パラメトリックな線形計画と動的計画（I）

岩本，誠一

https://doi.org/10.15017/4491829

出版情報：經濟學研究. 55 (4/5), pp.173-185, 1990-07-10. 九州大学経済学会

パラメトリックな線形計画と動的計画（I）

岩　本　誠　一

目　次

1. 概　要

数理計画法においては種々の最適化手法を取り扱っているが，中でも線形計画法(Linear Programming, LP)と動的計画法(Dynamic Programming, DP)が長い歴史を有している。しかし，両計画法は最適化問題への接近において顕著な相異がみられ，いろいろな意味で対称的である。LP では制約条件を空間内において瞬時的にとらえるのに対して，DP では逐次的に分割して処理している。すなわち，LP では n 次元ユークリッド空間 R^n における制約集合を m 個の制約式で同時的に設定して，制約集合の凸性と目的式の線形性に着目して単体法が開発されてきた。単体法自体は制約凸集合の端点を逐次探索して目的式が最適（最大または最小）になる効率的な解法である。他方，DP では R^n の制約集合を互に前後関係し会う一次元制約集合列で表現して，目的関数の可分性と単調性を用いて逐次最適化を行い，最終的に n 変数同時最適化と同等な作用を行っている。これは本質的には(多)重積分を累次積分によって計算することに等しい[3]。

なるほど LP は大規模問題にも適した優れた方法であるが，しかし，現実には既にいくつかの具体的な小型 LP 問題は DP で解かれていたり[2]，大規模分割型 LP 問題は DP で定式化されて分析されている[1]。

本論文では，Bellman [1, p. 47] が提示したパラメトリックな N 変数 $(N-1)$ 制約 LP 問題(主問題)およびこれに関連して設定•導入した他の 3 つの LP 問題(双対問題，逆転問題，双対逆転問題)の合計 4 つの LP 問題を考える。いずれも $(N-1)$ 個の実パラメータ $a=(a_1, a_2, \cdots, a_{N-1})'$ を含む問題である。

第 2 節では用語・定義を説明して，4 問題を導入する。第 3 節では 4 つの最適値関数の関係，性質，

上界・下界を与え，特にパラメータが非負単調列のときには 4 問題の完全解を述べる。第 4 節では DP による解を求める。まず，4 つの線形同時制約系の各々について同値な逐次制約系を与え，N 変数同時最適化を 1 変数最適化の繰り返しで表現しておく。これがいわゆる後ろ向き再帰式を与えている。次に，再帰式を最適点関数とともに解く。これによって最終的に LP 問題自身の最適解を与える。

2．パラメトリックな線形計画問題―双対と逆転

以下，本論文を通じて次の記号・定義を用いる。

N：2 以上の自然数

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & & & 0 \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{N} (N-1) \qquad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{bmatrix} \qquad e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} N$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix}$$

$(\ , \ )$：内積

A'：A の転置行列

R^n：n 次元ユークリッド空間，$R^n \ni x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$

$R^n_+ = \{x \in R^n | x_i \geqq 0 \ \ 1 \leqq i \leqq n\}$

$R^n_- = \{x \in R^n | x_i \leqq 0 \ \ 1 \leqq i \leqq n\}$

$x \geqq y \Longleftrightarrow x_i \geqq y_i \ \ 1 \leqq i \leqq n$

$x \geq y \Longleftrightarrow x \geqq y \ , \ \ x \neq y$

$x > y \Longleftrightarrow x_i > y_i \ , \ \ 1 \leqq i \leqq n$

$a \vee b = \max(a, b) = \begin{cases} a \\ b \end{cases} \begin{cases} a \geqq b \\ a < b \end{cases}$ のとき，　特に $a^+ = a \vee 0$

$a \wedge b = \min(a, b) = \begin{cases} a \\ b \end{cases} \begin{cases} a \leqq b \\ a > b \end{cases}$ のとき，　特に $a^- = a \wedge 0$

$\bigvee_{i=1}^{n} a_i = \max_{1 \leqq i \leqq n} \{a_i\}$　：　$a_1, a_2, \cdots, a_n$ の最大値

$\bigwedge_{i=1}^{n} a_i = \min_{1 \leqq i \leqq n} \{a_i\}$　：　$a_1, a_2, \cdots, a_n$ の最小値

$\bar{\lambda} = 1 - \lambda$

さて本論文では次の 4 つの線形計画(LP)問題を考える。いずれも $(N-1)$ 次元パラメータ $a = (a_1, a_2, \cdots, a_{N-1})'$ を含む問題である。

