

リードタイムのある確率的在庫モデル：離散編

児玉, 正憲

<https://doi.org/10.15017/4491804>

出版情報：経済学研究. 55 (1/2), pp.1-19, 1989-10-10. 九州大学経済学会
バージョン：
権利関係：

リードタイムのある確率的在庫モデル

— 離 散 編 —

児 玉 正 憲

需要の発生が一般的で発注量が発注間隔内の任意に定められた時点に入荷する確率的在庫モデルの最適政策を検討した¹⁾。その場合、需要量は連続確率変数にしたがうと仮定した。

本小論では需要量が離散確率変数にしたがう場合の最適政策を検討する。

ここで取りあげるモデルは発注コストを考慮する必要がない購入・販売モデルである。発注は期首に行われ、発注量は期間 t 内の任意の時点 $t_0 (\leq t)$ に入荷するものとする。ただし、 t_0/t の値は $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/m, \dots, 0$ とするものとする、 $t/t_0 = n$ とおく、 $n = 1, 2, 3, \dots$ 。確率的に変化するのは需要量 B だけである。需要の発生については次の三つの場合を取扱う。

1. 需要が一回きりで、すべて期首に払い出される (単純な特定モデル (1))
2. 需要は期を通じて一様に発生する (単純な特定モデル (2))
3. 需要は期の間一般的な関数にしたがって発生する (需要形態の一般的モデル)

論文を通じて使用する以下の記号を導入する。

x : 前期からの繰越在庫量

y : 発注量 (仮定によって期間 t の内の任意の時点 t_0 に入荷)

$$z = x + y$$

$\phi(b)$: 需要量 B の確率関数、 $P\{B = b\} = \phi(b)$

c : 購入コスト (単位あたり)

h : 在庫維持コスト (期, 単位あたり)

p : 品切コスト (期, 単位あたり)

1. 単純な特定モデル (1)

需要量 B の実現値が b のときの期平均在庫量および期平均在庫不足量をそれぞれ $I_1(b, z)$, $I_2(b, z)$ とおくと、次式で与えられる²⁾。

1) 児玉正憲 [18]

2) 児玉正憲 [18]

$$I_1(b, z) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{n}\right)z + \frac{1}{n}x - b, & 0 \leq b \leq x \\ \left(1 - \frac{1}{n}\right)(z - b), & x < b < z \\ 0, & z \leq b \end{cases} \quad (1.1)$$

$$I_2(b, z) = \begin{cases} 0, & 0 \leq b \leq x \\ \frac{1}{n}(b - x), & x < b < z \\ -\left(1 - \frac{1}{n}\right)z - \frac{1}{n}x + b, & z \leq b \end{cases} \quad (1.2)$$

ところが、需要量 B は離散確率変数であるので期待期平均在庫量 I_1 、期待期平均在庫不足量 I_2 は次のようになる。

$$\begin{aligned} I_1 &= E\{I_1(B, z)\} = \sum_{b=0}^{\infty} I_1(b, z)\phi(b) \\ &= \sum_{b=0}^x \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right)z + \frac{x}{n} - b \right\} \phi(b) + \sum_{b=x+1}^{z-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)(z - b)\phi(b) \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= E\{I_2(B, z)\} = \sum_{b=0}^{\infty} I_2(b, z)\phi(b) \\ &= \sum_{b=x+1}^{z-1} \frac{1}{n}(b - x)\phi(b) + \sum_{b=z}^{\infty} \left\{ -\left(1 - \frac{1}{n}\right)z - \frac{1}{n}x + b \right\} \phi(b) \end{aligned} \quad (1.4)$$

したがって、このモデルの総期待費用 $E\{C(B, z)\}$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} E\{C(B, z)\} &= c \cdot (z - x) + h \cdot I_1 + p \cdot I_2 \\ &= c \cdot (z - x) + h \left[\sum_{b=0}^x \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right)z + \frac{1}{n}x - b \right\} \phi(b) + \sum_{b=x+1}^{z-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)(z - b)\phi(b) \right] \\ &\quad + p \left[\sum_{b=x+1}^{z-1} \frac{1}{n}(b - x)\phi(b) + \sum_{b=z}^{\infty} \left\{ -\left(1 - \frac{1}{n}\right)z - \frac{1}{n}x + b \right\} \phi(b) \right] \\ &= c \cdot (z - x) - p \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right)z + \frac{1}{n}x - \sum_{b=0}^{\infty} b\phi(b) \right\} \\ &\quad + (h + p) \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sum_{b=0}^z (z - b)\phi(b) + \frac{1}{n} \sum_{b=0}^x (x - b)\phi(b) \right\} \end{aligned} \quad (1.5)$$

$E\{C(B, z)\}$ を最小にする z の値 z^* および最小値を求めるために、 $E\{C(B, z)\}$ の差分を計算しておく。

$$\begin{aligned} \Delta E\{C(B, z)\} &= E\{C(B, z+1)\} - E\{C(B, z)\} \\ &= c - \left(1 - \frac{1}{n}\right)p + \left(1 - \frac{1}{n}\right)(h + p) \sum_{b=0}^z \phi(b) \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 E\{C(B, z)\} &= \Delta E\{C(B, z+1)\} - \Delta E\{C(B, z)\} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)(h + p)\phi(z+1) \geq 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

したがって z^* は、

$$\left. \begin{aligned} E\{C(B, z+1)\} &\geq E\{C(B, z)\} \\ E\{C(B, z-1)\} &\geq E\{C(B, z)\} \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

をみたす z の値である。これは (1.6) より $\{(1-1/n)p-c\}/\{(1-1/n)(h+p)\}$ を q とおくと、

$$\sum_{b=0}^{z^*} \phi(b) \geq q \geq \sum_{b=0}^{z^*-1} \phi(b), \quad \left(1 - \frac{1}{n}\right)p > c \quad (1.9)$$

をみたさなければならない。したがって次の定理を得る。

定理 1 最適発注政策は $(1-1/n)p > c$ のとき、

$$x < z^* \quad \text{ならば} \quad \text{発注量} = z^* - x$$

$$x \geq z^* \quad \text{ならば} \quad \text{発注量} = 0$$

である。ここに z^* は (1.9) の根である。

$(1-1/n)p \leq c$ のときは (1.6) より $\Delta E\{C(B, z)\} \geq 0$ となり、 $E\{C(B, z)\}$ は z の非減少関数となるので、発注しないこと ($y=0$)、つまり $z=x$ が最適となる。

$t_0=0$ ($n=\infty$) とおくと論文 [9] の単純な特定モデル (1) に一致する。

$t_0=t$ ($n=1$) の場合は $\Delta E\{C(B, z)\} > 0$ ((1.6) ** 参照) となり、 $E\{C(B, z)\}$ は z の狭義増加関数となり、発注しないことが最適となる。

注 1 (1.7) より $\phi(z) > 0$ ($z \geq 0$) のときは (1.9) の等号はとれ、 z^* は唯一である。 $\phi(z) \geq 0$ ($z \geq 0$) の場合は z^* は唯一とは限らない。

$$(i) \quad \sum_{b=0}^{z^*-1} \phi(b) = q = \sum_{b=0}^{z^*} \phi(b)$$

$$(ii) \quad \sum_{b=0}^{z^*-1} \phi(b) < q = \sum_{b=0}^{z^*} \phi(b)$$

$$(iii) \quad \sum_{b=0}^{z^*-1} \phi(b) = q < \sum_{b=0}^{z^*} \phi(b)$$

(i) は 3 個以上の z^* が存在し、(ii)、(iii) は 2 個の z^* が存在する。

また、(1.8) が成立すれば $\Delta E\{C(B, 0)\} < 0$ 、 $\lim_{z \rightarrow \infty} \Delta E\{C(B, z)\} < 0$ が成立している。

