

不確実性下の製品開発投資における参入と撤退の決定問題：商品が2個の場合

時永，祥三

<https://doi.org/10.15017/4492955>

出版情報：経済学研究. 58 (1), pp.69-85, 1992-09-10. 九州大学経済学会
バージョン：
権利関係：



不確実性下の製品開発投資における参入と撤退の決定問題

— 商品が2個の場合 —

時 永 祥 三

1. ま え が き

新たな製品を開発する場合の投資決定の理論に関して、近年、投資環境の不確実性を考慮した議論が展開されている。設備投資や新製品開発プロジェクトなどは、もともと成功する保証はないので、各種の要因を不確実性として導入し解析するところみがなされている。その問題の定式化はさまざまであるが、最近、投資を行う時期を決定する、あるいはこれとは反対に投資している場合にペイしないと判断し撤退する時期を決定する問題が議論されている[1]—[7]。このような定式化は従来の分散投資の枠組みで得られているCAPMに類似した結果[8]—[10]や、枯渇資源を利用した製品加工の問題[11]—[12]などとは異なる分析視角を与えている。特に、投資による参入や撤退の時期に注目した解析手法では、製品価格の変動や生産レベルなどに代表される要因を確率過程として記述する方法を採用しており、従来の確率や分布関数[13]あるいはゲームの理論[14]による枠組みとは異なる展開を示している。不確実性を議論する場合に確率を導入する方法が採用されるが、そもそも確率をどのようにして決定するのかは大きな問題であり、また、確定的な結果に単に確率が含まれるだけのプリミティブな結論も少なくない。

本論文では、企業の製品開発における投資決定を行う場合に、現在生産している商品と開発対象である商品の2個の商品価格により、投資による参入や撤退の時期を決定する問題を考察する。具体的には、企業が製品1をすでに製造販売しており、この利益をもとに製品2の開発にどの程度、またいつ投資を行うべきであるかを決定する問題について、価格が確率過程（ブラウン運動）に従って変動している仮定のもとで解析する。製品開発投資の参入・撤退のタイミングに関する議論は、McDonald and Siegel (1986年) [1], Pindyck (1987年) [4], Bertola (1987年) [3], Dixit (1989年) [5]—[7]などにより行われている。特に、Dixitによる解析方法では製品開発投資の参入とこれよりの撤退を2つの状態として区別し、投資環境が変化した場合に対応するモデル化を行っており、これを含まずに投資や退去が継続されるMcDonald and Siegelらのモデルの不備を指摘している。また、Dixitのモデルでは、投資により参入した後に撤退を行うことによるSunk Costや低価格における制限との関連を考察しており、結論的には参入を開始するタイミング、投資を継続する時期、撤退のタイミングなどが価格情報として示されている。このようにDixitの論文では単一の製品開発を議論しているが、本論文ではこれを2商品に拡大し、市場で優位にある商品を生産している企業の新製品開

発の戦略を考察してみる。すなわち、商品 1 をヒット商品とし、これにより得られる利益をもとに新商品 2 を開発する場合に、商品 2 の価格だけではなく商品 1 の価格も変動する場合に、これが開発戦略に及ぼす影響を解析する。結論的には、商品 1 による利益フローが大きい場合には商品 2 の価格が低いレベルで参入でき、逆に価格が上昇するまで撤退を遅らせることができるが、2 つの商品の価格の間に強い相関があるほど投資への参入と撤退のタイミングが自由に選択できる範囲が狭まり、参入・撤退により安定的に利益を確保できる優位性が薄れていくことがわかる。

以下では、第 2 章において投資決定問題を商品価格の変動に応じて参入と撤退を決定する問題として定式化する方法について述べ、Dixit により得られている結果を整理する。第 3 章では、本論文で考察するヒット商品 1 とこの利益により新規に開発しようとしている商品 2 が存在する場合へとモデルを拡張する場合を考察する。第 4 章では、第 3 章で得られた結果について、さまざまな不確実性の条件下での解析的な振る舞いについて述べる。

2. 参入・撤退の基本モデル

2.1 確率分布関数による価格記述

製品開発投資のモデルとしてはさまざまなものが考えられているが、いずれも投資環境の不確実性に関する要因を考慮したモデルとなっている。ここでは、1) 投資期間中での商品価格の変動、2) Sunk Cost、3) 投資・撤退のタイミングについてモデル化した Dixit によるモデルをとりあげる。最初に価格変動を確率分布関数により表現するモデルについて述べる [6]。

いま、製品開発投資の対象となっている商品の時刻 t での価格を状態変数 X_t であらわし、この価格変動やその他の環境について以下のように記述する。

価格遷移の確率分布関数： $F(X', X) = \text{Prob}\{X_{t+1} \leq X' \mid X_t = X\}$

開発投資参入にともなうコスト、撤退時サンクされる： K

投資を行っている場合の利得関数： $V_0(X)$

投資を行っていない場合の利得関数： $V_1(X)$

商品販売による利益フロー (Flow Profit)： $\pi(X_t)$

資本コストあるいはディスカウント率： δ

以上の定義において、関数 $F(\cdot)$ はすべての X' について X の減少関数とする。利得関数 $V_0(X)$ 、 $V_1(X)$ は動的計画法などで Value Function と呼ばれているものであるが、ここでは投資に運用される原資と考え利得関数とよんでおく。

開発投資を行っているか (状態 1 とする)、まだ投資せずに待っているか (状態 0) どうかに応じて 2 種類の利得関数を用いてモデルを記述している。いま、離散時間を仮定すると、投資を行っている状態では次の再帰方程式が成り立つ。

$$V_1(X) = \pi(X) + \delta \int V_1(X') dF(X', X) \quad (1)$$

投資を行っていない状態 0 については、投資を行っている場合に撤退するケースも考えられるので、次に示すような再帰方程式が成り立つ。

$$V_o(X) = \max [V_i(X) - K, \delta \int V_o(X') dF(X', X)] \quad (2)$$

ここで、 K は投資に要する費用であり、これにより $V_i(X)$ を獲得するためのオプション行使価格である。逆に撤退する場合にはサックされる。これらの方程式を満足する X の存在についての証明については省略するが、通常の方法を適用することが可能である。

