最短ルート問題のその後について

岩本, 誠一

https://doi.org/10.15017/4493024

出版情報：經濟學研究. 57 (3/4), pp.199-217, 1992-08-10. 九州大学経済学会
バージョン：
権利関係：

最短ルート問題のその後について

岩　本　誠　一

1.　概　　　要

いわゆる最短ルート問題はあらかじめ指定された始点から特定の終点に至るまでのルートの中から距離の総和を最小にするルートを求める問題である。この場合，点は実際的には節，都市，局，工場，支店など種々考えられる。距離はまた所要時間，必要経費，効用などに読み替えてもよい。いずれにしても，現実の多くの最短ルート問題は始点と終点の二点間の数値の“和”を最小にする問題である。これを本論文では加法型問題という。

最短ルート問題の解法としては動的計画法がよく知られている([1])。本論文では，動的計画論の立場からいかに多くの型の目的関数が動的計画法の再帰式によって解かれるかを論じる。既に加法型，乗法型，最大型，最小型などの単一評価関数を目的関数にもつグラフ上の最短ルート問題は筆者によって解決されている([7；p. 9])。したがって，ここでは加法型問題などの単一評価関数以外の問題として，次の二つの問題を考える。

第2節では，単一評価に対するものとして複合評価を目的関数にもつ問題を考える。この問題は同一の動的システム上の複数の（単一）評価の合成関数を最適にする問題である。これを複合型問題という。これを動的計画の平行合成という概念を導入して解決する。特に，有限グラフ上での最小範囲問題，最小分散問題，最小比問題については個々に動的計画法の再帰式を解いて最短ルートを求める。

第3節ではグラフ上の隣接する二点間の数値に負の値がある場合の“乗加法型”問題を考える。この問題は従来の動的計画法の枠組みに納まらないので，最近筆者が提唱している“両的計画法”([8])によってこれを解決する。両的計画法は，その最大化問題群と最小化問題群とが（もちろん分離独立していてもよいのだが)相互に関連しあっている問題を動的計画法流の連立再帰式(これを両帰式という)で解く逐次最適化法である。特に，グラフ上の乗法型，乗加法型の二問題について両的計画法の両帰式を解いて最短ルートと最長ルートを同時に求める。

2.　グラフ上での複合関数の最適化

この節では動的計画（DP）の平行合成の例として，有限グラフ上での複合関数の最適値を再帰式を解いて求める。一般に，N段 DP $\mathscr{D}$ は最適化問題

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Opt} \quad \bigotimes_{n=1}^{N} f_n(s_n, a_n) \otimes k(s_{N+1}) \\
&\mathrm{s.t.}\ \mathrm{(i)} \quad T_n(s_n, a_n) = s_{n+1} \\
&\qquad \mathrm{(ii)} \quad a_n \in A_n(s_n) \qquad\qquad 1 \leqq n \leqq N
\end{aligned} \tag{1}
$$

を表現している（[1－6, 10, 11]）。ここで，二項演算 $\otimes$ が特に＋，×，∨，∧のときは，この最適化問題の目的関数はそれぞれ

加法型　$\sum_{n=1}^{N} f_n(s_n, a_n) + k(s_{N+1})$

乗法型　$\prod_{n=1}^{N} f_n(s_n, a_n) \times k(s_{N+1})$　　ただし　$f_n(s_n, a_n) \geqq 0$，$k(s_{N+1}) \geqq 0$

最大型　$\bigvee_{n=1}^{N} f_n(s_n, a_n) \vee k(s_{N+1})$

最小型　$\bigwedge_{n=1}^{N} f_n(s_n, a_n) \wedge k(s_{N+1})$

になる（[7, p. 15]）。ここでは，これらの目的関数を含む(1)を**単一問題**という。これに対して，h で合成された最適化問題

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Opt} \quad h\Big(\bigotimes_{n=1}^{N} f_n(s_n, a_n) \otimes k(s_{N+1}),\ \bigoplus_{n=1}^{N} g_n(s_n, a_n) \oplus \ell(s_{N+1})\Big) \\
&\mathrm{s.t.} \quad \mathrm{(i)} \quad T_n(s_n, a_n) = s_{n+1} \quad \mathrm{(ii)} \quad a_n \in A_n(s_n) \qquad 1 \leqq n \leqq N
\end{aligned} \tag{2}
$$

を２つの評価関数の**合成問題**という（[8]）。一般に，n 個の評価関数の合成問題は n 個の N 段 DP の n 変数関数

$$h : \overbrace{R^1 \times R^1 \times \cdots \times R^1}^{n} \longrightarrow R^1$$

による平行合成で表される。ただし，n 個の DP の状態空間列，決定空間列，状態変換列はそれぞれ共通であるとする。

2.1　最小範囲問題

図１において点 A から出発して左 ⟶ 右の方向に進んで点 N で終わるとする。このとき，いわゆる最短ルート問題［9；p.77］やこれを広義化した単一最適化問題［7；p.2, p.15, p.20］が自然に考えられる。

ここでは，２つの評価関数最大型関数 $x = \bigvee_{n=1}^{5} g_n(x_n, x_{n+1})$ と最小型関数 $y = \bigwedge_{n=1}^{5} g_n(x_n, x_{n+1})$ との差 $h = x - y$ によって合成された複合関数を，統計学におけるデータのバラツキを表す範囲 range として考える。例えば，図１のルート A ⟶ B ⟶ E ⟶ I ⟶ L ⟶ N の範囲は最大値－最小値＝11－２＝９である。特に，部分ルート B ⟶ E ⟶ I を含むルートの範囲は９である。

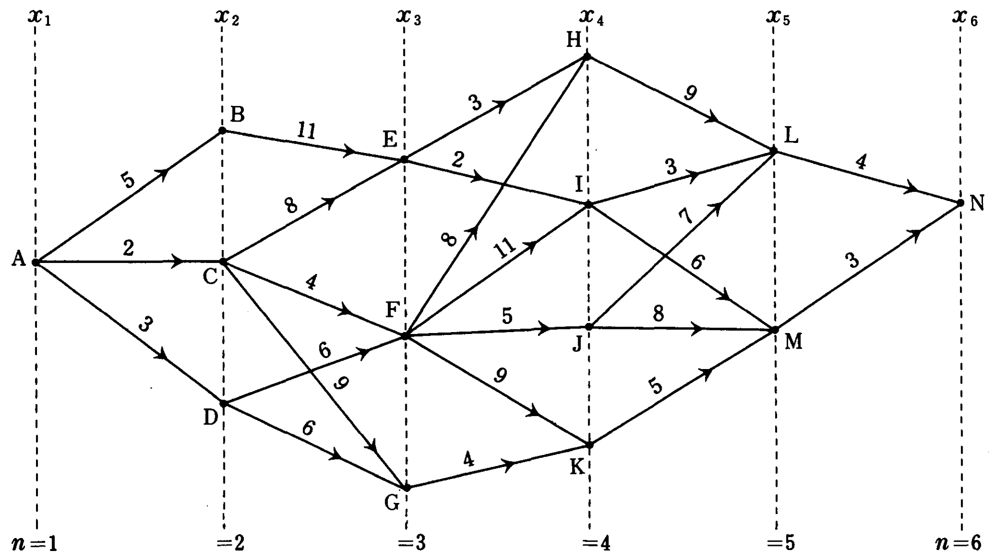


図1

このように各ルートに範囲を対応させる。このとき，範囲が最小になるルートを求めよう。これは最適化問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{Min} & \displaystyle\mathop{\text{Max}}_{1 \leqq n \leqq 5} g_n(x_n, x_{n+1}) - \min_{1 \leqq n \leqq 5} g_n(x_n, x_{n+1}) \\
\text{s.t.} & \text{(i)} \quad x_{n+1} \in A_n(x_n) \qquad 1 \leqq n \leqq 5
\end{array}
\tag{3}
$$

