifted likelihood ratio ordering に対して，つぎのような性質を持つ。$\boldsymbol{S}$ に含まれる任意の $\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{Q}$ に対して，$\boldsymbol{P} \geq_S \boldsymbol{Q}$ が成り立つならば，つぎの不等式を満足するような $1<k$ が存在する。

$$\frac{p_k}{q_k} > 1 \geq \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}.$$

証明. shifted likelihood ratio ordering の定義 2 より，shifted likelihood ratio ordering は，尤度比順序である。すなわち，$\boldsymbol{P} \geq_S \boldsymbol{Q}$ ならば $\boldsymbol{P} \geq_l \boldsymbol{Q}$ となる。従って shifted likelihood ratio ordering に対しても補題 2 と同様の性質を持つ。□

$\boldsymbol{P}$ 上の関数 $u(\boldsymbol{P})$ が，shifted likelihood ratio ordering に関して増加関数であるとは，尤度比順序の場合と同じように，$\boldsymbol{P} \geq_S \boldsymbol{Q}$ となる $\boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{Q}$ に関して $u(\boldsymbol{P}) \geq u(\boldsymbol{Q})$ を満足するときを言うことにする。

ここでは，尤度比順序の場合と同じように利得関数 $u(\boldsymbol{P}, x)$ は，$\boldsymbol{P}$ に関して非減少，とつな関数であり非負で有限な値を取る関数とする。また，x に関して増加関数であるとする。

補題10　$x \leq y$ を満たす任意の x と y に対して

$$T(\boldsymbol{P}, x) \leq_S T(\boldsymbol{P}, y)$$

が全ての $\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{S}$ に対して成り立つ

証明. $\boldsymbol{S}$ における順序の定義から，任意の $j<i(i, j=1, 2, \ldots\ldots)$ 組に対して

$$T_{j+a}(\boldsymbol{P}, x)\, T_i(\boldsymbol{P}, y) \leq T_{i+a}(\boldsymbol{P}, x)\, T_j(\boldsymbol{P}, y)$$

であることが，全ての $a(\geq 0)$ に対して成り立つことが示されれば，この定理に述べられた性質が成り立つことが示される。従ってそのために，

$$T_{j+a}(\boldsymbol{P}, x)\, T_i(\boldsymbol{P}, y) - T_{i+a}(\boldsymbol{P}, x)\, T_j(\boldsymbol{P}, y)$$

を考える。この式の分母を払えば，

$$\begin{aligned} & p_{j+a} f_{j+a}(x) p_i f_i(y) - p_{i+a} f_{i+a}(x) p_j f_j(y) \\ & \quad = (p_{j+a} p_i - p_{i+a} p_j) f_i(y) f_{j+a}(x) + p_j p_{i+a}(f_{j+a}(x) f_i(y) - f_{i+a}(x) f_j(y)) \leq 0 \end{aligned}$$

となる。ここで，最後の不等式は確率分布に関しての shifted likelihood ratio ordering の定義 2 と確率密度関数に関する仮定 5 より求められる。□

定理 3　$x \leq y$ を満たす任意の x と y に対して

$$\overline{T(\boldsymbol{P}, x)} \leqq_S \overline{T(\boldsymbol{P}, y)}$$

が全ての $\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{S}$ に対して成り立つ

証明. $\boldsymbol{S}$ における順序の定義から，任意の $j<i(i, j=1, 2, \ldots\ldots)$ に対して

$$\overline{T_{j+a}(\boldsymbol{P}, x)}\ \overline{T_i(\boldsymbol{P}, y)} \leq \overline{T_{i+a}(\boldsymbol{P}, x)}\ \overline{T_j(\boldsymbol{P}, y)}$$

であることが示されれば，この定理に述べられた性質が成り立つことが示される。従ってそのために，

$$\overline{T_{j+a}(\boldsymbol{P}, x)}\ \overline{T_i(\boldsymbol{P}, y)} - \overline{T_{i+a}(\boldsymbol{P}, x)}\ \overline{T_j(\boldsymbol{P}, y)}$$

を考える。この値は

$$\begin{aligned}&(\sum_{l=1}^{n} T_l(\boldsymbol{P}, x) p_{l\ j+a})(\sum_{k=1}^{n} T_k(\boldsymbol{P}, y) p_{ki}) - (\sum_{l=1}^{n} T_l(\boldsymbol{P}, x) p_{l\ i+a})(\sum_{k=1}^{n} T_k(\boldsymbol{P}, y) p_{kj})\\
&= \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} T_l(\boldsymbol{P}, x) T_k(\boldsymbol{P}, y)(p_{l\ j+a}p_{ki} - p_{l\ i+a}p_{kj})\\
&= \sum_{\substack{l=1\\l>k}}^{n}\sum_{k=1}^{n} T_l(\boldsymbol{P}, x) T_k(\boldsymbol{P}, y)(p_{l\ j+a}p_{ki} - p_{l\ i+a}p_{kj})\\
&+ \sum_{\substack{l=1\\l\geqq k}}^{n}\sum_{k=1}^{n} T_k(\boldsymbol{P}, x) T_l(\boldsymbol{P}, y)(p_{li}p_{k\ j+a} - p_{l\ j}p_{k\ i+a})\\
&= \sum_{\substack{l=1\\l\geqq k}}^{n}\sum_{k=1}^{n} (T_l(\boldsymbol{P}, x) T_k(\boldsymbol{P}, y) - T_k(\boldsymbol{P}, x) T_l(\boldsymbol{P}, y))(p_{l\ j+a}p_{ki} - p_{l\ i+a}p_{kj}) \leq 0\end{aligned}$$

となる。ここで，3番目の等式は仮定7により導かれ，最後の不等式は仮定3とマルコフ連鎖の遷移確率行列に関する仮定6により求められる。従って，この定理は成り立つ。

補題11　$\boldsymbol{S}$ に含まれる任意の $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$ に対して $\boldsymbol{P} \geq_S \boldsymbol{Q}$ であるならば，

$$T(\boldsymbol{P}, x) \geq_S T(\boldsymbol{Q}, x)$$

が全ての $x \in \boldsymbol{R}$ に対して成り立つ。

証明. $\boldsymbol{S}$ における順序の定義から，任意の $j < i (i, j = 1, 2, \ldots\ldots)$ に対して

$$T_j(\boldsymbol{P}, x) T_{i+a}(\boldsymbol{Q}, x) \geq T_i(\boldsymbol{P}, x) T_{j+a}(\boldsymbol{Q}, x)$$

であることが示されれば良いから，補題4と同じように

$$T_j(\boldsymbol{P}, x) T_{i+a}(\boldsymbol{Q}, x) - T_i(\boldsymbol{P}, x) T_{j+a}(\boldsymbol{Q}, x)$$

を考える。この分母を払えば，

$$\begin{aligned}&p_j f_j(x) q_{i+a} f_{i+a}(x) - p_i f_i(x) q_{j+a} f_{j+a}(x)\\
&\quad = (f_j(x) f_{i+a}(x) - f_{j+a}(x) f_i(x)) p_j q_{i+a} + f_{j+a}(x) f_i(x)(p_j q_{i+a} - p_i q_{j+a}) \geq 0\end{aligned}$$

となる。ここで，最後の不等式は仮定5と，確率分布の shifted likelihood ratio ordering に関する定義2より求められる。□

定理4　$\boldsymbol{S}$ に含まれる任意の $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$ に対して，$\boldsymbol{P} \geq_S \boldsymbol{Q}$ であるならば，

$$\overline{T(\boldsymbol{P}, x)} \geq_S \overline{T(\boldsymbol{Q}, x)}$$

が全ての $x \in \boldsymbol{R}$ に対して成り立つ。

証明. $\boldsymbol{S}$ における順序の定義から，任意の $j < i (i, j = 1, 2, \ldots\ldots)$ に対して

$$\overline{T_j(\boldsymbol{P}, x)}\ \overline{T_{i+a}(\boldsymbol{Q}, x)} \leq \overline{T_i(\boldsymbol{P}, x)}\ \overline{T_{j+a}(\boldsymbol{Q}, x)}$$