ここで、2つの利得関数の差により次の関数を定義する。

$$\Psi(X) = V_i(X) - V_o(X) \quad (3)$$

式 (1) ~ (3) より次の再帰方程式を得る。

$$\Psi = \min [K, \pi(X) + \delta \int \Psi(X') dF(X', X)] \quad (4)$$

ここで、関数 $\pi(X)$ は増加関数であるので、式 (4) は非減少関数 $\Psi(X)$ の自分自身の部分空間を定義する。不動点定理を用いて、次の関係を満足する X の値 X^* を定義する。

$$\pi(X^*) + \delta \int \Psi(X') dF(X', X^*) = K \quad (5)$$

以下の議論で分かるように、商品の価格 X が $X \geq X^*$ となり X^* をこえた時点 (タイミング) で投資を開始すればよいことが分かる。式 (4), (5) より $K < \pi(X^*) + \delta K$, すなわち $\pi(X^*) / (1 - \delta) > K$ となるので、 X^* は投資を開始すべき価格を表現している。

次に、 $X < X^*$ の範囲について不動点を用いて定式化すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \Psi(X) = & \pi(X^*) + \delta \int^{X^*} \Psi(X') dF(X', X) \\ & + \delta K [1 - F(X, X^*)] \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、式 (4) より $X \geq X^*$ については

$$\Psi(X) = K, \text{ あるいは } V_o(X) = V_i(X) - K \quad (7)$$

となる。式 (6) に示すように、 $X' > X^*$ の範囲の確率密度関数 $f(X', X)$ は、関数 $\Psi(X)$ の挙動には影響をおよぼさない。

このように商品の価格が上昇する局面での投資参入のシナリオについては条件を求めることができる。次に、商品の価格が低迷している場合に、投資を解消して撤退するケースについて考察する。 X が小さいときにはフロー $\pi(X)$ は負の値をとると仮定し、もしこの値が L 以下である場合には投資を解消することにする。この仮定のもとでは、式 (1) の関係は次のように書きなおされる。

$$\begin{aligned} V_i(X) = & \max [V_o(X) - L, \pi(X) \\ & + \delta \int V_i(X') dF(X', X)] \end{aligned} \quad (8)$$

式 (4) ~ (7) で行った議論と同様な手順により、投資をあきらめるべき商品価格のレベル $\hat{X}$ は、次の関係式により求められる。ここで、 L は撤退の費用と考えられ、 K と同様にオプション行使価格を与える。

$$\Psi(\hat{X}) = -L, \text{あるいは } V_1(\hat{X}) = V_0(\hat{X}) - L \quad (9)$$

同様に、 $X \leq \hat{X}$ については $\Psi(\hat{X}) = -L$ となる。

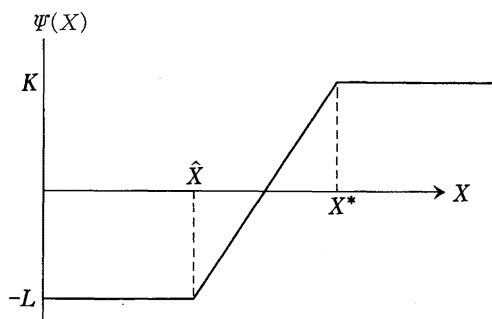


図1 関数 $\Psi(X)$ の挙動

このようにして、商品価格が $X \geq X^*$ あるいは $X \leq \hat{X}$ の状態にいたれば投資の開始、あるいは撤退のアクションがとられることになる。逆に、これ以外の状態、すなわち $\hat{X} \leq X \leq X^*$ の状態にあれば、投資への参入、不参入については変更が行われない（投資していれば継続、投資していないならば待つ）。関数 $\Psi(X)$ の具体的な形については得られていないが、概略を示せば図1のようになる。このように、特定の価格範囲では投資、非投資を維持することが最適政策となる興味深い現象が現れる。Dixit は

これを電磁気学に現れる磁性体の磁化現象になぞらえて「ヒステリシス」と呼んでいる。

2.2 ブラウン運動による価格記述

開発投資への参入・撤退を決定する関数 $\Psi(X)$ の具体的な形を求めるために、商品の価格変動をブラウン運動により記述する。価格の変動をブラウン運動により記述することは証券投資などで一般的に用いられており、これらの中でも株式とオプション価格の公式は良く知られている。ここで述べる価格変動の仮定も、基本的には株価の変動と同様の考え方である。

いま、商品価格 X は次のブラウン運動に従って変動しているとする。

$$dX/X = \mu dt + \sigma dz \quad (10)$$

いま、関数 $\Psi(X)$ については $\hat{X} \leq X \leq X^*$ の範囲の挙動だけが問題となっているので、式(2)、(8)の右辺を確率微分についての伊藤のレンマ (Ito's Lemma) を用いて展開すると次の関係式が成り立つ [15]。

$$\frac{1}{2} \sigma^2 X^2 \Psi''(X) + \mu X \Psi'(X) - \rho \Psi(X) + \pi(X) = 0 \quad (11)$$

これは X についての2次常微分方程式であるので、次の形の一般解をもっている。

$$\Psi(X) = AX^{-\alpha} + BX^{\beta} + \Pi(X) \quad (12)$$

ここで、 A 、 B は未知の定数、 α と $-\beta$ は次の2次方程式の根であり、 $-\alpha < 0$ 、 $\beta > 1$ である。

$$\phi(x) = \rho - \mu x - \frac{1}{2} \sigma^2 x(x-1) = 0 \quad (13)$$

また、 $\Pi(X)$ は次の積分により計算される。

$$\Pi(X) = E \left[\int_0^{\infty} \pi(X) \exp(-\rho t) dt \mid X_0 = X \right] \quad (14)$$

ここで、項 $AX^{-\alpha}$ 、 BX^{β} は、それぞれ投資待ち、投資実施による利得関数に対応しており、株価におけるオプション価格に対応している。 X の特定の値、 X^* と $\hat{X}$ はこれらのオプションの行使価格に対

応しているので、境界条件として次のものが採用される。

$$\Psi(X^*) = K, \Psi(\hat{X}) = -L \quad (15)$$

また、関数 $\Pi(X)$ は正しいタイミングで投資がなされた場合の利益の現在価格を表現している。

関数 $\Psi(X)$ の $X \geq X^*$, $X \leq \hat{X}$ での挙動は $\hat{X} \leq X \leq X^*$ での関数の形状と滑らかに連続結合される必要があるので、次の境界条件を付加する。

$$\Psi'(X^*)=0, \text{あるいは } V_0'(X^*) = V_1'(X^*)$$

$$\Psi'(\hat{X})=0, \text{あるいは } V_0'(X) = V_1'(X)$$

(16)