注 2 $t_0=0$ ($n=\infty$)、 $t_0=t$ ($n=1$) の場合の重要な式を列記する。対応する式にそれぞれ * および ** を付記する。

$$I_1^*(b, z) = \begin{cases} z-b, & 0 \leq b < z \\ 0, & z \leq b \end{cases} \quad (1.1)^*$$

$$I_2^*(b, z) = \begin{cases} 0, & 0 \leq b < z \\ b-z, & z \leq b \end{cases} \quad (1.2)^*$$

$$\begin{aligned} E\{C(B, z)\}^* &= c \cdot (z-x) + h \sum_{b=0}^{z-1} (z-b)\phi(b) + \sum_{b=z}^{\infty} (b-z)\phi(b) \\ &= c \cdot (z-x) - p \left\{ z - \sum_{b=0}^{\infty} b(\phi)(b) \right\} + (h+p) \sum_{b=0}^z (z-b)\phi(b) \end{aligned} \quad (1.5)^*$$

$$\Delta E\{C(B, z)\}^* = c - p + (h+p) \sum_{b=0}^z \phi(b) \quad (1.6)^*$$

$$\Delta^2 E\{C(B, z)\}^* = (h+p)\phi(z+1) \quad (1.7)^*$$

$$I_1^{**}(b, z) = \begin{cases} x-b, & 0 \leq b < x \\ 0, & x \leq b \end{cases} \quad (1.1)^{**}$$

$$I_2^{**}(b, z) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq b < x \\ b-x & , x \leq b \end{cases} \quad (1.2)^{**}$$

$$\begin{aligned} E\{C(B, z)\}^{**} &= c \cdot (z-x) + h \sum_{b=0}^{x-1} (x-b)\phi(b) + p \sum_{b=x}^{\infty} (b-x)\phi(b) \\ &= c \cdot (z-x) - p \left\{ x - \sum_{b=0}^{\infty} b\phi(b) \right\} + (h+p) \sum_{b=0}^x (x-b)\phi(b) \end{aligned} \quad (1.5)^{**}$$

$$\Delta E\{C(B, z)\}^{**} = c \quad (1.6)^{**}$$

$$\Delta^2 E\{C(B, z)\}^{**} = 0 \quad (1.7)^{**}$$

(1.1) *, (1.2) *, (1.1) **, (1.2) ** は (1.1), (1.2) と比較して b のとる値の範囲が3つの場合から2つの場合になっている。

2. 単純な特定モデル (2)

需要量 B の実現値が b のときの期平均在庫量および期平均在庫不足量をそれぞれ $I_1(b, z)$, $I_2(b, z)$ とおくと、次式で与えられる³⁾。

$nx < z$ の場合

$$I_1(b, z) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{n}\right)z + \frac{1}{n}x - \frac{b}{2} & , 0 \leq b < nx \\ \frac{x^2}{2b} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)z - \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2\right)b & , nx \leq b < z \\ \frac{x^2}{2b} + \frac{z^2}{2b} - \frac{1}{n}z + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2b & , z \leq b < nz \\ \frac{x^2}{2b} & , nz \leq b \end{cases} \quad (2.1)$$

$$I_2(b, z) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq b < nx \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2b + \frac{x^2}{2b} - \frac{1}{n}x & , nx \leq b < z \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2b + \frac{x^2}{2b} - \frac{1}{n}x + \frac{b}{2} - z + \frac{z^2}{2b} & , z \leq b < nz \\ \frac{x^2}{2b} - \frac{1}{n}x + \frac{b}{2} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)z & , nz \leq b \end{cases} \quad (2.2)$$

$nx \geq z$ の場合

$$I_1(b, z) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{n}\right)z + \frac{1}{n}x - \frac{b}{2} & , 0 \leq b < z \\ \frac{z^2}{2b} - \frac{1}{n}z + \frac{1}{n}x & , z \leq b < nx \\ \frac{x^2}{2b} + \frac{z^2}{2b} - \frac{1}{n}z + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2b & , nx \leq b < nz \\ \frac{x^2}{2b} & , nz \leq b \end{cases} \quad (2.3)$$

3) 児玉正憲 [18]

$$I_2(b, z) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq b < z \\ \frac{z^2}{2b} - z + \frac{b}{2} & , z \leq b < nx \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \right)^2 b + \frac{x^2}{2b} + \frac{1}{n}x + \frac{b}{2} - z + \frac{z^2}{2b} & , nx \leq b < nz \\ \frac{x^2}{2b} - \frac{1}{n}x + \frac{b}{2} - \left(1 - \frac{1}{n} \right) z & , nz \leq b \end{cases} \quad (2.4)$$

したがって期待総費用 $E\{C(B, z)\}$ はモデル (1) の場合と同様にして次式で与えられる。

$$\begin{aligned} E\{C(B, z)\} &= c \cdot (z-x) + h \left\{ \sum_{b=0}^{nx-1} \left[\left(1 - \frac{1}{n} \right) z + \frac{1}{n}x - \frac{b}{2} \right] \phi(b) \right. \\ &\quad + \sum_{b=nx}^{z-1} \left[\frac{x^2}{2b} + \left(1 - \frac{1}{n} \right) z - \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{n} \right)^2 \right) b \right] \phi(b) \\ &\quad + \sum_{b=z}^{nz-1} \left[\frac{x^2}{2b} + \frac{z^2}{2b} - \frac{1}{n}z + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \right)^2 b \right] \phi(b) \\ &\quad + \sum_{b=nz}^{\infty} \frac{x^2}{2b} \phi(b) \left. \right\} + p \left\{ \sum_{b=nx}^{z-1} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \right)^2 b + \frac{x^2}{2b} - \frac{1}{n}x \right] \phi(b) \right. \\ &\quad + \sum_{b=z}^{nz-1} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \right)^2 b + \frac{x^2}{2b} - \frac{1}{n}x + \frac{b}{2} - z + \frac{z^2}{2b} \right] \phi(b) \\ &\quad + \sum_{b=nz}^{\infty} \left[\frac{x^2}{2b} - \frac{1}{n}x + \frac{b}{2} - \left(1 - \frac{1}{n} \right) z \right] \phi(b) \left. \right\} \\ &= c \cdot (z-x) - p \left\{ \left(1 - \frac{1}{n} \right) z + \frac{1}{n}x - \frac{1}{2} \sum_{b=0}^{\infty} b \phi(b) \right\} \\ &\quad + (h+p) \left\{ \sum_{b=0}^{z-1} \left[\left(1 - \frac{1}{n} \right) z - \frac{b}{2} \right] \phi(b) + \frac{1}{n}x \sum_{b=0}^{nx-1} \phi(b) \right\} \\ &\quad + (h+p) \left\{ \frac{x^2}{2} \sum_{b=nx}^{\infty} \frac{\phi(b)}{b} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \right)^2 \sum_{b=nx}^{nz-1} b \phi(b) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{b=z}^{nz-1} \left(\frac{z^2}{2b} - \frac{1}{n}z \right) \phi(b) \right\} , \quad z \geq 1 \\ &= \frac{p}{2} \sum_{b=0}^{\infty} b \phi(b) , \quad z = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

(2.5) は $nx < z$ の場合について、(2.1)、(2.2) を用いて計算した式であるが、 $nx \geq z$ の場合について (2.3)、(2.4) を用いて計算しても同じ (2.5) を得る。

$n = \infty$, $n = 1$ の場合は (2.5) は簡単な式になる。

$$\begin{aligned} E\{C(B, z)\} &= c \cdot (z-x) - p \left\{ z - \frac{1}{2} \sum_{b=0}^{\infty} b \phi(b) \right\} \\ &\quad + (h+p) \left\{ \sum_{b=0}^{z-1} \left(z - \frac{b}{2} \right) \phi(b) + \sum_{b=z}^{\infty} \frac{z^2}{2b} \phi(b) \right\} \quad n = \infty , \quad z \geq 1 \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} E\{C(B, z)\} &= c \cdot (z-x) - p \left\{ x - \frac{1}{2} \sum_{b=0}^{\infty} b \phi(b) \right\} \\ &\quad + (h+p) \left\{ \sum_{b=0}^{x-1} \left(x - \frac{b}{2} \right) \phi(b) + \frac{x^2}{2} \sum_{b=x}^{\infty} \frac{\phi(b)}{b} \right\} \quad n = 1 , \quad z \geq 1 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$E\{C(B, z)\}$ を最小にする z の値 z^* および最小値を求めるために, $E\{C(B, z)\}$ の差分を計算しておく

$$\begin{aligned} \Delta E\{C(B, z)\} &= E\{C(B, z+1)\} - E\{C(B, z)\} \\ &= c - \left(1 - \frac{1}{n}\right)p + (h+p) \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right)\phi(0) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sum_{b=0}^{n-1} b\phi(b) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{b=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2b} - \frac{1}{n}\right)\phi(b) \right\}, \quad z = 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} &= c - \left(1 - \frac{1}{n}\right)p + (h+p) \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sum_{b=0}^{z-1} \phi(b) - \frac{\phi(z)}{2z} + \sum_{b=z}^{nz-1} \left(\frac{2z+1}{2b} - \frac{1}{n}\right)\phi(b) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{b=nz}^{n(z+1)-1} \left[\frac{\left(z+1-\frac{b}{n}\right)^2}{2b}\right]\phi(b) \right\}, \quad z \geq 1 \end{aligned} \tag{2.9}$$