であることが示されれば良いから，定理1と同じように

$$\overline{T_j(\boldsymbol{P}, x)}\ \overline{T_{i+a}(\boldsymbol{Q}, x)} - \overline{T_i(\boldsymbol{P}, x)}\ \overline{T_{j+a}(\boldsymbol{Q}, x)}$$

を考える。このとき補題11より，定理3と同様にして求められる。□

この節でみたきたように shifted likelihood ratio ordering においても，尤度比順序の場合と同様に適当な仮定を設ければ，定理3および定理4という事後確率分布に関する基本的な性質が成り立つから，この場合においても尤度比順序の場合と同様に多段決定問題に応用することができる。

5　部分観測可能な最適停止問題

以下では不完備情報の多段決定問題の中で，最適停止問題 $P_N^k(\boldsymbol{P})$ について考える。第4節において述べたように第3節で得られた尤度比順序に関する結果は，第4節で述べた適当な仮定のもとで shifted likelihood ratio ordering においても同じように得られるから，この節で述べる問題に関する性質はそれぞれの順序に対応する仮定のもとで，同じように求めることができる。従って，この問題は第3節で考えた条件のもとで考えられると同様に，shifted likelihood ratio ordering のもとでも成り立つ。必要な性質は，第3節で述べられているものであり，それらの性質が成り立てば，この節での結果は全て成り立つ。従って以下では，尤度比順序の場合に関した結果について述べ，第3節で求めた結果を引用することにする。求度比順序の場合に関する多段決定問題については，Nakai [9] および [10] において特別な場合について述べられている。

この問題は Ross [15] で扱われている問題と同様に定式化でき，最適政策のもとで最適に振る舞って得られる値 $v_N^k(\boldsymbol{P})$ は，つぎの再帰方程式を満足する。

$$\begin{aligned} v_N^k(\boldsymbol{P}) &= \mathrm{E}_{\boldsymbol{P}}[v_N^k(\boldsymbol{P} \mid X)] \\ &= \int_0^\infty v_N^k(\boldsymbol{P} \mid x) dF_{\boldsymbol{P}}(x) \end{aligned} \tag{12}$$

$$v_N^k(\boldsymbol{P} \mid x) = \max\{u(\boldsymbol{P},\ x) + v_{N-1}^{k-1}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)}),\ v_{N-1}^k(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})\} \tag{13}$$

また，境界条件はつぎの式で表される。

$$v_N^N(\boldsymbol{P}) = \mathrm{E}_{\boldsymbol{P}}[u(\boldsymbol{P},\ X)] + \int_0^\infty v_{N-1}^{N-1}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)}) dF_{\boldsymbol{P}}(x),$$

$$v_1^1(\boldsymbol{P}) = \mathrm{E}_{\boldsymbol{P}}[u(\boldsymbol{P},\ X)],\ v_N^0(\boldsymbol{P}) = 0$$

ここで，$F_{\boldsymbol{P}}(x) = \sum_{i=1}^n p_i F_i(x)$ とする。この関数は weighted distribution function として知られているものである。(de Vylder [4])

まず始めに，$k = 1$ の場合を考える。このとき，再帰方程式(13)は，

$$v_N^1(\boldsymbol{P}) = \int_0^\infty v_N^1(\boldsymbol{P}|x) dF_{\boldsymbol{P}}(x), \tag{14}$$

$$v_N^1(\boldsymbol{P}|x) = \max\{u(\boldsymbol{P},\ x),\ v_{N-1}^1(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})\} \tag{15}$$

となる。ここでは，まず $k = 1$ の場合の性質について述べた後，証明をまとめて述べることにする。

補題12　$v_N^1(\boldsymbol{P})$ は，$\boldsymbol{P}$ に関して増加かつとつな関数である。$v_N^1(\boldsymbol{P}|x)$ は，x に関して増加な関数である。

補題13　$N = 1,\ 3,\ 4,\ \ldots$ に対して $v_N^1(\boldsymbol{P}) \geq v_{N-1}^1(\boldsymbol{P})$ である。

つぎに S の互いに素な二つの部分集合 $S_{N+1}^1(\boldsymbol{P})$ と $C_{N+1}^1(\boldsymbol{P})$ を，つぎのように定義する。

$$S^1_{N+1}(\boldsymbol{P}) = \{x|u(\boldsymbol{P},\ x) \geq v^1_N(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})\},$$
$$C^1_{N+1}(\boldsymbol{P}) = \{x|u(\boldsymbol{P},\ x) < v^1_N(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})\}$$

このとき集合 $S^1_{N+1}(\boldsymbol{P})$ は停止領域に当たり，$C^1_{N+1}(\boldsymbol{P})$ は継続領域に当たるものである。ここでさらにつぎの性質が得られる。また，$S^1_{N+1}(\boldsymbol{P}) \cup C^1_{N+1}(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{R}_+$ である。

補題14　任意の $N \geq 1$ に対して $S^1_N(\boldsymbol{P}) \supset S^1_{N+1}(\boldsymbol{P})$ である。

補題15　関数 $u(\boldsymbol{P},\ x)$ が $\boldsymbol{P}$ に関して独立である，すなわち $u(\boldsymbol{P},\ x) = u(x)$ と表されたとき，任意の $\boldsymbol{P} \geq_l \boldsymbol{Q}$ に対して $\boldsymbol{P} \geq_l \boldsymbol{Q}$ であれば $S^1_{N+1}(\boldsymbol{P}) \subset S^1_{N+1}(\boldsymbol{Q})$ である。

これらの補題を N に関する帰納法によって証明する。$N = 1$ のときは，これらの補題は明らかである。従って $N-1$ より小さい値に対してこれらの補題が成り立つと考え，N の場合について，補題12から補題15をまとめて示す。

補題12の証明. 帰納法の仮定及び補題7の結果を用いて，

$$v^1_{N-1}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})$$

は，$\boldsymbol{P}$ に関して増加かつ，とつな関数であることがわかる。一方，関数 $u(\boldsymbol{P},\ x)$ が，$\boldsymbol{P}$ に関して増加かつとつな関数であるから，この性質が成り立つ。また，x については明らかである。□

補題13の証明. 帰納法の仮定より

$$v^1_{N-1}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)}) \geq v^1_{N-2}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})$$

が全ての $\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{S}$ および，$x \in \boldsymbol{R}$ に対して成り立つ。従って，(15)式よりこの補題が示される。□

補題14の証明. もし，$x \in S^1_{N+1}(\boldsymbol{P})$ であれば，

$$u(\boldsymbol{P},\ x) \geq v^1_N(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})$$

が成り立つ。一方，補題13より

$$v^1_N(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)}) \geq v^1_{N-1}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})$$

である。従って，

$$x \in S^1_N(\boldsymbol{P})$$

が示される。□

補題15の証明. もし，$x \in S^1_N(\boldsymbol{P})$ であれば，

$$u(\boldsymbol{P},\ x) = u(x) \geq v^1_N(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})$$

が成り立つ。一方，補題12より

$$v_N^1(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)}) \geq v_{N-1}^1(\overline{T(\boldsymbol{Q},\ x)})$$

である。従って，

$$x \in S_N^1(\boldsymbol{Q})$$

が示される。□

つぎに，複数回停止可能な最適停止問題の最適政策，及び最適政策に従ったとき得られる総期待利得の性質について考える。以下の定理にこれらの性質が述べられており，これらの結果は k に関する帰納法によって証明することができる。すなわち，すべての N に対して，$k-1$ およびそれ以下の値に対して，つぎの 4 つの定理が成り立つことを仮定し，k の場合に N に関する帰納法によってつぎに述べる 4 つの定理を証明する。補題12より補題15によって，帰納法の初期状態に関してはすでに示されているので，一般の k について示すことにする。