この関数 $\Psi(X)$ の概略を図2に示している。

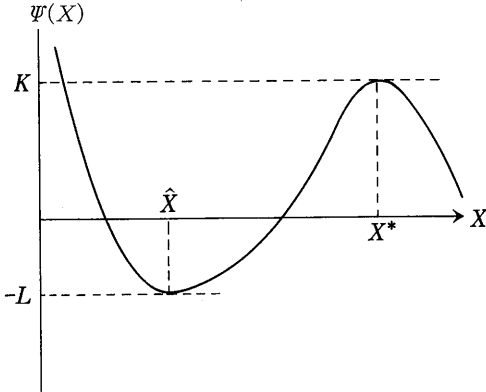


図2 区間解析のための関数 $\Psi(X)$ の挙動

2.3 関数 $\Psi(X)$ の性質

式(11)では関数 $\Psi(X)$ についての微分方程式だけが示されているが、これと同様な方程式が $V_0(X)$, $V_1(X)$ についても成立する。

$$\frac{1}{2}\sigma^2 X^2 V_0''(X) + \mu X V_0'(X) - \rho V_0(X) = 0 \quad (17)$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 X^2 V_1''(X) + \mu X V_1'(X) - \rho V_1(X) + \pi(X) = 0$$

関数 $V_0(X)$, $V_1(X)$ は関数 $\Psi(X)$ と同様の式を満足しているので、式(12), (13)に示した量を用いて解を記述することができる。しかし、 $V_0(X)$, $V_1(X)$ の物理的な意味から、 $V_0(X) = BX^\beta$, $V_1(X) = AX^{-\alpha} + \Pi(X)$ となる。ここで、 $A, B \geq 0$ となることがわかる。関数 $\Pi(X)$ は投資による利益を示しているので、項 $AX^{-\alpha}$ は投資からの撤退をタイミングよく行うことによる利益であり、株価でのオプション価格に相当している。これより類推して、現在投資していない企業がもつ項 BX^β はタイミングよく投資を行うことによるオプション価格に相当している。価格が非常に低い場合には投資へ移る確率は非常に低いので、 $V_0(X)$ は $X^{-\alpha}$ の項をもたないし、逆に価格が高い場合には撤退は起こりえないので、 $V_1(X)$ は X^β の項をもたない。このような解釈を $V_0(X)$, $V_1(X)$ に与えておけば、関数 $\Psi(X)$ の振る舞いについて理解することが容易になる。

関数 $\Psi(X)$ を式(13)～(15)の具体的な条件のもとで解くため、

$$\pi(X)=X-W, L=\infty, A=0 \quad (18)$$

とした場合には,

$$X^* = \frac{\rho-\mu}{\rho} \cdot \frac{\beta}{\beta-1} \cdot (W+\rho K) \quad (19)$$

となり, 特に, $\mu=0, \sigma=0.2, \rho=0.04$ の場合には $\beta=2$ となるので, 商品生産の平均コストの2倍まで X が上昇したときが参入のタイミングであることが示される [6]。

3. 2つの商品のもとの投資問題

3.1 商品開発のモデル

第2章では1つの商品開発について資金を投資するかどうかの問題が議論され, Dixit による結果を引用してきた。しかし, 現実投資問題を考える場合には, 企業はすでに市場である程度の利益を上げている商品 (これを商品1とする) を生産しており, 商品のライフサイクルや市場の動向を見ながら, 次に新製品 (商品2とする) を開発することがある。この考え方は, 複数の商品を組み合わせ生産する, いわゆる市場ポートフォリオにも適用される概念であろう。このような事情を考慮し, この章では以下のように問題を拡張する。

現在生産している商品1の価格: 状態変数 Y

価格遷移の確率分布関数: $G(Y', Y) = \text{Prob}\{Y_{t+1} \leq Y' \mid Y_t = Y\}$

開発を計画している商品2の価格: 状態変数 X

これ以外の変数, すなわち Sunk Cost K , 利益フロー $\pi(X)$, ディスカウント率 δ などについては第2章の基本モデルと同じであると仮定する。関数 $G(\cdot)$ はすべての Y' について Y の減少関数とする。

商品2の開発のために利益関数から一定の額 I を支出することとし, 投資を行っている場合の利益関数を $V_1(X, Y)$, 投資を行っていない場合の利益関数を $V_0(X, Y)$ とする。商品1の販売による利益は利益フローとして評価されると仮定し, これを価格 Y の関数と考え, 項を $P(Y)$ とする。

最初に投資の全体的な性質を見るために, 商品1の価格が一定 ($Y=\text{一定}$) の場合を仮定する (販売すれば必ず利益が得られる環境)。式 (1) ~ (3) と同様の定式化を行うと, 以下のようになる。

$$V_1(X, Y) = \pi(X) + P(Y) + \delta \int V_1(X', Y) dF(X', X) \quad (20)$$

同様に,

$$V_0(X, Y) = \max [V_1(X, Y) - K + P(Y), P(Y) + \delta \int V_0(X', Y) dF(X', X)] \quad (21)$$

$V_1(X, Y)$ に対して価格低迷の場合の撤退を考慮したときには

$$V_1(X, Y) = \max [V_0(X, Y) - L + P(Y), \pi(X) + P(Y)]$$

$$+\delta \int V_1(X', Y) dF(X', X)] \quad (22)$$

これらの関数を第2章の形式と比較してみると、結論的にはレベル L, K を修正することにより同じ形式の挙動として記述できることが分かる。新しい L, K を l, k とすると、

$$l = L - P(Y), \quad k = K - P(Y) \quad (23)$$

参入と撤退を継続する中間の挙動を決定する関数 $\Psi(X)$ については、以下のような理由により同じ形式となる。

関数 $\Psi(X)$ を決定する2次の常微分方程式は伊藤のレンマが同様に適用されるので、式(11)の左辺の第1～第3項は同じとなる。この第3項までの係数により、 $\Psi(X)$ の一般解の第1項、第2項である $AX^{-\alpha}$ 、 BX^{β} の α, β が決定されるので、同じ挙動を示す。式(11)の第4項は商品1の生産と利益により修正されるが、この影響は一般解の第3項である $\Pi(X)$ としてしか反映されない。関数 $\Pi(X)$ の形はもとの形からずれることになるが、 $\bar{X} \leq X \leq X^*$ の範囲での単調性は保存される。

このようなことから、商品1の価格 Y とこれによる利益を一定額とする場合には、参入を決定する価格 X^* は減少し、撤退を決定する価格 $\bar{X}$ は増大する。この傾向は Y が大きい程顕著である。すなわち、商品1により安定的に利益を確保できている場合には、商品2に対して多少リスクをおかして投資することが可能となり、商品1による全体の利益確保が確保されることになる。すなわち、商品2への参入、撤退の決断が大胆に行えることを意味している。逆に、不参入への転換については X が高い価格であっても撤退することが可能であり、商品2の開発リスクを回避し商品1のみの生産に集中することが有利になる。