(2.8), (2.9) を $n = \infty (t_0 = 0)$, $n = 1 (t_0 = t)$, $n \geq 2 (0 < t_0 < t)$ の場合について計算すると,

i) $n = \infty (t_0 = 0)$

$$\Delta E\{C(B, z)\} = c - p + (h+p) \left\{ \sum_{b=0}^z \phi(b) + \sum_{b=z+1}^{\infty} \frac{(2z+1)}{2b} \phi(b) \right\}, \quad z \geq 0 \tag{2.10}$$

ii) $n = 1 (t_0 = t)$

$$\Delta E\{C(B, z)\} = c, \quad z \geq 0 \tag{2.11}$$

iii) $n \geq 2 (0 < t_0 < t)$

$$\Delta E\{C(B, z)\} = (2.8), \quad z = 0$$

$$\begin{aligned} &= c - \left(1 - \frac{1}{n}\right)p + (h+p) \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right)\phi(0) - \frac{\phi(1)}{2} + \sum_{b=1}^{n-1} \left(\frac{3}{2b} - \frac{1}{n}\right)\phi(b) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{b=n}^{2n-1} \left[\frac{\left(2-\frac{b}{n}\right)^2}{2b}\right]\phi(b) \right\}, \quad z = 1 \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} &= c - \left(1 - \frac{1}{n}\right)p + (h+p) \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sum_{b=0}^z \phi(b) + \sum_{b=z+1}^{nz-1} \left(\frac{2z+1}{2b} - \frac{1}{n}\right)\phi(b) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{b=nz}^{n(z+1)-1} \left[\frac{\left(z+1-\frac{b}{n}\right)^2}{2b}\right]\phi(b) \right\}, \quad z \geq 2 \end{aligned} \tag{2.13}$$

また, (2.10)~(2.11) より,

$$\begin{aligned} \Delta^2 E\{C(B, z)\} &= \Delta E\{C(B, z+1)\} - \Delta E\{C(B, z)\} \\ &= (h+p) \left\{ \frac{\phi(z+1)}{2(z+1)} + \sum_{b=z+2}^{\infty} \frac{\phi(b)}{b} \right\}, \quad z \geq 0, \quad n = \infty \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$= 0, \quad z \geq 0, \quad n = 1 \tag{2.15}$$

$n \geq 2$ に対しては, (2.8), (2.12), (2.13) より

$$\begin{aligned} \Delta^2 E\{C(z, B)\} &= (h+p) \left\{ -\frac{\phi(1)}{2} + \sum_{b=1}^{n-1} \left[\frac{1}{b} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 b\right]\phi(b) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{b=n}^{2n-1} \left[\frac{\left(2-\frac{b}{n}\right)^2}{2b}\right]\phi(b) \right\}, \quad z = 0, \quad n \geq 2 \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$= (h+p) \left\{ \frac{3}{8} \phi(1) + \sum_{b=2}^3 \left(\frac{b}{8} + \frac{2}{b} - 1 \right) \phi(b) \right\}, \quad n=2, \quad z=0 \quad (2.17)$$

$$= (h+p) \left\{ \frac{3}{8} \phi(1) + \sum_{b=2}^{n-1} \left[\frac{2 - \left(\frac{b}{n}\right)^2}{2b} \right] \phi(b) + \sum_{b=n}^{2n-1} \left[\frac{\left(2 - \frac{b}{n}\right)^2}{2b} \right] \phi(b) \right\},$$

$$n > 2, \quad z=0 \quad (2.18)$$

$$= (h+p) \left\{ -\frac{1}{4} \phi(2) + \sum_{b=2}^{n-1} \frac{\phi(b)}{b} + \sum_{b=n}^{2n-1} \left[\frac{2 - \left(1 - \frac{b}{n}\right)^2}{2b} \right] \phi(b) \right. \\ \left. + \sum_{b=2n}^{3n-1} \left[\frac{\left(3 - \frac{b}{n}\right)^2}{2b} \right] \phi(b) \right\}, \quad n \geq 2, \quad z=1$$

$$= (h+p) \left\{ \frac{1}{4} \phi(2) + \frac{7}{24} \phi(3) + \sum_{b=4}^5 \left[\frac{\left(3 - \frac{b}{2}\right)^2}{2b} \right] \phi(b) \right\}, \quad n=2, \quad z=1 \quad (2.19)$$

$$= (h+p) \left\{ \frac{1}{4} \phi(2) + \sum_{b=3}^{n-1} \frac{\phi(b)}{b} + \sum_{b=n}^{2n-1} \left[\frac{2 - \left(1 - \frac{b}{n}\right)^2}{2b} \right] \phi(b) \right. \\ \left. + \sum_{b=2n}^{3n-1} \left[\frac{\left(3 - \frac{b}{n}\right)^2}{2b} \right] \phi(b) \right\}, \quad n \geq 3, \quad z=1 \quad (2.20)$$

$$= (h+p) \left\{ -\frac{\phi(z+1)}{2(z+1)} + \sum_{b=z+1}^{nz-1} \frac{\phi(b)}{b} + \sum_{b=nz}^{n(z+1)-1} \left[\frac{2 - \left(z - \frac{b}{n}\right)^2}{2b} \right] \phi(b) \right. \\ \left. + \sum_{b=n(z+1)}^{n(z+2)-1} \left[\frac{\left(z+2 - \frac{b}{n}\right)^2}{2b} \right] \phi(b) \right\}, \quad n \geq 2, \quad z \geq 2 \quad (2.21)$$

次に $\Delta^2 E\{C(B, z)\} \geq 0$ を示しておこう。

補題 1 $\Delta^2 E\{C(B, z)\} \geq 0$ である。

証明

(i) $n = \infty$ の場合

(2.14) より明らか

(ii) $n = 1$ の場合

(2.15) より明らか

(iii) $n \geq 2$ の場合

$b = nz + j$ ($j = 0, 1, \dots, n-1$) とおき, (2.21) の $\{ \}$ の中の第 3 項を計算すると,

$$\frac{2 - \left(z - \frac{nz+j}{n}\right)^2}{2(nz+j)} = \frac{2 - \left(\frac{j}{n}\right)^2}{2(nz+j)} > 0 \quad (\because 0 \leq \frac{j}{n} < 1) \quad (2.22)$$

より

$$\sum_{b=nz}^{n(z+1)-1} \left[\frac{2 - \left(\frac{z-b}{n} \right)^2}{2b} \right] \phi(b) = \sum_{j=0}^{n-1} \left[\frac{2 - \left(\frac{j}{n} \right)^2}{2(nz+j)} \right] \phi(nz+j) \geq 0 \quad (2.23)$$

また、{ } の第1項と第2項の和は $n \geq 2, z \geq 2$ より

$$\frac{\phi(z+1)}{2(z+1)} + \sum_{b=z+2}^{nz+1} \frac{\phi(b)}{b} \geq 0$$

となる。よって (2.23) より (2.21) は非負となる。(2.22), (2.23) より (2.17), (2.18), (2.19), (2.20) は非負となる。よって証明された。

補題1より $E\{C(B, z)\}$ を最小にする z^* は

$$\left. \begin{aligned} E\{C(B, z+1)\} &\geq E\{C(B, z)\} \\ E\{C(B, z-1)\} &\geq E\{C(B, z)\} \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

をみたす z の値である。この z^* は (2.13)⁴⁾ より

$$q = \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)p - c}{h + p}$$

$$M\left(z, \frac{1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sum_{b=0}^z \phi(b) + \sum_{b=nz}^{n(z+1)-1} \left[\frac{\left(z - \frac{b}{n}\right)^2}{2b} \right] \phi(b) + \sum_{b=z+1}^{n(z+1)-1} \left(\frac{2z+1}{2b} - \frac{1}{n} \right) \phi(b)$$