いま，ここで，全ての $k=1,\ 2,\ ...,\ N$ に対して，関数 $w_N^k(\boldsymbol{P})$ を

$$w_N^k(\boldsymbol{P}) = v_N^k(\boldsymbol{P}) - v_N^{k-1}(\boldsymbol{P}) \tag{16}$$

$$w_N^k(\boldsymbol{P}) = \mathrm{E}_P[w_N^k(\boldsymbol{P}|X)]$$

$$w_N^k(\boldsymbol{P}|x) = v_N^k(\boldsymbol{P}|x) - v_N^{k-1}(\boldsymbol{P}|x) \tag{17}$$

$$w_N^k(\boldsymbol{P}|x) = v_N^k(\boldsymbol{P}|x),\ w_N^1(\boldsymbol{P}) = v_N^1(\boldsymbol{P})$$

によって定義する。このときつぎの性質が成り立つ。

定理 5　関数 $v_N^k(\boldsymbol{P})$ は $\boldsymbol{P}$ に関して増加かつとつな関数であり，$w_N^k(\boldsymbol{P})$ は $\boldsymbol{P}$ に関して非負かつ増加な関数である。また，関数 $v_N^k(\boldsymbol{P}|x)$ および，$w_N^k(\boldsymbol{P}|x)$ は，x に関して非負かつ増加な関数である。

定理 6　$N>1$ かつ，$N \geq k \geq 1$ であれば

$$v_N^k(\boldsymbol{P}) \geq v_{N-1}^k(\boldsymbol{P}),\ w_N^k(\boldsymbol{P}) \geq w_{N-1}^k(\boldsymbol{P}) \tag{18}$$

$$v_N^k(\boldsymbol{P}|x) \geq v_{N-1}^k(\boldsymbol{P}|x),\ w_N^k(\boldsymbol{P}|x) \geq w_{N-1}^k(P|x) \tag{19}$$

が全ての P に対して成立する。

定理 7　$N \geq 1$ かつ，$n \geq k \geq 1$ であれば

$$w_N^k(\boldsymbol{P}) \leq w_N^{k-1}(\boldsymbol{P}) \leq .... \leq w_N^2(\boldsymbol{P}) \leq v_N^1(\boldsymbol{P})$$

$$w_N^k(\boldsymbol{P}|x) \leq w_N^{k-1}(\boldsymbol{P}|x) \leq .... \leq w_N^2(\boldsymbol{P}|x) \leq v_N^1(\boldsymbol{P}|x)$$

が全ての $\boldsymbol{P}$ に対して成立する。

まず始めに二つの集合

$$\begin{cases} S_{N+1}^k(\boldsymbol{P}) = \{x|u(\boldsymbol{P},\ x) \geq \overline{w}_N^k(\boldsymbol{P}|x)\} \\ C_{N+1}^k(\boldsymbol{P}) = \{x|u(\boldsymbol{P},\ x) \geq \overline{w}_N^k(\boldsymbol{P}|x)\} \end{cases} \tag{20}$$

を，上のように定義する。ただし，$N\geq 1$ および $N\geq k\geq 1$ に対して

$$\overline{w}_N^k(\boldsymbol{P}|x)=w_N^k(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})$$

とする。このとき，集合 $S_{N+1}^k(\boldsymbol{P})$ は，問題 $P_{N+1}^k(\boldsymbol{P})$ に対する停止領域を表し，$C_{N+1}^1(\boldsymbol{P})$ は継続領域を表している。従って，(13)式はつぎのように書き改めることができる。

$$v_N^k(\boldsymbol{P}|x)=(u(\boldsymbol{P},\ x)+\overline{v}_{N-1}^{k-1}(\boldsymbol{P}|x))I_{S_N^k(P)}+\overline{v}_{N-1}^k(\boldsymbol{P}|x)I_{C_N^k(P)},\tag{21}$$

ここで，関数 I_A は，集合 $A\in S$ の指示関数 (Indicator function) であるとし，全ての $N\geq 1$ および $N\geq k\geq 1$ に対して

$$\overline{v}_N^k(\boldsymbol{P}|x)=v_N^k(\overline{T(\boldsymbol{P}|x)})\tag{22}$$

とおく。

定理 8　$N\geq 1$ および，$N\geq k\geq 1$ であれば

(a)　$S_{N+1}^k(\boldsymbol{P})\subset S_N^k(\boldsymbol{P})$,

(b)　$S_{N+1}^k(\boldsymbol{P})\supset S_{N+1}^{k-1}(\boldsymbol{P})$

が成り立つ。

定理 9　関数 $u(\boldsymbol{P},\ x)$ が $\boldsymbol{P}$ に関して独立である，すなわち $u(\boldsymbol{P},\ x)=u(x)$ と表されるとき，任意の $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$ に対して $\boldsymbol{P}\geq_l \boldsymbol{Q}$ であれば $S_{N+1}^k(\boldsymbol{P})\subset S_{N+1}^k(\boldsymbol{Q})$ である。

定理 5 の証明. まず，$v_N^k(\boldsymbol{P}|x)$ に関する性質を考える。帰納法の仮定より，$v_{N-1}^{k-1}(\boldsymbol{P}|x)$ および $v_{N-1}^k(\boldsymbol{P}|x)$ は，$\boldsymbol{P}$ に関して増加かつとつ関数であり，x に関して増加する関数である。従って，補題 7 と，$u(\boldsymbol{P},\ x)$ に関する仮定から，(13)式より $v_N^k(\boldsymbol{P}|x)$ は，$\boldsymbol{P}$ に関して増加関数であり，x に関して増加する関数である。一方，$v_N^k(\boldsymbol{P}|x)$ の $\boldsymbol{P}$ に関するとつ性は帰納法の仮定と(13)式より補題 7 から求められる。また，補題 7 より $v_N^k(\boldsymbol{P})$ も，$\boldsymbol{P}$ に関するとつ性が示される。

つぎに，帰納法の仮定と(21)式より

$$S_N^k(\boldsymbol{P})\supset S_N^{k-1}(\boldsymbol{P})$$

であることから

$$\begin{aligned}w_N^k(\boldsymbol{P}|x)&=v_N^k(\boldsymbol{P}|x)-v_N^{k-1}(\boldsymbol{P}|x)\\&=\overline{w}_{N-1}^k(\boldsymbol{P}|x)I_{C_N^k(P)}+u(\boldsymbol{P},\ x)I_{C_N^{k-1}(P)\cap S_N^k(P)}+\overline{w}_{N-1}^{k-1}(\boldsymbol{P}|x)I_{S_N^{-1}(P)}\end{aligned}\tag{23}$$

が示される。一方，帰納法の仮定と(23)式より

$$w_N^k(\boldsymbol{P}|x)\geq 0$$

となる。また，帰納法の仮定と補題 7 より，関数 $\overline{w}_{N-1}^{k-1}(\boldsymbol{P}|x)$ と $\overline{w}_{N-1}^k(\boldsymbol{P}|x)$ は $\boldsymbol{P}$ に関して増加関数である。また，x に関して増加関数である。従って，$\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}(\in \boldsymbol{S},\ \boldsymbol{P}\geq_l \boldsymbol{Q})$ であれば，$S_N^{k-1}(\boldsymbol{P})\subset S_N^k(\boldsymbol{Q})$ の

とき，つぎの6つの場合について関数 $w_N^k(\boldsymbol{P}|x)-w_N^k(\boldsymbol{Q}|x)$ が非負な関数であることがわかる。