3.2 商品1の価格が不確実の場合の特性

次に、商品1の市場での価格が不確実な場合に、3.1の後半で述べたように投資戦略を大胆に構えることが可能かどうかを検討してみる。このとき、商品2の生産に投資し市場に参入しているときに利益関数 $V_1(\cdot)$ 、投資していないときの利益関数 $V_0(\cdot)$ はともに、状態変数 X, Y の関数であるとする。 $V_1(X, Y)$ 、 $V_0(X, Y)$ についての再帰方程式は以下ようになる。

$$V_0(X, Y) = \max[V_1(X, Y) - K + P(Y), P(Y) + \delta \iint V_0(X, Y) dF(X', Y) dG(Y', Y)] \quad (24)$$

$$V_1(X, Y) = \max[V_0(X, Y) - L + P(Y), P(Y) + \pi(X) + \delta \iint V_1(X, Y) dF(X', X) dG(Y', Y)] \quad (25)$$

式(24)、(25)により果して参入や撤退を決定する商品価格2のレベルが定まるかどうかを検討してみる。第2章とは異なり、商品2の価格の特定の範囲、例えば $\bar{X} \leq X \leq X^*$ 、 $\bar{Y} \leq Y \leq Y^*$ において関数 $V_0(X, Y)$ 、 $V_1(X, Y)$ が単調な関数として振る舞うかどうかは保証されていない。しかし、もしこれら関数が変数 X については単調な関数となることが証明された場合には、商品1の価格の特性に応じた参入・撤退のあり方の選択の見通しが立てられる。

式 (24), (25) の右辺に注目しながら伊藤のレンマを適用し, 変数変換により $X = \log X$, $Y = \log Y$ をあらためて変数 X , Y とおくと, 変数 X , Y についての 2 次の偏微分方程式が得られる。ここで, 定数については, $\sigma_X/2$, $\sigma_Y/2$ をあらためて σ_X , σ_Y , $\mu_X/2$, $\mu_Y/2$ をあらためて μ_X , μ_Y としている。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\sigma_X^2 V_0^{XX}(X, Y) + \frac{1}{2}\sigma_Y^2 V_0^{YY}(X, Y) + \frac{1}{2}\sigma_{XY}^2 V_0^{XY}(X, Y) + (\mu_X - \sigma_X^2) V_0^X(X, Y) \\ & + (\mu_Y - \sigma_Y^2) V_0^Y(X, Y) - \rho V_0(X, Y) + P(Y) = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\sigma_X^2 V_1^{XX}(X, Y) + \frac{1}{2}\sigma_Y^2 V_1^{YY}(X, Y) + \frac{1}{2}\sigma_{XY}^2 V_1^{XY}(X, Y) + (\mu_X - \sigma_X^2) V_1^X(X, Y) \\ & + (\mu_Y - \sigma_Y^2) V_1^Y(X, Y) - \rho V_1(X, Y) + P(Y) - \pi(X) = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

関数 $V_0(\cdot)$, $V_1(\cdot)$ の肩符 X , XY は, それぞれ変数 X についての 1 次微分, 変数 X と Y のそれぞれについての 1 階微分などを意味している。あとでの取扱を簡単にするため, $\mu_X - \sigma_X^2$, $\mu_Y - \sigma_Y^2$ をあらためて μ_X , μ_Y としておく。

式 (26), (27) より関数 $V_1(\cdot)$ と $V_0(\cdot)$ との差の関数を定義することができるので, 同じ記号を用いる。

$$\Psi(X, Y) = V_1(X, Y) - V_0(X, Y) \quad (28)$$

この関数により式 (26) (27) をまとめると,

$$\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sigma_{ij}^2 \sum_{i,j} \Psi^{ij}(X, Y) + \sum_i \mu_i \Psi(X, Y) - \rho \Psi(X, Y) - P(Y) - \pi(Y) = 0 \quad (29)$$

肩符 i , ij の意味は $V_1(\cdot)$, $V_0(\cdot)$ の場合と同様である。関数 $V_1(\cdot)$, $V_0(\cdot)$, $\Psi(\cdot)$ の方程式は 2 次の係数の性質により楕円形となる。

$$aW_{XX} + 2bW_{XY} + cW_{YY} + \dots = 0 \quad (30)$$

$$a = \sigma_{XX}^2, 2b = 2\sigma_{XY}^2, c = \sigma_{YY}^2$$

$$D = b^2 - ac = \sigma_{XY}^4 - \sigma_{XX}^2 \sigma_{YY}^2 < 0$$

ここで, 関数 $W(\cdot)$ は $V_1(\cdot)$, $V_0(\cdot)$ あるいは $\Psi(\cdot)$ を代表し, 微分を示す肩符は添字へと変更している。この方程式は正確には楕円形の非斉次の場合に相当しており, 一般的な解析解を求めることは不可能である。そこで, 以下ではいくつかの簡単化できる場合についての解の性質についての検討を行う。なお, 問題を標準形として取り扱う都合上, しばらく

$$\text{仮定 1: } \mu_X = \mu_Y = 0 \quad (31)$$

を仮定しておく。最終的な解を検討する前に以下のような仮定のもとで考察する場合があることを断っておく。

$$\text{仮定 2: 商品 1 と商品 2 の価格変動が無相関 } (\sigma_{XY} = 0) \quad (32)$$

$$\text{仮定 3: 商品 1 の販売利益がゼロ } (P(Y) = 0) \quad (33)$$

3.3 問題の基本的解法

商品 1 と商品 2 に対して何も条件を課さない場合には解を解析的に求めることは不可能である。そ

ここで、条件を課した場合の解を求め、これをもとにして本来の解を予測する必要がある。基本となる偏微分方程式としてはヘルムホルツ形のものであるが、一般にヘルムホルツ形とよばれているものとは異なること、右辺に強制項ともいえる非斉次項を含む形式であり、グリーン関数による積分表現で解が得られることなどに注意する必要がある。まず、偏微分方程式の解ではないが、これを推測するもとになる問題を解いてみる。

いま、偏微分方程式の左辺に2次の微分項しか存在せず、かつ、右辺がゼロの場合を考えてみる。これは関数 $W(\cdot) = V_0(\cdot)$ のときに相当する。方程式は

$$\Delta W - 2\rho W = 0 \quad (34)$$

となる。ただし、変数変換

$$x = \sigma_{xx}X, \quad y = \sigma_{yy}Y \quad (35)$$

を用いる。更に、変数を局座標へ変換する。

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (36)$$

解が変数分離で表現されていると仮定する。

$$W(r, \theta) = R(r) \cdot S(\theta) \quad (37)$$

このとき、もとの偏微分方程式は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R} \left[\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - 2r^2 \rho R \right] \\ &= -\frac{1}{S} \left(\frac{d^2 S}{d\theta^2} \right) = n(n+1) \end{aligned} \quad (38)$$