で表される。ただし，図1で示した時刻 n，状態 x_n に対して $A_n(x_n)$ は点 x_n から直接行ける点 x_{n+1} の全体とし，$g_n(x_n, x_{n+1})$ は辺 $x_n x_{n+1}$ 上の実数値とする。時刻 n における状態 x_n の全体を S_n とする。

この最適化問題を新しく実パラメータ b, c を導入した問題群

$$
\begin{array}{ll}
\text{Min} & b \vee \displaystyle\bigvee_{k=n}^{5} g_k(x_k, x_{k+1}) \vee k(x_6) - c \wedge \bigwedge_{k=n}^{5} g_k(x_k, x_{k+1}) \wedge \ell(x_6) \\
\text{s.t.} & \text{(i)} \quad x_{k+1} \in A_k(x_k) \qquad n \leqq k \leqq 5 \\
 & \qquad\qquad x_n \in S_n, \quad b, c \in \{1, 2, \ldots, 12\}, \quad 1 \leqq n \leqq 5
\end{array}
\tag{4}
$$

に埋め込む。ここで，図1での最大値が11，最小値が2に注意すれば，b, c を有限集合 $\{1, 2, \ldots, 12\}$ 内を動かせば十分であることがわかる。問題(4)の最小値を $u^{6-n}(b, x_n, c)$ とすると，再帰式

$$
\begin{cases}
u^{6-n}(b, x_n, c) = \displaystyle\mathop{\text{Min}}_{x_{n+1} \in A_n(x_n)} u^{5-n}(b \vee g_n(x_n, x_{n+1}), c \wedge g_n(x_n, x_{n+1})) \\
\qquad\qquad b, c \in \{1, 2, \ldots, 12\}, \quad x_n \in S_n, \quad 1 \leqq n \leqq 5 \\
u^0(b, x_6, c) = b \vee k(x_6) - c \wedge \ell(x_6) \\
\qquad\qquad b, c \in \{1, 2, \ldots, 12\}, \quad x_6 \in S_6
\end{cases}
$$

が成り立つ。簡単のために，終端利得関数はそれぞれ

$$k(N)=1, \quad \ell(N)=12$$

とすることができる。このとき，与えられた問題の最小値は $n=1$, $x_1=A$, $c=12$ のときの $u^{6-n}(b, x_1, c)$ の値 $u^5(1, A, 12)$ で与えられる。

さて，上述の再帰式を解くと，次のようになる。

$$u^0(b, N, c)=b-c$$

$$u^1(b, L, c)=b\vee 4-c\wedge 4, \quad \pi_5^*(b, L, c)=N$$
$$u^1(b, M, c)=b\vee 3-c\wedge 3, \quad \pi_5^*(b, L, c)=N$$

$$u^2(b, H, c)=b\vee 9-c\wedge 4, \quad \pi_4^*(b, H, c)=L$$

$$u^2(b, I, c)=b\vee 4-c\wedge 3, \quad \pi_5^*(b, I, c)=\begin{cases} L \text{ or } M & b\geqq 6 \\ L & 1\leqq b\leqq 5 \end{cases} \text{のとき}$$

$$u^2(b, J, c)=b\vee 7-c\wedge 4, \quad \pi_4^*(b, J, c)=\begin{cases} L \text{ or } M & b\geqq 8,\ c\leqq 3 \\ L & \text{その他} \end{cases} \text{のとき}$$

$$u^2(b, K, c)=b\vee 5-c\wedge 3, \quad \pi_4^*(b, K, c)=M$$

$$u^3(b, E, c)=b\vee 4-c\wedge 2, \quad \pi_3^*(b, E, c)=\begin{cases} H \text{ or } I & (b\geqq 9,\ c\leqq 2) \\ & \text{or}(b=8,\ c=3) \\ I & \text{その他} \end{cases} \text{のとき}$$

$$u^3(b, F, c)=b\vee 7-c\wedge 4,$$

$$\pi_3^*(b, F, c)=\begin{cases} H,\ I,\ J \text{ or } K & b\geqq 11,\ c\leqq 3 \\ H,\ J \text{ or } K & 9\leqq b\leqq 10,\ c\leqq 3 \\ J & 1\leqq b\leqq 8 \\ H \text{ or } J & b\geqq 9,\ c\geqq 4 \end{cases} \text{のとき}$$

$$u^3(b, G, c)=b\vee 5-c\wedge 3, \quad \pi_3^*(b, G, c)=K$$

$$u^4(b, B, c)=b\vee 11-c\wedge 2, \quad \pi_2^*(b, B, c)=E$$
$$u^4(b, C, c)=b\vee 7-c\wedge 4,$$

$$\pi_2^*(b, C, c)=\begin{cases} E,\ F \text{ or } G & b\geqq 9,\ c\leqq 2 \\ E \text{ or } G & b=8,\ c\leqq 2 \\ F & b\leqq 7,\ c\leqq 2 \\ F \text{ or } G & b\geqq 9,\ c=3 \\ F & b\leqq 8,\ c=3 \\ F & c\geqq 4 \end{cases} \text{のとき}$$

$$u^4(b, D, c)=(b\vee 7-c\wedge 4)\wedge(b\vee 6-c\wedge 3)$$

$$\pi_2^*(b, D, c) = \begin{cases} F \text{ or } G \\ G \\ F \text{ or } G \\ F \end{cases} \begin{cases} b \geqq 7,\ c \leqq 3 \\ b \leqq 6,\ c \leqq 3 \\ b \leqq 6,\ c \geqq 4 \\ b \geqq 7,\ c \geqq 4 \end{cases} \text{のとき}$$

$$u^5(b, A, c) = b \vee 6 - c \wedge 3$$

$$\pi_1^*(b, A, c) = \begin{cases} B,\ C \text{ or } D \\ C \text{ or } D \\ D \\ D \end{cases} \begin{cases} b \geqq 11,\ c \leqq 2 \\ 7 \leqq b \leqq 10,\ c \leqq 2 \\ 7 \leqq b \leqq 10,\ c \geqq 3 \\ b \leqq 6 \end{cases} \text{のとき。}$$

したがって，求める最小値は

$$u^5(1, A, 12) = 3$$

であり，初期状態 $s_1 = (1, A, 12)$ からの最適政策 $\{\pi_n^*\}_1^5$ による最適行動は

$$s_1 = (1, A, 12) \xrightarrow{D} \hat{s}_2 = (3, D, 3) \xrightarrow{G} \hat{s}_3 = (6, G, 3)$$

$$\xrightarrow{K} \hat{s}_4 = (6, K, 3) \xrightarrow{M} \hat{s}_5 = (6, M, 3) \xrightarrow{N} \hat{s}_6 = (6, N, 3)$$

となる。ゆえに，この範囲最小値問題は最南端ルートA $\longrightarrow$ D $\longrightarrow$ G $\longrightarrow$ K $\longrightarrow$ M $\longrightarrow$ Nで最小値 3 が達成されることになる。

注意　図 1 では $g_1(A, D) = 3$ であるが，これを $g_1(A, D) = 4$ に変更し，他のデータはそのままにすると，再帰式の解としては $u^5(b, A, c)$ と $\pi_1^*(b, A, c)$ のみが変化して，次のようになる。

$$u^5(b, A, c) = (b \vee 7 - c \wedge 4) \wedge (b \vee 6 - c \wedge 3)$$

$$\pi_1^*(b, A, c) = \begin{cases} B,\ C \text{ or } D \\ C,\ D \\ D \\ D \end{cases} \begin{cases} b \geqq 11,\ c \leqq 2 \\ 7 \leqq b \leqq 10,\ c \leqq 2 \\ 7 \leqq b \leqq 10,\ c \geqq 3 \\ b \leqq 6 \end{cases} \text{のとき。}$$

したがって，このときの求める最小値は

$$\begin{aligned} u^5(1, A, 12) &= (1 \vee 7 - 12 \wedge 4) \wedge (1 \vee 6 - 12 \wedge 3) \\ &= 3 \end{aligned}$$