問題 1　$f_N(a) = \min(e, x)$　s.t.　$Ax \geqq a$,　$x \in R^N_+$

問題 2　$g_N(a) = \mathrm{Max}(a, y)$　s.t.　$A'y \leqq e$,　$y \in R^{N-1}_+$

ただし問題 1，2 においては $a \in R^{N-1}$ とする。

問題 3　$F_N(a) = \mathrm{Max}\,(e, x)$　s.t.　$Ax \leqq a$,　$x \in R_+^N$

問題 4　$G_N(a) = \min\,(a, y)$　s.t.　$A'y \geqq e$,　$y \in R_+^{N-1}$

ただし問題 3，4 においては特に $a \in R_+^{N-1}$ に制限する。

問題 1 は Bellman [1, p. 47] が提示している。問題 1 と問題 2 の対，および問題 3 と問題 4 の対はともに線形計画における**主問題**と**双対問題**の関係にある。これを単に**双対関係** dual relation という。また，問題 1 と問題 3 の対は互に**“逆転”領域**における最小化問題と最大化問題である。ただし，ここで逆転領域とは制約式が

$$Ax \leqq b \;,\quad x \in R^n$$

と

$$Ax \geqq b \;,\quad x \in R^n$$

の関係にあるときをいう。このとき問題 1 と問題 3 は互に**逆転関係** converse relation にあるという。したがって問題 2 と問題 4 の対もまた互に逆転関係にあり，一方を**主問題**，他方を**逆転問題**という。

本論文では問題 1 を主問題 primal problem，問題 2 を双対問題 dual problem，問題 3 を逆転問題 converse problem，問題 4 を双対逆転問題 dual-converse problem とそれぞれ呼ぶことにする。最大化が行なわれる（問題 2，3 の）領域はコンパクト凸であり，最小化される（問題 1，4 の）領域は非有界・閉凸集合である。

3.　最適値関数の性質と相互関係

この節では 4 つの最適値（最大値または最小値）関数 f_N，g_N，F_N，G_N の個々の性質とその相互関係を述べる。

問題 1 と 2 の対，および問題 3 と 4 の対の間には次の双対関係がある。

命題3.1　（i）　$f_N(a) = g_N(a)$　$a \in R^{N-1}$

（ii）　$F_N(a) = G_N(a)$　$a \in R_+^{N-1}$

証明　双対定理よりただちに従う。

さて，問題 1 と問題 2 の最適値関数 f_N と g_N の性質を考える。まず問題 1 を線形不等式系で表現しておこう。

$$\begin{array}{llll}
 & \min & & x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{N-1} + x_N \\
 & \text{s.t.} & (1) & x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \geqq a_1 \\
\text{問題 1} & & (2) & \qquad x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad \geqq a_2 \\
\text{(主問題)} & & \vdots & \qquad\qquad \ddots \quad \ddots \qquad\qquad \vdots \\
 & & (N-1) & \qquad\qquad\qquad\qquad x_{N-1} + x_N \geqq a_{N-1} \\
 & & (N) & x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_{N-1},\ x_N \geqq 0
\end{array}$$

ただし

$$a \in R^{N-1}.$$

この不等式系 (1)～(N) に同値な表現として次が得られる。

補題3.1　線形不等式系 $Ax \geqq a$，$x \in R_+^N$ は

$$\begin{array}{llr}
(1)^+ & x_1 + x_2 & \geqq a_1^+ \\
(2)^+ & \quad x_2 + x_3 & \geqq a_2^+ \\
\vdots & \qquad \ddots \quad \ddots & \vdots \\
(N-1)^+ & \qquad\qquad x_{N-1} + x_N & \geqq a_{N-1}^+ \\
(N)^+ & x_1,\ x_2,\ x_3, \cdots, x_{N-1},\ x_N & \geqq 0
\end{array}$$

に同値である。ただし $a \in R^{N-1}$.

次に問題1の最小値関数 $f_N:\ R^{N-1} \longrightarrow R_+^1$ の性質を述べよう。

補題3.2　(i)　$f_N(a) = 0 \quad a \in R_-^{N-1}$

$$f_N(a) \geqq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1} a_i^+ \quad a \in R^{N-1}$$

(ii)　関数 f_N は次の意味で非減少である。

(ii-a)　$a_1 \leqq a_2 \Longrightarrow f_N(a_1) \leqq f_N(a_2)$

(ii-b)　$0 \leqq a_1 < a_2 \Longrightarrow 0 \leqq f_N(a_1) < f_N(a_2)$

(ii-c)　$0 < a \Longrightarrow 0 < f_N(a)$

(iii)　関数 f_N は凸である。

証明　(i)　$a \leqq 0$ のとき，$\hat{x} = 0$ は最小値0を与える。また x が $Ax \geqq a$, $x \in R_+^N$ のとき，補題3.1より

$$\begin{aligned}
(e, x) &= \frac{1}{2}(x_1 + x_1 + 2\sum_2^{N-1} x_i + x_N + x_N) \\
&\geqq \frac{1}{2}(0 + \sum_1^{N-1} a_i^+ + 0) \\
&= \frac{1}{2}\sum_1^{N-1} a_i^+.
\end{aligned}$$