ただし、式(38)の第1項、第2項ともに第3項である $n(n+1)$ に等しくなるとしている。 $n(n+1)$ については $-n(n+1)$ などの負の定数とすることもできるが、あとでの解の挙動を定めるうえから $n(n+1)$ としておく。

式(38)の第2項の S の解はただちに求まる。

$$S(\theta) = \sin k\theta, \quad \cos k\theta \quad (k = \sqrt{n(n+1)}) \quad (39)$$

これに対して、式(38)の第1項は変換が必要である。

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} \left\{ -2\rho - \frac{n(n+1)}{r^2} \right\} R = 0 \quad (40)$$

この微分方程式はベッセル形に近いが、中カッコのなかの符号が異なっているので、少しことなる解法が必要となる。まず、変数変換をする。

$$R(r) = u(r)/\sqrt{r} \quad (41)$$

このとき、式(40)は

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \left\{ -k^2 - \frac{(n+1/2)^2}{r^2} \right\} u = 0, \quad k^2 = 2\rho \quad (42)$$

この方程式に対してはベッセルの微分方程式と同様の解法が適用可能である。この解法による結果を付録Aに示している。付録Aで定義している関数 $I_\nu(x)$, $L_\nu(x)$ を用いると、式(40)の解は次のように示される。

$$R(r) = I_\nu(kr)/\sqrt{r}, I_\nu(kr)/\sqrt{r} \quad (43)$$

以上において示したように、ヘルムホルツ形の偏微分方程式の場合には、比較的分かりやすい解が得られる。この特性を概観しておく。Dixit の論文で示されているように、投資を行っていない場合に相当する $V_0(X, Y)$ では、変数 X, Y が小さいときには有限の大きさになる必要があるので、式(42)の解のうちで第1番目が採用されることになるであろう。従って、解の形は以下ようになる。

$$V_0(x, y) = (A \sin k\theta + B \cos k\theta) I_\nu(kr)/\sqrt{r} \quad (44)$$

関数 $V_1(X, Y)$, $\Psi(X, Y)$ についての議論は簡単ではない。いま、斉次の場合については式(43)のように解が得られることがわかるので、これをもとにして表現してみる。式(40)の右边がゼロでなく、 X, Y の関数となる。実際には2次微分の係数が1になるように x, y へと変数変換しているので次の形となる。

$$\Delta W(x, y) - 2\rho W(x, y) = f(x, y) \quad (45)$$

式(36), (37)のもとで式(45)を変形しても変数分離により解ける保証はないので、ここでは式(44)を用いて式(45)の解の定性的な性質を把握する。式(45)の右边をデルタ関数により表現した場合の解を $G(x, y, \xi, \eta)$ としたときに、これと $f(x, y)$ との積を積分した関数が $W(x, y)$ となる。

$$\Delta G(x, y, \xi, \eta) - 2\rho G(x, y, \xi, \eta) = -\delta(x-\xi)(y-\eta) \quad (46)$$

$$W(x, y) = \iint G(x, y, \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (47)$$

ここで、式(46)を満足するグリーン関数 $G(\cdot)$ を求めることは不可能であるので、動径方向 r にのみ特性をもつ関数、偏角方向 θ のみ特性をもつ関数とに分けて近似的に考えた場合の振る舞いを求めてみる。いま、変数 x, y を極座標へと変換した関数を書く

$$\Delta G(r, \theta, \xi, \eta) - 2\rho G(r, \theta, \xi, \eta) = -\delta(r-\xi)(\theta-\eta) \quad (48)$$

変数分離された形を考えると、変数 θ に関する2次微分方程式、変数 r に関するベッセル形微分方程式がそれぞれ左辺に現れる。まず、偏角方向 θ のみ特性をもつ関数とした場合には、もとの関数を $W = R(r) \cdot S(\theta)$ として

$$\Delta S(\theta, \eta) - 2\rho r^2 S(\theta, \eta) = -\delta(\theta-\eta) \quad (r: \text{一定}) \quad (49)$$

この微分方程式の解は付録Bより

$$S(\theta, \eta) = e^{-k|\theta-\eta|}/2k, k = \sqrt{2\rho r} \quad (50)$$

この関数の形がわかれば、式(47)による積分の性質も予測できる。これを具体的に示すと次のようになる。

$$W(r, \theta) = \int e^{-k|\theta-\eta|} \cdot f(r, \theta)/2k d\eta$$

$$f(r, \theta) = P(r, \theta), \text{あるいは} P(r, \theta) + \pi(r, \theta) \quad (r: \text{一定}) \quad (51)$$

なお、非斉次方程式の一般的性質により、グリーン関数に斉次のヘルムホルツ方程式の解の線型結合を加えても、これは解となることを付け加えておく。

同様に、 θ が一定で動径方向 r にのみ特性をもつ場合には、左辺が付録Aで示しているようなベッ

セル形の微分方程式となる。しかし、付録Bで示しているように、簡単な変数変換により微分方程式は式(49)と同じ形式とすることができる。

$$\Delta u(r, \xi) - 2\rho u(r, \xi) = -\delta(r - \xi) \quad (52)$$

$$u = rR$$

このとき、 $W(r, \theta)$ は

$$W(r, \theta) = \int e^{-k|r-\xi|} r \int (\xi, \theta) / 2k \, d\xi \quad (\theta: \text{一定}) \quad (53)$$

ここで、関数 $f(r, \theta)$ は式(51)の場合と同じである。

このような結果を利用すれば、非斉次のヘルムホルツ偏微分方程式についても、その性質を把握することができる。ただし、積分表現されたものを実際に積分するにはかなりの数値計算上の工夫を要するし、ここでは解の振る舞いを問題としているので、積分は実行しない。

次に、以下のようなケースがモデルとしては考えられる。

- 1) 商品1と商品2の相関がゼロではない ($\sigma_{XY} \neq 0$)
- 2) ブラウン運動の平均値がゼロではない ($\mu_X \neq 0, \mu_Y \neq 0$)

しかし、これらのケースを解析的に解ける見込みはないので、何らかの変換が必要である。そのなかで、いままでの議論が適用できるケースとしては、次のような場合がある。

よく知られているように、楕円形偏微分方程式は変数についての適当な線型変換

$$x = aX + bY, \quad y = cX + dY \quad (54)$$

により、標準形に変換できる。ただし、次の関係を満足することが必要である。いま、 $\mu_X = \mu_Y = 0$ を仮定すると、もとの偏微分方程式は

$$\begin{aligned} a^2 \sigma_{xx}^2 + 2\sigma_{xy}^2 ab + b^2 \sigma_{yy}^2 &= 1 \\ ac \sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2 (bc + ad) + bd \sigma_{yy}^2 &= 0 \\ c^2 \sigma_{xx}^2 + 2\sigma_{xy}^2 cd + d^2 \sigma_{yy}^2 &= 1 \end{aligned} \quad (55)$$