とおけば、

$$M\left(z^*, \frac{1}{n}\right) \geq q \geq M\left(z^*-1, \frac{1}{n}\right), \quad \left(1 - \frac{1}{n}\right)p > c \quad (2.25)$$

をみたさなければならない。

また、(2.25) が成立すれば $\Delta E\{C(B, 0)\} < 0, \lim_{z \rightarrow \infty} \Delta E\{C(B, z)\} > 0$ も成立する。

したがって、次の定理を得る。

定理2 最適発注政策は $\left(1 - \frac{1}{n}\right)p > c$ のとき

$x < z^*$ ならば 発注量 = $z^* - x$

$x \geq z^*$ ならば 発注量 = 0

である。ここに z^* は (2.25) の根である。

$n = 1$ のとき $\left(1 - \frac{1}{n}\right)p > c$ は成立しない。このとき $\Delta E\{C(B, z)\} > 0$ ((2.11) を参照) となり、 $E\{C(B, z)\}$ は z の狭義増加関数となり発注しないことが最適である。

$\left(1 - \frac{1}{n}\right)p \leq c$ のときは、

$$\sum_{b=z+1}^{nz-1} \left(\frac{2z+1}{2b} - \frac{1}{n} \right) \phi(b) = \sum_{j=1}^{(n-1)z-1} \left(\frac{2z+1}{z+j} - \frac{1}{n} \right) \phi(z+j)$$

4) (2.13) は $n = \infty$ の場合にも成立する

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=1}^{(n-1)z-1} \frac{\left[2z+1-\frac{1}{n}(z+j)\right]}{z+j} \phi(z+j) \\
 &\geq \sum_{j=1}^{(n-1)z-1} \frac{\left[2z+1-\frac{1}{n}(nz-1)\right]}{z+j} \phi(z+j) \\
 &= \sum_{j=1}^{(n-1)z-1} \frac{\left(z+1+\frac{1}{n}\right)}{z+j} \phi(z+j) \geq 0, \tag{2.26}
 \end{aligned}$$

($\because (z+j)/n$ は j の狭義増加関数であるから、 j が最大値 $(n-1)z-1$ のとき、最大となる。 $(z+j)/n < (nz-1)/n = z-1/n < 2z+1$) となるから、(2.13) より $\Delta E\{C(B, z)\} \geq 0$ となり、 $E\{C(B, z)\}$ は z の非減少関数となり、発注しないことが最適となる。

$n = \infty$ とおくと、論文 [9] の単純な特定モデル (2) に一致する。

注 3 $n = \infty, n = 1$ の場合の重要な式を列記する。対応する式にそれぞれ*および**を付記する。

$$I_1(b, z)^* = \begin{cases} z - \frac{b}{2} & , 0 \leq b < z \\ \frac{z^2}{2b} & , z \leq b \end{cases} \tag{2.3}^*$$

$$I_2(b, z)^* = \begin{cases} 0 & , 0 \leq b < z \\ \frac{(b-z)^2}{2b} & , z \leq b \end{cases} \tag{2.4}^*$$

この場合 $nx < z$ の場合は起こらない。

$$I_1(b, z)^{**} = \begin{cases} x - \frac{b}{2} & , 0 \leq b < x \\ \frac{x^2}{2b} & , x \leq b \end{cases} \tag{2.1}^{**}$$

$$I_2(b, z)^{**} = \begin{cases} 0 & , 0 \leq b < x \\ \frac{(b-x)^2}{2b} & , x \leq b \end{cases} \tag{2.2}^{**}$$

この場合 $nx \geq z$ の場合は起らない。

3. 需要形態の一般モデル

1における需要形態は、突発需要でそれが期首に発生する例になっており、2のそれは期を通じて一様に発生する場合である。そこでこれらを特殊な場合として含む一般的かつ総合的な需要形態を表すモデルとして、考察期間 t における需要量 B の実現値 b が与えられたとき、期における需要の発生は

$$g\left(b, \frac{T}{t}\right), \quad 0 \leq T \leq t \tag{3.1}$$

にしたがうものとする。ここに $g(b, x)$ は $g(b, 0) = 0, g(0, x) = 0, g(b, 1) = b$ となる $\partial g(b, x)/\partial x$

> 0 なる b の狭義増加関数である ($0 \leq x \leq 1$)。

需要量 B の実現値が b のとき、期平均在庫量 および期平均在庫不足量をそれぞれ $I_1(b, z)$, $I_2(b, z)$ とおくと次式で与えられる⁵⁾。

$g_*^{-1}(x, 1/n) < z$ の場合

$$I_1(b, z) = \begin{cases} \frac{1}{n}x + \left(1 - \frac{1}{n}\right)z - G(b, 1) & 0 \leq b < g_*^{-1}(x, 1/n) \\ g^{-1}(b, x)x - G(b, g^{-1}(b, x)) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)z - G(b, 1) + G\left(b, \frac{1}{n}\right) & g_*^{-1}(x, 1/n) \leq b < z \\ g^{-1}(b, x)x - G(b, g^{-1}(b, x)) + \left(g^{-1}(b, z) - \frac{1}{n}\right)z - G(b, g^{-1}(b, z)) + G\left(b, \frac{1}{n}\right) & z \leq b < g_*^{-1}(z, 1/n) \\ g^{-1}(b, x)x - G(b, g^{-1}(b, x)) & g_*^{-1}(z, 1/n) \leq b \end{cases} \quad (3.1)$$

$$I_2(b, x) = \begin{cases} 0 & 0 < b < g_*^{-1}(x, 1/n) \\ G\left(b, \frac{1}{n}\right) - G(b, g^{-1}(b, x)) + \left(g^{-1}(b, x) - \frac{1}{n}\right)x & g_*^{-1}(x, 1/n) \leq b < z \\ G\left(b, \frac{1}{n}\right) - G(b, g^{-1}(b, x)) + \left(g^{-1}(b, x) - \frac{1}{n}\right)x & + G(b, 1) - G(b, g^{-1}(b, z)) + (g^{-1}(b, z) - 1)z & z \leq b < g_*^{-1}(z, 1/n) \\ \left(g^{-1}(b, x) - \frac{1}{n}\right)x - G(b, g^{-1}(b, x)) + G(b, 1) - \left(1 - \frac{1}{n}\right)z & g_*^{-1}(z, 1/n) \leq b \end{cases} \quad (3.2)$$

ここに

$$G(b, x) = \int_0^x g(b, y) dy \quad (3.3)$$

$x = g(b, T/t)$ となる T/t の値を $g^{-1}(b, x)$, $z = g(b, T/t)$ となる T/t の値を $g^{-1}(b, z)$, $x = g(b, 1/n)$ となる b を $g_*^{-1}(x, 1/n)$, $z = g(b, 1/n)$ となる b を $g_*^{-1}(z, 1/n)$ とおくこのような値が存在することは $g(b, T/t)$ に関する仮定から明らかである。ただし、 $n = \infty$ の場合は $g_*^{-1}(x, 0) = g_*^{-1}(z, 0) = \infty$ とする。 $g_*^{-1}(\cdot, 1/n)$ は $[g_*^{-1}(\cdot, 1/n)]$ の意味であるが、 $[]$ は省略する。

$g_*^{-1}(x, 1/n) \geq z$ の場合

$$I_1(b, z) = \begin{cases} \frac{1}{n}x + \left(1 - \frac{1}{n}\right)z - G(b, 1) & 0 \leq b < z \\ \frac{1}{n}x + \left(g^{-1}(b, z) - \frac{1}{n}\right)z - G(b, g^{-1}(b, z)) & z \leq b < g_*^{-1}(x, 1/n) \\ g^{-1}(b, x)x - G(b, g^{-1}(b, x)) + \left(g^{-1}(b, z) - \frac{1}{n}\right)z & - G(b, g^{-1}(b, z)) + G\left(b, \frac{1}{n}\right) & g_*^{-1}(x, 1/n) \leq b < g_*^{-1}(z, 1/n) \\ g^{-1}(b, x)x - G(b, g^{-1}(b, x)) & g_*^{-1}(z, 1/n) \leq b \end{cases} \quad (3.4)$$