したがって

$$f_N(a) \geqq \frac{1}{2}\sum_1^{N-1} a_i^+.$$

(ii)　いずれも自明。

(iii)　$i = 1, 2$ に対して

$$x_i \geqq 0\ ,\quad Ax_i \geqq a_i\ ,\quad f_N(a_i) = (e, x_i)$$

とする。このとき $\lambda\,(0 \leqq \lambda \leqq 1)$ に対して

$$\lambda x_1 + \bar{\lambda} x_2 \geqq 0\ ,\quad A(\lambda x_1 + \bar{\lambda} x_2) \geqq \lambda a_1 + \bar{\lambda} a_2$$

となり，さらに

$$\begin{aligned}
f_N(\lambda a_1 + \bar{\lambda} a_2) &= \min\,[(e, x) \mid Ax \geqq \lambda a_1 + \bar{\lambda} a_2\ ,\ x \geqq 0] \\
&\leqq (e, \lambda x_1 + \bar{\lambda} x_2) \\
&= \lambda(e, x_1) + \bar{\lambda}(e, x_2) \\
&= \lambda f_N(a_1) + \bar{\lambda} f_N(a_2)
\end{aligned}$$

が成り立つ。

補題3.3　(i)　N が偶数のとき

$$f_N(a) \geqq (a_1^+ + a_3^+ + a_5^+ + \cdots + a_{N-1}^+) \vee (a_2^+ + a_4^+ + \cdots + a_{N-2}^+).$$

（ii） N が奇数のとき

$$f_N(a) \geqq (a_1^+ + a_3^+ + a_5^+ + \cdots + a_{N-2}^+) \vee (a_2^+ + a_4^+ + \cdots + a_{N-1}^+).$$

証明　（i） 偶数 N に対して x が制約式 $Ax \geqq a$, $x \in R^N$ を満たすとき，補題3.1より

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geqq a_1^+ \\ x_3 + x_4 &\geqq a_3^+ \\ &\vdots \\ x_{N-1} + x_N &\geqq a_{N-1}^+ \end{aligned}$$

よって

$$\sum_1^N x_i \geqq a_1^+ + a_3^+ + \cdots + a_{N-1}^+.$$

他方

$$\begin{aligned} x_1 &\geqq 0 \\ x_2 + x_3 &\geqq a_2^+ \\ x_4 + x_5 &\geqq a_4^+ \\ &\vdots \\ x_{N-2} + x_{N-1} &\geqq a_{N-2}^+ \\ x_N &\geqq 0 \end{aligned}$$

が成り立っているから，

$$\sum_1^N x_i \geqq a_2^+ + a_4^+ + \cdots + a_{N-2}^+.$$

したがって

$$\sum_1^N x_i \geqq (a_1^+ + a_3^+ + \cdots + a_{N-1}^+) \vee (a_2^+ + a_4^+ + \cdots + a_{N-2}^+)$$

となり，（i）が得られる。

（ii） N が奇数のときも同様に示される。

次に問題2を線形不等式系で表現して考えよう。

$$\begin{array}{llllllll} & \text{Max} & & a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 + \cdots + a_{N-2}y_{N-2} + a_{N-1}y_{N-1} & \\ & \text{s.t.} & (1) & y_1 & \leqq 1 \\ & & (2) & y_1 + y_2 & \leqq 1 \\ \text{問題 2} & & (3) & \quad y_2 + y_3 & \leqq 1 \\ \text{(双対問題)} & & \vdots & \quad\quad \ddots & \vdots \\ & & (N-1) & \quad\quad\quad y_{N-2} + y_{N-1} & \leqq 1 \\ & & (N) & \quad\quad\quad\quad y_{N-1} & \leqq 1 \\ & & (N+1) & y_1,\ y_2,\ y_3,\ \cdots,\ y_{N-2},\ y_{N-1} & \geqq 0 \end{array}$$

ただし

$$a \in R^{N-1}.$$

問題2の最大値関数 g_N: $R^{N-1} \longrightarrow R^1$ の上界について述べておこう。

補題3.4　（i） N が偶数のとき

$$\begin{aligned} g_N(a) \leqq\ & [a_1 + (a_2 \vee a_3) + (a_4 \vee a_5) + \cdots + (a_{N-2} \vee a_{N-1})] \\ & \wedge [(a_1 \vee a_2) + (a_3 \vee a_4) + \cdots + (a_{N-3} \vee a_{N-2}) + a_{N-1}]. \end{aligned}$$

（ii） N が奇数のとき

$$g_N(a) \leqq [a_1 + (a_2 \vee a_3) + (a_4 \vee a_5) + \cdots + (a_{N-3} \vee a_{N-2}) + a_{N-1}]$$

$$\wedge\,[(a_1 \vee a_2)+(a_3 \vee a_4)+\cdots+(a_{N-2} \vee a_{N-1})].$$

証明　(i)　N を偶数とし，$A'y \leqq e$，$y \in R_+^{N-1}$ とする。このとき

$$\begin{aligned} y_1 \quad &\leqq 1 \\ y_2+y_3 \quad &\leqq 1 \\ y_4+y_5 \quad &\leqq 1 \\ &\vdots \\ y_{N-2}+y_{N-1} &\leqq 1. \end{aligned}$$

