返却および追加注文を許す多期間確率的在庫モデル

児玉，正憲

https://doi.org/10.15017/4492933

出版情報：經濟學研究. 56 (4), pp.1-26, 1991-07-10. 九州大学経済学会
バージョン：
権利関係：

経　済　学　研　究

第56巻　第4号

Oct. 1990　　*Vol. 56 No. 4*

返却および追加注文を許す多期間確率的在庫モデル

児　玉　正　憲

本論文では，需要量が連続的な多期間在庫モデルについて，返却および追加注文を考慮し，過剰需要が後期需要として取扱われる場合の最適政策を動的計画法を援用して検討する。記号と前提条件を以下のように設定する。

(i) 各期の正規発注（発注間隔は t）は期首に行われ，ただちに入荷し（単価 c_1），単価 $r_1(r_1>c_1)$ で販売する。正規発注前の初期在庫量を x（以後は初期在庫量という）とし，y だけ正規発注した後の期首在庫量を z とする。

$z=x+y$

(ii) 余剰品に対しては単位当り h の在庫コスト，品切れに対しては単位当り p の品切コストがかかるものとする（$c_1<p$，注1参照）

(iii) 任意に定められた時点 t_0（$o<t_0<t$，t_0 は各期で一定）で売れ残りがあると，供給者はあるきめられた許容範囲 R_1 以内で引きとる（単価 r_2，$o\leqq r_2\leqq c_1$）t_0 時点で品切れがあると，ある許容範囲 R_2 以内であれば，ただちに単価 $c_2(c_1\leqq c_2)$ で追加発注し，即時に入荷できるものとする。ただし，$c_2>r_1+(1-\frac{t_0}{t})p$ のときは追加注文せず（$R_2=0$）品切を起したほうが有利となり，これはモデルの仮定に反するので，$c_2\leqq r_1+(1-\frac{t_0}{t})p$ とする（注2参照）

利益とコストのパラメータ間の関係を整理すると，次のようになる。

$$\begin{cases} 0\leqq r_2\leqq c_1\leqq c_2\leqq r_1+(1-\frac{t_0}{t})p \\ 0<h,\ c_1<min(r_1,\ p) \end{cases} \qquad (1)$$

(iv) 各期の需要量を表わす確率変数は互いに独立で同じ分布をに従うものとする。需要量 B の確率密度関数を $\phi(b)$，累積分布関数を $\Phi(b)$，平均値を m とする。

$$\Phi(b)=P\{B\leqq b\}=\int_0^b\phi(u)du,\ m=\int_0^\infty b\phi(b)db$$

(v)　需要の発生は一般的な関数に従うものとする。つまり，各期の需要量 B の実現値 b が与えられたとき，期における需要の発生は

$$bg(T/t)\qquad(0\leqq T\leqq t)\tag{2}$$

に従うものとする。ここに

$g(x)$ は $g(0)=0$, $g(1)=1$ となる $dg(x)/dx>0$ なる関数 $(0\leqq x\leqq 1)$。時点 T における在庫量を $Q(T)$ とすると，

$$Q(T)=z-g(T/t)b,\ 0\leqq T\leqq t\tag{3}$$

である。$s=g(T/t)b$ をみたす T/t は $b\geqq s$ のとき唯一存在し，これを $T/t=g^{-1}(s/b)$ で表す。このとき，$T=tg^{-1}(s/b)$

α：割引率　$(0<\alpha<1)$

$f_n(x)$：初期在庫量を x としたとき，n 期間にわたる期待割引費用を最小にするという意味での最適発注政策をとったときの費用関数

過剰需要が後期需要として取扱われるので z が負の値も考える必要がある。まず，一期間モデルを考察しよう。

1．一期間モデル

需要量 B は仮定によって確定的でない，このため需要量 B の実現値を b，期首在庫量 z およびモデルの仮定によって種々の在庫状態が得られる。(図１～図４)。したがって期平均在庫量，不足する期平均在庫不足量，期平均費用，期待期平均費用をそれぞれ $I_1(b,\ z)$, $I_2(b,\ z)$, $C(b,\ z)$, $E\{C(B,\ z)\}$ とすれば次のようになる。

(1)　$z<-R_2$ の場合　(図１参照)

このとき，$b-z$ $(\geqq R_2)$ は在庫不足量となり，ただちに R_2 単位だけ発注，即時に納入され，在庫水準は $z+R_2-g(t_0/t)b$ (<0) となる。

$$I_1(b,\ z)=0$$

$$I_2(b,\ z)=\frac{1}{t}\left\{\int_0^{t_0}[bg(T/t)-z]dT+\int_{t_0}^{t}[bg(T/t)-(z+R_2)]dT\right\}=-z-(1-\frac{t_0}{t})R_2+G(1)b$$

$$=-z-(1-\frac{t_0}{t})R_2+G(1)b$$

ここに

$$G(y)=\int_0^y g(t)dt,$$

$$C(b,\ z) = c_1(z-x)+p\left\{-z-(1-\frac{t_0}{t})R_2+G(1)b\right\}+c_2R_2-r_2R_2$$
$$= (c_1-p)z+pG(1)b+[c_2-r_2-p(1-\frac{t_0}{t})]R_2-c_1x \tag{4}$$

ところが需要量 B は連続確率変数であるので期待期平均費用 $E\{C(B,\ z)\}$ は次式で与えられる。

$$E\{C(B,\ z)\} = \int_0^\infty C(b,\ z)\phi(b)db = -c_1x+H_1(z) \tag{5}$$

$$H_1(z) = (c_1-p)z+pG(1)m+[c_2-r_1-(1-\frac{t_0}{t})p]R_1 \tag{6}$$

$$dH_1(z)/dz = H_1(z)' = c_1-p<0,\ d^2H_1(z)/dz^2 = 0 \tag{7}$$

(2)　$-R_2 \leqq z < 0$ の場合　（図2参照）

(i)　$0 \leqq b < (z+R_2)/g(\frac{t_0}{t})$

この場合 i)　$0 \leqq b < z+R_2$（このとき，$t_0 < b \leqq tg^{-1}((z+R_2)/b)$）　ii)　$z+R_2 \leqq b < (z+R_2)/g(\frac{t_0}{t})$（このとき $t_0 < tg^{-1}((z+R_2)/b) \leqq t$）の2つの場合が考えられるが，$I_1(b,\ z) = 0$ で，$I_2(b,\ z)$, $C(b,\ z)$ は同一の式で表現でき，異るのは b の範囲だけである。したがって，b は(i)の範囲で考えればよい。

$$I_1(b,\ z) = 0,$$
$$I_2(b,\ z) = \frac{1}{t}\left\{\int_0^{t_0}[g(\frac{T}{t})b-z]dT+\int_{t_0}^{t}[g(\frac{T}{t})-g(\frac{t_0}{t})]bdT\right\}$$
$$= -\frac{t_0}{t}z+\left[G(1)-(1-\frac{t_0}{t})g(\frac{t_0}{t})\right]b$$

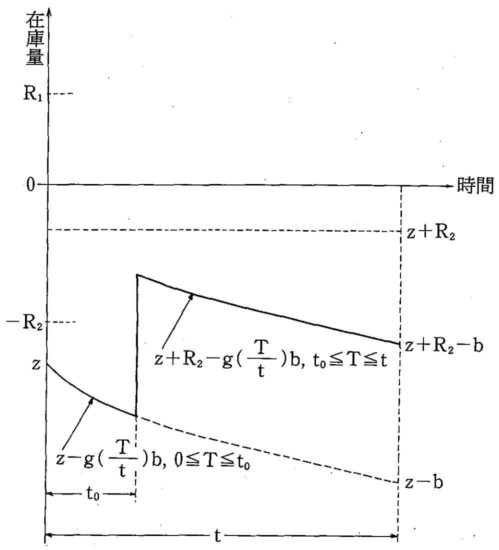

図1　$z \leqq -R_2,\ b \geqq 0$

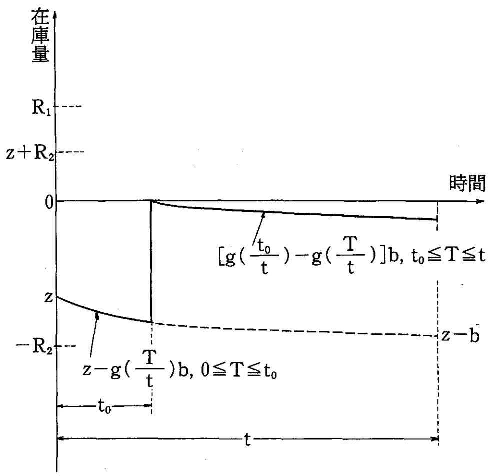

図2　$-R_2<z\leqq 0,\ 0\leqq b<z+R_2$

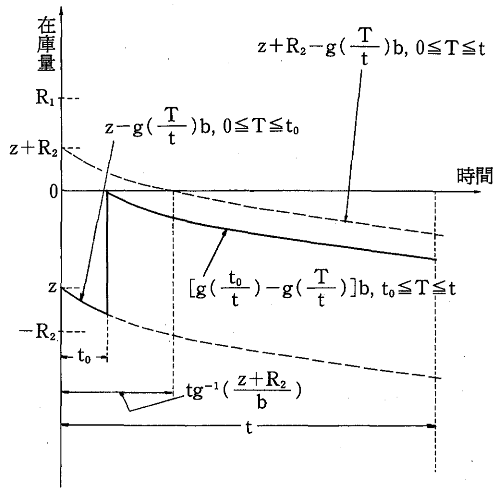

図2　$-R_2<z\leqq 0,\ z+R_2\leqq b<(z+R_2)/g(\frac{t_0}{t})$

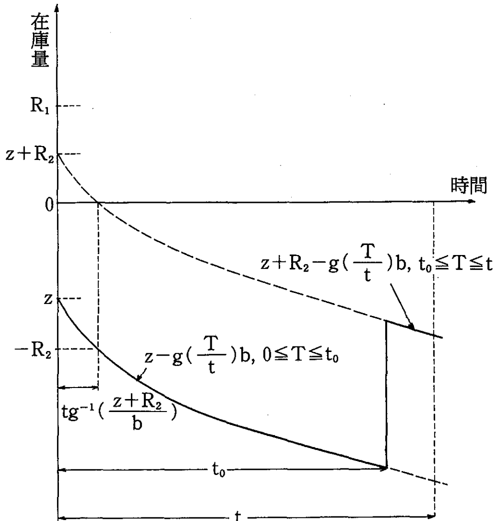

図2　$-R_2<z\leqq 0,\ b\geqq (z+R_2)/g(\frac{t_0}{t})$

$$C(b,\ z)=c_1(z-x)+p\left\{-\frac{t_0}{t}z+\left[G(1)-(1-\frac{t_0}{t})g(\frac{t_0}{t})\right]b\right\}+c_2[g(\frac{t_0}{t})b-z]-r_1[g(\frac{t_0}{t})b-z]$$

$$=(c_1-c_2+r_1-\frac{t_0}{t}p)z+\left\{pG(1)+[c_2-r_1-(1-\frac{t_0}{t})p]g(\frac{t_0}{t})\right\}b-c_1x$$