5) 児玉正憲 [18]

$$I_2(b, z) = \begin{cases} 0 & 0 \leq b < z \\ (g^{-1}(b, z) - 1)z + G(b, 1) - G(b, g^{-1}(b, z)) & z \leq b < g_*^{-1}(x, 1/n) \\ G\left(b, \frac{1}{n}\right) - G(b, g^{-1}(b, x)) + \left(g^{-1}(b, x) - \frac{1}{n}\right)x + G(b, 1) - G(b, g^{-1}(b, z)) & (3.5) \\ \quad + (g^{-1}(b, z) - 1)z & g_*^{-1}(x, 1/n) \leq b < g_*^{-1}(z, 1/n) \\ \left(g^{-1}(b, x) - \frac{1}{n}\right)x - G(b, g^{-1}(b, x)) + G(b, 1) - \left(1 - \frac{1}{n}\right)z & g_*^{-1}(z, 1/n) \leq b \end{cases}$$

したがって、期待総費用 $E\{C(B, z)\}$ はモデル (1) の場合と同様にして次式で与えられる。

$g_*^{-1}(x, 1/n) < z$ の場合

$$\begin{aligned} E\{C(B, z)\} &= c \cdot (z - x) + h \left\{ \sum_{b=0}^{g_*^{-1}(x, \frac{1}{n})-1} \left[\frac{1}{n}x + \left(1 - \frac{1}{n}\right)z - G(b, 1) \right] \phi(b) \right. \\ &\quad + \sum_{b=g_*^{-1}(x, \frac{1}{n})}^{z-1} \left[g^{-1}(b, x)x - G(b, g^{-1}(b, x)) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)z - G(b, 1) + G\left(b, \frac{1}{n}\right) \right] \phi(b) \\ &\quad + \sum_{b=z}^{g_*^{-1}(z, \frac{1}{n})-1} \left[g^{-1}(b, x)x - G(b, g^{-1}(b, x)) + \left(g^{-1}(b, z) - \frac{1}{n}\right)z - G(b, g^{-1}(b, z)) \right. \\ &\quad \left. + G\left(b, \frac{1}{n}\right) \right] \phi(b) + \sum_{b=g_*^{-1}(z, \frac{1}{n})}^{\infty} \left[g^{-1}(b, x)x - G(b, g^{-1}(b, x)) \right] \phi(b) \left. \right\} \\ &\quad + p \left\{ \sum_{b=g_*^{-1}(x, \frac{1}{n})}^{z-1} \left[G\left(b, \frac{1}{n}\right) - G(b, g^{-1}(b, x)) - \left(\frac{1}{n} - g^{-1}(b, x)\right)x \right] \phi(b) \right. \\ &\quad + \sum_{b=z}^{g_*^{-1}(z, \frac{1}{n})-1} \left[G\left(b, \frac{1}{n}\right) - G(b, g^{-1}(b, x)) + \left(g^{-1}(b, x) - \frac{1}{n}\right)x \right. \\ &\quad \left. + G(b, 1) - G(b, g^{-1}(b, z)) + \left(g^{-1}(b, z) - 1\right)z \right] \phi(b) \\ &\quad \left. + \sum_{b=g_*^{-1}(z, \frac{1}{n})}^{\infty} \left[\left(g^{-1}(b, x) - \frac{1}{n}\right)x - G(b, g^{-1}(b, x)) + G(b, 1) - \left(1 - \frac{1}{n}\right)z \right] \phi(b) \right\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} &= c \cdot (z - x) - p \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right)z + \frac{1}{n}x - \sum_{b=0}^{\infty} G(b, 1) \phi(b) \right\} \\ &\quad + (h + p) \left\{ \sum_{b=0}^{z-1} \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right) - G(b, 1) \right] \phi(b) + \frac{1}{n}x \sum_{b=0}^{g_*^{-1}(x, \frac{1}{n})-1} \phi(b) \right\} \\ &\quad + (h + p) \left\{ \sum_{b=g_*^{-1}(x, \frac{1}{n})}^{\infty} \left[g^{-1}(b, x)x - G(b, g^{-1}(b, x)) \right] \phi(b) + \sum_{b=g_*^{-1}(x, \frac{1}{n})}^{g_*^{-1}(z, \frac{1}{n})-1} G\left(b, \frac{1}{n}\right) \phi(b) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{b=z}^{g_*^{-1}(z, \frac{1}{n})-1} \left[\left(g^{-1}(b, z) - \frac{1}{n}\right)z - G(b, g^{-1}(b, z)) \right] \phi(b) \right\} \end{aligned} \quad (3.7)$$

$n = \infty$, $n = 1$ の場合は (3.7) は簡単な式になる。

$$\begin{aligned} E\{C(B, z)\} &= c \cdot (z - x) - p \left\{ z - \sum_{b=0}^{\infty} G(b, 1) \phi(b) \right\} + (h + p) \sum_{b=0}^{z-1} \{z - G(b, 1)\} \phi(b) \\ &\quad + (h + p) \sum_{b=z}^{\infty} \left\{ \left(g^{-1}(b, z) - \frac{1}{n}\right)z - G(b, g^{-1}(b, z)) \right\} \phi(b), \quad n = \infty, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned}
 E\{C(B, z)\} &= c \cdot (z-x) - p \left\{ x - \sum_{b=0}^{\infty} G(b, 1) \phi(b) \right\} \\
 &\quad + (h+p) \left\{ \sum_{b=0}^{x-1} [x - G(b, 1)] \phi(b) + \sum_{b=x}^{\infty} [g^{-1}(b, x)x - G(b, g^{-1}(b, x))] \phi(b) \right\}, \\
 n &= 1,
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

(\because 定義より, $g_*^{-1}(x, 1) = x$, $g_*^{-1}(z, 1) = z$)

$g_*^{-1}(x, 1/n) \geq z$ の場合

$$\begin{aligned}
 E\{C(B, z)\} &= c \cdot (z-x) + h \left\{ \sum_{b=0}^{z-1} \left[\frac{1}{n}x + \left(1 - \frac{1}{n}\right)z - G(b, 1) \right] \phi(b) \right. \\
 &\quad + \sum_{b=z}^{g_*^{-1}(x, \frac{1}{n})-1} \left[\frac{1}{n}x + \left(g^{-1}(b, z) - \frac{1}{n}\right)z - G(b, g^{-1}(b, z)) \right] \phi(b) \\
 &\quad + \sum_{b=g_*^{-1}(x, \frac{1}{n})}^{g_*^{-1}(z, \frac{1}{n})-1} \left[g^{-1}(b, x)x - G(b, g^{-1}(b, x)) + \left(g^{-1}(b, z) - \frac{1}{n}\right)z - G(b, g^{-1}(b, z)) \right. \\
 &\quad \left. + G\left(b, \frac{1}{n}\right) \right] \phi(b) \\
 &\quad + \sum_{b=g_*^{-1}(z, \frac{1}{n})}^{\infty} [g^{-1}(b, x)x - G(b, g^{-1}(b, x))] \phi(b) \left. \right\} \\
 &\quad + p \left\{ \sum_{b=z}^{g_*^{-1}(x, \frac{1}{n})-1} [(g^{-1}(b, z) - 1)z + G(b, 1) - G(b, g^{-1}(b, z))] \phi(b) \right. \\
 &\quad + \sum_{b=g_*^{-1}(x, \frac{1}{n})}^{g_*^{-1}(z, \frac{1}{n})-1} \left[G\left(b, \frac{1}{n}\right) - G(b, g^{-1}(b, x)) + \left(g^{-1}(b, x) - \frac{1}{n}\right)x \right. \\
 &\quad \left. + G(b, 1) - G(b, g^{-1}(b, z)) + (g^{-1}(b, z) - 1)z \right] \phi(b) \\
 &\quad \left. + \sum_{b=g_*^{-1}(z, \frac{1}{n})}^{\infty} \left[\left(g^{-1}(b, x) - \frac{1}{n}\right)x - G(b, g^{-1}(b, x)) + G(b, 1) - \left(1 - \frac{1}{n}\right)z \right] \phi(b) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