という変換により

$$W_{xx} + W_{yy} + \gamma W = g(x, y) \quad (56)$$

となる。これは、商品1と商品2との価格に相関がある場合の議論に役立つ。

4. 参入と撤退の戦略

第3章で示した偏微分方程式の解をもとにして、商品1と商品2との関係がある条件を満足する場合の、商品2の開発への参入・撤退の戦略への影響を検討してみる。以下、いくつかの代表的な場合に分けて議論する。

4.1 商品1と商品2の利益フローがゼロの場合

最初に参考例として解析したヘルムホルツ方程式の場合に相当している。式(44)から、関数 $\Psi(r, \theta)$ は

$$\begin{aligned}\Psi(r, \theta) &= [A \sin k\theta + B \cos k\theta] [C L_\nu(kr) + D L_\nu(kr)] / \sqrt{kr} \\ &= [A \sin k\theta + B \cos k\theta] [C (kr)^n + D (kr)^{-(n+1)}]\end{aligned}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (kr)^m \quad (57)$$

特に、 $\theta=0, r=x$ の場合には1変数の場合の $\Psi(x)$ に等しくなるという条件のもとで比較を行ってみる。これは、利得関数が同じレベルで参入や撤退を決定するという仮定である。まず、変数 r は

$$r^2 = x^2 + y^2 = \sigma_{xx}^2 X^2 + \sigma_{yy}^2 Y^2 = \sigma_{xx}^2 (X^2 + \sigma_{yy}^2 Y^2 / \sigma_{xx}^2) \quad (58)$$

従って、1変数の場合に参入・撤退を決定する価格レベルを X_0^* としたとき、

$$(X_0^*)^2 = X^2 + \sigma_{yy}^2 Y^2 / \sigma_{xx}^2 \quad (59)$$

を満足する X, Y が同じ参入・撤退の条件を与えることになる。当然、 Y が大きい程、また比率 $\sigma_{yy}^2 / \sigma_{xx}^2$ が大きい程 X は小さくなる。しかし、これは式 (57) の第2項のみに注目した議論であり、第1項の効果も考慮する必要がある。結果としては、式 (59) と同様な関係が成立し、参入・撤退に及ぼす Y の影響は同様となる。これをまとめると以下のようになる。

(1) 商品1の価格の影響

商品1の価格レベルが高いほど参入を開始する X の値は小さくできる。しかし逆に、撤退を開始するトリガ価格 X は高く設定することはできない。これは、コスト L が基本的に一定値であり、 $\Psi(X, Y)$ 全体が増加関数となることによる。効果としては、価格 Y が $\Psi(X, Y)$ 全体におよび、価格のレベルを上昇させていることになる。

(2) 商品1, 2の分散の影響

商品1と商品2との分散の比率が大きいほど価格 Y の及ぼす影響は大きくなる。すなわち、 Y の分散は大きいほど参入・撤退の条件は緩む。これに対して、 X の分散が大きくなる場合には Y の効果は小さくなり、1商品の場合の製品開発計画に近くなる。

4.2 商品1の利益フローがゼロではない場合

商品1の利益 $P(Y)$ がゼロではない場合には、商品2に対する参入・撤退の戦略に余裕ができる可能性がある。この場合、 $W(r, \theta)$ は積分を実行して得られるが、得ることが不可能なので近似的に評価する。

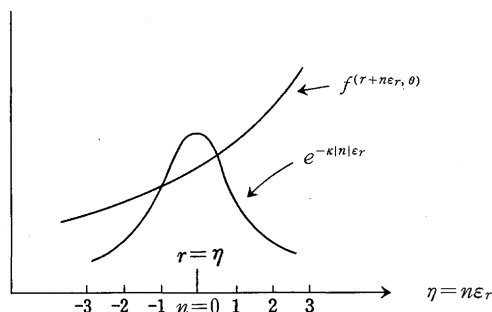


図3 グリーン関数積分の近似的表現

いま、変数 ξ, η がそれぞれ変数 r, θ のから $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ の整数倍離れている点を考え、これらの点における関数値の和として積分を表示すると、式 (51), (53) はそれぞれ

$$W(r, \theta) = \sum_{n=-N}^N e^{-\kappa|n|\varepsilon_r} f(r, \theta + n\varepsilon_\theta) / 2k$$

$$(r: \text{一定}) \quad (60)$$

$$W(r, \theta) = \sum_{n=-N}^N e^{-\kappa|n|\varepsilon_r} r f(r + n\varepsilon_r, \theta) / 2k$$

$$(\theta: \text{一定}) \quad (61)$$

これらの計算で指数の N 以降の項は省略している。指数の計算部には変数は含まれない。利益フローを表す関数 $f(r, \theta + n\epsilon_\theta)$, $rf(r + n\epsilon_r, \theta)$ は θ , r の増加関数と仮定すると、式 (60), (61) は一定あるいは可変の重みづけをして加算した関数となり、結果としては θ の単調増加関数となる。この様子を模式的に図 3 に示している。

なお、式 (61) のみでは $\Psi(X, Y)$ の挙動を十分には説明できないので、これに斉次ヘルムホルツ方程式の解を線型結合により付け加えて形を考察することになる。この場合には式 (61) の積分計算は単独に実行できるので、結果的にはヘルムホルツ方程式の解を単に式 (61) に付け加えた形となる。従って、1 変数の場合に $\Psi(X)$ を単調増加関数として解析した場合と基本的に同じ振る舞いとなる。しかし、以下の点で異なっていることに注意する必要がある。

1) $V_0(X, Y)$, $V_1(X, Y)$ はまったく同じ方程式に従う。

従って、これら関数の差として定義される $\Psi(X, Y)$ により $\hat{X} \leq X \leq X^*$, $\hat{Y} \leq Y \leq Y^*$ の範囲での挙動を近似する場合にはヘルムホルツ方程式に従うが、 $X = X^*$, $Y = Y^*$ 付近での挙動は式 (60), (61) に従う。そのため単調増加関数が $\Psi(X, Y)$ に加わった挙動となる。

2) 変数 r の効果

式 (61) に示されているように、変数 r は関数 $f(\cdot)$ に直接かかっているため、 r の効果は θ の効果より大きく評価される。

(1) 商品 1 の価格の影響

商品 1 の価格 Y が存在することが参入への条件を緩和していることは 4.1 の場合と同様である。しかし、コスト L については特定の Y を設定したことにより減少するので、場合によっては撤退の条件を緩めることになる。すなわち、価格 Y の存在によりもともと撤退を開始すべき価格 X は 1 商品の場合より下がるが、 L の減少により、この値 X は再び増加させられる。この均衡点については求めているが、うまくパラメータを設定することにより、参入・撤退の両方の条件を緩和する戦略が可能となる。

