

離散確率的在庫モデルに関する同値変換の一般化

児玉, 正憲

<https://doi.org/10.15017/4491828>

出版情報：経済學研究. 55 (4/5), pp.161-172, 1990-07-10. 九州大学経済学会
バージョン：
権利関係：



離散確率的在庫モデルに関する同値変換の一般化

児 玉 正 憲

論文 [22] で需要の発生が一般的で、発注量が発注間隔の任意に定められた時点に入荷し、需要量が離散的確率変数と考えられる一期間在庫モデルの同値変換について検討した。需要量が離散的な場合は連続的な場合に較べて解析が複雑となる。需要が期を通じて一様に発生する場合と、ある種の 2 次関数にしたがって発生する場合を取扱った。本小論では、需要の発生をさらに一般化することである。

発注は期首に行われ、発注量は期間 (t) 内の任意の時点 t_0 ($\leq t$) に入荷するものとする。ここで $t/t_0 = n$ とおき、 $n=1, 2, \dots, \infty$ をとるものとする ($t_0=0$, つまり期首に入荷する場合は $n=\infty$ とする)。確率的に変化するのは需要量 B だけである。需要の発生が下記の (1), (2) の場合の一期間当たりの期待費用 $E_i\{C(B, z)\}$ ($i=1, 2$) は次のように与えられる¹⁾。

(1) 需要が一回きりで、すべて期着に払い出される (モデル (1))

$$\begin{aligned} E_1\{C(B, z)\} = & c \cdot (z-x) - p \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right) z + \frac{1}{n} x - \sum_{b=0}^{\infty} b \phi(b) \right\} \\ & + (h+p) \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sum_{b=0}^z (z-b) \phi(b) + \frac{1}{n} \sum_{b=0}^x (x-b) \phi(b) \right\} \end{aligned} \quad (0.1)$$

ここに,

x : 前期からの繰越し在庫量

y : 発注量 (仮定によって期間 t 内の任意の時点 t_0 に入荷)

$z = x + y$

$\phi(b)$: 需要量 B の確率関数, $P\{B=b\} = \phi(b)$

c : 購入コスト (単位当たり)

h : 在庫維持コスト (単位当たり)

p : 品切れコスト (単位当たり)

である。

1) 児玉正憲 [21]

(2) 需要は期の間一般的な関数にしたがって発生する (モデル (2))

$$\begin{aligned}
 E_2\{C(B, z)\} = & c \cdot (z-x) - p \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right)z + \frac{1}{n}x - \sum_{b=0}^{\infty} G(b, 1)\phi(b) \right\} \\
 & + (h+p) \left\{ \sum_{b=0}^{z-1} \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)z - G(b, 1) \right] \phi(b) + \frac{1}{n}x \sum_{b=0}^{g_*^{-1}(z, \frac{1}{n})-1} \phi(b) \right\} \\
 & + (h+p) \left\{ \sum_{b=g_*^{-1}(x, \frac{1}{n})}^{\infty} [g^{-1}(b, x)x - G(b, g^{-1}(b, x))] \phi(b) \right. \\
 & + \sum_{b=g_*^{-1}(x, \frac{1}{n})}^{g_*^{-1}(z, \frac{1}{n})-1} G(b, \frac{1}{n}) \phi(b) \\
 & \left. + \sum_{b=z}^{g_*^{-1}(z, \frac{1}{n})} \left[\left(g^{-1}(b, z) - \frac{1}{n}\right)z - G(b, g^{-1}(b, z)) \right] \phi(b) \right\} \quad (0.2)
 \end{aligned}$$

ここに,

$g(b, u): g(b, 0), g(0, u)=0, g(b, 1)=b$ となる $\partial g(b, u)/\partial u > 0$ になる b の狭義増加関数 ($0 \leq u \leq 1$), 考察期間 t における需要量 B の実現値 b が与えられたとき, 期における需要の発生は, $g(b, T/t)$, ($0 \leq T \leq t$)にしたがうものとしている。

$$G(b, v) = \int_0^v g(b, y) dy$$

$g^{-1}(b, x): x=g(b, u)$ となる u の値

$g^{-1}(b, z): z=g(b, u)$ となる u の値

$g_*^{-1}\left(x, \frac{1}{n}\right): x=g\left(b, \frac{1}{n}\right)$ となる b 以下の最大の整数

$g_*^{-1}\left(z, \frac{1}{n}\right): z=g\left(b, \frac{1}{n}\right)$ となる b 以下の最大の整数

$n=\infty$ の場合は, $g_*^{-1}(x, 0)=g_*^{-1}(z, 0)=\infty$ とする。

変数 $z_1, z_2, \dots, z_n$ に関して 2 つのシステム A, B が同値であれば, B のふるまいを調べることで A のふるまいを知ることができる。このとき, B が A に比して簡単であれば好都合である。モデル (2) を A , モデル (1) を B で表わすものと考え, その同値関係について考察する。 A, B のいずれについても制御可能な変数は在庫水準だけである。在庫水準のシステムへの影響は期待総費用である。したがって期待総費用について同値関係を求めるのが本論文の目的である。

1. モデル (2) の同値変換

$\Delta_i E\{C(B, z)\} = E_i\{C(B, z+1)\} - E_i\{C(B, z)\}$, $\Delta_i^2 E\{C(B, z)\} = \Delta_i E\{C(B, z+1)\} - \Delta_i E\{C(B, z)\}$ ($i=1, 2$) で $E_i\{C(B, z)\}$ の一次差分および二次差分を定義する。このとき, 論文 [21]²⁾ より

2) 児玉正憲 [21] ページ 12-14

$$\begin{aligned}
 \Delta_2 E\{C(B, z)\} = & c - \left(1 - \frac{1}{n}\right)p + (h+p) \left\{ \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)z - G(z, 1) \right] \phi(z) \right. \\
 & + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sum_{b=0}^z \phi(b) + \sum_{b=g_*^{-1}(z, \frac{1}{n})}^{g_*^{-1}(z+1, \frac{1}{n})-1} G\left(b, \frac{1}{n}\right) \phi(b) \\
 & - \sum_{b=z}^{g_*^{-1}(z, \frac{1}{n})-1} \left[\left(g^{-1}(b, z) - \frac{1}{n}\right)z - G(b, g^{-1}(b, z)) \right] \phi(b) \\
 & \left. + \sum_{b=z+1}^{g_*^{-1}(z+1, \frac{1}{n})-1} \left[\left(g^{-1}(b, z+1) - \frac{1}{n}\right)(z+1) - G(b, g^{-1}(b, z+1)) \right] \phi(b) \right\}, \\
 & n \geq 2 \tag{1.1}
 \end{aligned}$$