(a) $x\in S_N^{k-1}(\boldsymbol{Q})$

(b) $x\in C_N^{k-1}(\boldsymbol{Q})\cap S_N^{k-1}(\boldsymbol{P})$

(c) $x\in S_N^k(\boldsymbol{Q})\cap C_N^{k-1}(\boldsymbol{P})$

(d) $x\in C_N^k(\boldsymbol{Q})\cap S_N^k(\boldsymbol{P})$

(e) $x\in C_N^k(\boldsymbol{P})$

例えば，(b)の場合についてみてみよう。このとき，

$$w_N^k(\boldsymbol{P}|x)-w_N^k(\boldsymbol{Q}|x)=\overline{w}_{N-1}^{k-1}(\boldsymbol{P}|x)-u(\boldsymbol{Q},\ x)$$

となり，$x\in C_N^{k-1}(\boldsymbol{Q})$ であることと帰納法の仮定から

$$\overline{w}_{N-1}^k(\boldsymbol{P}|x)\geq\overline{w}_{N-1}^{k-1}(\boldsymbol{Q}|x)\geq u(\boldsymbol{Q},\ x)$$

が成り立ち，従って求める不等式から得られる。つぎに(d)の場合を考えてみる。このとき，

$$w_N^k(\boldsymbol{P}|x)-w_N^k(\boldsymbol{Q}|x)=u(\boldsymbol{P},\ x)-\overline{w}_{N-1}^k(\boldsymbol{Q}|x)$$

であり，一方，$x\in S_N^k(\boldsymbol{P})$ であることと帰納法の仮定から

$$u(\boldsymbol{P},\ x)\geq w_{N-1}^k(\boldsymbol{P}|x)\geq w_{N-1}^k(\boldsymbol{Q}|x)$$

が成り立ち，求める不等式が成り立つ。$S_N^{k-1}(\boldsymbol{P})\supset S_N^k(\boldsymbol{Q})$ のときにも，つぎの6つの場合について関数 $w_N^k(\boldsymbol{P}|x)-w_N^k(\boldsymbol{Q}|x)$ が非負な関数であることが同様にして求められる。

(a') $x\in S_N^{k-1}(\boldsymbol{Q})$

(b') $x\in C_N^{k-1}(\boldsymbol{Q})\cap S_N^k(\boldsymbol{Q})$

(c') $x\in S_N^{k-1}(\boldsymbol{P})\cap C_N^k(\boldsymbol{Q})$

(d') $x\in C_N^{k-1}(\boldsymbol{P})\cap S_N^k(\boldsymbol{P})$

(e') $x\in C_N^k(\boldsymbol{P})$

また，$w_N^k(\boldsymbol{P})$ が $\boldsymbol{P}$ に関して増加関数であることは，以上の結果と補題7より求められる。

最後に，仮定より $w_{N-1}^k(\boldsymbol{P}|x)$ は非負かつ x に関して増加する関数であるから，(23)式より $w_N^k(\boldsymbol{P}|x)$ もまた，非負かつ x に関して増加する関数である。□

定理6の証明. 帰納法の仮定より，

$$v_{N-1}^k(\boldsymbol{P}|x)\geq v_{N-2}^k(\boldsymbol{P}|x),\ v_{N-1}^{k-1}(\boldsymbol{P}|x)\geq v_{N-2}^{k-1}(\boldsymbol{P}|x)$$

であるから，(13)式より $v_N^k(\boldsymbol{P}|x)$ に関する不等式(19)が成り立ち，従って求める $v_N^k(\boldsymbol{P})$ に関して不等式(18)が成立する。

つぎに，$S_N^k(\boldsymbol{P})\supset S_{N-1}^{k-1}(\boldsymbol{P})$ の場合に，関数 $w_N^k(\boldsymbol{P}|x)-w_{N-1}^k(\boldsymbol{P}|x)$ について，

(a) $x\in S_N^{k-1}(\boldsymbol{P})$

(b)　$x \in C_N^{k-1}(\boldsymbol{P}) \cap S_{N-1}^{k-1}(\boldsymbol{P})$

(c)　$x \in S_N^k(\boldsymbol{P}) \cap C_{N-1}^{k-1}(\boldsymbol{P})$

(d)　$x \in C_N^k(\boldsymbol{P}) \cap S_{N-1}^k(\boldsymbol{P})$

(e)　$x \in C_{N-1}^k(\boldsymbol{P})$

の5つの場合に分けて考える。例えば，(b)の場合を考えてみると，

$$w_N^k(\boldsymbol{P}|x) - w_{N-1}^k(\boldsymbol{P}|x) = u(\boldsymbol{P},\ x) - \overline{w}_{N-2}^{k-1}(\boldsymbol{P}|x)$$

であり，この場合には $x \in S_{N-1}^{k-1}(\boldsymbol{P})$ であるから

$$u(\boldsymbol{P},\ x) \geq \overline{w}_{N-2}^{k-1}(\boldsymbol{P}|x)$$

となり，$w_N^k(\boldsymbol{P}|x) - w_{N-1}^k(\boldsymbol{P}|x) \geq 0$ が成り立つ。また，(d)の場合には，

$$w_N^k(\boldsymbol{P}|x) - w_{N-1}^k(\boldsymbol{P}|x) = \overline{w}_{N-1}^k(\boldsymbol{P}|x) - u(\boldsymbol{P},\ x)$$

となり，このとき $x \in C_N^k(\boldsymbol{P})$ であるから，

$$u(\boldsymbol{P},\ x) \leq \overline{w}_{N-1}^k(\boldsymbol{P}|x)$$

となり，$w_N^k(\boldsymbol{P}|x) - w_{N-1}^k(\boldsymbol{P}|x) \geq 0$ が成り立つ。残りの場合も同様にして $w_N^k(\boldsymbol{P}|x)$ に関する不等式(19)が成り立ち，従って求める $w_N^k(\boldsymbol{P})$ に関しても不等式(18)が成立する。

また，$S_N^k(\boldsymbol{P}) \subset S_{N-1}^{k-1}(\boldsymbol{P})$ の場合についても，同様に関数 $w_N^k(\boldsymbol{P}|x) - w_{N-1}^k(\boldsymbol{P}|x)$ について，

(a')　$x \in S_N^{k-1}(\boldsymbol{P})$

(b')　$x \in C_N^{k-1}(\boldsymbol{P}) \cap S_N^k(\boldsymbol{P})$

(c')　$x \in S_{N-1}^{k-1}(\boldsymbol{P}) \cap C_N^k(\boldsymbol{P})$

(d')　$x \in C_{N-1}^{k-1}(\boldsymbol{P}) \cap S_{N-1}^k(\boldsymbol{P})$

(e')　$x \in C_{N-1}^k(\boldsymbol{P})$

の5つの場合に分けて考えば，同様にして求める結果が得られる。□

定理 7 の証明. $w_N^k(\boldsymbol{P}|x) - w_N^{k-1}(\boldsymbol{P}|x)$ についても同様に

(a)　$x \in S_N^{k-2}(\boldsymbol{P})$

(b)　$x \in C_N^{k-2}(\boldsymbol{P}) \cap S_N^{k-1}(\boldsymbol{P})$

(c)　$x \in S_N^k(\boldsymbol{P}) \cap C_N^{k-1}(\boldsymbol{P})$

(d)　$x \in C_N^k(\boldsymbol{P})$

の4つの場合に分けて考える。例えば，(b)の場合を考えてみると，

$$w_N^k(\boldsymbol{P}|x) - w_N^{k-1}(\boldsymbol{P}|x) = \overline{w}_{N-1}^{k-1}(\boldsymbol{P}|x) - u(\boldsymbol{P},\ x)$$