よって，$a \geqq 0$ のときのみを考えると，

$$\sum_1^N a_i y_i \leqq a_1+(a_2 \vee a_3)+(a_4 \vee a_5)+\cdots+(a_{N-2} \vee a_{N-1}).$$

しかも，このとき

$$\begin{aligned} y_1+y_2 \quad &\leqq 1 \\ y_3+y_4 \quad &\leqq 1 \\ &\vdots \\ y_{N-3}+y_{N-2} &\leqq 1 \\ y_{N-1} \quad &\leqq 1 \end{aligned}$$

も成り立っているから

$$\sum_1^N a_i y_i \leqq (a_1 \vee a_2)+(a_3 \vee a_4)+\cdots+(a_{N-3} \vee a_{N-2})+a_{N-1}.$$

したがって，実行可能な任意の y に対して

$$\begin{aligned} \sum_1^N a_i y_i \leqq\ & [a_1+(a_2 \vee a_3)+(a_4 \vee a_5)+\cdots+(a_{N-2} \vee a_{N-1})] \\ & \wedge\,[(a_1 \vee a_2)+(a_3 \vee a_4)+\cdots+(a_{N-3} \vee a_{N-2})+a_{N-1}] \end{aligned}$$

となり，(i) の不等式が得られる。

N が奇数のときも同様にすると (ii) の不等式が成立する。

命題3.1，補題3.3，補題3.4より，問題1の最小値関数 f_N と問題2の最大値関数 g_N の上界・下界が得られる。

命題3.2　(i)　N が偶数のとき

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sum_1^{N-1} a_i^+ \\ &\leqq (a_1^+ + a_3^+ + \cdots + a_{N-1}^+) \vee (a_2^+ + a_4^+ + \cdots + a_{N-2}^+) \\ &\leqq f_N(a) = g_N(a) \\ &\leqq [a_1^+ + (a_2^+ \vee a_3^+) + (a_4^+ \vee a_5^+) + \cdots + (a_{N-2}^+ \vee a_{N-1}^+)] \\ &\quad \wedge\,[(a_1^+ \vee a_2^+) + (a_3^+ \vee a_4^+) + \cdots + (a_{N-3}^+ \vee a_{N-2}^+) + a_{N-1}^+] \\ &\leqq \frac{N}{2}\Big(\bigvee_1^{N-1} a_i^+\Big). \end{aligned}$$

(ii)　N が奇数のとき

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sum_1^{N-1} a_i^+ \\ &\leqq (a_1^+ + a_3^+ + \cdots + a_{N-2}^+) \vee (a_2^+ + a_4^+ + \cdots + a_{N-1}^+) \\ &\leqq f_N(a) = g_N(a) \\ &\leqq [a_1^+ + (a_2^+ \vee a_3^+) + (a_4^+ \vee a_5^+) + \cdots + (a_{N-3}^+ \vee a_{N-2}^+) + a_{N-1}^+] \end{aligned}$$

$$\wedge\,[(a_1^+ \vee a_2^+)+(a_3^+ \vee a_4^+)+\cdots+(a_{N-2}^+ \vee a_{N-1}^+)]$$
$$\leqq \frac{N}{2}(\bigvee_1^{N-1} a_i^+).$$

系3.1（[1, p. 47]） 数列 $\{a_i\}_1^{N-1}$ のうちただ1つ a_{i_0} だけが正ならば

$$f_N(a)=g_N(a)=\bigvee_1^{N-1} a_i = a_{i_0}.$$

このとき $\hat{x}_{i_0}=a_{i_0}$, $\hat{x}_i=0\,(i \neq i_0)$ が問題1の最小点であり，$y_{i_0}^*=1$, $y_i^*=0\,(i \neq i_0)$ が問題2の最大点である。

系3.2

$$\frac{1}{2}\sum_1^{N-1} a_i^+ \leqq f_N(a)=g_N(a) \leqq \frac{N}{2}(\bigvee_1^{N-1} a_i^+).$$

問題3と問題4について最適値関数の性質を考える。まず問題3を線形不等式で表現しておく。

$$\begin{array}{llll}
 & \text{Max} & & x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{N-1} + x_N \\
 & \text{s.t.} & (1) & x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad \leqq a_1 \\
\text{問題3} & & (2) & \qquad x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad \leqq a_2 \\
\text{(逆転問題)} & & \vdots & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\
 & & (N-1) & \qquad\qquad\qquad x_{N-1} + x_N \leqq a_{N-1} \\
 & & (N) & x_1,\ x_2,\ x_3,\cdots,\ x_{N-1},\ x_N \geqq 0
\end{array}$$

ただし

$$a \in R_+^{N-1}.$$

問題3の最大値関数 $F_N:\ R_+^{N-1} \longrightarrow R_+^1$ には次の性質がある。

補題3.5 （i） $0 \leqq F_N(a) \leqq \frac{1}{2}(a_1+\sum_1^{N-1} a_i + a_{N-1})$

（ii） 関数 F_N は次の意味で非減少である。

（ii-a） $a_1 \leqq a_2 \Longrightarrow F_N(a_1) \leqq F_N(a_2)$
（ii-b） $a_1 < a_2 \Longrightarrow F_N(a_1) < F_N(a_2)$
（ii-c） $0 < a \Longrightarrow 0 < F_N(a)$.