$$\Delta_2 E\{C(B, z)\} = c, \quad n = 1 \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_2^2 E\{C(B, 0)\} = & (h+p) \left\{ G(1, 1)\phi(1) + \sum_{b=g_*^{-1}(1, \frac{1}{n})}^{g_*^{-1}(2, \frac{1}{n})-1} \left[G\left(b, \frac{1}{n}\right) + 2\left(g^{-1}(b, 2) - \frac{1}{n}\right) \right. \right. \\
 & \left. \left. - G(b, g^{-1}(b, 2)) \right] \phi(b) \right. \\
 & + \sum_{b=2}^{g_*^{-1}(1, \frac{1}{n})-1} \left[2(g^{-1}(b, 2) - g^{-1}(b, 1)) \right. \\
 & \left. + 2G(b, g^{-1}(b, 1)) - G(b, g^{-1}(b, 2)) - G\left(b, \frac{1}{n}\right) \right] \phi(b) \left. \right\}, \quad z = 0, \quad n \geq 2 \\
 & \tag{1.3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_2^2 E\{C(B, z)\} = & (h+p) \left\{ [z(g^{-1}(z+1, z) - 1) + G(z+1, 1) - G(z+1, g^{-1}(z+1, z))] \phi(z+1) \right. \\
 & + \sum_{b=z+2}^{g_*^{-1}(z, \frac{1}{n})-1} [(z+2)g^{-1}(b, z+2) - 2(z+1)g^{-1}(b, z+1) + zg^{-1}(b, z) \\
 & - G(b, g^{-1}(b, z)) + 2G(b, g^{-1}(b, z+1)) - G(b, z+2)] \phi(b) \\
 & + \sum_{b=g_*^{-1}(z+1, \frac{1}{n})}^{g_*^{-1}(z+2, \frac{1}{n})-1} \left[G\left(b, \frac{1}{n}\right) + (z+2)g^{-1}(b, z+2) - G(b, g^{-1}(b, z+2)) \right. \\
 & \left. - \frac{(z+2)}{n} \right] \phi(b) + \sum_{b=g_*^{-1}(z, \frac{1}{n})}^{g_*^{-1}(z+1, \frac{1}{n})-1} \left[(z+2)g^{-1}(b, z+2) - 2(z+1)g^{-1}(b, z+1) \right. \\
 & \left. - G\left(b, \frac{1}{n}\right) + 2G(b, g^{-1}(b, z+1)) - G(b, g^{-1}(b, z+2)) + \frac{z}{n} \right] \phi(b) \left. \right\} \\
 & z \geq 1, \quad n \geq 2 \tag{1.4}
 \end{aligned}$$

$$\Delta_2^2 E\{C(B, z) = 0, \quad n = 1 \tag{1.5}$$

となる。

(0.1) 式の $\phi(b)$ を $\gamma(b)$ でおきかえた式を $E_1\{C(B, z; \gamma)\}$ とおき, (0.2) 式をあらためて $E_2\{C(B, z; \phi)\}$ とおき,

$$\Delta_1 E\{C(B, 0; \gamma)\} = \Delta_2\{C(B, 0; \phi)\} \tag{1.6}$$

$$\Delta_1^2 E\{C(B, z; \gamma)\} = \Delta_2^2\{C(B, z; \phi)\}, \quad z \geq 1 \tag{1.7}$$

が成立するように $\gamma(z)$ をきめると,

$$\begin{aligned} \gamma(0) = & \frac{1}{1-\frac{1}{n}} \left\{ \left(1-\frac{1}{n}\right) \phi(0) + \sum_{b=1}^{g_{*}^{-1}(1, \frac{1}{n})-1} \left[\left(g^{-1}(b, 1) - \frac{1}{n}\right) - G(b, g^{-1}(b, 1)) \right. \right. \\ & \left. \left. + G\left(b, \frac{1}{n}\right) \right] \phi(b) \right\}, \quad n \geq 2, \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \gamma(z+1) = & \frac{1}{1-\frac{1}{n}} \left\{ \left[G(1, 1) - G\left(1, \frac{1}{n}\right) \right] \phi(1) + \sum_{b=2}^{g_{*}^{-1}(1, \frac{1}{n})-1} \left[2\left(g^{-1}(b, 2) - g^{-1}(b, 1)\right) \right. \right. \\ & \left. \left. + 2G(b, g^{-1}(b, 1)) - G(b, g^{-1}(b, 2)) - G\left(b, \frac{1}{n}\right) \right] \phi(b) + \sum_{b=g_{*}^{-1}(1, \frac{1}{n})}^{g_{*}^{-1}(2, \frac{1}{n})-1} \left[G\left(b, \frac{1}{n}\right) \right. \right. \\ & \left. \left. + 2\left(g^{-1}(b, 2) - \frac{1}{n}\right) - G(b, g^{-1}(b, 2)) \right] \phi(b) \right\}, \quad z=0, \quad n \geq 2 \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} = & \frac{1}{1-\frac{1}{n}} \left\{ [z(g^{-1}(z+1, z) - 1) + G(z+1, 1) - G(z+1, g^{-1}(z+1, z))] \phi(z+1) \right. \\ & + \sum_{b=z+2}^{g_{*}^{-1}(z, \frac{1}{n})-1} [(z+2)g^{-1}(b, z+2) - 2(z+1)g^{-1}(b, z+1) + zg^{-1}(b, z) - G(b, g^{-1}(b, z))] \\ & + 2G(b, g^{-1}(b, z+1)) - G(b, g^{-1}(b, z+2))] \phi(b) + \sum_{b=g_{*}^{-1}(z, \frac{1}{n})}^{g_{*}^{-1}(z+1, \frac{1}{n})-1} [(z+2)g^{-1}(b, z+2) \\ & - 2(z+1)g^{-1}(b, z+1) - G(b, \frac{1}{n}) + 2G(b, g^{-1}(b, z+1)) - G(b, g^{-1}(b, z+2))] \\ & \left. + \frac{z}{n} \right] \phi(b) \\ & + \sum_{b=g_{*}^{-1}(z+1, \frac{1}{n})}^{g_{*}^{-1}(z+2, \frac{1}{n})-1} \left[G\left(b, \frac{1}{n}\right) + (z+2)g^{-1}(b, z+2) - G(b, g^{-1}(b, z+2)) - \frac{(z+2)}{n} \right] \phi(b) \Big\}, \\ & z \geq 1, \quad n \geq 2 \end{aligned} \quad (1.10)$$

となる。 $\gamma(z)$ の性質を調べるために $g(b, T/t)$ を特定化しよう。

2. $g(b, T/t) = b(T/t)^m$ の場合

このとき,

$$\begin{aligned} G(b, v) = & \int_0^v g(b, y) dy = \frac{bv^{m+1}}{m+1}, \quad g^{-1}(b, x) = \left(\frac{x}{b}\right)^{\frac{1}{m}}, \quad g^{-1}(b, z) = \left(\frac{z}{b}\right)^{\frac{1}{m}} \\ G(b, g^{-1}(b, y)) = & \frac{b}{m+1} \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{m+1}{m}}, \quad g_{*}^{-1}\left(x, \frac{1}{n}\right) = n^m x, \quad g_{*}^{-1}\left(z, \frac{1}{n}\right) = n^m z \end{aligned} \quad (2.1)$$