となり，$x \in S_N^{k-1}(\boldsymbol{P})$ であるから，帰納法の仮定より

$$u(\boldsymbol{P},\ x) \geq \overline{w}_{N-1}^{k-1}(\boldsymbol{P}|x)$$

が成り立ち，従って不等式 $w_N^k(\boldsymbol{P}|x) - w_N^{k-1}(\boldsymbol{P}|x) \leq 0$ が成り立つ。また，(c)の場合を考えると，

$$w_N^k(\boldsymbol{P}|x) - w_N^{k-1}(\boldsymbol{P}|x) = u(\boldsymbol{P},\ x) - \overline{w}_{N-1}^{k-1}(\boldsymbol{P}|x)$$

であり，この場合は $x \in C_N^{k-1}(\boldsymbol{P})$ であるから，$u(\boldsymbol{P},\ x) \leq \overline{w}_{N-1}^{k-1}(\boldsymbol{P}|x)$ となり，$w_N^k(\boldsymbol{P}|x) - w_N^{k-1}(\boldsymbol{P}|x) \leq 0$ が成り立つ。残りの場合も同様にして求められる。□

定理 8 の証明. もし，$x \in S_{N+1}^k(\boldsymbol{P})$ であれば，

$$u(\boldsymbol{P},\ x) \geq \overline{w}_N^k(\boldsymbol{P}|x)$$

であり，一方，定理 6 と補題 7 より，

$$\overline{w}_N^k(\boldsymbol{P}|x) \geq \overline{w}_{N-1}^k(\boldsymbol{P}|x)$$

であるから

$$S_{N+1}^k(\boldsymbol{P}) \subset S_N^k(\boldsymbol{P}) \subset \ldots \subset S_1^k(\boldsymbol{P})$$

となり，a)が得られる。つぎに，$x \in S_{N+1}^{k-1}(\boldsymbol{P})$ であれば，

$$u(\boldsymbol{P},\ x) \geq \overline{w}_N^{k-1}(\boldsymbol{P}|x)$$

であり，一方，定理 7 より，

$$\overline{w}_N^k(\boldsymbol{P}|x) \leq \overline{w}_N^{k-1}(\boldsymbol{P}|x)$$

であるから，補題 7 より

$$S_{N+1}^k(\boldsymbol{P}) \supset S_{N+1}^{k-1}(\boldsymbol{P}) \supset \ldots \supset S_{N+1}^1(\boldsymbol{P})$$

が成り立ち，b)が得られる。□

定理 9 の証明. この定理は，定理 5 と補題 7 より，$\boldsymbol{P} \geq_l \boldsymbol{Q}$ であれば，

$$\overline{w}_N^k(\boldsymbol{P}|x) \geq \overline{w}_N^k(\boldsymbol{Q}|x)$$

である。一方 $x \in S_N^k(\boldsymbol{P})$ であれば，

$$u(\boldsymbol{P},\ x) = u(x) \geq \overline{w}_N^k(\boldsymbol{P},\ x))$$

となる。従って，定理 8 と同様にしてこの定理が求められる。□

6　最適政策および最適値

第5節では，複数回停止することのできる最適停止問題の最適政策を決定づける二つの集合すなわち，停止領域 $S_N^{k}(\boldsymbol{P})$ および継続領域 $C_N^{k}(\boldsymbol{P})$ の性質について考えた。すなわち定理8および定理9である。この節では，前節で求めた最適政策の性質を別の角度から考え，さらに求められた最適政策のもとで最適に振る舞ったときに得られる総期待利得の値について考える。

そのために始めにつぎのような二つの非負な可測関数 $u(x)$ および $v(x)$ に対して，二つの関数 $U_F(u(x),\ g(x))$ および $V_F(u(x),\ g(x))$ をつぎのように定義する。

$$U_F(u(x),\ g(x)) = \int_0^\infty (u(x)-g(x))^+ dF(x) \tag{24}$$

$$V_F(u(x),\ g(x)) = \int_0^\infty g(x)dF(x) + U_F(u(x),\ g(x)) \tag{25}$$

ただし，$h(x)^+ = \max\{h(x),\ 0\}$ とする。これらの関数は DeGroot [3] などで定義されたよく知られた関数

$$T_F(z) = \int_0^\infty (x-z)dF(x),\ \text{および}\ S_F(z) = z + T_F(z)$$

の一般化と考えることができるものである。すなわち，もし $u(x)=x$ および $g(x)=z$ とすれば，

$$U_F(u(x),\ g(x)) = T_F(z)\ \text{かつ}\ V_F(u(x),\ g(x)) = S_F(z)$$

となる。

これらの関数を用いて，非負関数の列 $\{g_{N,i}(\boldsymbol{P})\}(\boldsymbol{P}\in \boldsymbol{S}$ かつ $1\leq i\leq N)$ をつぎのように帰納的に定義する。

$$g_{N,i}(\boldsymbol{P}) = V_{F_{\boldsymbol{P}}}(u(\boldsymbol{P},\ x),\ g_{N-1,i}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)}) - U_{F_{\boldsymbol{P}}}(u(\boldsymbol{P},\ x),\ g_{N-1,i-1}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})) \tag{26}$$

$$g_{N,0}(\boldsymbol{P}) = \infty\ \text{かつ}\ g_{N,N+1}(\boldsymbol{P}) = 0\ (N\geq 0)$$

ここで，つぎのような集合を考える。

$$S_{N,i}(\boldsymbol{P}) = \{x | g_{N-1,i}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)}) \leq u(\boldsymbol{P},\ x) < g_{N-1,i-1}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})\} \tag{27}$$

$$U_{N,i}(\boldsymbol{P}) = \bigcup_{j=1}^{i-1} S_{N,j}(\boldsymbol{P})\ \text{かつ}\ L_{N,i}(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{R}_+ - U_{N,i+1}(\boldsymbol{P})$$

ただし，ここに $U_{N,1}(\boldsymbol{P}) = L_{N,N}(\boldsymbol{P}) = \phi$ かつ $U_{N,N+1}(\boldsymbol{P}) = \boldsymbol{R}_+$ とする。

一方

$$g_{1,1}(\boldsymbol{P}) = \sum_{j=1}^{m} p_j \int_0^\infty u(\boldsymbol{P})dF_j(x)$$

であるから，(26)式によって生成した関数列は定義できる。この関数列に関してつぎのような性質が成り立つ。

定理10　関数 $g_{N,i}(\boldsymbol{P})$ は，任意の整数 N および i に対して，$\boldsymbol{P}$ に関して増加する関数である。

定理11 関数 $g_{N,i}(\boldsymbol{P})$ は，任意の $\boldsymbol{P}\in\boldsymbol{S}$ および整数 N に対して，i に関して減少する関数である。

定理12 関数 $g_{N,i}(\boldsymbol{P})$ は，任意の $\boldsymbol{P}\in\boldsymbol{S}$ および整数 i に対して，N に関して増加する関数である。

系 2 三つの集合 $S_{N+1,i}(\boldsymbol{P})$，$U_{N+1,i}(\boldsymbol{P})$ および $L_{N+1,i}(\boldsymbol{P})$ は，互いに素であり，また $S_{N+1,i}(\boldsymbol{P})\cup U_{N+1,i}(\boldsymbol{P})\cup L_{N+1,i}(\boldsymbol{P})=\boldsymbol{R}_+$ である。

系 3 いま，関数 $h_{N+1,i}(\boldsymbol{P}|x)$ を，つぎのように定義する。

$$h_{N+1,i}(\boldsymbol{P}|x)=g_{N,i-1}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})I_{U_{N+1,i(\boldsymbol{P})}}(x)+u(\boldsymbol{P},\ x)I_{S_{N+1,i((\boldsymbol{P})}}(x)$$
$$+g_{N,i}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})I_{L_{N+1,i((\boldsymbol{P})}}(x) \tag{28}$$

このとき，関数 $g_{N+1,i}(\boldsymbol{P})$ は，つぎのように表せる。

$$g_{N+1,i}(\boldsymbol{P})=\int_0^\infty h_{N+1,i}(\boldsymbol{P}|x)dF_{\boldsymbol{P}}(x) \tag{29}$$