(ii)　$b\geqq (z+R_2)/g(\frac{t_0}{t})$（このとき，$t>t_0\geqq tg^{-1}((z+R_2)/b)$）

$z-g(t_0/t)b \leqq z-g(t_0/t)\cdot(z+R_2)/g(\frac{t_0}{t}) = -R_2$ となり，ただちに R_2 だけ発注，即納される。

$$I_1(b,\ z)=0$$

$$I_2(b,\ z)=\frac{1}{t}\left\{\int_0^{t_0}[g(\frac{T}{t})b-z]dT+\int_{t_0}^{t}[g(\frac{T}{t})b-(z+R_2)]dT\right\}$$

$$=-[z+(1-\frac{t_0}{t})R_2]+G(1)b$$

$$C(b,\ z)=c_1(z-x)+p[-z-(1-\frac{t_0}{t})R_2+G(1)b]+c_2R_2-r_1R_2$$

$$=(c_1-p)z+pG(1)b+[c_2-r_1-(1-\frac{t_0}{t})p]R_2-c_1x$$

以上を整理すると $C(b,\ z)$ は,

$$C(b,\ z)=\begin{cases}(c_1-c_2+r_1-p\frac{t_0}{t})z+\{pG(1)+[c_2-r_1-p(1-\frac{t_0}{t})]g(\frac{t_0}{t})\}b-c_1x & 0\leqq b<(z+R_2)/g(\frac{t_0}{t})\\ (c_1-p)z+pG(1)b+[c_2-r_1-p(1-\frac{t_0}{t})]R_2-c_1x & b\geqq(z+R_2)/g(\frac{t_0}{t})\end{cases} \tag{8}$$

となる。

したがって

$$E\{C(B,\ z)\}=\int_0^{\infty}C(b,\ z)\phi(b)db=\int_0^{(z+R_2)/g(\frac{t_0}{t})}C(b,\ z)\phi(b)db$$
$$+\int_{(z+R_2)/g(\frac{t_0}{t})}^{\infty}C(b,\ z)\phi(b)db=-c_1x+H_2(z) \tag{9}$$

$$H_2(z)=(c_1-p)z-[c_2-r_1-(1-\frac{t_0}{t})p](z+R_2)\Phi\left(\frac{z+R_2}{g(\frac{t_0}{t})}\right)$$
$$+[c_2-r_1-(1-\frac{t_0}{t})p]g(\frac{t_0}{t})\int_0^{(z+R_2)/g(\frac{t_0}{t})}b\phi(b)db+pG(1)m+[c_2-r_1-(1-\frac{t_0}{t})p]R_2 \tag{10}$$

となる。また,

$$\frac{dH_2(z)}{dz}=c_1-p+[r_1+(1-\frac{t_0}{t})p-c_2]\Phi\left(\frac{z+R_2}{g(\frac{t_0}{t})}\right), \tag{11}$$

$$\frac{d^2H_2(z)}{dz^2}=[r_1+(1-\frac{t_0}{t})p-c_2]\frac{\phi\left(\frac{z+R_2}{g(\frac{t_0}{t})}\right)}{g(\frac{t_0}{t})}\geqq 0, \tag{12}$$

$$H_2'(-R_2)=c_1-p, \tag{13}$$

$$H_2'(0)=c_1-p+[r_1+(1-\frac{t_0}{t})p-c_2]\Phi\left(\frac{R_2}{g(\frac{t_0}{t})}\right)\geqq c_1-p=H_2'(-R_2) \tag{14}$$

となる。

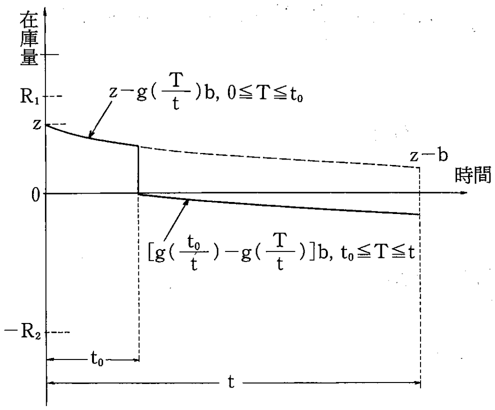

図3　$0\leqq z<R_1,\ 0\leqq b<z$

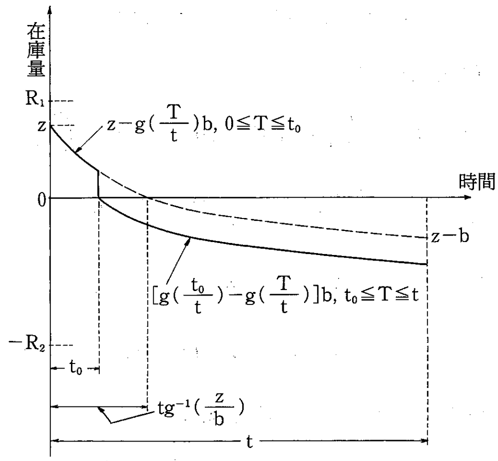

図3　$0\leqq z\leqq R_1,\ z\leqq b<z/g(\frac{t_0}{t})$

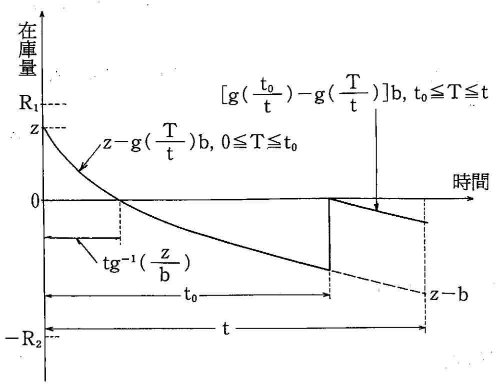

図3　$0\leqq z<R_1,\ z/g(\frac{t_0}{t})b<z+R_2$

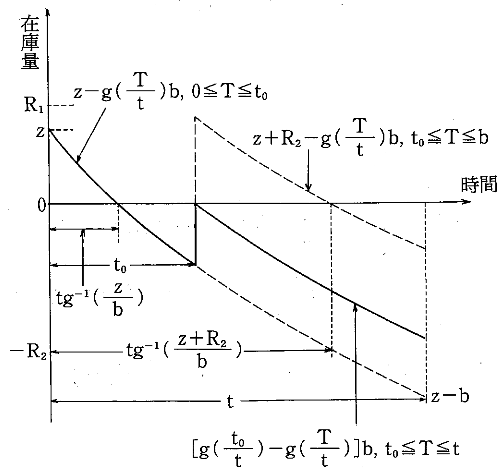

図3　$0\leqq z<R_1,\ z+R_2\leqq b<(z+R_2)/g(\frac{t_0}{t})$

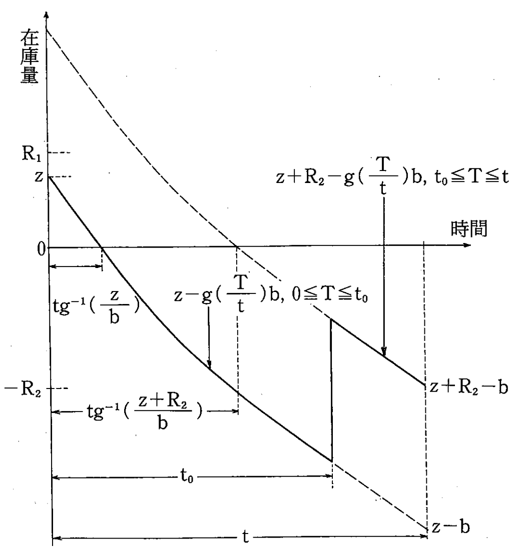

図3　$0\leqq z<R_1,\ b\geqq(z+R_2)/g(\frac{t_0}{t})$

注意 1　$c_1>p$ のときは $H_1'(z)>0$, $H_2'(z)>0$ となり，$-\infty<z<0$ に対して $H_i(z)$ $(i=1,2)$ は狭義増加関数となるので，$c_1<p$ を仮定した。

(3)　$0\leqq z<R_1$ の場合　（図 3 参照）

(i)　$0\leqq b<z/g(\frac{t_0}{t})$

この場合　i)　$0\leqq b<z$（このとき，$tg^{-1}(z/b)>t>t_0$）　ii)　$z\leqq b<z/g(1-\frac{t_0}{t})$（このとき，$t_0<tg^{-1}(z/b)\leqq t$）の 2 つの場合が考えられるが，$b$ の範囲が異るだけで $I_1(b,z)$, $I_2(b,z)$, $C(b,z)$ は同じである。

$$I_1(b,z)=\frac{1}{t}\int_0^{t_0}[z-g(\frac{T}{t})b]dT=\frac{t_0}{t}z-G(1-\frac{t_0}{t})b$$

$$I_2(b,z)=\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}b[g(\frac{T}{t})-g(\frac{t_0}{t})]dT=[G(1)-G(\frac{t_0}{t})-(1-\frac{t_0}{t})g(\frac{t_0}{t})]b$$

$$C(b,z)=c_1(z-x)+h[\frac{t_0}{t}z-G(\frac{t_0}{t})b]+p[G(1)-G(\frac{t_0}{t})-(1-\frac{t_0}{t})g(\frac{t_0}{t})]b-r_2[z-g(\frac{t_0}{t})b]$$
$$-r_1g(\frac{t_0}{t})b=(c_1-r_2+h\frac{t_0}{t})z+\left\{pG(1)-(h+p)G(\frac{t_0}{t})+[r_2-r_1-(1-\frac{t_0}{t})p]g(\frac{t_0}{t})\right\}b-c_1x$$

(ii)　$z/g(\frac{t_0}{t})\leqq b<(z+R_2)/g(\frac{t_0}{t})$

この場合，i)　$z/g(\frac{t_0}{t})\leqq b<z+R_2$（このとき，$tg^{-1}(z/b)<t_0<t<tg^{-1}(z+R_2)/b)$　ii)　$z+R_2\leqq b<(z+R_2)/g(\frac{t_0}{t})$（このとき，$tg^{-1}(z/b)<t_0<tg^{-1}((z+R_2)/b)\leqq t$）の 2 つの場合が考えられるが，$b$ の範囲が異るだけで，$I_1(b,z)$, $I_2(b,z)$, $C(b,z)$ は同じである。

$$I_1(b,z)=\frac{1}{t}\int_0^{tg^{-1}(z/b)}[z-g(\frac{T}{t})b]dT=zg^{-1}(\frac{z}{b})-G(g^{-1}(\frac{z}{b}))b$$

$$I_2(b,z)=\frac{1}{t}\left\{\int_{tg^{-1}(z/b)}^{t_0}[bg(\frac{T}{t})-z]dT+b\int_{t_0}^{t}[g(\frac{T}{t})-g(\frac{t_0}{t})]dT\right\}$$
$$=[g^{-1}(\frac{z}{b})-\frac{t_0}{t}]z+\left\{[G(1)-G(g^{-1}(\frac{z}{b}))]-(1-\frac{t_0}{t})g(\frac{t_0}{t})\right\}b$$

$$C(b,z)=c_1(z-x)+h[zg^{-1}(\frac{z}{b})-G(g^{-1}(\frac{z}{b}))b]+p\left\{[g^{-1}(\frac{z}{b})-\frac{t_0}{t}]z\right.$$
$$\left.+[G(1)-G(g^{-1}(\frac{z}{b}))-(1-\frac{t_0}{t})g(\frac{t_0}{t})]b\right\}+c_2[bg(\frac{t_0}{t})-z]-r_1g(\frac{t_0}{t})b$$
$$=(c_1-c_2-\frac{t_0}{t}p)z+(h+p)[zg^{-1}(\frac{z}{b})-G(g^{-1}(\frac{z}{b}))b]+\left\{[c_2-r_1-(1-\frac{t_0}{t})p]g(\frac{t_0}{t})\right.$$
$$\left.+pG(1)\right\}b-c_1x$$

(iii)　$b\geqq(z+R_2)/g(\frac{t_0}{t})$

このとき $z-g(\frac{t_0}{t})b\leqq z-g(\frac{t_0}{t})\cdot(z+R_2)/g(\frac{t_0}{t})=-R_2$ となり，ただちに，R_2 だけ発注，即納され