（iii） 関数 F_N は凹である。

証明 （i） $Ax \leqq a$, $x \in R_+^N$ とすると，

$$\sum_1^N x_i = \frac{1}{2}(x_1+x_1+\sum_2^{N-1} 2x_i + x_N + x_N)$$
$$\leqq \frac{1}{2}(a_1+\sum_1^{N-1} a_i + a_{N-1}).$$

よって（i）の不等式が成立する。

（ii） 自明である。

（iii） 任意の $a_i \in R_+^{N-1}\,(i=1,2)$ に対して

$$Ax_i \leqq a_i\ ,\quad x_i \in R_+^N$$

となる x_i が存在して

$$F_N(a_i)=(e, x_i)$$

となるから，$\lambda\,(0 \leqq \lambda \leqq 1)$ について

$$
\begin{aligned}
F_N(\lambda a_1+\bar{\lambda}a_2) &= \mathrm{Max}\,[(e,x)|Ax \leqq \lambda a_1+\bar{\lambda}a_2,\ x \geqq 0] \\
&\geqq (e, \lambda x_1+\bar{\lambda}x_2) \\
&= \lambda(e,x_1)+\bar{\lambda}(e,x_2) \\
&= \lambda F_N(a_1)+\bar{\lambda}F_N(a_2)
\end{aligned}
$$

となる。

補題3.6　(ⅰ)　N が偶数のとき

$$F_N(a) \leqq (a_1+a_3+\cdots+a_{N-1}) \wedge (a_1+a_2+a_4+\cdots+a_{N-2}+a_{N-1}).$$

(ⅱ)　N が奇数のとき,

$$F_N(a) \leqq (a_1+a_3+\cdots+a_{N-2}+a_{N-1}) \wedge (a_1+a_2+a_4+\cdots+a_{N-1}).$$

証明　(ⅰ)　N を偶数とし，$Ax \leqq a$, $x \in R_+^N$　とする。このとき,

$$
\begin{aligned}
x_1+x_2 &\leqq a_1 \\
x_3+x_4 &\leqq a_3 \\
&\vdots \\
x_{N-1}+x_N &\leqq a_{N-1}
\end{aligned}
$$

より

$$\sum_1^N x_i \leqq a_1+a_3+\cdots+a_{N-1}.$$

同時に

$$
\begin{aligned}
x_1 &\leqq a_1 \\
x_2+x_3 &\leqq a_2 \\
x_4+x_5 &\leqq a_4 \\
&\vdots \\
x_{N-2}+x_{N-1} &\leqq a_{N-2} \\
x_N &\leqq a_{N-1}
\end{aligned}
$$

より

$$\sum_1^N x_i \leqq a_1+a_2+a_4+\cdots+a_{N-2}+a_{N-1}$$

となる。したがって，(ⅰ)の不等式が成り立つ。

(ⅱ) についても同様である。

次に問題4を線形不等式で表現して考えよう。

問題4
(双対逆転問題)

$$
\begin{array}{llccccccl}
\min & & a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 + \cdots + a_{N-2}y_{N-2} + a_{N-1}y_{N-1} \\
\text{s.t.} & (1) & y_1 & & & & & & \geqq 1 \\
 & (2) & y_1 + y_2 & & & & & & \geqq 1 \\
 & (3) & & y_2 + y_3 & & & & & \geqq 1 \\
 & \vdots & & & \ddots & & \ddots & & \vdots \\
 & (N-1) & & & & & y_{N-2} & + \ y_{N-1} & \geqq 1 \\
 & (N) & & & & & & y_{N-1} & \geqq 1 \\
 & (N+1) & y_1, & y_2, & y_3 & \cdots, & y_{N-2}, & y_{N-1} & \geqq 0
\end{array}
$$

ただし

$$a \in R_+^{N-1}.$$

この不等式系 (1)～$(N+1)$ から

$$y_{N-2}+y_{N-1} \geqq 1\ ,\quad y_{N-1} \geqq 0\ ,\quad y_1+y_2 \geqq 1\ ,\quad y_1 \geqq 0$$

を削除しても，同値であることに注意しておこう。さて問題 4 の最大値関数 G_N: $R_+^{N-1} \longrightarrow R_+^1$ の 1 つの下界を求めよう。

補題3.7 （i） N が偶数のとき

$$G_N(a) \geqq [a_1+(a_2 \wedge a_3)+(a_4 \wedge a_5)+\cdots+(a_{N-2} \wedge a_{N-1})]$$
$$\vee [(a_1 \wedge a_2)+(a_3 \wedge a_4)+\cdots+(a_{N-3} \wedge a_{N-2})+a_{N-1}].$$