(2) 商品 1, 2 の分散の影響

これらの分散や、分散の比率の効果については 4.1 の結果と同様である。

4.3 商品 1, 2 の利益フローがゼロではない場合

この場合には 4.2 と同じ形式の結果が得られることになり、結果の右辺の関数 $f(r, \theta)$ の形を議論することになる。 $f(r, \theta)$ は正確には

$$f(r, 0) = P(Y) + \pi(X) \quad (62)$$

ただし、関数 $V_0(X, Y)$ は $P(Y)$ のみを含んでいることに注意する。結論的には関数 $W(r, \theta)$ のレベル移動に $P(Y)$, $\pi(X)$ がどのように係わっているかを分析することになり、 Y が小さいときには $\pi(X)$ の影響で決まり、 Y が X に対して相対的に大きい時には $P(Y)$ も考慮した結果となる。また、 X が小さいレベルでの特性を表す関数 $V_0(X, Y)$ には $P(Y)$ のみが影響するとを考慮する必要がある。

このような関数 $P(Y)$ と $\pi(X)$ の影響の違いに注目しておけば、その他の解析手順については4.2と同様にできる。

(1) 商品1の価格の影響

式 (62) が和の形であるので、価格 Y の効果は4.2の場合と同様となる。4.2では $\pi(X)$ が考慮されていないので、式 (62) とは異なるが、本来は式 (62) の形をしている。しかしながら、関数 $P(Y)$ と $\pi(X)$ の詳しい形状については更に検討する必要がある。変数 r , θ とともに X , Y により決まるので、関数 $P(Y)$ と $\pi(X)$ の組み合わせによっては効果を分散しあったり、相補的な関係にあることが示される場合がある。これは、単純に言えば、わざわざ商品2を開発しないでも商品1により利益を得ることができることに対応している。

(2) 商品1, 2の分散の影響

4.1, 4.2と同様である。ただし、一般的な場合として X , Y の共分散 σ_{XY} がゼロではない場合の特性について述べておく。式 (55) の関係式より、変数 r , θ は

$$r^2 = (aX+bY)^2 + (cX+dY)^2 \quad (63)$$

$$\theta = \tan^{-1} cX+dY/aX+bY$$

となる。 a , b , c , d の値は特に求めてはいないが、式 (55) より分かるように、

$$a, c > 0 \quad b, d < 0 \quad (64)$$

が可能である。この場合には、 X と Y との差により r が決定され、その差が小さいほど r は小さくなる。これは分散の2乗で決まるので X と Y とは負の相関があっても同様の効果を生むことは興味深い。また、分散 σ_{XY} の正負には依存しないが、この値が大きくなるほど係数 a , b , c , d は小さくなるので、 X , Y の影響のレベルは低くなる。

5. む す び

製品の開発投資における参入と撤退の問題について、現在、価格を確率過程として表現した場合に、どの時期に決断を行うべきかの問題が議論されている。モデルとして興味ある Dixit の結果では、新商品の開発を開始するべき時期は商品の市場価格により予測でき、逆にすでに開発へ参入している場合にこれより撤退するべきタイミングについても価格により決定することができる。本論文では、この問題を拡張して考察し、すでに企業が市場で優位な商品1を生産販売しており、この利益をもとにして新製品（商品2）の開発を行う場合を問題として定式化した。商品1と商品2ともにその価格は確率過程（ブラウン運動）に従うと仮定しているので、問題の挙動を示す方程式は2次の非斉次偏微分方程式となるので、一般的な形では解を得ることができない。そこで、いくつか簡単化のための仮定を設けて、そのもとでの解の性質を考察した。

まず、商品1, 2の価格に相関がなく、しかも商品1による利益を考慮しない（ゼロあるいは定数である）場合には、商品1を特定の値に固定した場合の特性と同様に商品2への参入を決定することがわかる。これは利益フローをゼロとしない場合についても強い条件として成立し、商品1の存在は

参入・撤退の条件緩和に有効となる。言い換えれば、わざわざ商品 2 を開発しないでも十分に利益を上げうる範囲を検討することが可能となる。商品 1 と商品 2 の価格の相関についての検討は十分とはいえないが、現在までのところ正の相関のもとでは参入・撤退の条件緩和に役立ち、相関が負のときにはこの効果を継続するという常識的な結果を説明することは可能である。

解析の結果として得られる関数の定性的な性質のみを議論しているため、価格レベルの詳細についての議論はまだのこされている。しかし、現在までのところ、関数 $\varphi(X, Y)$ の単調増加性や変数 X と Y との相互作用を説明する枠組みについては求められており、今後の詳細な検討の基礎を与えている。

Dixit の論文でも触れられているように、商品の価格メカニズムに生産関数やその他の市場原理、あるいはこれを確率過程として記述する枠組みについても可能であり、今後、本論文の数値計算的な問題とあわせて議論していきたい。

参 考 文 献

- [1] R.L. McDonald and D.R. Siegel: "Investment and the valuation of firms when there is an option to shut down," *Internat. Econ. Rev.*, 26, pp. 31-349 (1985).
- [2] R.L. McDonald and D.R. Siegel: "The value of waiting," *Quarterly Journal of Economics*, 101, pp. 707-727 (1986).
- [3] G. Bertola: "Irreversible investment," Working paper. Cambridge: Massachusetts Inst. Tech., October (1987).
- [4] R.S. Pindyck: "Irreversible investment, capacity choice, and the value of the firm," *American Economic Review*, 78, 5, pp. 23-34 (1988).
- [5] A. Dixit: "Hysteresis, import penetration, and exchange rate pass-through," *Quarterly Journal of Economics*, 104, pp. 205-228 (1989).
- [6] A. Dixit: "Entry and exit decisions under uncertainty," *Journal of Political Economy*, 97, pp. 620-638 (1989).
- [7] H.J. Harrison and M.I. Taksar: "Instantaneous control of Brownian motion," *Mathematics of Operations Research*, 8, 3, pp. 439-453 (1983).
- [8] J.C. Cox, J.E. Ingersoll, and S.A. Ross: "An intertemporal general equilibrium model of asset prices," *Econometrica*, 53, pp. 363-384 (1985).
- [9] D.T. Breeden: "An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities," *Journal of Financial Economics*, 7, pp. 265-296 (1979).
- [10] G. Gaudet and A.M. Khadr: "The evolution of natural resource prices under stochastic investment opportunities: An intertemporal asset-pricing approach," *International Economic Review*, 32, 2, pp. 441-455 (1991).
- [11] R.S. Pindyck: "Uncertainty and exhaustible resource markets," *Journal of Political Economy*, 88, pp. 1203-1225 (1980).
- [12] S.D. Deshmukh and S.R. Pliska: "Optimal consumption and a nonrenewable resource with stochastic discoveries and a random environment," *Review of Economic Studies*, 50, pp. 543-554 (1983).
- [13] 例えば A. Glazer: "The advantage being first," *American Economic Review*, pp. 473-480 (1988).
- [14] 例えば P. Milgrom and J. Robert: "Limit pricing and entry under incomplete information: An equilibrium analysis," *Econometrica*, 50, pp. 443-459 (1982).
- [15] 例えばロザノフ: "確率過程入門," 産業図書 (1980) (ロシア語の原著の邦訳)
- [16] 例えば犬井鉄朗: "偏微分方程式とその応用," コロナ社 (1977).
- [17] 例えば寺沢寛一編: "自然科学者のための数学概論—応用編," 岩波書店 (1968)