となり, (1.8) 式, (1.9) 式, (1.10) 式より

$$\begin{aligned} \gamma(0) = & \frac{1}{1-\frac{1}{n}} \left\{ \left(1-\frac{1}{n}\right) \phi(0) + \sum_{b=1}^{n^m-1} \left[\frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{m}} + \frac{b}{m+1} \left(\frac{1}{n}\right)^{m+1} - \frac{1}{n} \right] \phi(b) \right\}, \\ & n \geq 2, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \gamma(z+1) &= \frac{1}{1-\frac{1}{n}} \left\{ \left[\frac{1}{m+1} \left(1 - \left(\frac{1}{n} \right)^{m+1} \right) \right] \phi(1) + \sum_{b=2}^{n^m-1} \left[\frac{2m(2^{\frac{1}{m}}-1)}{m+1} \left(\frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{m}} - \frac{b}{m+1} \left(\frac{1}{n} \right)^{m+1} \right] \phi(b) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{b=n^m}^{2n^m-1} \left[\frac{b}{m+1} \left(\frac{1}{n} \right)^{m+1} + \frac{2m}{m+1} \left(\frac{2}{b} \right)^{\frac{1}{m}} - \frac{2}{n} \right] \phi(b) \right\}, \quad z=0, \quad n \geq 2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1-\frac{1}{n}} \left\{ \left[\frac{m(z^{\frac{n+1}{n}} - (z+1)^{\frac{n+1}{n}})}{(m+1)(z+1)^{\frac{1}{n}}} + 1 \right] \phi(z+1) + \left[(z+2)^{\frac{n+1}{n}} - 2(z+1)^{\frac{n+1}{n}} + z^{\frac{n+1}{n}} \right] \right. \\ &\quad \times \sum_{b=z+2}^{n^m z-1} \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(b) + \sum_{b=n^m z}^{n^m(z+1)-1} \left[\left[(z+2)^{\frac{n+1}{n}} - 2(z+1)^{\frac{n+1}{n}} \right] \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{m}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n} \left[z - \frac{b}{m+1} \left(\frac{1}{n} \right)^m \right] \right] \phi(b) + \sum_{b=n^m(z+1)}^{n^m(z+2)-1} \left[(z+2)^{\frac{n+1}{n}} \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{m}} \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{n} \left[\frac{b}{m+1} \left(\frac{1}{n} \right)^m - (z+2) \right] \right] \phi(b) \right\}, \quad z \geq 1, \quad n \geq 2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

となる。

補題 1 $\gamma(z)$ は確率関数である。

証明 まず $\gamma(z) \geq 0$ を示そう。(2.2) 式における $[m(1/b)^{1/m} + b(1/n)^{m+1}]/(m+1) - 1/n$ を $f_1(b)$ とおくと, $f_1(b)$ は $b \leq n^m$ のとき, b の非増加関数であり ($\because b$ を連続変数として b に関して微分すると, $[(1/n)^{m+1} - (1/b)^{(m+1)/m}]/(m+1)$ となり $b \leq n^m$ のとき非増加関数となる), $f_1(n^m) = 0$ であるから, $b \leq n^m - 1$ のとき $f_1(b)\phi(b) \geq 0$

(2.3)式において, $f_2(b) = [2m(2^{1/m} - 1)(1/b)^{1/m} - b(1/n)^{m+1}]/(m+1)$ とおくと, $f_2(b)$ は b の減少関数で, $f_2(n^m) > 0$ となるから $f_2(b)\phi(b) \geq 0$ ($2 \leq b \leq n^m - 1$), また $f_3(b) = [2m(2/b)^{1/m} + b(1/n)^{m+1}]/(m+1) - 2/n$ とおくと, $f_3(b)$ は b の非増加関数となり ($b \leq 2n^m$), $f_3(2n^m) = 0$ であるから $f_3(b)\phi(b) \geq 0$

(2.4) 式において, $f_4(z) = \{m[z^{(m+1)/m} - (z+1)^{(m+1)/m}]/(m+1)(z+1)^{1/m} + 1\}$ とおくと, $f_4(z)$ は z の減少関数で ($\because z$ を連続変数として z に関して微分すると, すべての $z > 0$ に対して負となる), $z \rightarrow \infty$ のとき $f_4(z) \rightarrow 0$ となるから $f_4(z)\phi(z+1) \geq 0$. $f_5(z) = z^{n+1}$ ($n > 0$) とおくと, $f_5(z)$ は凸関数であるから, $[(z+2)^{(m+1)/m} - 2(z+1)^{(m+1)/m} + z^{(m+1)/m}] \geq 2(z+1)^{(m+1)/m}$ となる。 $f_6(z, b) = \{[(z+2)^{(m+1)/m} - 2(z+1)^{(m+1)/m}]m(1/b)^{1/m}/(m+1) + [z - b(1/n)^m]/(m+1)\}$ とおくと, $f_6(z, b)$ は $z \geq 1$, $b \geq n^m z$ のとき b の減少関数で ($\because f_6(z, b) = \{[(z+2)^{(m+1)/m} - 2(z+1)^{(m+1)/m} + z^{(m+1)/m}]m(1/b)^{1/m}/(m+1) + [z - b(1/n)^m]/(m+1)\}/n - z^{(m+1)/m}m(1/b)^{1/m}/(m+1)$) と変形すると, 第1項は明らかに b の減少関数, 残りの項を b で微分すると, $b \geq n^m z$ のとき b の減少関数であることがわかる), $f_6(z, n^m z) > 0$, $f_6(z, n^m(z+1)) > 0$ であるから $f_6(z, b)\phi(b) \geq 0$ ($n^m z \leq b \leq n^m(z+1) - 1$). $f_7(z, b) = (z+2)^{(m+1)/m}m(1/b)^{1/m}/(m+1) + [b(1/n)^m/(m+1) - (z+2)]/n$ とおくと, $f_7(z, b)$ は $b \leq n^m(z+2)$ のとき b の非増加関数 ($b < n^m(z+2) \Rightarrow$ 狭義減少関数) となり, かつ $f_7(z, n^m(z+2)) = 0$ よって $f_7(z, b)\phi(b) \geq 0$ ($n^m(z+1) \leq b < n^m(z+2)$)