すなわち，関数 $h_{N+1,i}(\boldsymbol{P}|x)$ は，関数 $g_{N+1,i}(\boldsymbol{P})$ の被積分関数である。

定理13 任意の $\boldsymbol{P}\in\boldsymbol{S}$ と $i(1\geq i\geq N)$ に対して

$$U_{N+1,i}(\boldsymbol{P})\subset U_{N,i}(\boldsymbol{P})$$

である。

定理14 $u(\boldsymbol{P},\ x)=u(x)$ である，すなわち関数 $u(\boldsymbol{P},\ x)$ が $\boldsymbol{P}$ に依存しないとき，もし，$\boldsymbol{P}\geq_l \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{P},\ \boldsymbol{Q}\in\boldsymbol{S})$ であり，$1\geq i\geq N+1$ であれば，

$$U_{N+1,i}(\boldsymbol{P})\subset U_{N+1,i}(\boldsymbol{Q})$$

である。

ここで，N に関する帰納法を用いて，まずこれらの性質を証明する。$N=1$ の場合は

$$g_{1,1}(\boldsymbol{P})=\sum_{j=1}^{\infty}p_j\int_0^\infty u(\boldsymbol{P},\ x)dF_j(x)$$

であり，$g_{1,0}(\boldsymbol{P})=\infty$ となる。一方，関数

$$v_i(\boldsymbol{P})=\int_0^\infty u(\boldsymbol{P},\ x)dF_i(x)$$

は，$\boldsymbol{P}$ に関して増加する関数であり，$v_j(\boldsymbol{P})\geqq v_i(\boldsymbol{P})$ ($j\leq i$ かつ $i,\ j=1,\ 2,\ 3,\ .....$) であるから定理10が示される。$N=1$ のときの残りの性質については定義より明らかである。

定理10の証明. 補題2と帰納法の仮定より，関数 $g_{N-1,i-1}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})$ および $g_{N-1,i}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})$ は $\boldsymbol{P}$ に関して増加関数である。ここで，二つの関数 $g_{N,i}(\boldsymbol{P})$ と $g_{N,i}(\boldsymbol{Q})$ を比較することにする。($\boldsymbol{P}\geq_l \boldsymbol{Q}$)

もし，

$$h_{N,i}(\boldsymbol{P}|x)\geq h_{N,i}(\boldsymbol{Q}|x) \tag{30}$$

が $\boldsymbol{R}_+$ に含まれる任意の x に対して成り立てば，$N-1$ に対する系3からこの定理は求められる。いま $N-1$ に対する定理3より，二つの関数 $h_{N,i}(\boldsymbol{P}|x)$ と $h_{N,i}(\boldsymbol{Q}|x)$ を，つぎの9つの場合に分けて考える。

(a)　$U_{N,i}(\boldsymbol{P})\cap U_{N,i}(\boldsymbol{Q})$

(b)　$U_{N,i}(\boldsymbol{P})\cap S_{N,i}(\boldsymbol{Q})$

(c)　$U_{N,i}(\boldsymbol{P})\cap L_{N,i}(\boldsymbol{Q})$

(d)　$S_{N,i}(\boldsymbol{P})\cap U_{N,i}(\boldsymbol{Q})$

(e)　$S_{N,i}(\boldsymbol{P})\cap S_{N,i}(\boldsymbol{Q})$

(f)　$S_{N,i}(\boldsymbol{P})\cap L_{N,i}(\boldsymbol{Q})$

(g)　$L_{N,i}(\boldsymbol{P})\cap U_{N,i}(\boldsymbol{Q})$

(h)　$L_{N,i}(\boldsymbol{P})\cap S_{N,i}(\boldsymbol{Q})$

(i)　$L_{N,i}(\boldsymbol{P})\cap L_{N,i}(\boldsymbol{Q})$

これらの集合は明らかに互いに素であり，(30)式は簡単に示すことができる。例えば，(d)の場合を考えると，$x\in S_{N,i}(\boldsymbol{P})\cap U_{N,i}(\boldsymbol{Q})$ であるから，

$$g_{N-1,i}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})\leq u(\boldsymbol{P},\ x)<g_{N-1,i-1}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})$$

であり，かつ

$$g_{N-1,i-1}(\overline{T(\boldsymbol{Q},\ x)})\leq u(\boldsymbol{Q},\ x)$$

となる。一方，$x\in S_{N,i}(\boldsymbol{P})\cap U_{N,i}(\boldsymbol{Q})$ だから，

$$h_{N,i}(\boldsymbol{P}|x)=u(\boldsymbol{P},\ x) \text{ かつ } h_{N,i}(\boldsymbol{Q}|x)=g_{N-1,i-1}(\overline{T(\boldsymbol{Q},\ x)})$$

となる。従って，$u(\boldsymbol{P},\ x)$ は $\boldsymbol{P}$ に関して増加関数であるから，

$$h_{N,i}(\boldsymbol{P}|x)=u(\boldsymbol{P},\ x)\geq u(\boldsymbol{Q},\ x)\geq g_{N-1,i-1}(\overline{T(\boldsymbol{Q},\ x)})=h_{N,i}(\boldsymbol{Q}|x)$$

となる。

つぎに，(h)の場合を考えると，$L_{N,i}(\boldsymbol{P})\cap S_{N,i}(\boldsymbol{Q})$ だから，

$$u(\boldsymbol{P},\ x)<g_{N-1,i}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)}) \text{ かつ } g_{N-1,i}(\overline{T(\boldsymbol{Q},\ x)})\leq u(\boldsymbol{Q},\ x)<g_{N-1,i-1}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})$$

となる。さらに，

$$h_{N,i}(\boldsymbol{P}|x)=g_{N-1,i}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)}) \text{ および } h_{N,i}(\boldsymbol{Q}|x)=u(\boldsymbol{Q},\ x)$$

である。仮定より $u(\boldsymbol{P},\ x)\geq u(\boldsymbol{Q},\ x)$ だから，

$$h_{N,i}(\boldsymbol{P}|x)=g_{N-1,i}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})\geq u(\boldsymbol{P},\ x)\geq u(\boldsymbol{Q},\ x)=h_{N,i}(\boldsymbol{Q}|x)$$

が示される。残りの場合も同様にして導かれる。□

定理11の証明. 定理10の場合と同様に，$S_{N,i}(\boldsymbol{P})\cap S_{N,i-1}(\boldsymbol{P})=\phi$ であるから，二つの関数 $h_{N,i}(\boldsymbol{P}|x)$ と $h_{N,i-1}(\boldsymbol{P}|x)$ をつぎの 4 つの場合に分けて比較する。($\boldsymbol{P}\in\boldsymbol{S}$)

(a) $L_{N,i}(\boldsymbol{P})$

(b) $S_{N,i}(\boldsymbol{P})$

(c) $S_{N,i-1}(\boldsymbol{P})$

(d) $U_{N,i-1}(\boldsymbol{P})$

これらの集合は互いに素であり，これら 4 つの集合の和集合は $\boldsymbol{R}_+$ となる。

(c)の場合について考える。$x\in S_{N,i-1}(\boldsymbol{P})$ であるから，

$$g_{N-1,i-1}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})\leq u(\boldsymbol{P},\ x)<g_{N-1,i-2}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})$$

となる。一方，$S_{N,i-1}(\boldsymbol{P})\subset U_{N,i}(\boldsymbol{P})$ より

$$h_{N,i-1}(\boldsymbol{P}|x)=u(\boldsymbol{P},\ x)\text{かつ}h_{N,i}(\boldsymbol{P}|x)=g_{N-1,i-1}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})$$

となる。従って，不等式 $h_{N,i}(\boldsymbol{P}|x)\leq h_{N,i-1}(\boldsymbol{P}|x)$ が求められ，残りの場合にも同様にして得られる。