になり，$s_1 = (1, A, 12)$ からの最適政策による最適行動は途中の $\hat{s}_2$ から 2 つに分岐して

$$s_1 = (1, A, 12) \xrightarrow{D} \hat{s}_2 = (4, D, 4)$$

$$\xrightarrow{F} \hat{s}_3 = (6, F, 4) \xrightarrow{J} \hat{s}_4 = (6, J, 4) \xrightarrow{L} \hat{s}_5 = (7, L, 4) \xrightarrow{N} \hat{s}_6 = (7, N, 4)$$

$\xrightarrow{G} \hat{s}_3 = (6, G, 4) \xrightarrow{K} \hat{s}_4 = (6, K, 4) \xrightarrow{M} \hat{s}_5 = (6, M, 4) \xrightarrow{N} \hat{s}_6 = (6, N, 3)$

になる。ゆえに，$g_1(A, D) = 4$ に変更した最小範囲問題は 2 つのルート A $\longrightarrow$ D $\longrightarrow$ F $\longrightarrow$ J $\longrightarrow$ L $\longrightarrow$ N と A $\longrightarrow$ D $\longrightarrow$ G $\longrightarrow$ K $\longrightarrow$ M $\longrightarrow$ N 上で最小値 3 をとる。

2.2　最小分散問題

同じく図 1 において，ルート上の 5 つの値を統計的データと解釈して，その分散を最小にするルートを求めることを考える([12])。この問題は

$$\begin{aligned} &\text{Min} \quad \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{5}\Big(g_n(x_n, x_{n+1}) - \frac{1}{5}g_n(x_n, x_{n+1})\Big)^2 \\ &\text{s.t.} \quad \text{(i)} \quad x_{n+1} \in A_n(x_n) \qquad 1 \leqq n \leqq 5 \end{aligned} \tag{5}$$

で表される。以下では分数計算より簡単な整数計算を行うために，この目的関数を25倍した

$$\begin{aligned} &25 \cdot \frac{1}{5}\sum_{1}^{5}\Big(g_n(x_n, x_{n+1}) - \frac{1}{5}\sum_{1}^{5}g_n(x_n, x_{n+1})\Big)^2 \\ &= 5\sum_{1}^{5}g_n^2(x_n, x_{n+1}) - \Big(\sum_{1}^{5}g_n(x_n, x_{n+1})\Big)^2 \end{aligned}$$

を目的関数にもつ最小値問題

$$\begin{aligned} &\text{Min} \quad 5\sum_{1}^{5}g_n^2(x_n, x_{n+1}) - \Big(\sum_{1}^{5}g_n(x_n, x_{n+1})\Big)^2 \\ &\text{s.t.} \quad \text{(i)} \quad x_{n+1} \in A_n(x_n) \qquad 1 \leqq n \leqq 5 \end{aligned} \tag{6}$$

を解こう。

さて，新しい非負パラメータ b を含む問題

$$\begin{aligned} &\text{Min} \quad \sum_{k=n}^{5}g_k^2(x_k, x_{k+1}) + \ell(x_6) - \Big(b + \sum_{k=n}^{5}g_k(x_k, x_{k+1}) + k(x_6)\Big)^2 \\ &\text{s.t.} \quad \text{(i)} \quad x_{k+1} \in A_k(x_k) \qquad n \leqq k \leqq 5 \\ &\qquad\qquad\qquad b \geqq 0, \quad x_n \in S_n, \quad 1 \leqq n \leqq 6 \end{aligned} \tag{7}$$

の最小値を $v^{6-n}(b, x_n)$ とおくと，再帰式

$$\begin{cases} v^{6-n}(b, x_n) = \displaystyle\min_{x_{n+1} \in A_n(x_n)} \big[5g_n^2(x_n, x_{n+1}) + v^{5-n}(b + g_n(x_n, x_{n+1}), x_{n+1})\big] \\ \qquad\qquad\qquad b \geqq 0, \quad x_n \in S_n, \quad 1 \leqq n \leqq 5 \\ v^0(b, x_6) = \ell(x_6) - (b + k(x_6))^2 \\ \qquad\qquad\qquad b \geqq 0, \quad x_6 \in S_6 \end{cases}$$

が成り立つ。ここで，終端利得を

$$\ell(N)=k(N)=0$$

とすれば，問題(6)の最小値は，この再帰式を解いて，$u^5(0,A)$で与えられる。

さて，再帰式を解くと，次のようになる。

$$v^0(b,N)=-b^2$$

$$v^1(b,L)=5\cdot16-(b+4)^2,\qquad \hat{\sigma}_5(b,L)=N$$
$$v^1(b,M)=5\cdot9-(b+3)^2,\qquad \hat{\sigma}_5(b,M)=N$$

$$v^2(b,H)=5\cdot97-(b+13)^2,\qquad \hat{\sigma}_4(b,H)=L$$
$$v^2(b,\ I)=\begin{cases}5\cdot25-(b+7)^2\\ 5\cdot45-(b+9)^2,\end{cases}\qquad \hat{\sigma}_4(b,I)=\begin{cases}L & 0\leqq b\leqq17\\ M & b\geqq17\end{cases}\text{のとき}$$
$$v^2(b,J)=5\cdot65-(b+11)^2,\qquad \hat{\sigma}_4(b,J)=L$$
$$v^2(b,K)=5\cdot34-(b+8)^2,\qquad \hat{\sigma}_4(b,K)=M$$

$$v^3(b,E)=\begin{cases}5\cdot29-(b+9)^2\\ 5\cdot106-(b+16)^2,\end{cases}\qquad \hat{\sigma}_3(b,E)=\begin{cases}I(L) & 0\leqq b\leqq15\\ H & b\geqq15\end{cases}\text{のとき}$$
$$v^3(b,F)=\begin{cases}5\cdot90-(b+16)^2\\ 5\cdot161-(b+21)^2,\end{cases}\qquad \hat{\sigma}_3(b,F)=\begin{cases}J & 0\leqq b\leqq17\\ H & b\geqq17\end{cases}\text{のとき}$$
$$v^3(b,G)=5\cdot50-(b+12)^2,\qquad \hat{\sigma}_3(b,G)=K$$

$$v^4(b,B)=\begin{cases}5\cdot150-(b+20)^2\\ 5\cdot227-(b+27)^2,\end{cases}\qquad \hat{\sigma}_2(b,B)=\begin{cases}E(IL) & 0\leqq b\leqq4\\ E(H) & b\leqq4\end{cases}\text{のとき}$$
$$v^4(b,C)=\begin{cases}5\cdot106-(b+20)^2\\ 5\cdot227-(b+27)^2\end{cases}\qquad \hat{\sigma}_2(b,C)=\begin{cases}F(J) & 0\leqq b\leqq13\\ F(H) & b\geqq13\end{cases}\text{のとき}$$
$$v^4(b,D)=\begin{cases}5\cdot86-(b+18)^2\\ 5\cdot126-(b+22)^2\\ 5\cdot197-(b+27)^2,\end{cases}\qquad \hat{\sigma}_2(b,D)=\begin{cases}G & 0\leqq b\leqq5\\ F(J) & 5\leqq b\leqq11\\ F(H) & b\geqq11\end{cases}\text{のとき}$$

$$v^5(b,A)=\begin{cases}5\cdot95-(b+21)^2\\ 5\cdot135-(b+25)^2\\ 5\cdot206-(b+30)^2\\ 5\cdot252-(b+32)^2,\end{cases}\qquad \hat{\sigma}_1(b,A)=\begin{cases}D(G) & 0\leqq b\leqq2\\ D(FG) & 2\leqq b\leqq8\\ D(FH) & 8\leqq b\leqq53/2\\ B(EH) & b\geqq53/2\end{cases}\text{のとき。}$$