（ii） N が奇数のとき，

$$G_N(a) \geqq [a_1+(a_2 \wedge a_3)+(a_4 \wedge a_5)+\cdots+(a_{N-3} \wedge a_{N-2})+a_{N-1}]$$
$$\vee [(a_1 \wedge a_2)+(a_3 \wedge a_4)+\cdots+(a_{N-2} \wedge a_{N-1})].$$

証明 （i） N を偶数とし，$A'y \geqq e$ ， $y \in R_+^{N-1}$ とする。このとき，

$$\begin{aligned} y_1 \quad &\geqq 1 \\ y_2+y_3 \quad &\geqq 1 \\ y_4+y_5 \quad &\geqq 1 \\ \vdots \quad & \\ y_{N-2}+y_{N-1} &\geqq 1 \end{aligned}$$

より

$$\sum_1^{N-1} a_i y_i \geqq a_1+(a_2 \wedge a_3)+(a_4 \wedge a_5)+\cdots+(a_{N-2} \wedge a_{N-1}).$$

しかも

$$\begin{aligned} y_1+y_2 \quad &\geqq 1 \\ y_3+y_4 \quad &\geqq 1 \\ \vdots \quad & \\ y_{N-3}+y_{N-2} &\geqq 1 \\ y_{N-1} \quad &\geqq 1 \end{aligned}$$

より

$$\sum_1^{N-1} a_i y_i \geqq (a_1 \wedge a_2)+(a_3 \wedge a_4)+\cdots+(a_{N-3} \wedge a_{N-2})+a_{N-1}.$$

ゆえに，不等式が成り立つ。

（ii）についても同様に証明される。

命題3.1，補題3.6，補題3.7より，問題 3 の最大値関数 F_N と問題 4 の最小値関数 G_N の上界・下界が得られる。

命題3.3 （i） N が偶数のとき

$$\begin{aligned} &\frac{N}{2}\left(\bigwedge_1^{N-1} a_i\right) \\ &\leqq [a_1+(a_2 \wedge a_3)+(a_4 \wedge a_5)+\cdots+(a_{N-2} \wedge a_{N-1})] \\ &\quad \vee [(a_1 \wedge a_2)+(a_3 \wedge a_4)+\cdots+(a_{N-3} \wedge a_{N-2})+a_{N-1}] \\ &\leqq G_N(a) = F_N(a) \\ &\leqq (a_1+a_3+\cdots+a_{N-1}) \wedge (a_1+a_2+a_4+\cdots+a_{N-2}+a_{N-1}) \end{aligned}$$

$$= (a_1 + a_{N-1}) + (a_3 + a_5 + \cdots + a_{N-3}) \wedge (a_2 + a_4 + \cdots + a_{N-2})$$
$$\leqq (a_1 + a_{N-1}) + \frac{1}{2}(a_2 + a_3 + \cdots + a_{N-2})$$
$$= \frac{1}{2}(a_1 + \sum_1^{N-1} a_i + a_{N-1}).$$

（ii）N が奇数のとき

$$\begin{aligned}
&\frac{N}{2}(\bigwedge_1^{N-1} a_i) \\
&\leqq [a_1 + (a_2 \wedge a_3) + (a_4 \wedge a_5) + \cdots + (a_{N-3} \wedge a_{N-2}) + a_{N-1}] \\
&\quad \vee [(a_1 \wedge a_2) + (a_3 \wedge a_4) + \cdots + (a_{N-2} \wedge a_{N-1})] \\
&\leqq G_N(a) = F_N(a) \\
&\leqq (a_1 + a_3 + \cdots + a_{N-2} + a_{N-1}) \wedge (a_1 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{N-1}) \\
&= (a_1 + a_{N-1}) + (a_3 + a_5 + \cdots + a_{N-2}) \wedge (a_2 + a_4 + \cdots + a_{N-3}) \\
&\leqq (a_1 + a_{N-1}) + \frac{1}{2}(a_2 + a_3 + \cdots + a_{N-2}) \\
&= \frac{1}{2}(a_1 + \sum_1^{N-1} a_i + a_{N-1}).
\end{aligned}$$

系3.3　列 $\{a_i\}_1^{N-1}$ のうち，ただ1つ a_{i_0} が正で他がすべて0ならば，

$$F_N(a) = G_N(a) = \begin{cases} \bigvee_1^{N-1} a_i = a_{i_0} & i_0 = 1 \text{ or } N-1 \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他}\,(1 < i_0 < N-1)\,\text{のとき。} \end{cases}$$

このとき，

$$x^* = \begin{cases} (a_1,\ 0,\ \cdots,\ 0) \text{ or } (0,\ \cdots,\ 0,\ a_{N-1}) \\ (0,\ 0,\ \cdots,\ 0) \end{cases}$$