る。

$$I_1(b,\ z)=\frac{1}{t}\int_0^{tg^{-1}(z/b)}[z-g(\frac{T}{t})b]dT=zg^{-1}(\frac{z}{b})-G(g^{-1}(\frac{z}{b}))b$$

$$I_2(b,\ z)=\frac{1}{t}\left\{\int_{tg^{-1}(z/b)}^{t_0}[g(\frac{T}{t})b-z]dT+\int_{t_0}^{t}[g(\frac{T}{t})b-(z+R_2)]dT\right\}$$

$$=zg^{-1}(\frac{z}{b})+[G(1)-G(g^{-1}(\frac{z}{b}))]b-z-(1-\frac{t_0}{t})R_2$$

$$C(b,\ z)=c_1(z-x)+h[zg^{-1}(\frac{z}{b})-G(g^{-1}(\frac{z}{b}))b]+p\Big\{z[g^{-1}(\frac{z}{b})-1]$$

$$+[G(1)-G(g^{-1}(\frac{z}{b}))]b-(1-\frac{t_0}{t})R_2\Big\}+c_2R_2-r_1(z+R_2)$$

$$=(c_1-p-r_1)z+(h+p)[zg^{-1}(\frac{z}{b})-G(g^{-1}(\frac{z}{b}))b]+pG(1)b+[c_2-r_1-(1-\frac{t_0}{t})p]R_2-c_1x$$

以上を整理すると $C(b,\ z)$ は

$$C(b,\ z)=\begin{cases}(c_1-r_2+h\frac{t_0}{t})z+\Big\{pG(1)-(h+p)G(\frac{t_0}{t})+[r_2-r_1-p(1-\frac{t_0}{t})]g(\frac{t_0}{t})\Big\}-c_1x & 0\leqq b<z/g(\frac{t_0}{t})\\ (c_1-c_2-p\frac{t_0}{t})z+(h+p)[zg^{-1}(\frac{z}{b})-G(g^{-1}(\frac{z}{b}))b]+\Big\{[c_2-r_1-p(1-\frac{t_0}{t})]g(\frac{t_0}{t})+pG(1)\Big\}b-c_1x & \\ & z/g(\frac{t_0}{t})\leqq b<(z+R_2)/g(\frac{t_0}{t})\\ (c_1-p-r_1)z+(h+p)[zg^{-1}(\frac{z}{b})-G(g^{-1}(\frac{z}{b}))b]+pG(1)b+[c_2-r_1-p(1-\frac{t_0}{t})]R_2-c_1x & \\ & b\geqq(z+R_2)/g(\frac{t_0}{t})\end{cases}\tag{15}$$

となる。

したがって

$$E\{C(B,\ z)\}=\int_0^{\infty}C(b,\ z)\phi(b)db=\int_0^{z/g(\frac{t_0}{t})}C(b,\ z)\phi(b)db$$

$$+\int_{z/g(\frac{t_0}{t})}^{(z+R_2)/g(\frac{t_0}{t})}C(b,\ z)\phi(b)db+\int_{(z+R_2)/g(\frac{t_0}{t})}^{\infty}C(b,\ z)\phi(b)db$$

$$=-c_1x+H_3(z)\tag{16}$$

$$H_3(z)=(c_1-p-r_1)z+[c_2-r_2+(h+p)\frac{t_0}{t}]z\Phi\left(\frac{z}{g(\frac{t_0}{t})}\right)+[r_1+(1-\frac{t_0}{t})p-c_2](z+R_2)\Phi\left(\frac{z+R_2}{g(\frac{t_0}{t})}\right)$$

$$+\Big\{[r_2-r_1-(1-\frac{t_0}{t})p]g(\frac{t_0}{t})-(h+p)G(\frac{t_0}{t})\Big\}\int_0^{z/g(\frac{t_0}{t})}b\phi(b)db$$

$$+[c_2-r_1-(1-\frac{t_0}{t})p]g(\frac{t_0}{t})\int_{z/g(\frac{t_0}{t})}^{(z+R_2)/g(\frac{t_0}{t})}b\phi(b)db$$

$$+(h+p)\int_{z/g(\frac{t_0}{t})}^{\infty}[zg^{-1}(\frac{z}{b})-G(g^{-1}(\frac{z}{b}))b]\phi(b)db+pG(1)m+[c_2-r_1-(1-\frac{t_0}{t})p]R_2\tag{17}$$

となる。また

$$\frac{dH_3(z)}{dz} = c_1 - p - r_1 + \left[c_2 - r_2 + (h+p)\frac{t_0}{t}\right]\Phi\left(\frac{z}{g(\frac{t_0}{t})}\right)$$
$$+\left[r_1 + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p - c_2\right]\Phi\left(\frac{z+R_2}{g(\frac{t_0}{t})}\right) + (h+p)\int_{z/g(\frac{t_0}{t})}^{\infty} g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)\,db \tag{18}$$

$$\frac{d^2H(z)}{dz^2} = \left\{(c_2 - r_2)\phi\left(\frac{z}{g(\frac{t_0}{t})}\right) + \left[r_1 + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p - c_2\right]\phi\left(\frac{z+R_2}{g(\frac{t_0}{t})}\right)\right\}\frac{1}{g(\frac{t_0}{t})}$$
$$+(h+p)\int_{z/g(\frac{t_0}{t})}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)\,db \geqq 0 \tag{19}$$

$$H_3'(0) = c_1 - p - r_1 + \left[r_1 + \left(1-\frac{t_0}{t}\right)p - c_2\right]\Phi\left(\frac{R_2}{g(\frac{t_0}{t})}\right) = H_2'(0) - r_1 < H_2'(0) \tag{20}$$

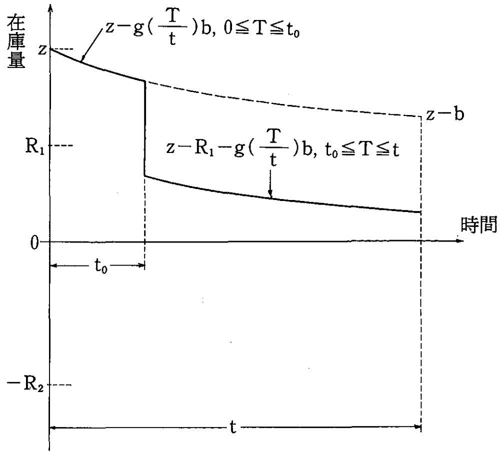

図4　$R_1<z,\ 0\leqq b<z-R_1$

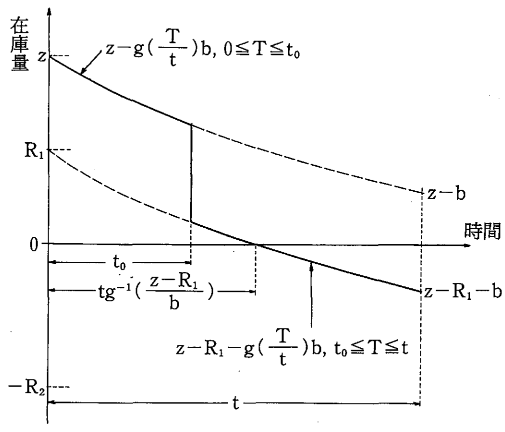

図4　$R_1<z,\ z-R_1\leqq b<z$

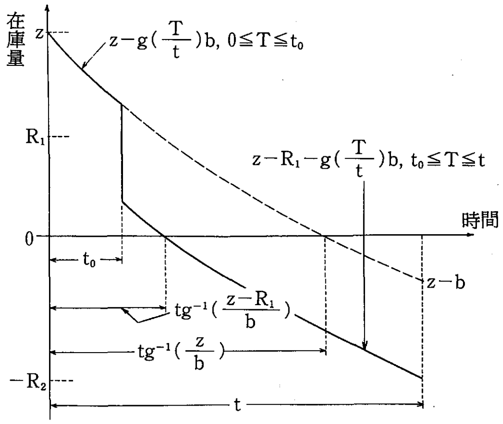

図4　$R_1<z,\ z\leqq b<(z-R_1)/g(\frac{t_0}{t})$

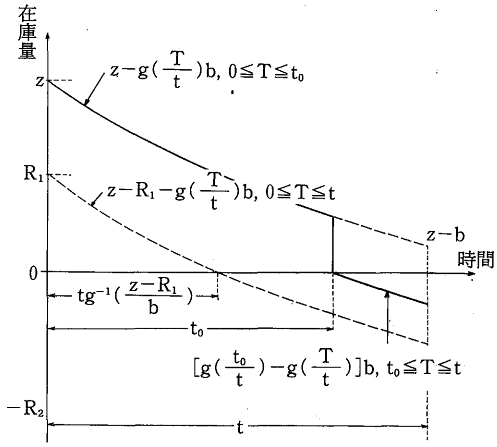

図4　$R_1<z,\ (z-R_1)/g(\frac{t_0}{t})\leqq b\leqq z$

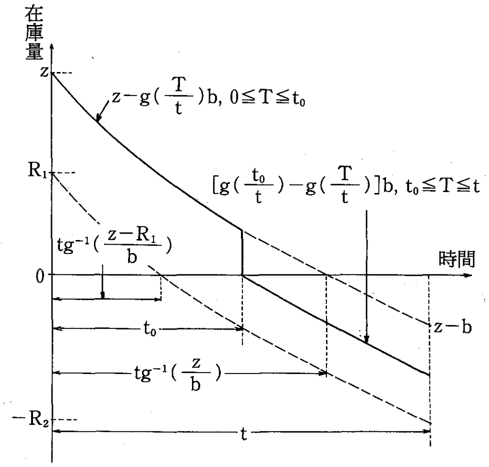

図4　$R_1<z,\ z\leqq b<z/g(\frac{t_0}{t})$

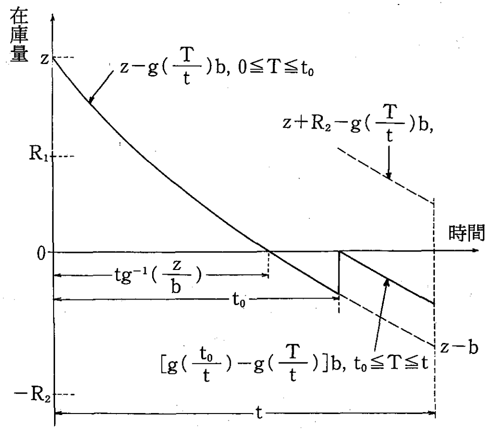

図4　$R_1<z,\ z/g(\frac{t_0}{t})\leqq b<z+R_2$

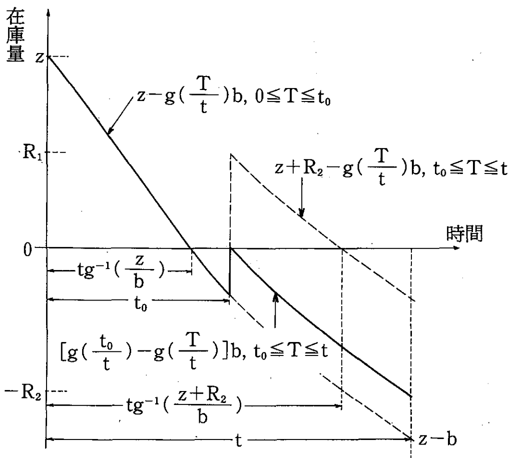

図4　$R_1<z,\ z+R_2\leqq b<(z+R_2)/g(\frac{t_0}{t})$

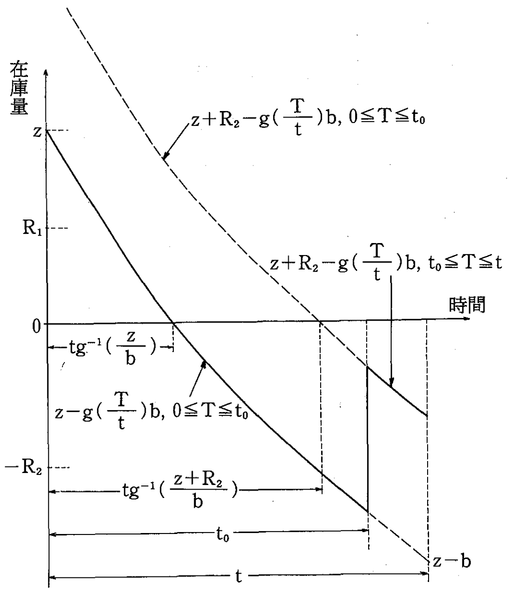

図4　$R_1<z,\ b\geqq(z+R_2)/g(\frac{t_0}{t})$

となる。

(4)　$z\geqq R_1$の場合　(図4参照)