定理12の証明. 前の二つの定理と同様に，二つの関数 $h_{N,i}(\boldsymbol{P}|x)$ と $h_{N-1,i}(\boldsymbol{P}|x)$ を，つぎの 5 つの領域に分けて比較してみる。すなわち，

(a) $L_{N-1,i}(\boldsymbol{P})$

(b) $S_{N-1,i}(\boldsymbol{P})\cap L_{N,i}(\boldsymbol{P})$

(c) $(S_{N-1,i}(\boldsymbol{P})\cup S_{N,i}(\boldsymbol{P}))\cap(U_{N-1,i}(\boldsymbol{P})\cap L_{N,i}(\boldsymbol{P}))$

(d) $U_{N-1,i}(\boldsymbol{P})\cap S_{N,i}(\boldsymbol{P})$

(e) $U_{N,i}(\boldsymbol{P})$

である。一方

$$g_{N-1,i-1}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})\geq g_{N-2,i-1}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})\text{かつ}g_{N,i}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})\geq g_{N-1,i}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})$$

であるから，不等式 $h_{N,i}(\boldsymbol{P}|x)\geq h_{N-1,i}(\boldsymbol{P}|x)$ は，前の定理と同様にして求められる。例えば，(b)の場合を考えてみる。このとき $x\in S_{N-1,i}(\boldsymbol{P})\cap L_{N,i}(\boldsymbol{P})$ だから

$$g_{N-2,i}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})\leq u(\boldsymbol{P},\ x)\leq g_{N-1,i}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})$$

である。一方，

$$h_{N,i}(\boldsymbol{P}|x)=g_{N-1,i}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})\text{かつ}h_{N-1,i}(\boldsymbol{P}|x)=u(\boldsymbol{P},\ x)$$

であることから，この定理の性質が成り立ち，(c)の場合にはさらに 4 つの場合に分けそれぞれについて同様になり，残りの場合も同じように求められる。□

系 3 の証明. 定理10，定理12と(26)式からつぎのことがわかる。もし，$x\in S_{N+1,i}(\boldsymbol{P})$ であれば，

$$g_{N,i}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})+(u(\boldsymbol{P},\ x)-g_{N,i}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)}))^+-(u(\boldsymbol{P},\ x)-g_{N,i-1}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)}))^+ = u(\boldsymbol{P},\ x)$$

であり，$x\in U_{N+1,i}(\boldsymbol{P})$ であれば

$$g_{N,i}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})+(u(\boldsymbol{P},\ x)-g_{N,i}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)}))^+-(u(\boldsymbol{P},\ x)-g_{N,i-1}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)}))^+ = g_{N,i-1}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})$$

となる。また，$x\in L_{N+1,i}(\boldsymbol{P})$ のときは

$$g_{N,i}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})+(u(\boldsymbol{P},\ x)-g_{N,i}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)}))^+-(u(\boldsymbol{P},\ x)-g_{N,i-1}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)}))^+ = g_{N,i}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})$$

であるから，この系は成り立つ。□

定理11と(27)式より系2が導かれる。また，(29)式より，$g_{N+1,i}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})\geq 0$ となる。

定理13の証明． 始めに

$$U_{N,i}(\boldsymbol{P})=\bigcup_{j=1}^{i-1}S_{N,j}(\boldsymbol{P})=\{x|g_{N-1,i-1}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})\leq u(\boldsymbol{P})\}$$

であることに注意する。もし，$x\in U_{N+1,i}(\boldsymbol{P})$ であれば，$g_{N,i-1}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})\leq u(\boldsymbol{P})$ となり。また，定理12と定理2から，

$$g_{N,i-1}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})\geq g_{N-1,i-1}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})$$

が示され，従って，$g_{N-1,i-1}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})\leq u(\boldsymbol{P},\ x)$ すなわち $x\in U_{N,i}(\boldsymbol{P})$ がしめされる。□

定理14の証明． $u(\boldsymbol{P},\ x)=u(x)$ であるから，$x\in U_{N+1,i}(\boldsymbol{P})$ のとき，$g_{N,i-1}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})\leq u(x)$ となる。一方，定理10と定理2より

$$g_{N,i-1}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})\geq g_{N,i-1}(\overline{T(\boldsymbol{Q},\ x)})$$

となる。従って，$g_{N,i-1}(\overline{T(\boldsymbol{Q},\ x)})\leq u(x)$ が成り立ち，$x\in U_{N+1,i}(\overline{T(\boldsymbol{Q},\ x)})$ となる。□

定理15　問題の状態が $(N,\ k,\ P)$ である複数回停止が可能な最適停止問題 $P_N^k(\boldsymbol{P})$ で，最適政策および最適政策のもとで最適に振る舞って得られる期待利得 $v_N^k(\boldsymbol{P})$ は，つぎのように示される。

(1)　$v_N^k(\boldsymbol{P})=\sum_{i=1}^{k}g_{N,i}(\boldsymbol{P})$

(2)　もし，情報過程から得られる観測値の値 x が，$x\in S_{N,i}(\boldsymbol{P})$ であれば，最適政策は，この期に停止して値 x を採用し次の期に進むことであり，そうでなければ，この値を見送り次の期に進むことである。

証明． この定理を N に関する帰納法を用いて証明する。$N=1$ の場合は，問題 $P_N^1(\boldsymbol{P})$ において，$g_{1,1}(\boldsymbol{P})=\sum_{i=1}^{\infty}p_iE_iu(\boldsymbol{P},\ X_i)$ であるから，この定理は明らかである。

この定理が，N 以下の全ての値に対して成り立つとする。帰納法の仮定より，(13)式はつぎのように表せる。

$$v_N^k(\boldsymbol{P}) = \max\{u(\boldsymbol{P},\ x) + \sum_{j=1}^{k-1} g_{N-1,j}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)}),\ \sum_{j=1}^{k} g_{N-1,j}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})\} \tag{31}$$

ここで，もし $x \in U_{N,k+1}(\boldsymbol{P})$ であれば

$$g_{N-1,k}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)}) \leq u(\boldsymbol{P},\ x)$$

だから，

$$v_N^k(\boldsymbol{P}) = u(\boldsymbol{P},\ x) + \sum_{j=1}^{k-1} g_{N-1,j}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})$$

となり，$x \in L_{N,k}(\boldsymbol{P})$ であれば

$$v_N^k(\boldsymbol{P}) = \sum_{j=1}^{k} g_{N-1,j}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})$$

と表されるから，

$$\begin{aligned}
v_N^k(\boldsymbol{P}) &= \int_{U_{N,k+1\boldsymbol{P}}} \{u(\boldsymbol{P},\ x) + \sum_{j=1}^{k-1} g_{N-1,j}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})\} dF_{(\boldsymbol{P})}(x) \\
&\quad + \int_{L_{N,k(\boldsymbol{P})}} \sum_{j=1}^{k} g_{N-1,j}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)}) dF_{\boldsymbol{P}}(x) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \int_{S_{N,i(\boldsymbol{P})}} u(\boldsymbol{P},\ x) dF_{\boldsymbol{P}}(x) + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k-1} \int_{S_{N,i(\boldsymbol{P})}} g_{N-1,j}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)}) dF_{\boldsymbol{P}}(x) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k} \int_{L_{N,k(\boldsymbol{P})}} g_{N-1,k}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)}) dF_{\boldsymbol{P}}(x) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \int_{S_{N,i(\boldsymbol{P})}} u(\boldsymbol{P},\ x) dF_{\boldsymbol{P}}(x) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k-1} \{ \sum_{i=1}^{j} \int_{S_{N,i(\boldsymbol{P})}} g_{N-1,j}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)}) dF_{\boldsymbol{P}}(x) \\
&\quad + \sum_{i=j+1}^{k} \int_{S_{N,i(\boldsymbol{P})}} g_{N-1,j}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)}) dF_{\boldsymbol{P}}(x) \\
&\quad + \int_{L_{N,k(\boldsymbol{P})}} g_{N-1,j}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)}) dF_{\boldsymbol{P}}(x) \} \\
&\quad + \int_{L_{N,k(\boldsymbol{P})}} g_{N-1,k}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)}) dF_{\boldsymbol{P}}(x) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \int_{S_{N,i(\boldsymbol{P})}} u(\boldsymbol{P},\ x) dF_{\boldsymbol{P}}(x) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{k-1} \{ \int_{U_{N,j+1(\boldsymbol{P})}} g_{N-1,j}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)}) dF_{\boldsymbol{P}}(x) \\
&\quad + \int_{L_{N,i(\boldsymbol{P})}} g_{N-1,j}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)}) dF_{\boldsymbol{P}}(x) \} \\
&\quad + \int_{L_{N,k(\boldsymbol{P})}} g_{N-1,k}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)}) dF_{\boldsymbol{P}}(x) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \int_{S_{N,i(\boldsymbol{P})}} u(\boldsymbol{P},\ x) dF_{\boldsymbol{P}}(x)
\end{aligned}$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\int_{U_{N,i(P)}} g_{N-1,i-1}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})d\boldsymbol{F}_{P}(x)$$