したがって，問題(6)は最小値

$$v^5(0,A)=5\cdot95-21^2=34$$

をもつ。初期状態 $s_1=(0,A)$ からの最適政策 $\{\hat{\sigma}_n\}_1^5$ による最適行動は

$$s_1=(0,A) \xrightarrow{D} \hat{s}_2=(3,D) \xrightarrow{G} \hat{s}_3=(9,K) \xrightarrow{K}$$

$$\hat{s}_4=(13,K) \xrightarrow{M} \hat{s}_5=(18,M) \xrightarrow{N} \hat{s}_6=(21,N)$$

になる。したがって，最南端ルート A $\longrightarrow$ D $\longrightarrow$ G $\longrightarrow$ K $\longrightarrow$ M $\longrightarrow$ N が問題(6)の最小値

$$\begin{aligned} v^5(0,A) &= 5(3^2+6^2+4^2+5^2+3^2)-(3+6+4+5+3)^2 \\ &= 5 \cdot 95-21^2 \\ &= 34 \end{aligned}$$

を与える

ゆえに，最初に与えられた最小分散問題(5)は最南端ルート A $\longrightarrow$ D $\longrightarrow$ G $\longrightarrow$ K $\longrightarrow$ M $\longrightarrow$ N 上で最小値 $34/25=1.36$ をもつ。

2.3　最小比問題

図2においても点Aから出発して左$\longrightarrow$右の方向に進んで点Nで終わるとする。このとき，ルート上の右端の和に対する左端のそれの比を最小にする問題を考える。

これは最小化問題として

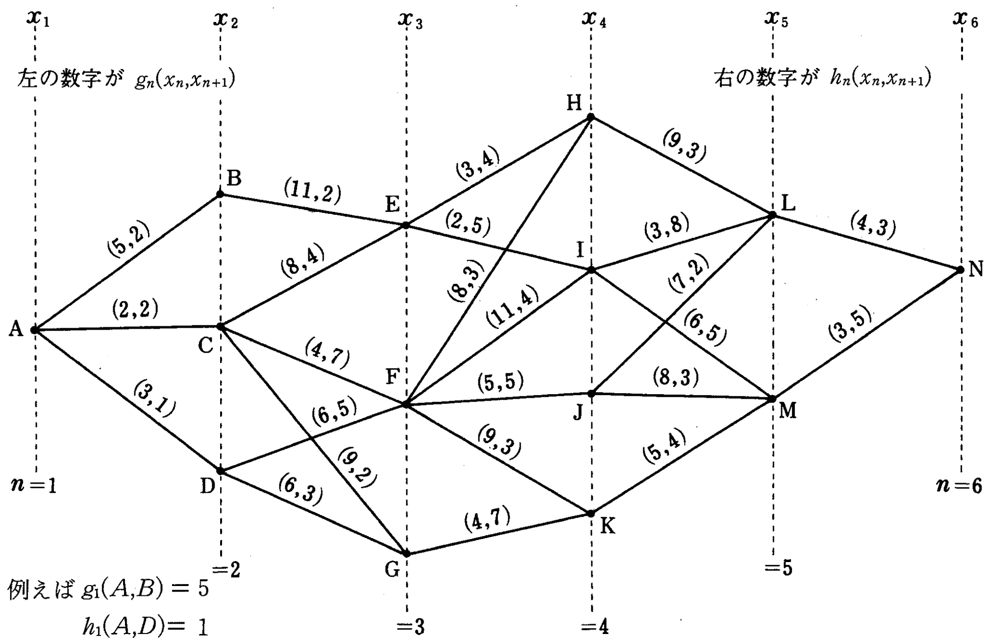


図2

$$\begin{aligned}&\text{Min} \quad (\sum_{1}^{5} g_n(x_n, x_{n+1}))/(\sum_{1}^{5} h_n(x_n, x_{n+1}))\\ &\text{s.t.} \quad \text{(i)} \quad x_{n+1} \in A_n(x_n) \qquad 1 \leqq n \leqq 5\end{aligned} \tag{8}$$

で表される（[13]）。のこの問題を，終端利得関数を組み込んで新しい実パラメータ b, c を導入した問題群

$$\text{Min} \quad (b + \sum_{n}^{5} g_k(x_k, x_{k+1}) + k(x_6))/(c + \sum_{n}^{5} h_k(x_k, x_{k+1}) + l(x_6)) \tag{9}$$
$$\text{s.t.} \quad \text{(i)} \quad x_{k+1} \in A_{k+1}(x_k) \qquad n \leqq k \leqq 5, \quad 1 \leqq n \leqq 5 \qquad\qquad b \geqq 0, \; x_n \in S_n, \; c \geqq 0$$

に埋め込む。(9)の最小値を，$v^{6-n}(b, x_n, c)$ とすると，次の再帰式が得られる。

$$\begin{cases} v^{6-n}(b, x_n, c) = \underset{x_{n+1} \in A_n(x_n)}{\text{Min}} v^{5-n}(b + g_n(x_n, x_{n+1}), x_{n+1}, c + h_n(x_n, x_{n+1})) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad b \geqq 0, \quad x_n \in S_n, \quad c \geqq 0, \quad 1 \leqq n \leqq 5 \\ v^0(b, x_6, c) = (b + k(x_6))/(c + l(x_6)) \qquad b \geqq 0, \quad x_6 \in S_6, \quad c \geqq 0. \end{cases} \tag{10}$$

特に，終端利得を

$$k(N) = \ell(N) = 0$$

とすると，$v^5(0, A, 0)$ が求める最小値になっている。この再帰式を解くと，次のようになる。

$v^0(b, N, c) = b/c \qquad b \geqq 0, \; c > 0 \qquad$（以下　$b, c \geqq 0$ とする。）

$v^1(b, L, c) = (b+4)/(c+3), \qquad \hat{\sigma}_5(b, L, c) = N$

$v^1(b, M, c) = (b+3)/(c+5), \qquad \hat{\sigma}_5(b, M, c) = N$

$v^2(b, H, c) = (b+13)/(c+7), \qquad \hat{\sigma}_4(b, H, c) = L$

$v^2(b, I, c) = (b+7)/(c+11), \qquad \hat{\sigma}_4(b, I, c) = L$

$v^2(b, J, c) = (b+11)/(c+8), \qquad \hat{\sigma}_4(b, J, c) = M$

$v^2(b, K, c) = (b+8)/(c+9), \qquad \hat{\sigma}_4(b, K, c) = M$

$v^3(b, E, c) = (b+9)/(c+16), \qquad \hat{\sigma}_3(b, E, c) = I$

$v^3(b, F, c) = \begin{cases} (b+18)/(c+15) \\ (b+16)/(c+13), \end{cases} \qquad \hat{\sigma}_3(b, F, c) = \begin{cases} I & c \leqq b+3 \\ J & c \geqq b+3 \end{cases}$ のとき

$v^3(b, G, c) = (b+12)/(c+16), \qquad \hat{\sigma}_3(b, G, c) = K$

$v^4(b, B, c) = (b+20)/(c+18), \qquad \hat{\sigma}_2(b, B, c) = E$

$$v^4(b,C,c)=\begin{cases}(b+17)/(c+20)\\(b+22)/(c+22),\end{cases}\quad \hat{\sigma}_2(b,C,c)=\begin{cases}E & 2b-5c\leqq 66\\(I) & 2b-5c\geqq 66\end{cases}\quad のとき$$

$$v^4(b,D,c)=\begin{cases}(b+18)/(c+19)\\(b+24)/(c+20),\end{cases}\quad \hat{\sigma}_2(b,D,c)=\begin{cases}G & b-6c\leqq 96\\F(I) & b-6c\geqq 96\end{cases}\quad のとき$$

$$v^5(b,A,c)=\begin{cases}(b+19)/(c+22)\\(b+24)/(c+24),\end{cases}\quad \hat{\sigma}_1(b,A,c)=\begin{cases}C(E) & 2b-5c\leqq 72\\C(FI) & 2b-5c\geqq 72\end{cases}\quad のとき。$$