以上のことより $\gamma(z) \geq 0$ が証明された。

つぎに $\sum_{z=0}^{\infty} \gamma(z) = 1$ を証明しよう。(2.2) 式, (2.3) 式より,

$$\begin{aligned} \gamma(0) + \gamma(1) &= \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \left\{ \left(1 - \frac{1}{n} \right) [\phi(0) + \phi(1)] + \sum_{b=2}^{n-1} \left[\frac{m(2^{\frac{m+1}{m}} - 1)}{m+1} \left(\frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{m}} - \frac{1}{n} \right] \phi(b) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{b=n^m}^{2n^m-1} \left[\frac{b}{m+1} \left(\frac{1}{n} \right)^{m+1} + \frac{2m}{m+1} \left(\frac{2}{b} \right)^{\frac{1}{m}} - \frac{2}{n} \right] \phi(b) \right\} \quad n \geq 2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

また、(2.4) 式よりつぎの諸関係式を得る。

$$\begin{aligned} &\sum_{z=1}^{\infty} \sum_{b=z+2}^{n^m z-1} \left[(z+2)^{\frac{m+1}{m}} - 2(z+1)^{\frac{m+1}{m}} + z^{\frac{m+1}{m}} \right] \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(b) \\ &= \sum_{z=1}^{\infty} \sum_{b=z+1}^{n^m z-1} \left[(z+2)^{\frac{m+1}{m}} - 2(z+1)^{\frac{m+1}{m}} + z^{\frac{m+1}{m}} \right] \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(b) \\ &\quad - \sum_{z=1}^{\infty} \left[(z+2)^{\frac{m+1}{m}} - 2(z+1)^{\frac{m+1}{m}} + z^{\frac{m+1}{m}} \right] \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{z+1} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(z+1) \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{z=l+1}^{n^m l-1} \left[(z+2)^{\frac{m+1}{m}} - 2(z+1)^{\frac{m+1}{m}} + z^{\frac{m+1}{m}} \right] \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{n^m l} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(n^m l) \\ &\quad + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{z=l+1}^{n^m l} \left[(z+2)^{\frac{m+1}{m}} - 2(z+1)^{\frac{m+1}{m}} + z^{\frac{m+1}{m}} \right] \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{n^m l+1} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(n^m l+1) \\ &\quad + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{z=l+1}^{n^m l+1} \left[(z+2)^{\frac{m+1}{m}} - 2(z+1)^{\frac{m+1}{m}} + z^{\frac{m+1}{m}} \right] \\ &\quad \times \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{n^m l+2} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(n^m l+2) + \cdots + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{z=l+1}^{n^m(l+1)-2} \left[(z+2)^{\frac{m+1}{m}} - 2(z+1)^{\frac{m+1}{m}} + z^{\frac{m+1}{m}} \right] \\ &\quad \times \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{n^m(l+1)-1} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(n^m(l+1)-1) \\ &\quad - \sum_{z=1}^{\infty} \left[(z+2)^{\frac{m+1}{m}} - 2(z+1)^{\frac{m+1}{m}} + z^{\frac{m+1}{m}} \right] \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{z+1} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(z+1) \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{n^m l} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(n^m l) \left[(l+1)^{\frac{m+1}{m}} - (l+2)^{\frac{m+1}{m}} + (n^m l+1)^{\frac{m+1}{m}} - (n^m l)^{\frac{m+1}{m}} \right] \\ &\quad + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{n^m l+1} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(n^m l+1) \left[(l+1)^{\frac{m+1}{m}} - (l+2)^{\frac{m+1}{m}} + (n^m l+2)^{\frac{m+1}{m}} \right. \\ &\quad \left. - (n^m l+1)^{\frac{m+1}{m}} \right] + \cdots + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{n^m(l+1)-1} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(n^m(l+1)-1) \\ &\quad \times \left[(l+1)^{\frac{m+1}{m}} - (l+2)^{\frac{m+1}{m}} + (n^m(l+1))^{\frac{m+1}{m}} - (n^m(l+1)-1)^{\frac{m+1}{m}} \right] \\ &\quad - \sum_{z=1}^{\infty} \left[(z+2)^{\frac{m+1}{m}} - 2(z+1)^{\frac{m+1}{m}} + z^{\frac{m+1}{m}} \right] \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{z+1} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(z+1) \\ &= \frac{m}{m+1} \sum_{z=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{n^m z} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(n^m z) + \cdots + \left(\frac{1}{n^m(z+1)-1} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(n^m(z+1)-1) \right] \\ &\quad \times \left[(z+1)^{\frac{m+1}{m}} - (z+2)^{\frac{m+1}{m}} \right] + \frac{m}{m+1} (1 - 2^{\frac{m+1}{m}}) \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(2) + \cdots + \left(\frac{1}{n^m-1} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(n^m-1) \right] \\ &\quad + \frac{m}{m+1} \sum_{z=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^m z} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(n^m z) \left[(n^m z+1)^{\frac{m+1}{m}} - (n^m z)^{\frac{m+1}{m}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \cdots + \frac{2}{3} \sum_{z=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n^m(z+1)-1} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(n^m(z+1)-1) [(n^m(z+1))^{\frac{n+1}{m}} - (n^m(z+1)-1)^{\frac{n+1}{m}}] \\
 & - \sum_{z=1}^{\infty} [(z+2)^{\frac{n+1}{m}} - 2(z+1)^{\frac{n+1}{m}} + z^{\frac{n+1}{m}}] \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{z+1} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(z+1) \\
 & = -\frac{m}{m+1} \sum_{z=1}^{\infty} [(z+1)^{\frac{n+1}{m}} - (z+2)^{\frac{n+1}{m}}] \sum_{k=n^m z}^{n^m(z+1)-1} \left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(k) + \frac{m}{m+1} (1-2^{\frac{n+1}{m}}) \sum_{z=2}^{n^m-1} \left(\frac{1}{z} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(z) \\
 & + \frac{m}{m+1} \sum_{z=2}^{\infty} (z+1) \left(\frac{z+1}{z} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(z) - \frac{m}{m+1} \sum_{z=2}^{\infty} z \phi(z) - \frac{m}{m+1} \sum_{z=2}^{\infty} (z+1) \left(\frac{z+1}{z} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(z) \\
 & + \frac{2m}{m+1} \sum_{z=2}^{\infty} z \phi(z) - \frac{m}{m+1} \sum_{z=1}^{\infty} z \left(\frac{z}{z+1} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(z+1) \\
 & = -\frac{m}{m+1} \sum_{z=1}^{\infty} [(z+1)^{\frac{n+1}{m}} - (z+2)^{\frac{n+1}{m}}] \sum_{k=n^m z}^{n^m(z+1)-1} \left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(k) + \frac{m}{m+1} (1-2^{\frac{n+1}{m}}) \sum_{z=2}^{n^m-1} \left(\frac{1}{z} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(z) \\
 & + \frac{m}{m+1} \sum_{z=2}^{\infty} z \phi(z) - \frac{m}{m+1} \sum_{z=1}^{\infty} z \left(\frac{z}{z+1} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(z+1) \tag{2.6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{z=1}^{\infty} \left\{ \sum_{b=n^m z}^{n^m(z+1)-1} \left[[(z+2)^{\frac{n+1}{m}} - 2(z+1)^{\frac{n+1}{m}}] \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{n} \left[z - \frac{b}{m+1} \left(\frac{1}{n} \right)^m \right] \right] \phi(b) \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{b=n^m(z+1)}^{n^m(z+2)-1} \left[(z+2)^{\frac{n+1}{m}} \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{n} \left[\frac{b}{m+1} \left(\frac{1}{n} \right)^m - (z+2) \right] \right] \phi(b) \right\} \\
 & = \sum_{z=1}^{\infty} \sum_{b=n^m z}^{n^m(z+1)-1} \left\{ [(z+2)^{\frac{n+1}{m}} - (z+1)^{\frac{n+1}{m}}] \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{m}} - \frac{1}{n} \right\} \phi(b) \\
 & \quad - \sum_{b=n^m}^{2n^m-1} \left\{ \frac{2m}{m+1} \left(\frac{2}{b} \right)^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{n} \left[\frac{b}{m+1} \left(\frac{1}{n} \right)^m - 2 \right] \right\} \phi(b) \\
 & = \frac{m}{m+1} \sum_{z=1}^{\infty} [(z+2)^{\frac{n+1}{m}} - (z+1)^{\frac{n+1}{m}}] \sum_{k=n^m z}^{n^m(z+1)-1} \left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(k) \\
 & \quad - \frac{1}{n} \sum_{z=n^m}^{\infty} \phi(z) - \sum_{b=n^m}^{2n^m-1} \left\{ \frac{2m}{m+1} \left(\frac{2}{b} \right)^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{n} \left[\frac{b}{m+1} \left(\frac{1}{n} \right)^m - 2 \right] \right\} \phi(b) \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{z=1}^{\infty} \left[\frac{m(z^{\frac{n+1}{m}} - (z+1)^{\frac{n+1}{m}})}{(m+1)(z+1)^{\frac{1}{m}}} + 1 \right] \phi(z+1) = \sum_{z=2}^{\infty} \phi(z) - \frac{m}{m+1} \sum_{z=2}^{\infty} z \phi(z) \\
 & \quad + \frac{m}{m+1} \sum_{z=1}^{\infty} z \left(\frac{z}{z+1} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(z+1) \tag{2.8}
 \end{aligned}$$