この式は変形すると (3.7) と同値となる。

$E\{C(B, z)\}$ を最小にする z の値 z^* および最小値を求めるために, $E\{C(B, z)\}$ の差分を計算しておく

$$\begin{aligned}
 \Delta E\{C(B, z)\} &= E\{C(B, z+1)\} - E\{C(B, z)\} \\
 &= c - \left(1 - \frac{1}{n}\right)p + (h+p) \left\{ \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)z - G(z, 1) \right] \phi(z) + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sum_{b=0}^z \phi(b) \right. \\
 &\quad + \sum_{b=g_*^{-1}(z, \frac{1}{n})}^{g_*^{-1}(z+1, \frac{1}{n})-1} G\left(b, \frac{1}{n}\right) \phi(b) \\
 &\quad + \sum_{b=z+1}^{g_*^{-1}(z+1, \frac{1}{n})-1} \left[\left(g^{-1}(b, z+1) - \frac{1}{n}\right)(z+1) - G(b, g^{-1}(b, z+1)) \right] \phi(b) \\
 &\quad \left. - \sum_{b=z}^{g_*^{-1}(z, \frac{1}{n})-1} \left[\left(g^{-1}(b, z) - \frac{1}{n}\right)z - G(b, g^{-1}(b, z)) \right] \phi(b) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

(3.11) を $n = \infty$, $n = 1$, $n \geq 2$ の場合について計算すると,

$$\Delta E\{C(B, z)\} = c - p + (h+p) \left\{ \sum_{b=0}^z \phi(b) + \sum_{b=z+1}^{\infty} \{(z+1)g^{-1}(b, z+1) - G(b, g^{-1}(b, z+1))\} \right\}$$

$$-[zg^{-1}(b, z) - G(b, g^{-1}(b, z))] \phi(b) \}, \quad n = \infty, \quad (3.12)$$

$$\Delta E\{C(B, z)\} = c, \quad n = 1, \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \Delta E\{C(B, z)\} &= c - \left(1 - \frac{1}{n}\right)p + (h+p) \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sum_{b=0}^z \phi(b) + \sum_{b=z+1}^{g_*^{-1}(z+1, \frac{1}{n})-1} \left[G - \left(b, \frac{1}{n}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(g^{-1}(b, z+1) - \frac{1}{n}\right)(z+1) - G(b, g^{-1}(b, z+1)) \right] \phi(b) \right\}, \\ &\quad g_*^{-1}(z, 1/n) = z+1, \quad n \geq 2, \quad (3.14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= c - \left(1 - \frac{1}{n}\right)p + (h+p) \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sum_{b=0}^z \phi(b) \right. \\ &\quad + \sum_{b=g_*^{-1}(z, \frac{1}{n})}^{g_*^{-1}(z+1, \frac{1}{n})-1} \left[G\left(b, \frac{1}{n}\right) + \left(g^{-1}(b, z+1) - \frac{1}{n}\right)(z+1) - G(b, g^{-1}(b, z+1)) \right] \phi(b) \\ &\quad + \sum_{b=z+1}^{g_*^{-1}(z, \frac{1}{n})-1} \left[(z+1)g^{-1}(b, z+1) - G(b, g^{-1}(b, z+1)) \right. \\ &\quad \left. \left. - (zg^{-1}(b, z) - G(b, g^{-1}(b, z))) - \frac{1}{n} \right] \phi(b) \right\} \\ &\quad g_*^{-1}(z, 1/n) > z+1, \quad n \geq 2, \quad (3.15) \end{aligned}$$

となる。 $g_*^{-1}(z, 1/n) = z+1$ のときは (3.15) の $\{ \}$ の中の第3項は0となるので, (3.15) は $g_*^{-1}(z, 1/n) \geq z+1$ で成立している。 $n = \infty$ のときは, $g_*^{-1}(z, 1/n) = g_*^{-1}(z+1, 1/n) = \infty$ となり (3.15) の $\{ \}$ の中の第2項はなくなるので, (3.15) は $n = \infty$ で成立する。

$$\begin{aligned} \Delta^2 E\{C(B, z)\} &= \Delta E\{C(B, z+1)\} - \Delta E\{C(B, z)\} \\ &= 0, \quad n = 1 \quad (3.16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (h+p) \left\{ G(1, 1)\phi(1) + \sum_{b=g_*^{-1}(1, \frac{1}{n})}^{g_*^{-1}(2, \frac{1}{n})-1} \left[G\left(b, \frac{1}{n}\right) + 2\left(g^{-1}(b, 2) - \frac{1}{n}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - G(b, g^{-1}(b, 2)) \right] \phi(b) + \sum_{b=2}^{g_*^{-1}(1, \frac{1}{n})-1} \left[2(g^{-1}(b, 2) - g^{-1}(b, 1)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2G(b, g^{-1}(b, 1)) - G(b, g^{-1}(b, 2)) - G\left(b, \frac{1}{n}\right) \right] \phi(b) \right\}, \quad z=0, \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (h+p) \{ [G(z+1, 1) - z + [zg^{-1}(z+1, z) - G(z+1, g^{-1}(z+1, z))]] \phi(z+1) \\ &\quad + \sum_{b=z+2}^{\infty} \{ [(z+2)g^{-1}(b, z+2) - G(b, g^{-1}(b, z+2))] \\ &\quad - 2[(z+1)g^{-1}(b, z+1) - G(b, g^{-1}(b, z+1))] \\ &\quad + [zg^{-1}(b, z) - G(b, g^{-1}(b, z))] \phi(b) \}, \quad n = \infty \quad (3.17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (h+p) \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right) \phi(z+1) + \sum_{b=g_*^{-1}(z+1, \frac{1}{n})}^{g_*^{-1}(z+2, \frac{1}{n})-1} \left[G\left(b, \frac{1}{n}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(g^{-1}(b, z+2) - \frac{1}{n}\right)(z+2) - G(b, g^{-1}(b, z+2)) \right] \phi(b) \right. \\ &\quad + \sum_{b=z+2}^{g_*^{-1}(z, \frac{1}{n})-1} \left[(z+2)g^{-1}(b, z+2) - \frac{1}{n} - (z+1)g^{-1}(b, z+1) \right. \\ &\quad \left. \left. + G(b, g^{-1}(b, z+1)) - G(b, g^{-1}(b, z+2)) \right] \phi(b) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{b=g_*^{-1}(z, \frac{1}{n})}^{g_*^{-1}(z+1, \frac{1}{n})-1} \left[(z+2)g^{-1}(b, z+2) - \frac{1}{n} - (z+1)g^{-1}(b, z+1) \right. \\
 & \left. + G(b, g^{-1}(b, z+1)) - G(b, g^{-1}(b, z+2)) \right] \phi(b) \\
 & - \sum_{b=g_*^{-1}(z, \frac{1}{n})}^{g_*^{-1}(z+1, \frac{1}{n})-1} \left[G\left(b, \frac{1}{n}\right) + \left(g^{-1}(b, z+1) - \frac{1}{n}\right)(z+1) - G(b, g^{-1}(b, z+1)) \right] \phi(b) \\
 & - \sum_{b=z+2}^{g_*^{-1}(z, \frac{1}{n})-1} \left[(z+1)g^{-1}(b, z+1) - \frac{1}{n} - zg^{-1}(b, z) \right. \\
 & \left. + G(b, g^{-1}(b, z)) - G(b, g^{-1}(b, z+1)) \right] \phi(b) \\
 & - \left[z\left(\frac{1}{n} - g^{-1}(z+1, z)\right) + G(z+1, g^{-1}(z+1, z)) \right. \\
 & \left. + \left(1 - \frac{1}{n}\right)(z+1) - G(z+1, 1) \right] \phi(z+1) \} \\
 = & (h+p) \left\{ [z(g^{-1}(z+1, z) - 1) + G(z+1, 1) - G(z+1, g^{-1}(z+1, z))] \phi(z+1) \right. \\
 & + \sum_{b=z+2}^{g_*^{-1}(z, \frac{1}{n})-1} [(z+2)g^{-1}(b, z+2) - 2(z+1)g^{-1}(b, z+1) + zg^{-1}(b, z) \\
 & - G(b, g^{-1}(b, z)) + 2G(b, g^{-1}(b, z+1)) - G(b, g^{-1}(b, z+2))] \phi(b) \\
 & + \sum_{b=g_*^{-1}(z+1, \frac{1}{n})}^{g_*^{-1}(z+2, \frac{1}{n})-1} \left[G\left(b, \frac{1}{n}\right) + (z+2)g^{-1}(b, z+2) \right. \\
 & \left. - G(b, g^{-1}(b, z+2)) - \frac{(z+2)}{n} \right] \phi(b) \\
 & - \sum_{b=g_*^{-1}(z, \frac{1}{n})}^{g_*^{-1}(z+1, \frac{1}{n})-1} \left[(z+2)g^{-1}(b, z+2) - 2(z+1)g^{-1}(b, z+1) \right. \\
 & \left. - G\left(b, \frac{1}{n}\right) + 2G(b, g^{-1}(b, z+1)) - G(b, g^{-1}(b, z+2)) + \frac{z}{n} \right] \phi(b) \} \\
 & n \geq 2 \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