(i)　$0\leqq b<z-R_1$

このとき，$z-g(t_0/t)b>z-b>z-(z-R_1)=R_1$, R_1単位をただちに返却

$$I_1(b,\ z)=\frac{1}{t}\int_0^{t_0}[z-g(\frac{T}{t})b]dT+\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}[z-R_1-g(\frac{T}{t})b]dT$$

$$= z-(1-\frac{t_0}{t})R_1-G(1)b$$

$$I_2(b,\ z)=0$$

$$C(b,\ z)=c_1(z-x)+h[z-(1-\frac{t_0}{t})R_1-G(1)b]-r_1b-r_2R_1$$

$$=(c_1+h)z-[hG(1)+r_1]b-[r_2+(1-\frac{t_0}{t})h]R_1-c_1x$$

(ii) $(z-R_1)\leqq b<(z-R_1)/g(\frac{t_0}{t})$

この場合 i) $z-R_1\leqq b<z$ (このとき，$t_0<tg^{-1}((z-R_1)/b)<t<tg^{-1}(z/b)$) ii) $z\leqq b<(z-R_1)/g(\frac{t_0}{t})$ (このとき，$t_0<tg^{-1}((z-R_1)/b)<tg^{-1}(z/b)\leqq t$) の 2 つの場合が考えられるが，$b$ の範囲が異るだけで，$I_1(b,\ z)$, $I_2(b,\ z)$, $C(b,\ z)$ は同じである。

$$I_1(b,\ z)=\frac{1}{t}\int_0^{t_0}[z-g(\frac{T}{t})b]dT+\frac{1}{t}\int_{t_0}^{tg^{-1}((z-R_1)/b)}[z-R_1-g(\frac{T}{t})b]dT$$

$$=(z-R_1)g^{-1}\Big(\frac{z-R_1}{b}\Big)-G\Big(g^{-1}(\frac{z-R_1}{b})\Big)b$$

$$I_2(b,\ z)=\frac{1}{t}\int_{tg^{-1}((z-R_1)/b)}^{t}[g(\frac{T}{t})b+R_1-z]dT$$

$$=[G(1)-G(g^{-1}(\frac{z-R_1}{b}))]b-[1-g^{-1}(\frac{z-R_1}{b})](z-R_1)$$

$$C(b,\ z)=c_1(z-x)+h[(z-R_1)g^{-1}(\frac{z-R_1}{b})-G(g^{-1}(\frac{z-R_1}{b}))b]$$

$$+p\Big\{[G(1)-G(g^{-1}(\frac{z-R_1}{b}))]b-[1-g^{-1}(\frac{z-R_1}{b})](z-R_1)\Big\}-r_1(z-R_1)-r_2R_1$$

$$=(c_1-p-r_1)z+(h+p)[(z-R_1)g^{-1}(\frac{z-R_1}{b})-G(g^{-1}(\frac{z-R_1}{b}))b]$$

$$+pG(1)b+(p+r_1-r_2)R_1-c_1x$$

(iii) $(z-R_1)/g(\frac{t_0}{t})\leqq b<z/g(\frac{t_0}{t})$

この場合 i) $(z-R_1)/g(\frac{t_0}{t})\leqq b<z$ ($z<R_1/(1-g(\frac{t_0}{t}))$) のとき，$(z-R_1)/g(\frac{t_0}{t})<z$, また $tg^{-1}((z-R_1)/b)<t_0<t<tg^{-1}(z/b)$) ii) $z\leqq b<z/g(\frac{t_0}{t})$ (このとき，$tg^{-1}((z-R_1)/b)<t_0<tg^{-1}(z/b)\leqq t$) の 2 つの場合が考えられるが，$b$ の範囲が異るだけで $I_1(b,\ z)$, $I_2(b,\ z)$, $C(b,\ z)$ は同じである。$R_1=z-g(\frac{t_0}{t})\cdot(z-R_1)/g(\frac{t_0}{t})>z-g(\frac{t_0}{t})b\geqq z-g(\frac{t_0}{t})z/g(\frac{t_0}{t})=0$ より R_1 単位を即納する。

$$I_1(b,\ z)=\frac{1}{t}\int_0^{t_0}[z-g(\frac{T}{t})b]dT$$

$$=z\frac{t_0}{t}-G(\frac{t_0}{t})b$$

$$I_2(b,\ z)=\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}[g(\frac{T}{t})-g(\frac{t_0}{t})]dT$$

$$=[G(1)-G(\frac{t_0}{t})-(1-\frac{t_0}{t})g(\frac{t_0}{t})]b$$

$$C(b,\ z)=c_1(z-x)+h[z\frac{t_0}{t}-G(\frac{t_0}{t})b]+p\Big[G(1)-G(\frac{t_0}{t})-(1-\frac{t_0}{t})g(\frac{t_0}{t})\Big]b$$

$$-r_2[z-g(\frac{t_0}{t})b]-r_1g(\frac{t_0}{t})b$$

$$=(c_1-r_2+h\frac{t_0}{t})z+\{pG(1)-(h+p)G(\frac{t_0}{t})+[r_2-r_1-(1-\frac{t_0}{t})p]g(\frac{t_0}{t})\}b-c_1x$$

(iv)　$z/g(\frac{t_0}{t})\leqq b<(z+R_2)/g(\frac{t_0}{t})$

この場合 i)　$z/g(\frac{t_0}{t})\leqq b<z+R_2$　($z<R_2g(\frac{t_0}{t})/(1-g(\frac{t_0}{t}))$ のとき，$z/g(\frac{t_0}{t})<z+R_2$，また，$tg^{-1}(\frac{z}{b})<t_0<t<tg^{-1}((z+R_2)/b)$) ii)　$z+R_2\leqq b<(z+R_2)/g(\frac{t_0}{t})$ (このとき，$tg^{-1}(\frac{z}{b})<t_0<tg^{-1}((z+R_2)/b)\leqq t$) の2つの場合が考えられるが，$b$ の範囲が異るだけで $I_1(b,\ z)$, $I_2(b,\ z)$, $C(b,\ z)$ は同じである。$0=z-g(\frac{t_0}{t})z/g(\frac{t_0}{t})\geqq z-g(\frac{t_0}{t})b>z-g(\frac{t_0}{t})\cdot(z+R_2)/g(\frac{t_0}{t})=-R_2$ ∴　$-R_2<z-g(\frac{t_0}{t})b\leqq 0$, $g(\frac{t_0}{t})b-z$ を即納する。

$$I_1(b,\ z)=\frac{1}{t}\int_{0}^{tg^{-1}(z/b)}[z-g(\frac{T}{t})b]dT$$

$$=zg^{-1}(\frac{z}{b})-G(g^{-1}(\frac{z}{b}))$$

$$I_2(b,\ z)=\frac{1}{t}\int_{tg^{-1}(z/b)}^{t_0}[g(\frac{T}{t})b-z]dT+\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}[g(\frac{T}{t})-g(\frac{t_0}{t})]bdT$$

$$=z[g^{-1}(\frac{z}{b})-\frac{t_0}{t}]+[G(1)-G(g^{-1}(\frac{z}{b}))-(1-\frac{t_0}{t})g(\frac{t_0}{t})]b$$

$$C(b,\ z)=c_1(z-x)+h[zg^{-1}(\frac{z}{b})-G(g^{-1}(\frac{z}{b}))b]+p\{[G(1)-G(g^{-1}(\frac{z}{b}))$$

$$-(1-\frac{t_0}{t})g(\frac{t_0}{t})]b+z[g^{-1}(\frac{z}{b})-\frac{t_0}{t}]\}+c_2[g(\frac{t_0}{t})b-z]-r_1g(\frac{t_0}{t})b$$

$$=(c_1-c_2+p\frac{t_0}{t})z+(h+p)[zg^{-1}(\frac{z}{b})-G(g^{-1}(\frac{z}{b}))b]$$

$$+\{pG(1)+[c_2-r_1-(1-\frac{t_0}{t})p]g(\frac{t_0}{t})\}b-c_1x$$

(v)　$b\geqq(z+R_2)/g(\frac{t_0}{t})$

このとき，$tg^{-1}(\frac{z}{b})<tg^{-1}(\frac{z+R_2}{b})\leqq t_0<t$。また，$z-g(\frac{t_0}{t})b\leqq z-g(\frac{t_0}{t})(z+R_2)/g(\frac{t_0}{t})=-R_2$ よって $g(\frac{t_0}{t})b-z\geqq R_2$ となり，R_2 だけ即納。

$$I_1(b,\ z)=\frac{1}{t}\int_0^{tg^{-1}(z/b)}[z-g(\frac{T}{t})b]dT$$

$$=zg^{-1}(\frac{z}{b})-G(g^{-1}(\frac{z}{b}))b$$

$$I_2(b,\ z)=\frac{1}{t}\int_{tg^{-1}(z/b)}^{t_0}[g(\frac{T}{t})b-z]dT+\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}[g(\frac{T}{t})b-(z+R_2)]dT$$

$$=zg^{-1}(\frac{z}{b})-G(g^{-1}(\frac{z}{b}))b+G(1)b-z-(1-\frac{t_0}{t})R_2$$

$$C(b,\ z)=c_1(z-x)+h[zg^{-1}(\frac{z}{b})-G(g^{-1}(\frac{z}{b}))b]+p[zg^{-1}(\frac{z}{b})-G(g^{-1}(\frac{z}{b}))b+G(1)b-z-(1-\frac{t_0}{t})R_2]+c_2R_2-r_1(z+R_2)$$

$$=(c_1-p-r_1)z+(h+p)[zg^{-1}(\frac{z}{b})-G(g^{-1}(\frac{z}{b}))b]+pG(1)b+[c_2-r_1-(1-\frac{t_0}{t})p]R_2-c_1x$$

以上を整理すると $C(b,\ z)$ は

$$C(b,\ z)=\begin{cases}(c_1+h)z-[hG(1)+r_1]b-[r_2+(1-\frac{t_0}{t})h]R_1-c_1x & 0\leqq b<z-R_1\\[2ex] (c_1-p-r_1)z+(h+p)[(z-R_1)g^{-1}(\frac{z-R_1}{b})-G(g^{-1}(\frac{z-R_1}{b}))b]+pG(1)b+(p+r_1-r_2)R_1-c_1x & (z-R_1)\leqq b<(z-R_1)/g(\frac{t_0}{t})\\[2ex] (c_1-r_2+h\frac{t_0}{t})z+\{pG(1)-(h+p)G(\frac{t_0}{t})+[r_2-r_1-(1-\frac{t_0}{t})p]g(\frac{t_0}{t})\}b-c_1x & (z-R_1)/g(\frac{t_0}{t})\leqq b<z/g(\frac{t_0}{t})\\[2ex] (c_1-c_2+p\frac{t_0}{t})z+(h+p)[zg^{-1}(\frac{z}{b})-G(g^{-1}(\frac{z}{b}))b]+\{pG(1)+[c_2-r_1-(1-\frac{t_0}{t})p]g(\frac{t_0}{t})\}b-c_1x & z/g(\frac{t_0}{t})\leqq b<(z+R_2)/g(\frac{t_0}{t})\\[2ex] (c_1-p-r_1)z+(h+p)[zg^{-1}(\frac{z}{b})-G(g^{-1}(\frac{z}{b}))b]+pG(1)b+[c_2-r_1-(1-\frac{t_0}{t})p]R_2-c_1x & b\geqq(z+R_2)/g(\frac{t_0}{t})\end{cases}\tag{21}$$