が問題3の最大点であり，実行可能な

$$\hat{y} = \begin{cases} (1,\ \hat{y}_2,\ \cdots,\ \hat{y}_{N-1}) \text{ or } (\hat{y}_1,\ \cdots,\ \hat{y}_{N-2},\ 1) \\ (\hat{y}_1,\ \cdots,\ \hat{y}_{i_0-1},\ 0,\ \hat{y}_{i_0+1},\ \cdots,\ \hat{y}_{N-1}) \end{cases}$$

が問題4の最小点である。

系3.4

$$\frac{N}{2}(\bigvee_1^{N-1} a_i) \leqq F_N(a) = G_N(a) \leqq \frac{1}{2}(a_1 + \sum_1^{N-1} a_i + a_{N-1}).$$

さらに命題3.2と命題3.3を組み合せると，次のような逆転関係が得られる。

命題3.4　$a \in R_+^{N-1}$ とする。

（i）N が偶数のとき

$$\begin{aligned}
G_N(a) &= F_N(a) \\
&\leqq (a_1 + a_3 + \cdots + a_{N-1}) \wedge (a_1 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{N-2} + a_{N-1}) \\
&\leqq (a_1^+ + a_3^+ + \cdots + a_{N-1}^+) \vee (a_2^+ + a_4^+ + \cdots + a_{N-2}^+) \\
&\leqq f_N(a) = g_N(a).
\end{aligned}$$

（ii）N が奇数のとき，特に $a_1 = 0$ または $a_{N-1} = 0$ ならば，

$$G_N(a) = F_N(a)$$

$$
\begin{aligned}
&\leqq (a_1+a_3+\cdots+a_{N-2}+a_{N-1}) \wedge (a_1+a_2+a_4+\cdots+a_{N-1})\\
&\leqq (a_1^+ + a_3^+ +\cdots+a_{N-2}^+) \vee (a_2^+ + a_4^+ +\cdots+a_{N-1}^+)\\
&\leqq f_N(a) = g_N(a).
\end{aligned}
$$

注意 1　（ i ）N を偶数とする。

$$a_1+a_3+\cdots+a_{N-1} < a_1+a_2+a_4+\cdots+a_{N-2} < a_1+a_2+a_4+\cdots+a_{N-2}+a_{N-1}$$

のとき，

$$
\begin{aligned}
G_N(a) &= F_N(a)\\
&\leqq a_1+a_3+\cdots+a_{N-1}\\
&< a_2^+ + a_4^+ +\cdots+a_{N-2}^+\\
&\leqq f_N(a) = g_N(a).
\end{aligned}
$$

（ii）N を奇数とする。

（ii-a）　$a_1=0$，$a_3+a_5+\cdots+a_{N-2}+a_{N-1} < a_2+a_4+\cdots+a_{N-1}$

のとき，

$$
\begin{aligned}
G_N(a) &= F_N(a)\\
&\leqq a_1+a_3+\cdots+a_{N-2}+a_{N-1}\\
&< a_1+a_2+a_4+\cdots+a_{N-1}\\
&= a_2^+ + a_4^+ +\cdots+a_{N-1}^+\\
&\leqq f_N(a) = g_N(a).
\end{aligned}
$$

（ii-b）　$a_{N-1}=0$，$a_1+a_2+a_4+\cdots+a_{N-3} < a_1+a_3+\cdots+a_{N-2}$

のとき，

$$
\begin{aligned}
G_N(a) &= F_N(a)\\
&\leqq a_1+a_2+a_4+\cdots+a_{N-1}\\
&< a_1^+ + a_3^+ +\cdots+a_{N-2}^+\\
&\leqq f_N(a) = g_N(a).
\end{aligned}
$$

したがって，以上の３つの場合には，逆転問題の最適値は主問題の最適値より小さい。

注意 2　$N=3$，$a_1 \geqq a_2 > 0$ とする。このとき，

$$
\begin{aligned}
f_3(a) = \min\ & x_1+x_2+x_3\\
\text{s.t.}\ & x_1+x_2 \geqq a_1\\
& x_2+x_3 \geqq a_2\\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \geqq 0
\end{aligned}
$$

より，

$$(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = (0, a_1, 0)\quad のとき，f_3(a) = a_1.$$

他方

$$
\begin{aligned}
F_3(a) = \mathrm{Max}\ & x_1 + x_2 + x_3\\
\text{s.t.}\ & x_1 + x_2 \leqq a_1\\
& x_2 + x_3 \leqq a_2\\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \geqq 0
\end{aligned}
$$

だから，

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (a_1, 0, a_2)\ のとき，F_3(a) = a_1+a_2.$$

したがって

$$F_3(a)=a_1+a_2>a_1=f_3(a)$$

となり，命題3.4（ii）には条件「$a_1=0$ または $a_{N-1}=0$」は欠かせないことがわかる。この例では，逆転問題の最大値は主問題の最小値より大きくなっている。

命題3.2，3.3で与えた最適値関数 f_N，g_N，F_N，G_N に対する上界・下界は，非負単調列 $\{a_i\}_1^{N-1}$ を考えると，かなり厳密であることがわかる。