(3.18) は $n = \infty$ のときは, $g_*^{-1}(z, 1/n) = g_*(z+1, 1/n) = g_*^{-1}(z+2, 1/n) = \infty$ となるので, (3.18) は $n = \infty$ で成立している。

(3.18) で一様需要を仮定すると,

$$\begin{aligned}
 g(b, x) &= bx, \quad G(b, y) = \frac{by^2}{2}, \quad g^{-1}(b, z) = \frac{z}{b}, \\
 G(b, g^{-1}(b, z)) &= \frac{b}{2} \left(\frac{z}{b}\right)^2 = \frac{z^2}{2b}, \quad G\left(b, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 b
 \end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned}
 & [z(g^{-1}(z+1, z) - 1) + G(z+1, 1) - G(z+1, g^{-1}(z+1, z))] \phi(z+1) = \frac{\phi(z+1)}{2(z+1)} \\
 & [(z+2)g^{-1}(b, z+2) - 2(z+1)g^{-1}(b, z+1) + zg^{-1}(b, z) - G(b, g^{-1}(b, z)) \\
 & + 2G(b, g^{-1}(b, z+1)) - G(b, g^{-1}(b, z+2))] \phi(b) = \frac{\phi(b)}{b}
 \end{aligned}$$

$$\left[G\left(b, \frac{1}{n}\right) + (z+2)g^{-1}(b, z+2) - G(b, g^{-1}(b, z+2)) - \frac{(z+2)}{n} \right] \phi(b)$$

$$= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 b + \frac{z^2 + 4z + 4}{2b} - \frac{(z+2)}{n} \right] \phi(b)$$

$$\left[(z+2)g^{-1}(b, z+2) - 2(z+1)g^{-1}(b, z+1) - G\left(b, \frac{1}{n}\right) \right.$$

$$\left. + 2G(b, g^{-1}(b, z+1)) - G(b, g^{-1}(b, z+2)) + \frac{z}{n} \right] \phi(b)$$

$$= - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 b + \frac{z^2 - 2}{2b} - \frac{z}{n} \right] \phi(b)$$

となり, (2.8) に一致する。

次に $\Delta^2 E\{C(B, z)\} \geq 0$ を示しておこう。

補題 2 $\Delta^2 E\{C(B, z)\} \geq 0$ である。

証明

(i) $n = \infty$ の場合の論文 [9] で証明した

(ii) $n = 1$ の場合

(3.16) より明らか

(iii) $n \geq 2$ の場合

($\phi(b) \geq 0$ であるから, (3.18) の各 [] が非負であることを示せば十分である。 $g(b, y)$ は y の狭義増加関数で, $g(b, g^{-1}(b, z)) = z$, $g^{-1}(z+1, z) < g^{-1}(z+1, z+1) = 1$ であるから,

$$\begin{aligned} & z[g^{-1}(z+1, z) - 1] + G(z+1, 1) - G(z+1, g^{-1}(z+1, z)) \\ &= z[g^{-1}(z+1, z) - 1] + \int_0^1 g(z+1, y) dy - \int_0^{g^{-1}(z+1, z)} g(z+1, y) dy \\ &= z[g^{-1}(z+1, z) - 1] + \int_{g^{-1}(z+1, z)}^1 g(z+1, y) dy \\ &= z[g^{-1}(z+1, z) - 1] + (1 - g^{-1}(z+1, z))g(z+1, \theta), \quad (g^{-1}(z+1, z) < \theta < 1) \\ &= (1 - g^{-1}(z+1, z))(g(z+1, \theta) - z) > 0 \end{aligned} \tag{3.19}$$

($\because z = g(z+1, g^{-1}(z+1, z)) < g(z+1, \theta)$)

ii) $g^{-1}(b, z) < g^{-1}(b, z+1) < g^{-1}(b, z+1)$ であるから

$$\begin{aligned} & (z+2)g^{-1}(b, z+2) - G(b, g^{-1}(b, z+2)) - 2[(z+1)g^{-1}(b, z+1) \\ & - G(b, g^{-1}(b, z+1))] + zg^{-1}(b, z) - G(b, g^{-1}(b, z)) \\ &= \int_0^{g^{-1}(b, z+2)} [z+2 - g(b, y)] dy - 2 \int_0^{g^{-1}(b, z+1)} [z+1 - g(b, y)] dy + \int_0^{g^{-1}(b, z)} [z - g(b, y)] dy \\ &= \left\{ \int_0^{g^{-1}(b, z+1)} [z+2 - g(b, y)] dy + \int_{g^{-1}(b, z+1)}^{g^{-1}(b, z+2)} [z+2 - g(b, y)] dy \right\} \\ & - \int_0^{g^{-1}(b, z+1)} (z+1 - g(b, y)) dy \\ & - \left\{ \int_0^{g^{-1}(b, z)} [z+1 - g(b, y)] dy + \int_{g^{-1}(b, z)}^{g^{-1}(b, z+1)} [z+1 - g(b, y)] dy \right\} + \int_0^{g^{-1}(b, z)} [z - g(b, y)] dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{g^{-1}(b,z+1)} dy - \int_0^{g^{-1}(b,z)} dy + \int_{g^{-1}(b,z+1)}^{g^{-1}(b,z+2)} [z+2-g(b,y)] dy - \int_{g^{-1}(b,z)}^{g^{-1}(b,z+1)} [z+1-g(b,y)] dy \\
 &= \int_{g^{-1}(b,z+1)}^{g^{-1}(b,z+2)} [z+2-g(b,y)] dy + \int_{g^{-1}(b,z)}^{g^{-1}(b,z+1)} [g(b,y)-z] dy > 0 \tag{3.20} \\
 (\because 1 &= z+2-g(b, g^{-1}(b, z+1)) > z+2-g(b, y) > z+2-g(b, g^{-1}(b, z+2)) = 0, \\
 0 &= g(b, g^{-1}(b, z)) - z < g(b, g^{-1}(b, z+1)) - z = 1)
 \end{aligned}$$

iii) $g_*^{-1}(\cdot, 1/n)$ の定義から, $g_*^{-1}(z+1, 1/n) \leq b < g_*^{-1}(z+2, 1/n)$ より $g^{-1}(b, z+1) \leq 1/n < g^{-1}(b, z+2)$ を得る。したがって,

$$\begin{aligned}
 &G\left(b, \frac{1}{n}\right) - \frac{(z+2)}{n} + (z+2)g^{-1}(b, z+2) - G(b, g^{-1}(b, z+2)) \\
 &= \int_0^{1/n} [g(b, y) - (z+2)] dy + \int_0^{g^{-1}(b,z+2)} [z+2-g(b, y)] dy \\
 &= \int_0^{1/n} [g(b, y) - (z+2)] dy + \int_0^{1/n} [z+2-g(b, y)] dy + \int_{1/n}^{g^{-1}(b,z+2)} [z+2-g(b, y)] dy \\
 &= \int_{1/n}^{g^{-1}(b,z+2)} [z+2-g(b, y)] dy > 0 \tag{3.21} \\
 (\because 0 &= z+2-g(b, g^{-1}(b, z+2)) < z+2-g(b, y) < z+2-g(b, 1/n))
 \end{aligned}$$

iv) $g_*^{-1}(z, 1/n) \leq b < g_*^{-1}(z+1, 1/n)$ より $g^{-1}(b, z) \leq 1/n < g^{-1}(b, z+1)$ また $g^{-1}(b, z+1) < g^{-1}(b, z+2)$, $g(g_*^{-1}(z, 1/n), 1/n) = z$ であるから