となる。(2.4) ～ (2.8) 式により $\sum_{z=0}^{\infty} \gamma(z) = \gamma(0) + \gamma(1) + \sum_{z=2}^{\infty} \gamma(z) = 1$ を得る。

補題 2 $\sum_{u=0}^{\infty} u \gamma(u) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m \frac{1}{n^k} \sum_{b=0}^{\infty} b \phi(b)$

証明 (2.4) 式により (2.6) ～ (2.8) 式を導いたと同様な計算より、つぎの式を得る。

$$\begin{aligned}
 & \sum_{z=2}^{\infty} z \sum_{b=z+1}^{n^m(z-1)-1} \left[(z+1)^{\frac{n+1}{m}} - 2z^{\frac{n+1}{m}} + (z-1)^{\frac{n+1}{m}} \right] \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(b) \\
 & = \sum_{z=1}^{\infty} \sum_{b=z+1}^{n^m z-1} (z+1) \left[(z+2)^{\frac{n+1}{m}} - 2(z+1)^{\frac{n+1}{m}} + z^{\frac{n+1}{m}} \right] \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{z=1}^{\infty} (z+1) \left[(z+2)^{\frac{n+1}{n}} - 2(z+1)^{\frac{n+1}{n}} + z^{\frac{n+1}{n}} \right] \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{z+1} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(z+1) \\
 = & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{z=k+1}^{n^m k-1} (z+1) \left[(z+2)^{\frac{n+1}{n}} - 2(z+1)^{\frac{n+1}{n}} + z^{\frac{n+1}{n}} \right] \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{n^m k} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(n^m k) \\
 & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{z=k+1}^{n^m k} (z+1) \left[(z+2)^{\frac{n+1}{n}} - 2(z+1)^{\frac{n+1}{n}} + z^{\frac{n+1}{n}} \right] \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{n^m k+1} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(n^m k+1) \\
 & + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{z=k+1}^{n^m k-1} (z+1) \left[(z+2)^{\frac{n+1}{n}} - 2(z+1)^{\frac{n+1}{n}} + z^{\frac{n+1}{n}} \right] \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{n^m k+2} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(n^m k+2) + \dots \\
 & + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{z=k+1}^{n^m(k+1)-2} (z+1) \left[(z+2)^{\frac{n+1}{n}} - 2(z+1)^{\frac{n+1}{n}} + z^{\frac{n+1}{n}} \right] \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{n^m(k+1)-1} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(n^m(k+1)-1) \\
 & - \sum_{z=1}^{\infty} (z+1) \left[(z+2)^{\frac{n+1}{n}} - 2(z+1)^{\frac{n+1}{n}} + z^{\frac{n+1}{n}} \right] \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{z+1} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(z+1) \\
 = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{n^m k} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(n^m k) \{ (k+1)(k+2) [(k+1)^{\frac{1}{n}} - (k+2)^{\frac{1}{n}}] + n^m k(n^m k+1) [(n^m k+1)^{\frac{1}{n}} \\
 & - (n^m k)^{\frac{1}{n}}] \} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{n^m k+1} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(n^m k+1) \{ (k+1)(k+2) [(k+1)^{\frac{1}{n}} - (k+2)^{\frac{1}{n}}] \\
 & + (n^m k+1)(n^m k+2) [(n^m k+2)^{\frac{1}{n}} - (n^m k+1)^{\frac{1}{n}}] \} \\
 & + \dots + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{n^m(k+1)-1} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(n^m(k+1)-1) \\
 & \times \{ (k+1)(k+2) [(k+1)^{\frac{1}{n}} - (k+2)^{\frac{1}{n}}] + (n^m(k+1)-1)(n^m(k+1)) [(n^m(k+1))^{\frac{1}{n}} \\
 & - (n^m(k+1)-1)^{\frac{1}{n}}] \} - \sum_{z=1}^{\infty} (z+1) \left[(z+2)^{\frac{n+1}{n}} - 2(z+1)^{\frac{n+1}{n}} + z^{\frac{n+1}{n}} \right] \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{z+1} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(z+1) \\
 = & \frac{m}{m+1} \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)(k+2) [(k+1)^{\frac{1}{n}} - (k+2)^{\frac{1}{n}}] \sum_{z=n^m k}^{n^m(k+1)-1} \left(\frac{1}{z} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(z) + \frac{2m}{m+1} (1-2^{\frac{1}{m}}) \sum_{z=2}^{n^m-1} \left(\frac{1}{z} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(z) \\
 & + \frac{m}{m+1} \sum_{z=2}^{\infty} z(z+1) \left(\frac{z+1}{z} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(z) - \frac{m}{m+1} \sum_{z=2}^{\infty} z [(z+1) \phi(z) - \frac{m}{m+1} \sum_{z=2}^{\infty} z \left[(z+1) \left(\frac{z+1}{z} \right)^{\frac{1}{m}} \right. \\
 & \left. - 2z + (z-1) \left(\frac{z-1}{z} \right)^{\frac{1}{m}} \right] \phi(z) \tag{2.9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{z=2}^{\infty} z \left\{ \sum_{b=n^m(z-1)}^{n^m z-1} \left[(z+1)^{\frac{n+1}{n}} - 2z^{\frac{n+1}{n}} \right] \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{n} \left[z-1 - \frac{b}{m+1} \left(\frac{1}{n} \right)^m \right] \right\} \phi(b) \\
 & + \sum_{b=n^m z}^{n^m(z+1)-1} \left[(z+1)^{\frac{n+1}{n}} - \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{n} \left[\frac{b}{m+1} \left(\frac{1}{n} \right)^m - (z+1) \right] \right] \phi(b) \} \\
 = & \sum_{z=1}^{\infty} \sum_{b=n^m z}^{n^m(z+1)-1} \left\{ (z+1) \left[(z+2)^{\frac{n+1}{n}} - 2(z+1)^{\frac{n+1}{n}} \right] \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{n} \left[z - \frac{b}{m+1} \left(\frac{1}{n} \right)^m \right] \right\} \phi(b) \\
 & + z \left[(z+1)^{\frac{n+1}{n}} - \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{n} \left[\frac{b}{m+1} \left(\frac{1}{n} \right)^m - (z+1) \right] \right] \phi(b) \} \\
 & - \sum_{b=n^m}^{2n^m-1} \left\{ 2^{\frac{n+1}{n}} - \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{n} \left[\frac{b}{m+1} \left(\frac{1}{n} \right)^m - 2 \right] \right\} \phi(b) \\
 = & \frac{m}{m+1} \sum_{z=1}^{\infty} (z+1)(z+2) [(z+2)^{\frac{1}{n}} - (z+1)^{\frac{1}{n}}] \sum_{b=n^m z}^{n^m(z+1)-1} \left(\frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(b) - \frac{1}{(m+1)n^{m+1}} \sum_{b=n^m}^{\infty} b \phi(b)
 \end{aligned}$$