となる。

注意 2　(4), (8), (15), (21), における $[c_2-r_1-(1-\frac{t_0}{t})p]R_2$ は, $c_2>r_1+(1-\frac{t_0}{t})p$ のとき追加注

文せず($R_2=0$)品切をおこしたほうが有利であることを示している。

期待平均費用 $E\{C(B,\ z)\}$ は

$$E\{C(B,\ z)\}=\int_0^{\infty}C(b,\ z)\phi(b)db=\int_0^{z-R_1}C(b,\ z)\phi(b)db+\int_{z-R}^{(z-R_1)/g(\frac{t_0}{t})}C(b,\ z)\phi(b)db$$

$$+\int_{(z-R_1)/g(\frac{t_0}{t})}^{z/g(\frac{t_0}{t})}C(b,\ z)\phi(b)db+\int_{z/g(\frac{t_0}{t})}^{(z+R_2)/g(\frac{t_0}{t})}C(b,\ z)\phi(b)db+\int_{(z+R_2)/g(\frac{t_0}{t})}^{\infty}C(b,\ z)\phi(b)db$$

$$=-c_1x+H_4(z) \tag{22}$$

$$H_4(z)=(c_1-p-r_1)z+[c_2-r_1-(1-\frac{t_0}{t})p]R_2+(h+p+r_1)(z-R_1)\Phi(z-R_1)-(r_1-r_2+p+h\frac{t_0}{t})(z$$

$$-R_1)\Phi\Bigl(\frac{z-R}{g(\frac{t_0}{t})}\Bigr)+[c_2-r_2+(h+p)\frac{t_0}{t}]\Phi\Bigl(\frac{z}{g(\frac{t_0}{t})}\Bigr)+[r_1+(1-\frac{t_0}{t})p-c_2](z+R_2)\Phi\Bigl(\frac{z+R_2}{g(\frac{t_0}{t})}\Bigr)-[r_1$$

$$+hG(1)]\int_0^{z-R_1}b\phi(b)db+pG(1)\int_{z-R_1}^{\infty}b\phi(b)db+(h+p)\int_{z-R_1}^{(z-R_1)/g(\frac{t_0}{t})}[(z-R_1)g^{-1}(\frac{z-R_1}{b})$$

$$-G\Bigl(g^{-1}(\frac{z-R_1}{b})\Bigr)b]\phi(b)db+\Bigl\{[r_2-r_1-(1-\frac{t_0}{t})p]g(\frac{t_0}{t})-(h+p)G(\frac{t_0}{t})\Bigr\}\int_{(z-R_1)/g(\frac{t_0}{t})}^{z/g(\frac{t_0}{t})}b\phi(b)db+[c_2$$

$$-r_1-(1-\frac{t_0}{t})p]g(\frac{t_0}{t})\int_{z/g(\frac{t_0}{t})}^{(z+R_2)/g(\frac{t_0}{t})}b\phi(b)db+(h+p)\int_{z/g(\frac{t_0}{t})}^{\infty}[zg^{-1}(\frac{z}{b})-G(g^{-1}(\frac{z}{b}))b]\phi(b)db \tag{23}$$

となる。また,

$$\frac{dH_4(z)}{dz}=(c_1-p-r_1)+(h+p+r_1)\Phi(z-R_1)+[r_2-r_1-p-\frac{t_0}{t}h]\Phi\Bigl(\frac{z-R_1}{g(\frac{t_0}{t})}\Bigr)$$

$$+[c_2-r_2+(h+p)\frac{t_0}{t}]\Phi\Bigl(\frac{z}{g(\frac{t_0}{t})}\Bigr)+[r_1+(1-\frac{t_0}{t})p-c_2]\Phi\Bigl(\frac{z+R_2}{g(\frac{t_0}{t})}\Bigr)$$

$$+(h+p)\Bigl\{\int_{z-R_1}^{(z-R_1)/g(\frac{t_0}{t})}g^{-1}(\frac{z-R_1}{b})\phi(b)db+\int_{z/g(\frac{t_0}{t})}^{\infty}g^{-1}(\frac{z}{b})\phi(b)db\Bigr\} \tag{24}$$

$$H_4'(R_1)=H_3'(R_1),\ \lim_{z\to\infty}H_4'(z)=c_1+h>0$$

$$\frac{d^2H_4(z)}{dz^2}=r_1\phi(z-R_1)+\Bigl\{(r_2-r_1-(1-\frac{t_0}{t})p)\phi\Bigl(\frac{z-R_1}{g(\frac{t_0}{t})}\Bigr)+(c_2-r_2)\phi\Bigl(\frac{z}{g(\frac{t_0}{t})}\Bigr)$$

$$+[r_1+(1-\frac{t_0}{t})p-c_2]\phi\Bigl(\frac{z+R_2}{g(\frac{t_0}{t})}\Bigr)\Bigr\}\frac{1}{g(\frac{t_0}{t})}$$

$$+(h+p)\Bigl\{\int_{z-R_1}^{(z-R_1)/g(\frac{t_0}{t})}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\Bigl(\frac{z-R_1}{b}\Bigr)\phi(b)db+\int_{z/g(\frac{t_0}{t})}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\Bigl(\frac{z}{b}\Bigr)\phi(b)db\Bigr\} \tag{25}$$

上式で, $[r_2-r_1-(1-\frac{t_0}{t})p]<0$ であるから必ずしも $d^2H(z)/dz^2\geqq 0$ とは限らない。ここで次の仮定を設定する。

仮定 1　$\frac{d^2H_4(z)}{dz^2}\geqq 0$

上の仮定が成立するための十分条件として次の補題が成立する。

補題 1　$\phi(z)$ が増加関数のとき仮定は成立する。

証明

$$H_4''(z) \geqq r_1\phi(z-R_1)+\left\{[r_2-r_1-(1-\frac{t_0}{t})p]+(c_2-r_2)+[r_1+(1-\frac{t_0}{t})p-c_2]\right\}\frac{\phi\left(\dfrac{z-R_1}{g(\frac{t_0}{t})}\right)}{g(\frac{t_0}{t})}$$

$$+(h+p)\left\{\int_{z-R_1}^{(z-R_1)/g(\frac{t_0}{t})}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z-R_1}{b}\right)\phi(b)dt+\int_{z/g(\frac{t_0}{t})}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}(\frac{z}{b})\phi(b)db\right\}$$

$$= r_1\phi(z-R_1)+(h+p)\left\{\int_{z-R_1}^{(z-R_1)/g(\frac{t_0}{t})}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z-R_1}{b}\right)\phi(b)db+\int_{z/g(\frac{t_0}{t})}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}(\frac{z}{b})\phi(b)db\right\}\geqq 0$$

補題 2　$t_0=t$ のとき仮定は成立する。

証明

$t_0=t$ とおくと,

$$H_4''(z) = r_2\phi(z-R_1)+(c_2-r_2)\phi(z)+(r_1-c_2)\phi(z+R_2)+(h+p)\int_z^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db$$

$$\geqq 0$$

補題 3　$\phi(z)$ が減少関数で，$r_2>(1-\frac{t_0}{t})p+r_1(1-g(\frac{t_0}{t}))$ ならば仮定は成立する。

証明

$$H_4''(z)\geqq\left\{r_1g(\frac{t_0}{t})+[r_2-r_1-(1-\frac{t_0}{t})p]\right\}\frac{\phi(z-R_1)}{g(\frac{t_0}{t})}+(c_2-r_2)\frac{\phi\left(\dfrac{z}{g(\frac{t_0}{t})}\right)}{g(\frac{t_0}{t})}+[r_1+(1-\frac{t_0}{t})p-c_2]$$

$$\times\frac{\phi\left(\dfrac{z+R_2}{g(\frac{t_0}{t})}\right)}{g(\frac{t_0}{t})}+(h+p)\left\{\int_{z-R_1}^{(z-R_1)/g(\frac{t_0}{t})}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z-R_1}{b}\right)\phi(b)db+\int_{z/g(\frac{t_0}{t})}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}(\frac{z}{b})\phi(b)db\right\}$$

$$=\left\{r_2-[(1-\frac{t_0}{t})p+r_1(1-g(\frac{t_0}{t}))]\right\}\frac{\phi(z-R_1)}{g(\frac{t_0}{t})}+(c_2-r_2)\frac{\phi\left(\dfrac{z}{g(\frac{t_0}{t})}\right)}{g(\frac{t_0}{t})}+[r_1+(1-\frac{t_0}{t})p-c_1]$$

$$\times\frac{\phi\left(\dfrac{z+R_2}{g(\frac{t_0}{t})}\right)}{g(\frac{t_0}{t})}+(h+p)\left\{\int_{z-R_1}^{(z-R_1)/g(\frac{t_0}{t})}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z-R_1}{b}\right)\phi(b)db+\int_{z/g(\frac{t_0}{t})}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db\right\}\geqq 0$$

r_2 のとりうる範囲は(1)より $(1-\frac{t_0}{t})p+r_1(1-g(\frac{t_0}{t}))<r_2\leqq(1-\frac{t_0}{t})p+r_1$ となる。

$\phi((z-R_1)/g(\frac{t_0}{t}))$，の係数が負で $\phi(z/g(\frac{t_0}{t}))$ および $\phi((z+R_2)/g(\frac{t_0}{t}))$ の係数は正であり，それぞれの3つの係数の和は零でかつ $\phi(z-R_1)$ の係数は正，積分値は正であるから上の補題よりゆるい条件が存在するように思われる。

$H(z)$ を次式で定義すると，

$$H(z)=\begin{cases} H_1(z) & z\leqq -R_2 \\ H_2(z) & -R_2<z\leqq 0 \\ H_3(z) & 0<z\leqq R_1 \\ H_4(z) & z>R_1 \end{cases} \tag{26}$$

$H(z)$ は z の連続関数となる。また $H'(z)$ は $z=0$ を除いて z の連続関数，$H_2'(0)>H_3'(0)=H_2'(0)-r_1$，$H_3'(R_1)=H_4'(R_1)$ である。

$H(z)$ の最小値を考察する場合，$H_i'(z)(i=1,\cdots,4)$ の性質より次の5つの場合を考察すれば十分である。

(i)　$H_2'(0)<0,\ H_4'(R_1)<0$　　(このとき，$H_3'(0)<0$)

(ii)　$H_2'(0)<0,\ H_4'(R_1)>0$　　(このとき，$H_3'(0)<0$)

(iii)　$H_2'(0)>0,\ H_3'(0)<0,\ H_4'(R_1)<0$

(iv)　$H_2'(0)>0,\ H_3'(0)<0,\ H_4'(R_1)>0$

(v)　$H_2'(0)>0,\ H_3'(0)>0$　　(このとき，$H_4'(R_1)>0$)

ところが，

$$\begin{aligned} H_2'(0)-r_1 &= c_1-p+[r_1+(1-\frac{t_0}{t})p-c_2]\Phi\left(\frac{R_2}{g(\frac{t_0}{t})}\right)-r_1 \\ &\leqq c_1-p+[r_1+(1-\frac{t_0}{t})p-c_2]-r_1 \\ &= c_1-\left(\frac{t_0}{t}p+c_2\right) \\ &<0\quad(\because c_2\geqq c_1,\ p>0) \end{aligned}$$

となり，

$H_3'(0)=H_2'(0)-r_1<0$ となる。したがって，つねに $H_3'(0)<0$ となり，(v)はおこらない。また $H_4'(R_1)>0$ ならば $z>R_1$ に対して $H_4(z)$ は z の増加関数となり $H_4(z)$ を導入する意味がないので $H_4'(R_1)<0$ と仮定しよう。結局，次の2つの場合を考えればよい