したがって，初期状態 $s_1=(0,A,0)$ からの最適政策 $\{\hat{\sigma}_n\}_1^5$ による最適行動は

$$(0,A,0)\xrightarrow[C]{(2,2)}(2,C,2)\xrightarrow[E]{(8,4)}(10,E,6)\xrightarrow[I]{(2,5)}(12,I,11)$$

$$\xrightarrow[L]{(3,8)}(15,L,19)\xrightarrow[N]{(4,3)}(19,N,22)$$

となる。したがって，この最小比問題はルートA $\longrightarrow$ C $\longrightarrow$ E $\longrightarrow$ I $\longrightarrow$ L $\longrightarrow$ N上で最小値 $v^5(0,A,0)=19/22$ を持つ。

2.4　その他の複合最適化問題

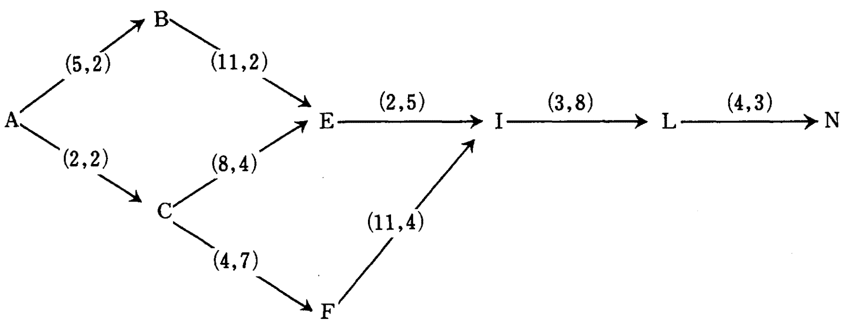
例1　図1において最小化問題

$$\begin{aligned}&\text{Min}\quad \sum_{n=1}^{5} g_n(x_n,x_{n+1})+\underset{1\leqq n\leqq 5}{\text{Max}}\ g_n(x_n,x_{n+1})\\&\text{s.t.}\quad (\text{i})\quad x_{n+1}\in A_n(x_n)\qquad 1\leqq n\leqq 5\end{aligned}\tag{11}$$

の最適ルートはA $\xrightarrow{2}$ C $\xrightarrow{8}$ E $\xrightarrow{2}$ I $\xrightarrow{3}$ L $\xrightarrow{4}$ N 及び A $\xrightarrow{3}$ D $\xrightarrow{6}$ G $\xrightarrow{4}$ K $\xrightarrow{5}$ M $\xrightarrow{3}$ N で，最小値は 27 になる。

例2　図2において最小化問題

$$\begin{aligned}&\text{Min}\quad \Big(\sum_{n=1}^{5} g_n(x_n,x_{n+1})\Big)\times\prod_{n=1}^{5} h_n(x_n,x_{n+1})\\&\text{s.t.}\quad (\text{i})\quad x_{n+1}\in A_n(x_n)\qquad 1\leqq n\leqq 5\end{aligned}\tag{12}$$



は最北端ルート A $\xrightarrow{(5,2)}$ B $\xrightarrow{(11,2)}$ E $\xrightarrow{(3,4)}$ H $\xrightarrow{(9,3)}$ L $\xrightarrow{(4,3)}$ N上で最小値 32・144 = 4608 をもつ。

例3　同じく図2において最小化問題

$$\begin{aligned} &\text{Min} \quad (\min_{1\leqq n\leqq 5} g_n(x_n, x_{n+1}))/(\operatorname*{Max}_{1\leqq n\leqq 5} h_n(x_n, x_{n+1})) \\ &\text{s.t.} \quad \text{(i)} \quad x_{n+1} \in A_n(x_n) \qquad 1\leqq n\leqq 5 \end{aligned} \tag{13}$$

は，3つの最適ルート上で最小値 2/8=0.25 をもつ。

3. 負の値を含むグラフ上の最適化

この節では，従来の動的計画法に当てはまらない例として，アーク上に負の値を含む乗法型および乗加法型目的関数の最大・最小の両最適化を同時に考える([8])。

3.1 乗法型関数の最適化

図3において，まずルート上の値の積が最大になるルートを求めるとしよう。これは最大化問題

$$\begin{aligned} &\text{Max} \quad \prod_{n=1}^{5} g_n(x_n, x_{n+1}) \\ &\text{s.t.} \quad \text{(i)} \quad x_{n+1} \in A_n(x_n) \qquad 1\leqq n\leqq 5 \end{aligned} \tag{14}$$

表される。この最大値問題を解くために，これまでの動的計画法では部分最大化問題群

$$\begin{aligned} U^{6-n}(x_n) = \text{Max}\,[&g_n(x_n, x_{n+1})\cdot g_{n+1}(x_{n+1}, x_{n+2}) \cdots g_5(x_5, x_6)\cdot k(x_6) \\ &|\, x_{m+1} \in A_m(x_m) \quad n\leqq m\leqq 5] \\ &x_n \in S_n, \quad 1\leqq n\leqq 5 \end{aligned} \tag{15}$$

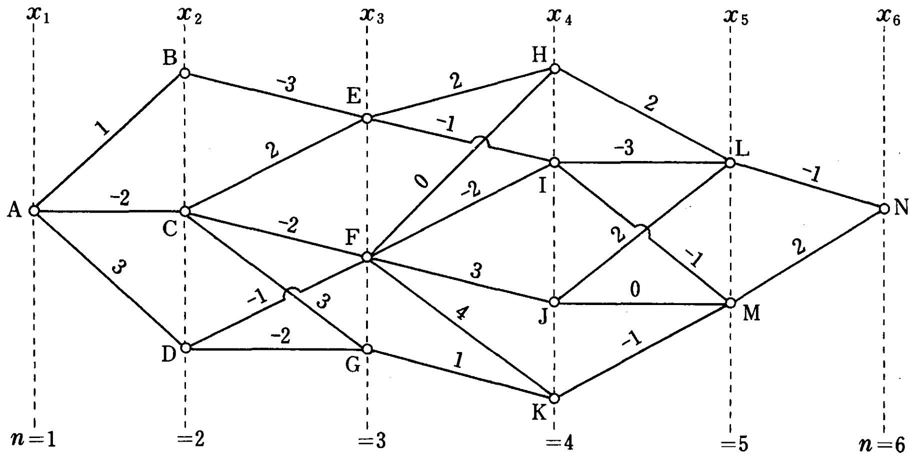


図3

だけを考えてきた。ただし，

$$k(x_6)=k(N)=1 \tag{16}$$

とする。しかし，$g_n(x_n, x_{n+1})$ が負になる場合には更に，部分最小化問題群

$$\begin{aligned}u^{6-n}(x_n)=\min[&g_n(x_n, x_{n+1})\cdot g_{n+1}(x_{n+1}, x_{n+2})\cdots g_5(x_5, x_6)\cdot k(x_6)\\ &|x_{m+1}\in A_m(x_m)\quad n\leqq m\leqq 5]\\ &x_n\in S_n,\quad 1\leqq n\leqq 5\end{aligned} \tag{17}$$