$$-\sum_{b=n^m}^{2n^{m-1}} \left\{ \frac{2m}{m+1} \left(\frac{2}{b} \right)^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{n} \left[\frac{b}{m+1} \left(\frac{1}{n} \right)^m - 2 \right] \right\} \phi(b) \quad (2.10)$$

$$\sum_{z=2}^{\infty} z \left[\frac{m((z-1)^{\frac{m+1}{n}} - z^{\frac{m+1}{n}})}{(m+1)z^{\frac{1}{n}}} + 1 \right] = \frac{m}{m+1} \sum_{z=2}^{\infty} \left\{ z(z-1) \left(\frac{z+1}{z} \right)^{\frac{1}{m}} - z^2 \right\} \phi(z) + \sum_{z=2}^{\infty} z \phi(z) \quad (2.11)$$

(2.3) 式, (2.9) ~ (2.11) を用いて,

$$\begin{aligned} \sum_{z=0}^{\infty} z \gamma(z) &= \gamma(1) + \sum_{z=2}^{\infty} z \gamma(z) = \frac{1}{(m+1) \left(1 - \frac{1}{n} \right)} \left\{ \left(1 - \left(\frac{1}{n} \right)^{m+1} \right) \sum_{b=0}^{\infty} b \phi(b) \right\} \\ &= \frac{1}{m+1} \left(\sum_{k=0}^m \frac{1}{n^k} \right) \sum_{b=0}^{\infty} b \phi(b) \end{aligned}$$

を得る。

$$\begin{aligned} \text{補題 3} \quad \sum_{u=0}^z \gamma(u) &= \sum_{u=0}^z \phi(u) + \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \left\{ \sum_{b=z+1}^{n^{mz-1}} \left[\frac{m((z+1)^{\frac{m+1}{n}} - z^{\frac{m+1}{n}}) \left(\frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{m}} - \frac{1}{n}}{m+1} \right] \phi(b) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{b=n^m z}^{n^m(z+1)-1} \left[(z+1)^{\frac{m+1}{n}} \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{n} \left[\frac{b}{m+1} \left(\frac{1}{n} \right)^m - (z+1) \right] \right] \phi(b) \right\}, \\ &\quad n \geq 2, \quad z \geq 1 \end{aligned}$$

証明 帰納法による

i) $z=1$ のときは (2.5) 式により明らかに成り立つ。

ii) $z=k$ のとき, 補題が成立していると仮定する, 帰納法の仮定および (4) 式より

$$\begin{aligned} \sum_{u=0}^{k+1} \gamma(u) &= \sum_{u=0}^k \gamma(u) + \gamma(k+1) \\ &= \sum_{u=0}^k \phi(u) + \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \left\{ \sum_{b=k+1}^{n^{mk}-1} \left[\frac{m((k+1)^{\frac{m+1}{n}} - k^{\frac{m+1}{n}}) \left(\frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{m}} - \frac{1}{n}}{m+1} \right] \phi(b) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{b=n^m k}^{n^m(k+1)-1} \left[(k+1)^{\frac{m+1}{n}} \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{n} \left[\frac{b}{m+1} \left(\frac{1}{n} \right)^m - (k+1) \right] \right] \phi(b) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \left\{ \left[\frac{m(k^{\frac{m+1}{n}} - (k+1)^{\frac{m+1}{n}})}{(m+1)(k+1)^{\frac{1}{m}}} + 1 \right] \phi(k+1) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{b=k+2}^{n^{mk}-1} [(k+2)^{\frac{m+1}{n}} - 2(k+1)^{\frac{m+1}{n}} + k^{\frac{m+1}{n}}] \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(b) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{b=n^m k}^{n^m(k+1)-1} \left[[(k+2)^{\frac{m+1}{n}} - 2(k+1)^{\frac{m+1}{n}}] \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{n} \left[k - \frac{b}{m+1} \left(\frac{1}{n} \right)^m \right] \right] \phi(b) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{b=n^m(k+1)}^{n^m(k+2)-1} \left[(k+2)^{\frac{m+1}{n}} \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{n} \left[\frac{b}{m+1} \left(\frac{1}{n} \right)^m - (k+2) \right] \right] \phi(b) \right\} \\ &= \sum_{u=0}^k \phi(u) + \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \left\{ \left(1 - \frac{1}{n} \right) \phi(k+1) + \sum_{b=k+2}^{n^{m(k+1)}-1} \left[\frac{m((k+2)^{\frac{m+1}{n}} - (k+1)^{\frac{m+1}{n}}) \left(\frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{m}}}{m+1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{n} \right] \phi(b) + \sum_{b=n^m(k+1)}^{n^m(k+2)-1} \left[(k+2)^{\frac{m+1}{n}} \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{n} \left[\frac{b}{m+1} \left(\frac{1}{n} \right)^m - (k+2) \right] \right] \phi(b) \right\} \end{aligned}$$