(i)　$H_2'(0)<0,\ H_4'(R_1)<0$

(ii)　$H_2'(0)>0,\ H_4'(R_1)<0$

(iii)　の場合，　が $-R_2$ と0との間で $H(z)$ を最小にする場合がおこるかも知れない。つまり発注後の期首在庫が負のときが最適であることを意味する。

$H_2'(-R_1) = c_1 - p < 0$, $H_2'(0) > 0$, $H_2'(z) \geqq 0$;$H_3'(0) < 0$, $H_3'(R_1) = H_4'(R_1) < 0$, $\lim_{z \to \infty} H_4'(z) = c_1 + h > 0$,

$H_4''(z) \geqq 0$ より

$$H_2'(z) = 0 \tag{27}$$

$$H_4'(z) = 0 \tag{28}$$

はそれぞれ唯一の根 $\bar{z}_2\,(-R_2 < \bar{z}_2 < 0)$, $\bar{z}_4(>R_1)$ をもつ

(a) **$H_2(\bar{z}_2) < H_4(\bar{z}_4)$ の場合**

このとき，最適政策は，

$x \leqq \bar{z}_2$ ならば $\bar{z}_2 - x$ だけ発注，

$\bar{z}_2 < x \leqq \bar{z}_2^1$ ならば発注しない，

$\bar{z}_2^1 < x \leqq \bar{z}_4$ ならば $\bar{z}_4 - x$ だけ発注，

$x > \bar{z}_4$ ならば発注しない

ことである。

ここに $\bar{z}_2^1$ は$H_2(z) = H_4(\bar{z}_4)$ となる $\bar{z}_2$ より大きい z の値である。

(b) **$H_2(\bar{z}_2) > H_4(\bar{z}_4)$ の場合**

このとき，最適政策は，

$x \leqq \bar{z}_4$ ならば $\bar{z}_4 - x$ だけ発注，

$x > \bar{z}_4$ ならば発注しない

ことである。

n 期間の在庫問題を考察するときは，(i)の場合のみを取扱うことにする。つまり次の仮定のもとで議論をすすめることにする。

仮定 2　　$H_2'(0) < 0$, $H_4'(0) < 0$

$H_2'(0) < 0$ のとき，$r_1 + (1 - \frac{t_0}{t})p - c_2 \geqq 0$ より $0 > c_1 - p + [r_1 + (1 - \frac{t_0}{t})p - c_2]\Phi\left(\frac{R_2}{g(\frac{t_0}{t})}\right)$ より $c_1 - p < 0$

となる。つまり(1)で $c_1 < p$ を仮定する必要はない

2．n 期間モデル

この節では多期間モデルを考察する。最適性の原理より

$$f_1(x) = \operatorname*{Min}_{z \geqq x}\left\{-c_1 x + H(z)\right\} \tag{29}$$

$$f_n(x) = \operatorname*{Min}_{z \geqq x}\left\{-c_1 x + H(z) + \alpha\int_0^\infty f_{n-1}(z-b)\phi(b)\,db\right\} \tag{30}$$

上記のようにして求められた z を最適政策という。このとき，次の定理をうる。

定理 1　最適政策は，

$z = \bar{x}_n$,　　$x \leqq \bar{x}_n$

$z = xx > \bar{x}_n$

である。ここに $\bar{x}_n$ は

$$p+r_1 = c_1+(h+p+r_1)\Phi(z-R_1)+[r_2-r_1-p-\frac{t_0}{t}h]\Phi\left(\frac{z-R_1}{g(\frac{t_0}{t})}\right)+[c_2-r_2+(h+p)\frac{t_0}{t}]\Phi\left(\frac{z}{g(\frac{t_0}{t})}\right)$$

$$+[r_1+(1-\frac{t_0}{t})p-c_2]\Phi\left(\frac{z+R_2}{g(\frac{t_0}{t})}\right)+(h+p)\left\{\int_{z-R_1}^{(z-R_1)/g(\frac{t_0}{t})}g^{-1}\left(\frac{z-R_1}{b}\right)\phi(b)db\right.$$

$$\left.+\int_{z/g(\frac{t_0}{t})}^{\infty}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db\right\}+a\int_0^{\infty}f'_{n-1}(z-b)\phi(b)db \tag{31}$$

の唯一の根である。ここに $f'_0 = 0$ とする。

証明　帰納法による

(i)　$n=1$ の場合

$H_1(-R_2) = H_2(-R_2)$, $H'_1(z) = c_1-p<0$, $H'_2(-R_2) = H'_1(-R_2) = c_1-p<0$, $H_2(0) = H_3(0)$, $H'_2(z)<0$ ($\because H'_2(0)<0$, $H''_2(z)\geqq 0$), $H'_3(z)<0$ ($\because H'_4(R_1) = H'_3(R_1)$, $H''_3(z)\geqq 0$), $H_3(R_1) = H_4(R_1)$, $H'_4(R_1)<0$ となるので $z>R_1$ の場合だけを考えれば十分である。$\bar{x}_1(>R_1)$ が(31)をみたすことは $\phi(b)>0$ に対して $H''_4(z)>0$ および $\lim_{z\to\infty}H'_4(z) = c_1+h>0$ より示される。$\phi(b)\geqq 0$ のときは $H''_4(z)\geqq 0$ となり，ある閉区間におけるすべての値が根となる場合があるかもしれない。このときは最小値を唯一の根 $\bar{x}_1$ とする。以下の議論でもこのように唯一の根を定める。このとき，

$$f'_1(x) = -c_1 \qquad x\leqq \bar{x}_1 \tag{32}$$

$$f'_1(x) = -(p+r_1)+(h+p+r_1)\Phi(x-R_1)+[r_2-r_1-p\frac{t_0}{t}h]\Phi\left(\frac{x-R_1}{g(\frac{t_0}{t})}\right)$$

$$+[c_2-r_2-(h+p)\frac{t_0}{t}]\Phi\left(\frac{x}{g(\frac{t_0}{t})}\right)+[r_1+(1-\frac{t_0}{t})p-c_2]\Phi\left(\frac{x+R_2}{g(\frac{t_0}{t})}\right)$$

$$+(h+p)\left\{\int_{x-R_1}^{(x-R_1)/g(\frac{t_0}{t})}g^{-1}\left(\frac{x-R_1}{b}\right)\phi(b)db+\int_{z/g(\frac{t_0}{t})}^{\infty}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db\right\},\ x\geqq \bar{x}_1 \tag{33}$$

$$\lim_{x\to\infty}f'_1(x) = h>0 \tag{34}$$

$$f''_1(x) = r_1\phi(x-R_1)+\left\{[r_2-r_1-(1-\frac{t_0}{t})p]\phi\left(\frac{x-R_1}{g(\frac{t_0}{t})}\right)+(c_2-r_2)\phi\left(\frac{x}{g(\frac{t_0}{t})}\right)\right.$$

$$\left.+[r_1+(1-\frac{t_0}{t})p-c_2]\phi\left(\frac{x+R_2}{g(\frac{t_0}{t})}\right)\right\}\frac{1}{g(\frac{t_0}{t})}+(h+p)\left\{\int_{x-R_1}^{(x-R_1)/g(\frac{t_0}{t})}\frac{\partial}{\partial x}g^{-1}\left(\frac{x-R_1}{b}\right)\phi(b)db\right.$$

$$+\int_{x/g(\frac{t_0}{t})}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}g^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)\phi(b)db\Big\}\geqq 0,\ x\geqq\bar{x}_1 \tag{35}$$

$\phi(b)>0$ のとき，$f_1''(x)>0$ となる，

(ii) $n=2$ の場合

$$H(z)+\alpha\int_0^\infty f_1(z-b)\phi(b)db$$

$$=H_1(z)+\alpha\int_0^\infty f_1(z-b)\phi(b)db \qquad z\leqq -R_2 \tag{36}$$

$$=H_2(z)+\alpha\int_0^\infty f_1(z-b)\phi(b)db \qquad -R_2\leqq z<0 \tag{37}$$

$$=H_3(z)+\alpha\int_0^\infty f_1(z-b)\phi(b)db \qquad 0\leqq z<R_1 \tag{38}$$

$$=H_4(z)+\alpha\int_0^\infty f_1(z-b)\phi(b)db \qquad z\geqq R_1 \tag{39}$$

となる。また，$H_i(z)$, $H_i'(z)(i=1,\ \dots,\ 4)$, (32)より

$$H_1(-R_2)=H_2(-R_2)$$

$$H_1'(z)+\alpha\int_0^\infty f_1'(z-b)\phi(b)db=c_1(1-\alpha)-p<0$$

$$H_2'(-R_2)+\alpha\int_0^\infty f_1'(-R_2-b)\phi(b)db=c_1(1-\alpha)-p<0$$

$$H_2(0)=H_3(0)$$

$$H_2'(z)+\alpha\int_0^\infty f_1'(z-b)\phi(b)db=H_2'(z)-\alpha c_1<0$$

$$H_3'(z)+\alpha\int_0^\infty f_1'(z-b)\phi(b)db=H_3'(z)-\alpha c_1<0$$

$$H_3(R_1)=H_4(R_1)$$

$$H_4'(R_1)+\alpha\int_0^\infty f_1'(R_1-b)\phi(b)db=H_4'(R_1)-\alpha c_1<0$$

となるので，$z\geqq R_1$ の場合を考えれば十分である。$\bar{x}_2$ は(39)を z で微分して 0 とおいて得られる。つまり

$$c_1=r_1+p-(h+p+r_1)\Phi(z-R_1)-[r_2-r_1-p-\frac{t_0}{t}h]\Phi\left(\frac{z-R_1}{g(\frac{t_0}{t})}\right)-[c_2-r_2+(h+p)\frac{t_0}{t}]\Phi\left(\frac{z}{g(\frac{t_0}{t})}\right)$$

$$-[r_1+(1-\frac{t_0}{t})p-c_2]\Phi\left(\frac{z+R_2}{g(\frac{t_0}{t})}\right)-(h+p)\left\{\int_{z-R_1}^{(z-R_1)/g(\frac{t_0}{t})}g^{-1}\left(\frac{z-R_1}{b}\right)\phi(b)db+\int_{z/g(\frac{t_0}{t})}^{\infty}g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db\right\}$$

$$-\alpha\int_0^\infty f_1'(z-b)\phi(b)db \tag{40}$$

をみたす z である。(40)の右辺を $F_1(z)$ とおくと，(32)，(33)，(34)，(35)より

$$F_1'(z) = -r_1\phi(z-R_1) - \Big\{[r_2-r_1+(1-\frac{t_0}{t})h]\phi\Big(\frac{z-R_1}{g(\frac{t_0}{t})}\Big) + (c_2-r_2)\phi\Big(\frac{z}{g(\frac{t_0}{t})}\Big)$$

$$+[r_1+(1-\frac{t_0}{t})p-c_2]\phi\Big(\frac{z+R_2}{g(\frac{t_0}{t})}\Big)\Big\}\frac{1}{g(\frac{t_0}{t})}$$

$$-(h+p)\Big\{\int_{z-R_1}^{(z-R_1)/g(\frac{t_0}{t})}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}\Big(\frac{z-R_1}{b}\Big)\phi(b)db + \int_{z/g(\frac{t_0}{t})}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}(\frac{z}{b})\phi(b)db\Big\}$$

$$-\alpha\int_0^\infty f_1''(z-b)\phi(b)db \leqq 0 \tag{41}$$

$\phi(b)>0$ のとき，$F_1'(z)<0$

$$F_1(R_1) = r_1+p-[c_2-r_2+(h+p)\frac{t_0}{t}]\Phi\Big(\frac{R_1}{g(\frac{t_0}{t})}\Big) - [r_1+(1-\frac{t_0}{t})p-c_2]\Phi\Big(\frac{R_1+R_2}{g(\frac{t_0}{t})}\Big)$$