をも考える必要がある。実際，両部分問題群には

$$U^0(x_6)=u^0(x_6)=k(x_6)=k(N)=1 \tag{18}$$

とすることによって，はじめて両者互いに関連し合う再帰式(両帰式)

$$\begin{cases}U^{6-n}(x_n)=\underset{\substack{x_{n+1}\in A_n(x_n)\\ g_n(x_n,x_{n+1})\leqq 0}}{\mathrm{Max}}[g_n(x_n, x_{n+1})\cdot u^{5-n}(x_n)]\vee\underset{\substack{x_{n+1}\in A_n(x_n)\\ g_n(x_n,x_{n+1})>0}}{\mathrm{Max}}[g_n(x_n, x_{n+1})\cdot U^{5-n}(x_n)]\\ u^{6-n}(x_n)=\underset{\substack{x_{n+1}\in A_n(x_n)\\ g_n(x_n,x_{n+1})\leqq 0}}{\min}[g_n(x_n, x_{n+1})\cdot U^{5-n}(x_n)]\wedge\underset{\substack{x_{n+1}\in A_n(x_n)\\ g_n(x_n,x_{n+1})>0}}{\min}[g_n(x_n, x_{n+1})\cdot u^{5-n}(x_n)]\end{cases} \tag{19}$$

$$x_n\in S_n,\quad 1\leqq n\leqq 5$$

が成立する。

さて，再帰式(18)，(19)を解くと，次の計算結果を得る。

$U^0(N)=1$		$u^0(N)=1$	
$U^1(L)=-1$	$\pi_5^*(L)=N$	$u^1(L)=-1$	$\hat{\sigma}_5(L)=N$
$U^1(M)=2$	$\pi_5^*(M)=N$	$u^1(M)=2$	$\hat{\sigma}_5(M)=N$
$U^2(H)=-2$	$\pi_4^*(H)=L$	$u^2(H)=-2$	$\hat{\sigma}_4(H)=L$
$U^2(I)=3$	$\pi_4^*(I)=L$	$u^2(I)=-2$	$\hat{\sigma}_4(I)=M$
$U^2(J)=0$	$\pi_4^*(J)=M$	$u^2(J)=-2$	$\hat{\sigma}_4(J)=L$
$U^2(K)=-2$	$\pi_4^*(K)=M$	$u^2(K)=-2$	$\hat{\sigma}_4(K)=M$
$U^3(E)=2$	$\pi_3^*(E)=I$	$u^3(E)=-4$	$\hat{\sigma}_3(E)=I$
$U^3(F)=4$	$\pi_3^*(F)=I$	$u^3(F)=-8$	$\hat{\sigma}_3(F)=K$
$U^3(G)=-2$	$\pi_3^*(G)=K$	$u^3(G)=-2$	$\hat{\sigma}_3(G)=K$
$U^4(B)=12$	$\pi_2^*(B)=E$	$u^4(B)=-6$	$\hat{\sigma}_2(B)=E$
$U^4(C)=16$	$\pi_2^*(C)=F$	$u^4(C)=-8$	$\hat{\sigma}_2(C)=E$ or F
$U^4(D)=8$	$\pi_2^*(D)=F$	$u^4(D)=-4$	$\hat{\sigma}_2(D)=F$
$U^5(A)=24$	$\pi_1^*(A)=D$	$u^5(A)=-32$	$\hat{\sigma}_1(A)=C.$

したがって，ルート $A\xrightarrow{3}D\xrightarrow{-1}F\xrightarrow{4}K\xrightarrow{-1}M\xrightarrow{2}N$ 上で乗法型目的関数が最大

$$U^5(A) = 3(-1)4(-1)2 = 24$$

になる。他方，この意味での最短ルートは $A \xrightarrow{-2} C \xrightarrow{-2} F \xrightarrow{4} K \xrightarrow{-1} M \xrightarrow{2} N$ で，その(最小)値は

$$u^5(A) = (-2)(-2)4(-1)2 = -32$$

である。

3.2 乗加法型関数の最適化(1)

前3.1節の図3において，ここでは積和が最大になるルートを求めよう。これは最大値問題

$$\begin{aligned} &\text{Max} \quad \sum_{n=1}^{5} \prod_{k=1}^{n} g_k(x_k, x_{k+1}) \\ &\text{s.t.} \quad \text{(i)} \quad x_{n+1} \in A_n(x_n) \qquad 1 \leqq n \leqq 5 \end{aligned} \tag{20}$$

で表される。この最大値問題を解くために，3.1節と同じく，最大・最小の両部分問題群

$$\begin{aligned} &U^0(x_6) = u^0(x_6) = k(x_6) = k(N) = 0 \\ &U^{6-n}(x_n) = \text{Max}\left[g_n + g_n g_{n+1} + \cdots + g_n g_{n+1} \cdots g_5 + g_n g_{n+1} \cdots g_5 k \right. \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. | x_{m+1} \in A_m(x_m) \qquad n \leqq m \leqq 5\right] \\ &u^{6-n}(x_n) = \min\left[g_n + g_n g_{n+1} + \cdots + g_n g_{n+1} \cdots g_5 + g_n g_{n+1} \cdots g_5 k \right. \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. | x_{m+1} \in A_m(x_m) \qquad n \leqq m \leqq 5\right] \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_n \in S_n, \qquad 1 \leqq n \leqq 5 \end{aligned} \tag{21}$$

に埋め込む。ただし

$$g_n = g_n(x_n, x_{n+1}), \quad k = k(x_6).$$

このとき，互いに関連し合う再帰式(両帰式)

$$\begin{cases} U^{6-n}(x_n) = \underset{\substack{x_{n+1} \in A_n(x_n) \\ g_n(x_n, x_{n+1}) \leqq 0}}{\text{Max}} [g_n(x_n, x_{n+1}) + g_n(x_n, x_{n+1}) u^{5-n}(x_{n+1})] \\ \qquad\qquad \vee \underset{\substack{x_{n+1} \in A_n(x_n) \\ g_n(x_n, x_{n+1}) > 0}}{\text{Max}} [g_n(x_n, x_{n+1}) + g_n(x_n, x_{n+1}) U^{5-n}(x_{n+1})] \\ u^{6-n}(x_n) = \underset{\substack{x_{n+1} \in A_n(x_n) \\ g_n(x_n, x_{n+1}) \leqq 0}}{\min} [g_n(x_n, x_{n+1}) + g_n(x_n, x_{n+1}) U^{5-n}(x_{n+1})] \\ \qquad\qquad \wedge \underset{\substack{x_{n+1} \in A_n(x_n) \\ g_n(x_n, x_{n+1}) > 0}}{\min} [g_n(x_n, x_{n+1}) + g_n(x_n, x_{n+1}) u^{5-n}(x_{n+1})] \end{cases} \tag{22}$$

$$x_n \in S_n, \quad 1 \leqq n \leqq 5$$

が成立する。これを解くと，次の結果が得られる。

$$U^0(N) = 0 \qquad\qquad u^0(N) = 0$$

$$
\begin{array}{llll}
U^1(L) = -1 & \pi_5^*(L) = N & u^1(L) = -1 & \hat{\sigma}_5(L) = N \\
U^1(M) = 2 & \pi_5^*(M) = N & u^1(M) = 2 & \hat{\sigma}_5(M) = N \\
U^2(H) = 0 & \pi_4^*(H) = L & u^2(H) = 0 & \hat{\sigma}_4(H) = L \\
U^2(I) = 0 & \pi_4^*(I) = L & u^2(I) = -3 & \hat{\sigma}_4(I) = M \\
U^2(J) = 0 & \pi_4^*(J) = L \text{ or } M & u^2(J) = 0 & \hat{\sigma}_4(J) = L \text{ or } M \\
U^2(K) = -3 & \pi_4^*(K) = M & u^2(K) = -3 & \hat{\sigma}_4(K) = M \\
U^3(E) = 2 & \pi_3^*(E) = H \text{ or } I & u^3(E) = -1 & \hat{\sigma}_3(E) = I \\
U^3(F) = 4 & \pi_3^*(F) = J & u^3(F) = -2 & \hat{\sigma}_3(F) = K \\
U^3(G) = -2 & \pi_3^*(G) = K & u^3(G) = -2 & \hat{\sigma}_3(G) = K \\
U^4(B) = 0 & \pi_2^*(B) = E & u^4(B) = -9 & \hat{\sigma}_2(B) = E \\
U^4(C) = 14 & \pi_2^*(C) = F & u^4(C) = -10 & \hat{\sigma}_2(C) = F \\
U^4(D) = 7 & \pi_2^*(D) = F & u^4(D) = -5 & \hat{\sigma}_2(D) = F \\
U^5(A) = 24 & \pi_1^*(A) = D & u^5(A) = -30 & \hat{\sigma}_1(A) = C.
\end{array}
$$