$$= \sum_{u=0}^{k+1} \phi(u) + \frac{1}{1-\frac{1}{n}} \left\{ \sum_{b=k+2}^{n^m(k+1)-1} \left[\frac{m((k+2)^{\frac{m+1}{n}} - (k+1)^{\frac{m+1}{n}}) \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{m}} - \frac{1}{n}}{m+1} \right] \phi(b) \right. \\ \left. + \sum_{b=n^m(k+1)}^{n^m(k+2)-1} \left[(k+2)^{\frac{m+1}{n}} \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{n} \left[\frac{b}{m+1} \left(\frac{1}{n}\right)^m - (k+2) \right] \right] \phi(b) \right\}$$

となり, $z=k+1$ のとき成立する。

補題 4 $\sum_{u=0}^z u\gamma(u) = \frac{1}{m+1} \sum_{l=0}^m \frac{1}{n^l} \sum_{u=0}^z u\phi(u)$

$$+ \frac{1}{1-\frac{1}{n}} \left\{ \sum_{b=z+1}^{n^m z-1} \left[(z+1)z((z+1)^{\frac{1}{n}} - z^{\frac{1}{n}}) \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{m}} - \frac{b}{m+1} \left(\frac{1}{n}\right)^{m+1} \right] \phi(b) \right. \\ \left. + z \sum_{b=n^m z}^{n^m(z+1)-1} \left[(z+1)^{\frac{m+1}{n}} \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{n} \left[\frac{b}{m+1} \left(\frac{1}{n}\right)^m - (z+1) \right] \right] \phi(b) \right\},$$

$n \geq 2$

証明 帰納法による

i) $z=0$ のときは両辺が 0 となり明らか, $z=1$ のときは, 右辺は (2.3) 式と一致し, 成立する。

ii) $z=k$ のとき補題が成立していると仮定する。帰納法の仮定および (2.4) 式より

$$\sum_{u=0}^{k+1} u\gamma(u) = \sum_{u=0}^k u\gamma(u) + (k+1)\gamma(k+1) = \frac{1}{m+1} \sum_{l=0}^m \frac{1}{n^l} \sum_{u=0}^k u\phi(u) \\ + \frac{1}{1-\frac{1}{n}} \left\{ \sum_{b=k+1}^{n^m k-1} \left[(k+1)k((k+1)^{\frac{1}{n}} - k^{\frac{1}{n}}) \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{m}} - \frac{b}{m+1} \left(\frac{1}{n}\right)^{m+1} \right] \phi(b) \right. \\ + k \sum_{b=n^m k}^{n^m(k+1)-1} \left[(k+1)^{\frac{m+1}{n}} \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{n} \left[\frac{b}{m+1} \left(\frac{1}{n}\right)^m - (k+1) \right] \right] \phi(b) \\ + (k+1) \left[\frac{m(k^{\frac{m+1}{n}} - (k+1)^{\frac{m+1}{n}})}{(m+1)(k+1)^{\frac{1}{n}}} + 1 \right] \phi(k+1) \\ + (k+1) \sum_{b=k+2}^{n^m k-1} \left[(k+2)^{\frac{m+1}{n}} - 2(k+1)^{\frac{m+1}{n}} + k^{\frac{m+1}{n}} \right] \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{m}} \phi(b) \\ + (k+1) \sum_{b=n^m k}^{n^m(k+1)-1} \left[[(k+2)^{\frac{m+1}{n}} - 2(k+1)^{\frac{m+1}{n}}] \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{m}} \right. \\ \left. + \frac{1}{n} \left[k - \frac{b}{m+1} \left(\frac{1}{n}\right)^m \right] \right] \phi(b) + (k+1) \sum_{b=n^m(k+1)}^{n^m(k+2)-1} \left[(k+2)^{\frac{m+1}{n}} \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{m}} \right. \\ \left. + \frac{1}{n} \left[\frac{b}{m+1} \left(\frac{1}{n}\right)^m - (k+2) \right] \right] \phi(b) \left. \right\} \\ = \frac{1}{m+1} \sum_{l=0}^m \frac{1}{n^l} \sum_{u=0}^k u\phi(u) + \frac{1}{1-\frac{1}{n}} \left\{ \frac{1}{m+1} \left[1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{m+1} \right] (k+1)\phi(k+1) \right. \\ + \sum_{b=k+2}^{n^m(k+1)-1} \left[(k+1)(k+2)((k+2)^{\frac{1}{n}} - (k+1)^{\frac{1}{n}}) \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{m}} - \frac{b}{m+1} \left(\frac{1}{n}\right)^{m+1} \right] \phi(b) \\ \left. + (k+1) \sum_{b=n^m(k+1)}^{n^m(k+2)-1} \left[(k+2)^{\frac{m+1}{n}} \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{n} \left[\frac{b}{m+1} \left(\frac{1}{n}\right)^m - (k+2) \right] \right] \phi(b) \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{m+1} \sum_{l=0}^m \frac{1}{n^l} \sum_{i=0}^{k+1} u \phi(u) + \frac{1}{1-\frac{1}{n}} \left\{ \sum_{b=k+2}^{n^{m(k+1)}-1} \left[(k+2)(k+1)((k+2)^{\frac{1}{m}} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (k+1)^{\frac{1}{m}} \right) \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{m}} - \frac{b}{m+1} \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{m+1}{m}} \right] \phi(b) \\
 &\quad \left. + (k+1) \sum_{b=n^{m(k+1)}}^{n^{m(k+2)}-1} \left[(k+2)^{\frac{m+1}{m}} \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{m}} + \frac{1}{n} \left[\frac{b}{m+1} \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{m}{m+1}} - (k+2) \right] \right] \phi(b) \right\}
 \end{aligned}$$

となり $z=(k+1)$ のとき成立する。

$$\begin{aligned}
 \text{補題 5} \quad \sum_{u=0}^z (z+u) \gamma(u) &= \sum_{u=0}^z \left\{ z - \frac{1}{m+1} \sum_{l=0}^m \frac{1}{n^l} u \right\} \phi(u) \\
 &\quad + \frac{1}{1-\frac{1}{n}} \left\{ \sum_{b=z+1}^{n^{mz}-1} \left[z^{\frac{m+1}{m}} \frac{m}{m+1} \left(\frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{m}} - \frac{1}{n} \left[z - \frac{b}{m+1} \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{m}{m+1}} \right] \right] \phi(b) \right\}
 \end{aligned}$$