系3.5　パラメータ $a=(a_1, a_2, \cdots, a_{N-1})'$ が非負単調非減少列

$$0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{N-1}$$

のとき，問題1～問題4は次の最適解をもつ。

（i）N が偶数のとき，4問題は共通の最適値と以下の最適点をもつ。

（i-a）$f_N(a)=g_N(a)=F_N(a)=G_N(a)=a_1+a_3+\cdots+a_{N-1}$

（i-b-1）$(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_N)=(a_1, 0, a_3, 0, a_5, 0, \cdots, a_{N-1}, 0)$

は問題1の最小点である。

（i-b-2）$(y_1^*, y_2^*, \cdots, y_{N-1}^*)=(1, 0, 1, 0, 1, \cdots, 0, 1)$

は問題2の最大点である。

（i-b-3）$(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_N^*)=(0, a_1, 0, a_3, 0, a_5, \cdots, 0, a_{N-1})$

は問題3の最大点である。

（i-b-4）$(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \cdots, \hat{y}_{N-1})=(1, 0, 1, 0, 1, \cdots, 0, 1)$

は問題4の最小点である。

（ii）N が奇数のとき，4問題は以下の最適解をもつ。

（ii-a）
$$\begin{aligned} f_N(a)=g_N(a)&=a_2+a_4+\cdots+a_{N-1} \\ &\leqq a_1+a_2+a_4+\cdots+a_{N-1}=F_N(a)=G_N(a) \end{aligned}$$

（ii-b-1）$(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_N)=(0, a_2, 0, a_4, 0, a_6, \cdots, a_{N-1}, 0)$

は問題1の最小点である。

（ii-b-2）$(y_1^*, y_2^*, \cdots, y_{N-1}^*)=(0, 1, 0, 1, 0, 1, \cdots, 0, 1)$

は問題2の最大点である。

（ii-b-3）$(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_N^*)=(a_1, 0, a_2, 0, a_4, 0, \cdots, 0, a_{N-1})$

は問題3の最大点である。

（ii-b-4）$(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \cdots, \hat{y}_{N-1})=(1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \cdots, 0, 1)$

は問題4の最小点である。

証明　（i-a）命題3.2，3.3の評価式において

$$\begin{aligned} &(a_1^+ + a_3^+ + \cdots + a_{N-1}^+) \vee (a_2^+ + a_4^+ + \cdots + a_{N-2}^+) \\ &= [a_1^+ + (a_2^+ \vee a_3^+) + (a_4^+ \vee a_5^+) + \cdots + (a_{N-2}^+ \vee a_{N-1}^+)] \\ &\quad \wedge [(a_1^+ \vee a_2^+) + (a_3^+ \vee a_4^+) + \cdots + (a_{N-3}^+ \vee a_{N-2}^+) + a_{N-1}^+] \\ &= [a_1 + (a_2 \wedge a_3) + (a_4 \wedge a_5) + \cdots + (a_{N-2} \wedge a_{N-1})] \\ &\quad \vee [(a_1 \wedge a_2) + (a_3 \wedge a_4) + \cdots + (a_{N-3} \wedge a_{N-2}) + a_{N-1}] \\ &= (a_1 + a_3 + \cdots + a_{N-1}) \wedge (a_1 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{N-2} + a_{N-1}) \end{aligned}$$

$$= a_1 + a_3 + \cdots + a_{N-1}$$

が成り立つ。

（ii-a） 命題3.2の評価式では，等式

$$\begin{aligned}&(a_1^+ + a_3^+ + \cdots + a_{N-2}^+) \vee (a_2^+ + a_4^+ + \cdots + a_{N-1}^+)\\&\quad = [a_1^+ + (a_2^+ \vee a_3^+) + (a_4^+ \vee a_5^+) + \cdots + (a_{N-3}^+ \vee a_{N-2}^+) + a_{N-1}^+]\\&\qquad \wedge [(a_1^+ \vee a_2^+) + (a_3^+ \vee a_4^+) + \cdots + (a_{N-2}^+ \vee a_{N-1}^+)]\\&\quad = a_2 + a_4 + \cdots + a_{N-1},\end{aligned}$$

命題3.3の評価式では，等式

$$\begin{aligned}&[a_1 + (a_2 \wedge a_3) + (a_4 \wedge a_5) + \cdots + (a_{N-3} \wedge a_{N-2}) + a_{N-1}]\\&\qquad \vee [(a_1 \wedge a_2) + (a_3 \wedge a_4) + \cdots + (a_{N-2} \wedge a_{N-1})]\\&\quad = (a_1 + a_3 + \cdots + a_{N-2} + a_{N-1}) \wedge (a_1 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{N-1})\\&\quad = a_1 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{N-1}\end{aligned}$$

がそれぞれ成り立つ。

参考文献

[1] R. Bellman, Dynamic Programming, Princeton Univ. Press, NJ, 1957

[2] 岩本誠一，「動的計画論」，九州大学出版会，1987年。

[3] 岩本誠一，動的計画と累次積分について，経済学研究 **53** (1988)，211-226。