したがって，この問題でもルート $A \xrightarrow{3} D \xrightarrow{-1} F \xrightarrow{4} K \xrightarrow{-1} M \xrightarrow{2} N$ 上で乗加法型目的関数が最大

$$
\begin{aligned}
U^5(A) &= 3+3(-1)+3(-1)4+3(-1)4(-1)+3(-1)4(-1)2 \\
&= 3-3-12+12+24 \\
&= 24
\end{aligned}
$$

になる。他方，この意味での最短ルートは $A \xrightarrow{-2} C \xrightarrow{-2} F \xrightarrow{4} K \xrightarrow{-1} M \xrightarrow{2} N$ で，その(最小)値は

$$
\begin{aligned}
u^5(A) &= (-2)+(-2)(-2)+(-2)(-2)4+(-2)(-2)4(-1)+(-2)(-2)4(-1)2 \\
&= -2+4+16-16-32 \\
&= -30
\end{aligned}
$$

である。

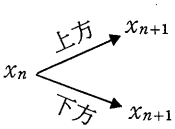
3.3　乗加法型関数の最適化(2)

まず，図 4 においていわゆる最短ルート問題

$$
\begin{aligned}
&\min \quad \sum_{n=1}^{5} g_n(x_n, x_{n+1}) \\
&\text{s.t.} \quad \text{(i)} \quad x_{n+1} \in A_n(x_n) \qquad 1 \leqq n \leqq 6
\end{aligned}
\tag{23}
$$

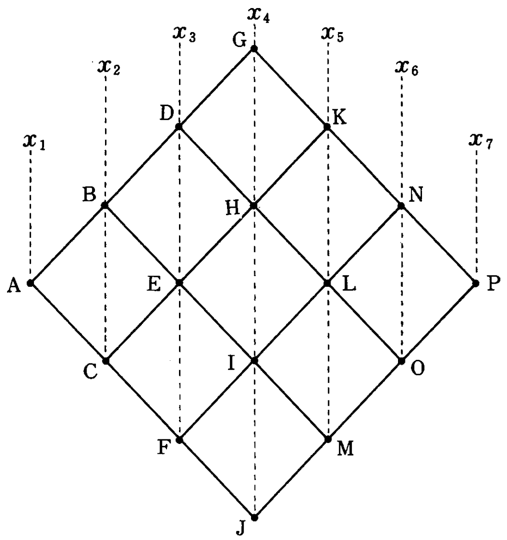
を考えよう。ただし

$$
g_n(x_n, x_{n+1}) = \begin{cases} +1 \\ \\ -1 \end{cases}
$$



のとき。

この(いわゆる)最短ルート問題では明かにすべてのルートが最短ルートであり，その値は 0 である。一般に，8 つの(単一)最適ルート問題



アークは左 ⟶ 右

上方は+1
下方は−1

たとえば
$g_1(A, B) = +1$
$g_2(C, F) = -1$
・
・
・
$g_6(O, P) = +1$

図 4

$$\text{Max (or min)} \quad \sum_{n=1}^{5} g_n(x_n, x_{n+1}) \quad \text{s.t.} \quad \text{(i)} \quad x_{n+1} \in A_n(x_n) \qquad 1 \leqq n \leqq 5 \tag{24}$$

$$\text{Max (or min)} \quad \prod_{n=1}^{5} g_n(x_n, x_{n+1}) \quad \text{s.t.} \quad \text{(i)} \quad x_{n+1} \in A_n(x_n) \qquad 1 \leqq n \leqq 5 \tag{25}$$

$$\text{Max (or min)} \quad \bigvee_{n=1}^{5} g_n(x_n, x_{n+1}) \quad \text{s.t.} \quad \text{(i)} \quad x_{n+1} \in A_n(x_n) \qquad 1 \leqq n \leqq 5 \tag{26}$$

$$\text{Max (or min)} \quad \bigwedge_{n=1}^{5} g_n(x_n, x_{n+1}) \quad \text{s.t.} \quad \text{(i)} \quad x_{n+1} \in A_n(x_n) \qquad 1 \leqq n \leqq 5 \tag{27}$$

ではすべてのルートが最適ルートであり，その最適値はそれぞれ

$$U^6(A) = u^6(A) = 0 \tag{24$'$}$$

$$U^6(A) = u^6(A) = -1 \tag{25$'$}$$

$$U^6(A) = u^6(A) = 1 \tag{26$'$}$$

$$U^6(A) = u^6(A) = -1 \tag{27$'$}$$

である。

つぎに，図4において，積和の値を最小にする問題

$$\begin{aligned} &\min \quad g_1 + g_1 g_2 + \cdots + g_1 g_2 \cdots g_6 + g_1 g_2 \cdots g_6 k \\ &\text{s.t.} \quad \text{(i)} \quad x_{n+1} \in A_n(x_n) \quad 1 \leqq n \leqq 6 \end{aligned} \tag{28}$$

を考えよう。これを後向きの両帰式で解くために

$$\begin{aligned} &U^0(x_7) = u^0(x_7) = k(x_7) = k(N) = 0 \\ &U^{7-n}(x_n) = \mathrm{Max}\,[g_n + g_n g_{n+1} + \cdots + g_n g_{n+1} \cdots g_6 + g_n g_{n+1} \cdots g_6 k \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad | x_{m+1} \in A_m(x_m) \qquad n \leqq m \leqq 6] \\ &u^{7-n}(x_n) = \min\,[g_n + g_n g_{n+1} + \cdots + g_n g_{n+1} \cdots g_6 + g_n g_{n+1} \cdots g_6 k \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad | x_{m+1} \in A_m(x_m) \qquad n \leqq m \leqq 6] \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_n \in S_n, \quad 1 \leqq n \leqq 6 \end{aligned} \tag{29}$$

とすると，両帰式

$$\begin{cases} U^{7-n}(x_n) = \underset{\substack{x_{n+1} \in A_n(x_n) \\ g_n(x_n, x_{n+1}) \leqq 0}}{\mathrm{Max}} [g_n(x_n, x_{n+1}) + g_n(x_n, x_{n+1}) u^{6-n}(x_{n+1})] \\ \qquad\qquad \vee \underset{\substack{x_{n+1} \in A_n(x_n) \\ g_n(x_n, x_{n+1}) > 0}}{\mathrm{Max}} [g_n(x_n, x_{n+1}) + g_n(x_n, x_{n+1}) U^{6-n}(x_{n+1})] \\ u^{7-n}(x_n) = \underset{\substack{x_{n+1} \in A_n(x_n) \\ g_n(x_n, x_{n+1}) \leqq 0}}{\min} [g_n(x_n, x_{n+1}) + g_n(x_n, x_{n+1}) U^{6-n}(x_{n+1})] \\ \qquad\qquad \wedge \underset{\substack{x_{n+1} \in A_n(x_n) \\ g_n(x_n, x_{n+1}) > 0}}{\min} [g_n(x_n, x_{n+1}) + g_n(x_n, x_{n+1}) u^{6-n}(x_{n+1})] \end{cases} \tag{30}$$

は

$$\begin{cases} U^{7-n}(x_n) = [g_n(x_n, x'_{n+1}) + g_n(x_n, x'_{n+1}) u^{6-n}(x'_{n+1})] \\ \qquad\qquad \vee [g_n(x_n, x_{n+1}) + g_n(x_n, x_{n+1}) U^{6-n}(x_{n+1})] \\ u^{7-n}(x_n) = [g_n(x_n, x'_{n+1}) + g_n(x_n, x'_{n+1}) U^{6-n}(x'_{n+1})] \\ \qquad\qquad \wedge [g_n(x_n, x_{n+1}) + g_n(x_n, x_{n+1}) u^{6-n}(x_{n+1})] \end{cases} \tag{31}$$