証明 補題 3 と補題 4 より明らか

(2.2) ～ (2.3) 式で $\gamma(z)$ を定義すると, (1.6) 式, (1.7) 式が成立するので

$$\Delta_1 E\{C(B, z; \gamma)\} = \Delta_2 E\{C(B, z; \phi)\}, \quad z \geq 0 \quad (2.12)$$

となる。よって

$$E_1\{C(B, z; \gamma)\} = E_3\{C(B, z; \phi)\} + f(x) \quad (f(x) \text{ は } x \text{ と定数のみの関数})$$

補題 3—補題 5 を用いて $f(x)$ を計算すると,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{p}{m+1} \sum_{k=1}^m \frac{1}{n^k} \sum_{b=0}^{\infty} b \phi(b) + (h+p) \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{b=x+1}^{n^{m_x}-1} \left[\frac{m}{m+1} x^{\frac{m+1}{m}} \left(\frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{m}} - x \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{m+1} \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{m}{m+1}} b \right] \phi(b) - \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^m \frac{1}{n^k} \sum_{b=0}^{\infty} x b \phi(b) - \frac{m}{m+1} x^{\frac{m+1}{m}} \sum_{b=n^{m_x}}^{\infty} \left(\frac{1}{b} \right)^{\frac{1}{m}} \phi(b) \right\}
 \end{aligned} \quad (2.13)$$

となる。したがって単純な特定モデル (1) で $\phi(b)$ の代りに $\gamma(b)$ を用いると, 需要形態が $g(b, T/t) = b(T/t)^m$ のモデルの期待総費用に $f(x)$ を加えた期待総費用を得る。しかしながら $\Delta_1 E\{C(B, z; \gamma)\} = \Delta_2 E\{C(B, z; \phi)\}$ が成立するから $E_1\{C(B, z; \gamma)\}$ および $E_2\{C(B, z; \gamma)\}$ を最小にする z の値は同値である。

$n=\infty$ とおくと, $f(x)=0$ となり, 両方の期待値は同値となる。

む す び

需要の発生が一般的で, 発注量が発注間隔内の任意に定められた時点に入荷し, 需要量が離散的確率変数と考えられる場合の在庫モデルの同値変換を検討した。需要形態が m 乗型の場合は, 需要が一回きりで, すべて期首に引き出される場合に同値変換されることを示し, その性質を論じた。需要形態が複峯型の場合の検討はこれからの研究課題である。

文 献

- [1] Arrow K. J., S. Karlin and H. Scharf: Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production, Stanford, Calif. Stanford Univ. Press. 1958.
- [2] —: Studies in Applied Probability and Management Science, Stanford Calif. Stanford Univ. Press, 1962.
- [3] Bellman, R: Dynamic Programming, Princeton, N. J., Princeton Univ. Pres, 1957.
- [4] M. Kodama: A delivery-lag inventory control process with emergency and non-stationary stochastic demands, Bull. Math. Statist., Vol. 12, No. 1, 2, 1965, pp. 69-88.
- [5] M. Kodama: A delivery-lag inventory control process with emergency and non-stationary stochastic demands II, Kumamoto J. Sci., Ser. A, Vol. 7, No. 3, 1966, pp. 43-72.
- [6] M. Kodama: A type of statistical inventory problem with emergency and delivery-lags, Memoirs of the Faculty of General Education, Kumamoto University, Series of Natural Science, No. 1, 1966, pp. 7-21.
- [7] M. Kodama: The optimality of (S, s) policies in the dynamic inventory problem with emergency and non-stationary stochastic demands, Kumamoto J. Sci., Ser. A, Vol. 8, No. 1, 1967, pp. 1-10.
- [8] M. Kodama: A delivery-lag inventory control process with emergency and non-stationary stochastic demands III, Memoirs of the Faculty of General Education, Kumamoto University, Series of Natural Science, No. 3, 1968, pp. 9-23.
- [9] M. Kodama: Optimal policies for dynamic inventory processes with random delivery-lag and non-stationary statistics demands, Kumamoto J. Sci., Ser. A, Vol. 8, No. 2, 1967, pp. 84-105.
- [10] 北原貞輔・児玉正憲:「OR による在庫管理システム」九州大学出版会, 1982.
- [11] 児玉正憲・北原貞輔:「種々の需要形態に関する統一的在庫モデルの研究」経済学研究, Vol. 47, No. 5・6, 九州大学経済学会, 1983.
- [12] 児玉正憲:「種々の需要形態に関する確率的在庫モデル」, 経済学研究, Vol. 51, No. 5, 九州大学経済学会, 1986.
- [13] —:「確率的在庫モデルの最適政策 (I)」経済学研究, Vol. 52, No. 1~4,九州大学経済学会, 1986.
- [14] —:「確率的在庫モデルの最適政策 (II)」経済学研究, Vol. 52, No. 5,九州大学経済学会, 1986.
- [15] —:「動的在庫モデルの最適政策 (I) 連続編」経済学研究, Vol. 53, No. 4・5, 九州大学経済学会, 1987.
- [16] —:「動的在庫モデルの最適政策 (II) 連続編」経済学研究, Vol. 53, No. 6, 九州大学経済学会, 1987.
- [17] —:「リードタイムのある動的在庫モデルの最適政策」経済学研究, Vol. 54, No. 1・2, 九州大学経済学会, 1988.
- [18] —:「リードタイムのある動的在庫モデルの定常政策」経済学研究, Vol. 54, No. 3, 九州大学経済学会, 1988.
- [19] —:「一般的生産・需要形態に関する静態的在庫モデル」経済学研究, Vol. 54, No. 4・5, 九州大学経済学会, 1988.
- [20] —:「リードタイムのある確率的在庫モデル」経済学研究, Vol. 54, No. 6, 九州大学経済学会, 1989.
- [21] —:「リードタイムのある確率的在庫モデル (離散編)」経済学研究, Vol. 55, No. 1・2, 九州大学経済学会, 1989.
- [22] —:「離散確率的在庫モデルの同値変換」経済学研究, Vol. 55, No. 3, 九州大学経済学会, 1989.
- [23] Monks, J. G.: Operations Management, Theory and Problem, McGraw. Hill, 1977.
- [24] Nadder, E: Inventory System, John Wiley, 1966.
- [25] Scarf, H. E., D. M. Gilford, and M. W. Shelly: Multistage Inventory Models and Techniques, Stanford, Calif. Stanford Univ. Press, 1963.
- [26] Taha, H. A.: Operations Research, An Introduction, Macmillan, 1976.