付録A ベッセル型に近い微分方程式の解法

次の微分方程式の解を級数表現により求める。

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dw}{dx} \left(-1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) w = 0 \quad (\text{A} \cdot 1)$$

これは、よく知られているベッセルの微分方程式において、0次微分の係数項に含まれている定数を1ではなく-1にした場合に相当している。従って、ベッセルの微分方程式の場合と同様の解き方が利用できるが、解についてベッセル関数による簡潔な表現にはならない。

$x=0$ のまわりの級数

$$w(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{k+m} \quad (\text{A} \cdot 2)$$

を解として仮定する。

$$\frac{dw}{dx} = \sum_{m=0}^{\infty} (k+m) a_m x^{k+m-1} \quad (\text{A} \cdot 3)$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \sum_{m=0}^{\infty} (k+m)(k+m-1) a_m x^{k+m-2} \quad (\text{A} \cdot 4)$$

式 (A・2), (A・3) を式 (A・1) に代入し x^2 をかけると,

$$\sum_{m=0}^{\infty} [(k+m)(k+m-1) + (k+m) - \nu^2] a_m x^{k+m} + a_m x^{k+m+2} = 0 \quad (\text{A} \cdot 5)$$

x^k, x^{k+1} の項は第1総和からしか現れないので、これを分離し、それ以外について m の番号を2だけずらして m をあらためて $m-2$ にすると

$$(k+\nu)(k-\nu)a_0 x^k + (k+\nu+1)(k-\nu+1)a_1 x^{k+1} + \sum_{m=2}^{\infty} [(k+m+\nu)(k+m-\nu) - \nu^2] a_m x^{k+m} = 0 \quad (\text{A} \cdot 6)$$

これより

$$(k+\nu)(k-\nu)a_0 = 0 \quad (\text{A} \cdot 7)$$

$$(k+\nu+1)(k-\nu+1)a_1 = 0 \quad (\text{A} \cdot 8)$$

$$(k+m+\nu)(k+m-\nu)a_m = a_{m-2} \quad (m \geq 2) \quad (\text{A} \cdot 9)$$

が成り立つことが要求される。従って、 k の値としては

$$k_1 = \nu, \quad k^2 = -\nu \quad (\text{A} \cdot 10)$$

が得られる。また、このことより

$$a_1 = 0 \quad (\text{A} \cdot 11)$$

でなければならない。これと式 (A・9) の関係より奇数項については0になることがわかる。

$$a_{2m+1} = 0 \quad (\text{A} \cdot 12)$$

$k_1 = \nu$ のときには、式 (A・9) を反復して用いることにより

$$a_{2m} = a_0 / (2\nu + 2m) m! (\nu+1)(\nu+2) \cdots (\nu+m) \quad (\text{A} \cdot 13)$$

となることがわかる。 $k_2 = -\nu$ のときには式 (A・13) において ν を $-\nu$ に置き換えればよい。簡単のために、 $k_1 = \nu$ のときの式 (A・13) を式 (A・1) に代入した関数 $w(x)$ を $I_\nu(x)$ 、 $k_2 = -\nu$ のときの同様の関数を $L_\nu(x)$ と記号的に表しておく。

付録B ヘルムホルツ形偏微分方程式のグリーン関数

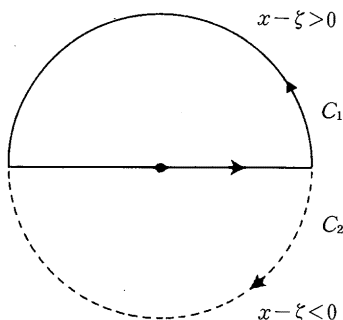


図 B.1 積分閉路 C_1, C_2

ヘルムホルツ形偏微分方程式に非斉次の項が右辺に加わった場合には、グリーン関数を求めて、これと非斉次の項とをかけあわせたものの積分が解となる。次のグリーン関数を計算する。

$$\Delta G(x, \xi) - x^2 G(x, \xi) = -\delta(x, \xi) \quad (\text{B} \cdot 1)$$

デルタ関数の Fourier 積分表示は

$$\delta(x - \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-\xi)} dk \quad (\text{B} \cdot 2)$$

ここで、

$$G(x, \xi) = - \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ik(x-\xi)} dk \quad (\text{B} \cdot 3)$$

を仮定すると、

$$g(k) = 1/(k^2 + x^2) \quad (\text{B} \cdot 4)$$

とならなければならないことが分かる。従って、 $(x-\xi) > 0$ 、 $(x-\xi) < 0$ に応じて図 B・1の閉曲線 C_1, C_2 について複素積分を行う。 C_1 の場合、

$$\text{留数 } |_{k=ik} = \lim_{k \rightarrow ik} (k-ix) \frac{e^{ix(x-\xi)}}{k^2+x^2} = \frac{e^{-\kappa(x-\xi)}}{2ix} \quad (\text{B}\cdot 5)$$

同様に C_2 の場合が求められる。結果として、

$$G(x, \xi) = e^{-\kappa|x-\xi|}/2k \quad (\text{B}\cdot 6)$$

なお、ヘルムホルツ形の偏微分方程式において、偏角 θ を固定した場合には、動径 r についての微分方程式

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} - 2\rho R = f(r) \quad (\text{B}\cdot 7)$$

を得る。ここで、関数を

$$u = rR \quad (\text{B}\cdot 8)$$

に置き換えると、式 (B・7) は

$$\frac{d^2 u}{dr^2} - 2\rho u = -\delta(r-\xi) \quad (\text{B}\cdot 9)$$

の形のグリーン関数を求めれば、これ以降の積分計算が可能となる。式 (B・9) は式 (B・1) と同じである。