になる。ただし x_{n+1}，x'_{n+1} は x_n からの直後のアークの上下対応

$$\begin{tikzcd} & x_{n+1} \\ x_n \arrow[ur, "\text{上方}"] \arrow[dr, "\text{下方}"'] & \\ & x'_{n+1} \end{tikzcd}$$

によってそれぞれ一意に定まる。特に，$g_n(x_n, x_{n+1}) = +1$，$g_n(x_n, x'_{n+1}) = -1$ だから，(31) は更に

$$\begin{cases} U^{7-n}(x_n) = [(-1)(1+u^{6-n}(x_{n+1}))] \vee [1+U^{6-n}(x_{n+1})] \\ u^{7-n}(x_n) = [(-1)(1+U^{6-n}(x_{n+1}))] \wedge [1+u^{6-n}(x_{n+1})] \end{cases} \tag{32}$$

になる。両帰式(32)を終端条件

$$U^0(P) = u^0(P) = 0$$

の下で解くと，次の結果が得られる。

$U^0(P) = 0$		$u^0(P) = 0$	
$U^1(N) = -1$	$\pi_6^*(N) = P$	$u^1(N) = -1$	$\hat{\sigma}_6(N) = P$
$U^1(O) = 1$	$\pi_6^*(O) = P$	$u^1(O) = 1$	$\hat{\sigma}_6(O) = P$
$U^2(K) = 0$	$\pi_5^*(K) = N$	$u^2(K) = 0$	$\hat{\sigma}_5(K) = N$
$U^2(L) = 0$	$\pi_5^*(L) = N$	$u^2(L) = -2$	$\hat{\sigma}_5(L) = O$
$U^2(M) = 2$	$\pi_5^*(J) = O$	$u^2(M) = 2$	$\hat{\sigma}_5(M) = O$
$U^3(G) = -1$	$\pi_4^*(G) = K$	$u^3(G) = -1$	$\hat{\sigma}_4(G) = K$
$U^3(G) = -2$	$\pi_4^*(G) = K$ or L	$u^3(H) = -1$	$\hat{\sigma}_4(H) = L$
$U^3(I) = 1$	$\pi_4^*(I) = L$	$u^3(I) = -3$	$\hat{\sigma}_4(I) = M$
$U^3(J) = 3$	$\pi_4^*(J) = M$	$u^3(J) = 3$	$\hat{\sigma}_4(J) = M$
$U^4(D) = 0$	$\pi_3^*(D) = G$ or H	$u^4(D) = -2$	$\hat{\sigma}_3(D) = H$
$U^4(E) = 2$	$\pi_3^*(E) = H$ or I	$u^4(E) = -2$	$\hat{\sigma}_3(E) = I$
$U^4(F) = 2$	$\pi_3^*(F) = I$	$u^4(F) = -4$	$\hat{\sigma}_3(F) = J$
$U^5(B) = 1$	$\pi_2^*(B) = D$ or E	$u^5(B) = -3$	$\hat{\sigma}_2(B) = E$
$U^5(C) = 3$	$\pi_2^*(C) = E$ or F	$u^5(C) = -3$	$\hat{\sigma}_2(C) = F$
$U^6(A) = 2$	$\pi_1^*(A) = B$ or C	$u^6(A) = -4$	$\hat{\sigma}_1(A) = C$.

したがって，最大値は $U^6(A) = 2$，最小値は $u^6(A) = -4$ で，この問題(積和を最適にするという意味での) 最大ルート群，最小ルート群はそれぞれ図 5，図 6 のゴチック体で示されるルートである。

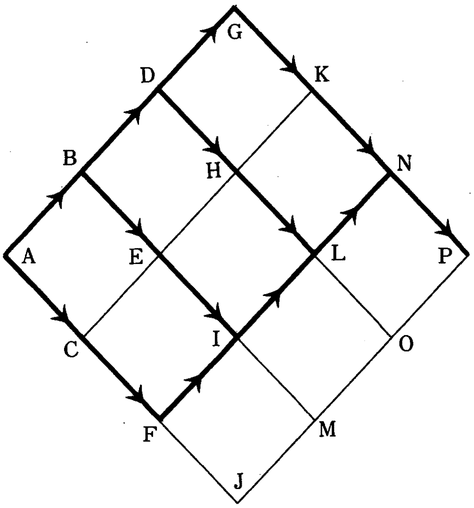


図 5　最大ルート群

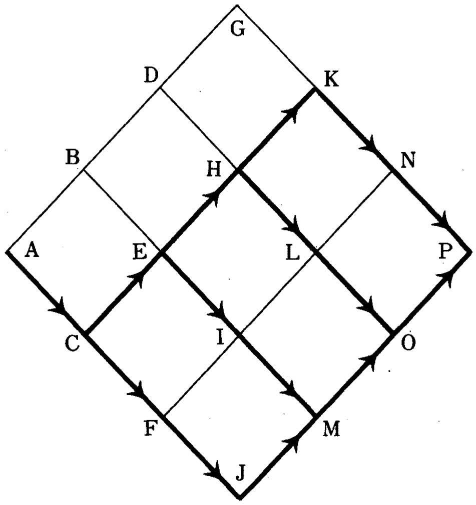


図 6　最小ルート群

たとえば，ルート $A \xrightarrow{1} B \xrightarrow{1} D \xrightarrow{-1} H \xrightarrow{-1} L \xrightarrow{1} N \xrightarrow{-1} P$ は最大値

$$\begin{aligned}&1+1\cdot1+1\cdot1(-1)+1\cdot1(-1)(-1)+1\cdot1(-1)(-1)1+1\cdot1(-1)(-1)1(-1)\\&=1+1-1+1+1-1\\&=2\end{aligned}$$

に達し，ルート $A \xrightarrow{-1} C \xrightarrow{1} E \xrightarrow{-1} I \xrightarrow{-1} M \xrightarrow{1} O \xrightarrow{1} P$ は逆に最小値

$$\begin{aligned}&(-1)+(-1)1+(-1)1(-1)+(-1)1(-1)(-1)+(-1)1(-1)(-1)1+(-1)1(-1)\\&\cdot(-1)1\cdot1\\&=-1-1+1-1-1-1\\&=-4\end{aligned}$$

になる。

参 考 文 献

[1] R. Bellman, Dynamic Progrmming, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1957.

[2] R. Bellman, Introduction to the Mathematical Theory of Control Processes, Vol. I, Linear Equations and Quadratic Criteria, Academic Press, NY, 1967.

[3] R. Bellman, Introduction to the Mathematical Theory of Control Processes, Vol. II, Nonlinear Processes, Academic Press, NY, 1971.

[4] 岩本誠一，逐次決定過程としての動的計画論(1)，オペレーションズ・リサーチ **22** (1977)，427-434

[5] 岩本誠一，逐次決定過程としての動的計画論(2)，オペレーションズ・リサーチ **22** (1977)，496-501

[6] 岩本誠一，動的計画の理論と応用，数学 **31** (1979)，331-348

[7] 岩本誠一，「動的計画論」，九州大学出版会，1987年

[8] 岩本誠一，動的計画の最近の進歩，第2回 RAMP シンポジウム論文集，Proceedings of the Second RAMP (Research Association of Mathematical Programming) Symposium, 1990年11月，京都リサーチパーク，pp. 129-140.

[9] A. Kaufman, Graphs, Dynamic Programming and Finite Games, Academic Press, NY, 1967.

[10] L.G. Mitten, Composition principle for synthesis of optimal processes, Operations Res. **12** (1964), 610-619.
[11] G.L. Nemhauser, Introduction to Dynamic Programming, Wiley, NY, 1966.
[12] M. Sniedovich, A class of nonseparable dynamic programming problems, J. Opt. Theo. Appl. **52** (1987), 111-121.
[13] M. Sniedovich, Analysis of a class of fractional programming problems, Math. Prog. **43** (1989), 329-347.