$$+\sum_{i=1}^{k}\int_{L_{N,i(P)}} g_{N-1,k}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})dF_{P}(x)$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\{\int_{S_{N,i(P)}} u(P,\ x)dF_{P}(x)$$

$$+\int_{U_{N,i(P)}} g_{N-1,i-1}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})dF_{P}(x)$$

$$+\int_{L_{N,i(P)}} g_{N-1,i}(\overline{T(\boldsymbol{P},\ x)})dF_{P}(x)\}$$

となり，(1)が成り立つ。また，$U_{N,k+1}(\boldsymbol{P})$ が，停止領域であり，$L_{N,k}(\boldsymbol{P})$が継続領域であることは，上のことから明らかであるから従って(2)も成り立つ。□

注 4　第5節で考えた二つの領域 $S_N^k(\boldsymbol{P})$ と $C_N^k(\boldsymbol{P})$ は，この節で考えた領域 $U_{N,k+1}(\boldsymbol{P})$ と $L_{N,k}(\boldsymbol{P})$ にそれぞれ対応し，停止領域および継続領域となる。従って，第5節で考えた領域を関数列 $\{g_{N,i}(\boldsymbol{P},\ x)\}$ で，表すことができる。

注 5　定理15で，問題 $P_N^k(\boldsymbol{P})$ において，最適政策に従ったときに得られる総期待利得が，$v_N^k(\boldsymbol{P})=\sum_{i=1}^{k}g_{N,i}(\boldsymbol{P})$ で表されることから，$g_{N,i}(\boldsymbol{P})$ は問題 $P_N^{k-1}(\boldsymbol{P})$ で，停止することができる機会が1回増えることによって決定者の最適に振る舞ったときの期待利得の増加分を表していると考えられる。すなわち，問題 $P_N^k(\boldsymbol{P})$ における，最後につけ加えた停止する機会の寄与を表すと考えることもできる。

注 6　第5節で用いた二つの関数 $w_N^k(\boldsymbol{P})$ および $w_N^k(\boldsymbol{P}|x)$ と，この節で用いた関数 $g_{N,k}(\boldsymbol{P})$ および $h_{N,k}(\boldsymbol{P}|x)$ の関係は定義および上の定理15よりつぎのことがわかる。すなわち，

$$w_N^k(\boldsymbol{P})=v_N^k(\boldsymbol{P})-v_N^{k-1}(\boldsymbol{P})=g_{N,k}(\boldsymbol{P})$$

$$g_{N,k}(\boldsymbol{P})=\int_0^\infty h_{N,i}(\boldsymbol{P}|x)dF_P(x)$$

$$w_N^k(\boldsymbol{P}|x)=v_N^k(\boldsymbol{P}|x)-v_N^{k-1}(\boldsymbol{P}|x)=h_{N,k}(\boldsymbol{P}|x)$$

である。また，このことから，定理15の(2)は，つぎのように表すことができる。

$$v_N^k(\boldsymbol{P}|x)=\sum_{i=1}^{k}h_{N,i}(\boldsymbol{P}|x)$$

注 7　二つの領域 $U_{N,k+1}(\boldsymbol{P})$ と $L_{N,k}(\boldsymbol{P})$ は，一般には連結な区間となることはないが，具体的な例は Nakai [10]・[11] において求められている。このように，最適政策を定める集合が連結でなく複数の区間に分割される場合は，取り替え問題などでよく現れることが知られている。また，取り替え問題においても，同様の不完備情報のマルコフ連鎖の上での問題が研究されており，Ohnishi, Kawai, Mine [12] に基本的な結果が述べられている。

参 考 文 献

[1] Aström, K. J., Optimal Control of Markov Processes with Incomplete State Information, II : The Convexity of the Lossfunction, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 26, pp. 403-406, 1969.

[2] Brown, M., and Solomon, H., Optimal Issuing Policies under Stochastic Field Lives, *Journal of Applied Probaility*, vol. 10, pp. 761-768, 1973.

[3] DeGroot, M. H., *Optimal Statistical Decisions*, McGraw-Hill, New York, New York, 1970.

[4] De Vylder, F., Duality Theorem for Bounds in Integrals with Applications to Stop Loss Premiums, *Scandinavian Actuarial Journal*, pp. 129-147, 1983.

[5] Hägstrom, G. W., Optimal Sequential Procedures when more than one Stop is Required, *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 38, pp. 1618-1626, 1967.

[6] Keilson, J., and Sumita, U., Uniform Stochastic Ordering and Related Inequalities, *The Canadian Journal of Statistics*, vol. 10, pp. 181-198, 1982.

[7] Miller, B. L., Countable-State Average-Cost Regenerative Stopping Problems, *Journal of Applied Probability*, vol. 18, pp. 361-377, 1981.

[8] Monahan, G., Optimal Stopping in a Partially Observable Markov Processes with Costly Information, *Operations Research*, vol. 28, pp. 1319-1334, 1980.

[9] Nakai, T., Optimal Stopping Problem in a Finite State Partailly Observable Markov Chain, *Journal of Information & Optimization Sciences*, vol. 2, pp. 159-176, 1983.

[10] Nakai, T., The Problem of Optimal Stopping in a Partially Observable Markov Chain, *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 45, pp. 425-442, 1985.

[11] Nakai T., A Sequential Stochastic Assignment Problem in a Partially Observable Markov Chain, *Mathematics of Operations Research*, vol. 11, pp. 230-240, 1986.

[12] Ohnishi, M., Kawai, H., and Mine, H., An Optimal Inspection and Replacement Policy under Incomplete State Information, *Europian Journal of Operations Resesarch*, vol. 27, pp. 117-128, 1986.

[13] Pinedo, M. L., and Ross, S. M., Scheduling Jobs Subject to Nonhomogeneous Poisson Shocks, *Management Science*, vol. 26, pp. 1250-1257, 1980.

[14] Pollock, S. M., A Simple Model of Search for a Moving Target, *Operations Research*, vol. 18, pp. 883-903, 1970.

[15] Ross, S. M., *Applied Probability with Optimization Applications*, Holden-Day, San Fransisco, California, 1970.

[16] Ross, S. M., Quality Control under Markovian Deterioration, *Management Science*, vol. 17, pp. 587-596, 1971.

[17] Ross, S. M., *Stochastic Processes*, John-Wiley and Sons, New York, New York, 1983.

[18] Shanthikumar, J. G., and Yao, D. D., The Preservation of Likelihood Ratio Ordering under Convolution, *Stochastic Processes and their Applications*, vol. 23, pp. 259-267, 1986.