$$-(h+p)\int_{R_1/g(\frac{t_0}{t})}^{\infty}g^{-1}\Big(\frac{R_1}{b}\Big)\phi(b)db + \alpha c$$

$$= -H_4'(R_1)+(1+\alpha)c_1 > c_1$$

$$\lim_{z\to\infty}F_1(z) = -(1+\alpha)h<0$$

であるから (41) は唯一の根をもつ。したがって最適政策は，

$z = \bar{x}_2, \quad x \leqq \bar{x}_2$

$z = x, \quad x > \bar{x}_2$

である。(i)と同様に

$f_2'(x) = -c_1;\ x \leqq \bar{x}_2$

$$f_2'(x) = -(p+r_1)+(h+p+r_1)\Phi(x-R_1)+[r_2-r_1-p-\frac{t_0}{t}]\Phi\Big(\frac{x-R_1}{g(\frac{t_0}{t})}\Big)$$

$$+[c_2-r_2-(h+p)\frac{t_0}{t}]\Phi\Big(\frac{x}{g(\frac{t_0}{t})}\Big)+[r_1+(1-\frac{t_0}{t})p-c_2]\Phi\Big(\frac{x+R_2}{g(\frac{t_0}{t})}\Big)+(h+p)\Big\{\int_{x-R_1}^{(x-R_1)/g(\frac{t_0}{t})}g^{-1}\Big(\frac{x-R_1}{b}\Big)\phi(b)db$$

$$+\int_{x/g(\frac{t_0}{t})}^{\infty}g^{-1}\Big(\frac{z}{b}\Big)\phi(b)db\Big\}+\alpha\int_0^\infty f_1'(x-b)\phi(b)db,\ x \geqq \bar{x}_2$$

$$\lim_{z\to\infty}f_2'(x) = (1+\alpha)h>0$$

$$f_2''(x) = r_1\phi(x-R_1)+\Big\{[r_2-r_1(1-\frac{t_0}{t})p]\phi\Big(\frac{x-R_1}{g(\frac{t_0}{t})}\Big)+(c_2-r_2)\phi\Big(\frac{x}{g(\frac{t_0}{t})}\Big)$$

$$+[r_1+(1-\frac{t_0}{t})p-c_2]\phi\Big(\frac{x+R_2}{g(\frac{t_0}{t})}\Big)\Big\}\frac{1}{g(\frac{t_0}{t})}+(h+p)\Big\{\int_{x-R_1}^{(x-R_1)/g(\frac{t_0}{t})}\frac{\partial}{\partial x}g^{-1}\Big(\frac{x-R_1}{b}\Big)\phi(b)db$$

$$+\int_{x/g(\frac{t_0}{t})}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}g^{-1}\Big(\frac{x}{b}\Big)\phi(b)db\Big\}+\alpha\int_0^\infty f_1''(x-b)\phi(b)db,\ x \geqq \bar{x}_2$$

(iii)　$n=k$ のとき定理が成立しているとする。このとき

$$f_k'(x) = -c_1,\ x \leqq \bar{x}_k \tag{42}$$

$$\begin{aligned} f_k'(x) = &-(p+r_1)+(h+p+r_1)\Phi(x-R_1)+[r_2-r_1-p-\frac{t_0}{t}]\Phi\left(\frac{x-R_1}{g(\frac{t_0}{t})}\right) \\ &+[c_2-r_2-(h+p)\frac{t_0}{t}]\Phi\left(\frac{x}{g(\frac{t_0}{t})}\right)+[r_1+(1-\frac{t_0}{t})p-c_2]\Phi\left(\frac{x+R_2}{g(\frac{t_0}{t})}\right) \\ &+(h+p)\left\{\int_{x-R_1}^{(x-R_1)/g(\frac{t_0}{t})} g^{-1}\left(\frac{x-R_1}{b}\right)\phi(b)db+\int_{x/g(\frac{t_0}{t})}^{\infty} g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db\right\} \\ &+\alpha\int_0^\infty f_{k-1}'(x-b)\phi(b)db,\ x \geqq \bar{x}_k \end{aligned} \tag{43}$$

$$\lim_{x\to\infty} f_k'(x) > 0 \tag{44}$$

$$\begin{aligned} f_k''(x) = &\ r_1\phi(x-R_1)+\left\{[r_2-r_1-(1-\frac{t_0}{t})p]\phi\left(\frac{x-R_1}{g(\frac{t_0}{t})}\right)+(c_2-r_2)\phi\left(\frac{x}{g(\frac{t_0}{t})}\right)\right. \\ &\left.+[r_1+(1-\frac{t_0}{t})p-c_2]\phi\left(\frac{x+R_2}{g(\frac{t_0}{t})}\right)\right\}\frac{1}{g(\frac{t_0}{t})}+(h+p)\left\{\int_{x-R_1}^{(x-R_1)/g(\frac{t_0}{t})}\frac{\partial}{\partial x}g^{-1}\left(\frac{x-R_1}{b}\right)\phi(b)db\right. \\ &\left.+\int_{x/g(\frac{t_0}{t})}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}g^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)\phi(b)db\right\}+\alpha\int_0^\infty f_{k-1}''(x-b)\phi(b)db,\ x \geqq \bar{x}_k \end{aligned} \tag{45}$$

ここに $\bar{x}_k$ は次の方程式の唯一の根である。

$$\begin{aligned} c_1 = &\ r_1+p-(h+p+r_1)\Phi(x-R_1)-[r_2-r_1-p-\frac{t_0}{t}h]\Phi\left(\frac{x-R_1}{g(\frac{t_0}{t})}\right) \\ &-[c_2-r_2+(h+p)\frac{t_0}{t}]\Phi\left(\frac{x}{g(\frac{t_0}{t})}\right)-[r_1+(1-\frac{t_0}{t})p-c_2]\Phi\left(\frac{x+R_2}{g(\frac{t_0}{t})}\right) \\ &-(h+p)\left\{\int_{x-R_1}^{(x-R_1)/g(\frac{t_0}{t})} g^{-1}\left(\frac{x-R_1}{b}\right)\phi(b)db+\int_{x/g(\frac{t_0}{t})}^{\infty} g^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)\phi(b)db\right\}-\alpha\int_0^\infty f_{k-1}'(x-b)\phi(b)db \end{aligned}$$

このとき

$$f_{k+1}(x) = \operatorname*{Min}_{z\geqq x}\left\{-c_1x+H(z)+\alpha\int_0^\infty f_k(z-b)\phi(b)db\right\} \tag{46}$$

$$H(z)+\alpha\int_0^\infty f_k(z-b)\phi(b)db$$

$$= H_1(z)+\alpha\int_0^\infty f_k(z-b)\phi(b)db \qquad z<-R_2 \tag{47}$$

$$= H_2(z)+\alpha\int_0^\infty f_k(z-b)\phi(b)db \qquad -R_2\leqq z<0 \tag{48}$$

$$= H_3(z)+\alpha\int_0^\infty f_k(z-b)\phi(b)db \qquad 0\leqq z<R_1 \tag{49}$$

$$= H_4(z)+\alpha\int_0^\infty f_k(z-b)\phi(b)db \qquad z\geqq R_1 \tag{50}$$

となる。(ii)と同様な議論より $z>R_1$ の場合を考えれば十分である。$\bar{x}_{k+1}$ は(50)を z で微分して 0 とお

いて得られる。即ち

$$c_1 = r_1 - p - (h + p + r_1)\Phi(x - R_1) - [r_2 - r_1 - p - \frac{t_0}{t}h]\Phi\left(\frac{x - R_1}{g(\frac{t_0}{t})}\right)$$

$$-[c_2 - r_2 + (h+p)\frac{t_0}{t}]\Phi\left(\frac{x}{g(\frac{t_0}{t})}\right) - [r_1 + (1 - \frac{t_0}{t})p - c_2]\Phi\left(\frac{x + R_2}{g(\frac{t_0}{t})}\right)$$

$$-(h+p)\left\{\int_{x-R_1}^{(x-R_1)/g(\frac{t_0}{t})} g^{-1}\left(\frac{x - R_1}{b}\right)\phi(b)db + \int_{x/g(\frac{t_0}{t})}^{\infty} g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db\right\} - \alpha\int_0^{\infty} f_k'(x-b)\phi(b)db \quad (51)$$

をみたす x のことである。(51) の右辺を $F_k(z)$ とおくと，(42)～(45) より

$$F_k'(z) = -r_1\phi(z - R_1) - \left\{[r_2 - r_1 + (1 - \frac{t_0}{t})h]\phi\left(\frac{z - R_1}{g(\frac{t_0}{t})}\right) + (c_2 - r_2)\phi\left(\frac{z}{g(\frac{t_0}{t})}\right)\right.$$

$$\left. + [r_1 + (1 - \frac{t_0}{t})p - c_2]\phi\left(\frac{z + R_2}{g(\frac{t_0}{t})}\right)\right\}\frac{1}{g(\frac{t_0}{t})} - (h+p)\left\{\int_{z-R_1}^{(z-R_1)/g(\frac{t_0}{t})} \frac{\partial}{\partial z} g^{-1}\left(\frac{z - R_1}{b}\right)\phi(b)db\right.$$

$$\left. + \int_{z/g(\frac{t_0}{t})}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db\right\} - \alpha\int_0^{\infty} f_k''(z-b)\phi(b)db \leqq 0 \quad (52)$$

$$F_k(R_1) = -H_4'(R_1) + (1+\alpha)c_1 > c_1, \ \lim_{z\to\infty} F_k(z) < 0$$

となるから (52) は唯一の根をもつ。したがって最適政策は

$z = \overline{x}_{k+1}, \quad x \leqq \overline{x}_{k+1}$

$z = x, \quad x > \overline{x}_{k+1}$

である。[証終]

注意 3　$H_2'(0) = c_1 - p + [r_1 + (1 - \frac{t_0}{t})p - c_2]\Phi\left(\frac{R_2}{g(\frac{t_0}{t})}\right) < 0$ および $r_1 + (1 - \frac{t_0}{t})p - c_1 > 0$ より $c_1 - p < 0 \ \therefore c_1 < p$ したがって $H_2'(0) < 0$ ならば $c_1 < p$ をうる。しかし逆は成立しない。

この多期間在庫モデルにおける $\overline{x}_n$, $f_n(x)$ について次の定理をうる

定理 2

(i) 点 $\overline{x}_n$ を除いて $f_n''(x) \geqq 0$, $\overline{x}_n$ では非負の右 2 階微分係数，非負の左 2 階微分係数が存在する。

(ii) $\overline{x}_n \geqq \overline{x}_{n-1}$, ただし $\overline{x}_0 = R_1$

(iii) $n \geqq 2$ に対して

$-p < f_n'(x) \leqq f_{n-1}'(x) \qquad x \leqq \overline{x}_n$

$-p < f_n'(x) < f_{n-1}'(x) + \alpha^{n-1}h \qquad n > \overline{x}_n$

$n = 1$ に対して

$-p < f_1'(x) < h$

証明　(i)は定理 1 の証明の中で示されている。(ii), (iii) は帰納法による。

i)　$n = 1$の場合

(33)で $x=\overline{x}_1$ とおくと，(31)より $f_1'(x)=-c_1$ となる。(35)より $x>\overline{x}_1$ に対して $f_1''(x)\geqq 0$，(34)より $\lim_{x\to\infty}f_1'(x)=h$，また $c_1<p$ したがってすべての x に対して，$h>f_1'(x)\geqq -c_1>-p$，$\overline{x}_1>R_1=\overline{x}_0$ は定理1の中で示されている。

ii)　$n=2$ の場合

このとき，$\overline{x}_2$ は

$$c_1=r_1-p-(h+p+r_1)\Phi(\overline{x}_2-R_1)-[r_2-r_1-p-\frac{t_0}{t}h]\Phi\left(\frac{\overline{x}_2-R_1}{g(\frac{t_0}{t})}\right)$$

$$-[c_2-r_2+(h+p)\frac{t_0}{t}]\Phi\left(\frac{\overline{x}_2}{g(\frac{t_0}{t})}\right)-[r_1+(1-\frac{t_0}{t})p-c_2]\Phi\left(\frac{\overline{x}_2+R_2}{g(\frac{t_0}{t})}\right)$$

$$-(h+p)\left\{\int_{x_2R_1}^{(x_2R_1)/g(\frac{t_0}{t})}g^{-1}\left(\frac{\overline{x}_2-R_1}{b}\right)\phi(b)db+\int_{x_2/g(\frac{t_0}{t})}^{\infty}g^{-1}\left(\frac{x_2}{b}\right)\phi(b)db\right\}-\alpha\int_0^{\infty}f_1'(\overline{x}_2-b)\phi(b)db$$

をみたす。右辺の関数 $F_1(\overline{x}_2)$ は $\overline{x}_2$ の単調減少関数である。また $F_1(R_1)=-H_4'(R_1)+(1+\alpha)c_1>c_1$，$F_1(\overline{x}_1)=(1+\alpha)c_1>c_1=F(x_2)$ したがって $\overline{x}_1<\overline{x}_2$ をうる。$x\leqq\overline{x}_1$ のとき，$f_1'(x)=f_2'(x)=-c_1>-p$，$\overline{x}_1<x\leqq\overline{x}_2$ のとき，$f_2'(x)=-c_1$，$f_1'(x)\geqq -c_1$ よって $-p<f_2'(x)\leqq f_1'(x)$　　$(x\leqq\overline{x}_2)$

$x>\overline{x}_2$ のとき

$$f_2'(x)-f_1'(x)=\alpha\int_0^{\infty}f_1'(x-b)\phi(b)db$$

$$=\alpha\int_0^{x-x_1}f_1'(x-b)\phi(b)db+\alpha\int_{x-x_1}^{\infty}f_1'(x-b)\phi(b)db$$

$$\leqq\alpha h\int_0^{x-x_1}\phi(b)db-\phi c_1\int_{x-x_1}^{\infty}\phi(b)db<\alpha h$$

となる。したがって $-p<f_2'(x)<f_1'(x)+\alpha h$

ii）　$n=k$ に対して定理が成立しているとする。このとき

$\overline{x}_k\geqq\overline{x}_{k-1}$

$-p<f_k'(x)\leqq f_{k-1}'(x)$　　　　$x\leqq\overline{x}$

$-p<f_k'(x)<f_{k-1}'(x)+\alpha^{k-1}h$　　　　$x>\overline{x}$

となる。

このとき $\overline{x}_{k+1}$ は $c_1=F_k(\overline{x}_{k+1})$ をみたす。$F_k(x)$ は x の単調減少関数であり，$F_k(R_1)=-H_4'(R_1)+(1+\alpha)c_1>c_1$

$$F_k(\overline{x}_k)=r_1-p-(h+p+r_1)\Phi(\overline{x}_k-R_1)-(r_2-r_1-p-\frac{t_0}{t}h)\Phi\left(\frac{\overline{x}_k-R_1}{g(\frac{t_0}{t})}\right)$$

$$-[c_2-r_2+(h+p)\frac{t_0}{t}]\Phi\left(\frac{\overline{x}_k}{g(\frac{t_0}{t})}\right)-[r_1+(1-\frac{t_0}{t})p-c_2]\Phi\left(\frac{\overline{x}_k+R_2}{g(\frac{t_0}{t})}\right)$$

$$-(h+p)\left\{\int_{x_k-R_1}^{(x_k-R_1)/g(\frac{t_0}{t})}g^{-1}\left(\frac{\overline{x}_k-R_1}{b}\right)\phi(b)db+\int_{x_k/g(\frac{t_0}{t})}^{\infty}g^{-1}\left(\frac{\overline{x}_k}{b}\right)\phi(b)db\right\}$$

$$-\alpha\int_0^{\infty} f_k'(\overline{x}_k-b)\phi(b)db$$

$$=C_1+\alpha\int_0^{\infty}[f_{k-1}'(\overline{x}_k-b)-f_k'(\overline{x}_k-b)]\phi(b)db$$

$$\geqq c_1=F_k(\overline{x}_{k+1})$$

であるから，$\overline{x}_k \leqq \overline{x}_{k+1}$ をうる。

$x\leqq \overline{x}_k$ のとき，$f_k'(x)=f_{k+1}'(x)=-c_1>-p$, $\overline{x}_k<x_k\leqq \overline{x}_{k+1}$ のとき，$f_{k+1}'(x)=-c_1$, $f_k'(x)\geqq -c_1$

よって $-p<f_{k+1}'(x)\leqq f_k'(x) \quad (x\leqq \overline{x}_{k+1})$

$x>\overline{x}_{k+1}$ のとき

$$f_{k+1}'(x)-f_k'(x)=\alpha\int_0^{\infty}[f_k'(x-b)-f_{k-1}'(x-b)]\phi(b)db$$

$$=\alpha\int_0^{x-x_k}[f_k'(x-b)-f_{k-1}'(x-b)]\phi(b)db+\alpha\int_{x-\overline{x}_k}^{\infty}[f_k'(x-b)-f_{k-1}'(x-b)]\phi(b)db$$

$$\leqq\alpha\int_0^{x-x_k}\alpha^{k-1}h\phi(b)db+0=\alpha^k h\Phi(x-\overline{x}_k)<\alpha^k h$$

$-p<-c_1<f_{k-1}'(x)$ であるから $n=k+1$ のとき成立する［証終］

む　す　び

需要量が連続的な多期間在庫モデルについて，返却および追加注文を考慮し過剰需要が後期需要として取扱われる場合の最適政策を検討した。最適政策は簡単な型になることを示した。最適政策が簡単な型にならない場合や，過剰需要が後期の需要として取扱われないモデルについては今後の研究課題である。

文　　　献

［1］K. J. Arrow, S. Kalin and H. Scharf : Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production. Stanford, Calf. Stanford Univ. Press. 1958.

［2］——: Studies in Applied Probability and Management Science, Stanford Calf. Stanford Univ. Press, 1962.

［3］R.Bellman : Dynamic Programming, Princetion, N. J., Princetion Univ. Press, 1957.

［4］Kabak, I. W. : "Partial Returns in the Single Period Inventory Model," *IE News,* Vol. 19, No. 2, 1984, pp. 1-3.

［5］Kabak, I. W. and Weinberg, C. B. : "The Generalized Newsboy Problem, Contract Negotiations and Secondary Vedors," *AIIE Trans.,* Vol. 4, No. 2, 1972, pp. 154-157.

［6］M. Kodama : A delivery-lag inventory control process with emerqency and non-stationary stochastic demands, Bull. Math. Statist., Vol. 12, No. 1, 2, 1965, pp. 69-88.

［7］M. Kodama : A delivery-lag inventory control process with emergency and non-stationary stochastic demands II，Kumamoto J. Sci., Ser. A, Vol. 7, No. 3, 1966, pp. 43-72.

[8] M. Kodama : A type of statistical inventory problem with emergency and delivery-lags, Memoirs of the Faculty of General Education, Kumamoto University, Series of Natural Science, No. 1, 1966, pp. 7-21.

[9] M. Kodama : The optimality of (S, s) policies in the dynamic inventory problem with emergency and non-stationary stochastic demands, Kumamoto, J. Sci., Ser. A, Vol. 8, No. 1, 1967, pp. 1-10.

[10] M. Kodama : A delivery-lag inventory control process with emergency and non-stationary stochastic demands Ⅲ, Memoirs of the Faculty of General Education, Kumamoto University, Series of Natural Science, No. 3, 1968, pp. 9-23.

[11] M. Kodama : Optimal policies for dynamic inventory processes with random delivery-lag and non-stationary stochastic demands, Kumamoto J. Sci., Ser. A, Vol. 8, No. 2, 1967, pp. 84-105.

[12] 北原貞輔・児玉正憲：「ORにより在庫管理システム」九州大学出版会，1982。

[13] 児玉正憲・北原貞輔：「種々の需要形態に関する統一的在庫モデルの研究」経済学研究，Vol. 47，No. 5-6，九州大学経済学会，1983，pp. 49-72。

[14] 児玉正憲：「種々の需要形態に関する確率的在庫モデル」，経済学研究，Vol. 51，No. 5，九州大学経済学会，1986，pp. 35-44。

[15] ——：「確率的在庫モデルの最適政策(Ⅰ)」経済学研究，Vol. 52，No. 1～4，九州大学経済学会，1986，pp. 551-567。

[16] ——：「確率的在庫モデルの最適政策(II)」経済学研究，Vol. 52，No. 5，九州大学経済学会，1986，pp. 13-19。

[17] ——：「動的在庫モデルの最適政策(Ⅰ)連続編」経済学研究，Vol. 53，No. 4・5，九州大学経済学会，1987，pp. 51-68。

[18] ——：「動的在庫モデルの最適政策(II)連続編」経済学研究，Vol. 53，No. 6，九州大学経済学会，1987，pp. 15-30。

[19] ——：「リードタイムのある動的在庫モデルの最適政策」経済学研究，Vol. 54，No. 1・2，九州大学経済学会，1988，pp. 93-118。

[20] ——：「リードタイムのある動的在庫モデルの定常政策」経済学研究，Vol. 54，No. 3，九州大学経済学会，1988，pp. 45-62。

[21] ——：「一般的生産・需要形態に関する静態的在庫モデル」経済学研究，Vol. 54，No. 4・5，九州大学経済学会，1988，pp. 211-230。

[22] ——：「リードタイムのある確率的在庫モデル」経済学研究，Vol. 54，No. 6，九州大学経済学会，1989，pp. 53-70。

[23] ——：「リードタイムのある確率的在庫モデル(離散編)」経済学研究，Vol. 55，No. 1・2，九州大学経済学会，1989，pp. 1-19。

[24] ――：「離散確率的在庫モデルの同値変換」経済学研究，Vol. 55，No. 3，九州大学経済学会，1989，pp. 23-39。

[25] ――：「離散確率的在庫モデルに関する同値変換の一般化」経済学研究，Vol. 155，No. 4・5，九州大学経済学会，1989，pp. 161-185。

[26] ――：「返品および追加注文を許す一期間確率的在庫モデル(Ⅰ)」経済学研究，Vol. 55，No. 6，九州大学経済学会，1990，pp. 31-48。

[27] ――：「返品および追加注文を許す一期間確率的在庫モデル(Ⅱ)」経済学研究，Vol. 56，No. 1・2，九州大学経済学会，1990，pp. 277-293。

[28] ――：「種々の返却および追加注文を許す確率的在庫モデル(Ⅰ)」経済学研究，Vol. 56，No. 3，1990，pp. 17-48。

[29] ――：「種々の返却および追加注文を許す確率的在庫モデル(Ⅱ)」経済学研究，Vol. 56，No. 5・6

[30] Monks, J. G. : Operations Management, Theory and Problem, McGraw. Hill, 1977.

[31] Nadder, E : Inventory System, John Wiley, 1966.

[32] Scarf, H. E., D. M, Gilford, and M. W. Shelly : Multistage Inventory Models and Techniques, Stanford, Calif. Stanford Univ, Press, 1963.

[33] 狙徠三十六，有薗育生，大田宏：「返却および追加注文を許す一期間モデルの解法」日本経営工学会誌，Vol. 37，No. 2，1986，pp. 100-105。

[34] Tahu, H. A. : Operations Research, An Introduction, Macmillan, 1976.