$$\begin{aligned}
 &(z+2)g^{-1}(b, z+2) - G(b, g^{-1}(b, z+2)) - 2[(z+1)g^{-1}(b, z+1) \\
 &\quad - G(b, g^{-1}(b, z+1))] + \frac{z}{n} - G\left(b, \frac{1}{n}\right) \\
 &= \int_0^{g^{-1}(b,z+2)} [z+2-g(b, y)] dy - 2 \int_0^{g^{-1}(b,z+1)} [z+1-g(b, y)] dy + \int_0^{1/n} [z-g(b, y)] dy \\
 &= \int_0^{g^{-1}(b,z+2)} [z+2-g(b, y)] dy - 2 \int_0^{g^{-1}(b,z+1)} [z+1-g(b, y)] dy \\
 &\quad + \int_0^{g^{-1}(b,z)} [z-g(b, y)] dy + \int_{g^{-1}(b,z)}^{1/n} [z-g(b, y)] dy \\
 &= \int_{g^{-1}(b,z+1)}^{g^{-1}(b,z+2)} [z+2-g(b, y)] dy + \int_{g^{-1}(b,z)}^{g^{-1}(b,z+1)} [g(b, y)-z] dy + \int_{g^{-1}(b,z)}^{1/n} [z-g(b, y)] dy \\
 &= \int_{g^{-1}(b,z+1)}^{g^{-1}(b,z+2)} [z+2-g(b, y)] dy + \int_{1/n}^{g^{-1}(b,z+1)} [g(b, y)-z] dy > 0 \tag{3.22} \\
 (\because 1 &= z+2-g(b, g^{-1}(b, z+1)) > z+2-g(b, y) > z+2-g(b, g^{-1}(b, z+2)) = 0, \\
 1 &= g(b, g(g^{-1}(b, z+1), 1/n)) - z > g(b, y) - z > g(b, 1/n) - z \geq g(g_*^{-1}(z, 1/n), 1/n) - z = 0)
 \end{aligned}$$

以上より補題は証明された。

補題2より $E\{C(B, z)\}$ を最小にする z の値 z^* は

$$\left. \begin{aligned}
 E\{C(B, z+1)\} &\geq E\{C(B, z)\} \\
 E\{C(B, z-1)\} &\geq E\{C(B, z)\}
 \end{aligned} \right\} \tag{3.23}$$

をまたす z の値である。この z^* は (3.12) より

$$q = \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)p - c}{h + p}$$

$$\begin{aligned} M\left(z, \frac{1}{n}\right) &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sum_{b=0}^z \phi(b) + \sum_{b=g_{*}^{-1}\left(z, \frac{1}{n}\right)}^{g_{*}^{-1}\left(z+1, \frac{1}{n}\right)-1} \left[G\left(b, \frac{1}{n}\right) + \left(g^{-1}(b, z+1) - \frac{1}{n}\right)(z+1) \right. \\ &\quad \left. - G(b, g^{-1}(b, z+1)) \right] \phi(b) + \sum_{b=z+1}^{g_{*}^{-1}\left(z, \frac{1}{n}\right)-1} \left[(z+1)g^{-1}(b, z+1) - G(b, g^{-1}(b, z+1)) \right. \\ &\quad \left. - (zg^{-1}(b, z) - G(b, g^{-1}(b, z))) - \frac{1}{n} \right] \phi(b) \end{aligned}$$

とおけば,

$$M\left(z^*, \frac{1}{n}\right) \geq q \geq M\left(z^*-1, \frac{1}{n}\right), \quad \left(1 - \frac{1}{n}\right)p > c \quad (3.24)$$

をみたさなければならない。

また, (3.24) が成立すれば $\Delta E\{C(B, 0)\} < 0$, $\lim_{z \rightarrow \infty} \Delta E\{C(B, z)\} > 0$ も成立する。

したがって, 次の定理を得る。

定理 3 最適発注政策は $\left(1 - \frac{1}{n}\right)p > c$ のとき

$x < z^*$ ならば 発注量 = $z^* - x$

$x \geq z^*$ ならば 発注量 = 0

である。ここに z^* は (3.24) の根である。

$n = 1$ のときは $(1 - 1/n)p > c$ は成立しない。このとき $\Delta E\{C(B, z)\} > 0$ ((3.13) を参照) となり, $E\{C(B, z)\}$ は z の狭義増加関数となるから, $z = x$ つまり発注しないことが最適となる。

$(1 - 1/n)p \leq c$ ときは,

補題 2 の証明 iii) で $z+2$ を $z+1$ でおきかえることにより

$$\sum_{b=g_{*}^{-1}\left(z, \frac{1}{n}\right)}^{g_{*}^{-1}\left(z+1, \frac{1}{n}\right)-1} \left[G\left(b, \frac{1}{n}\right) + \left(g^{-1}(b, z+1) - \frac{1}{n}\right)(z+1) - G(b, g^{-1}(b, z+1)) \right] \phi(b) \geq 0 \quad (3.25)$$

を得る。また, $b < g_{*}^{-1}(z, 1/n)$ のとき, $1/n < g_{*}^{-1}(b, z)$ となるから

$$\begin{aligned} &(z+1)g^{-1}(b, z+1) - G(b, g^{-1}(b, z+1)) - (zg^{-1}(b, z) - G(b, g^{-1}(b, z))) - \frac{1}{n} \\ &= \int_0^{g^{-1}(b, z+1)} [z+1 - g(b, y)] dy - \int_0^{g^{-1}(b, z)} [z - g(b, y)] dy - \frac{1}{n} \\ &= \int_0^{g^{-1}(b, z)} dy + \int_{g^{-1}(b, z)}^{g^{-1}(b, z+1)} [z+1 - g(b, y)] dy - \frac{1}{n} \\ &= \left[g^{-1}(b, z) - \frac{1}{n} \right] + \int_{g^{-1}(b, z)}^{g^{-1}(b, z+1)} [z+1 - g(b, y)] dy > 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

となる。したがって (3.15) の { } 中の第 3 項は非負で, $\Delta E\{C(B, z)\} \geq 0$ となる。 $E\{C(B, z)\}$ は z の非減少関数となるから, 発注しないことが最適である。

$n = \infty$ とおくと, 論文 [9] の需要形態の一般的モデルに一致する。

注4 $n = \infty$, $n = 1$ の場合の重要な式を列記する。対応する式にそれぞれ*および**を付記する。

$$I_1(b, x)^* = \begin{cases} z - G(b, 1) & 0 \leq b < z \\ zg^{-1}(b, z) - G(b, g^{-1}(b, z)) & z \leq b \end{cases} \quad (3.3)**$$

$$I_2(b, z)^* = \begin{cases} 0 & 0 \leq b < z \\ G(b, 1) - G(b, g^{-1}(b, z)) - z(1 - g^{-1}(b, z)) & z \leq b \end{cases} \quad (3.4)**$$

この場合は $g_*^{-1}(x, 0) = g_*^{-1}(z, 0) = \infty$ となり $g_*^{-1}(x, 1/n) < z$ の場合に起らない。

$$I_1(b, z)** = \begin{cases} x - G(b, 1) & , 0 \leq b < x \\ g^{-1}(b, x)x - G(b, g^{-1}(b, x)) & , x \leq b \end{cases} \quad (3.1)**$$

$$I_2(b, z)** = \begin{cases} 0 & , 0 \leq b < x \\ G(b, 1) - G(b, g^{-1}(b, x)) + (g^{-1}(b, x) - 1)x & , x \leq b \end{cases} \quad (3.2)**$$

この場合は $g(b, 1) = x$ となる b が $g_*^{-1}(x, 1)$ であり、一方 $g(b, 1) = b$ であるから $b = x = g_*^{-1}(x, 1)$ となる。同様に $g_*^{-1}(z, 1) = z$ 。したがって $g_*^{-1}(x, 1/n) \geq z$ の場合は起らない。

む す び

需要の発生が一般的で、発注量が発注間隔内の任意に定められた時点に入荷し、需要量が離散的確率変数と考えられる場合の在庫モデルの最適政策を検討した。このモデルの同値変換については次稿で検討したい。

文 献

- 1) Arrow K. J., S. Karlin and H. Scharf: Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production, Stanford, Calif. Stanford Univ. Press, 1958.
- 2) —: Studies in Applied Probability and Management Science, Stanford Calif. Stanford Univ. Press, 1962.
- 3) Bellman, R: Dynamic Programming, Princeton, N. J., Princeton Univ. Pres, 1957.
- 4) S. Iwamoto, Sequential minimaximization under dynamic programming structure, J. Math. Anal. Appl. 108, 1985.
- 5) 岩本誠一:「動的計画論」九州大学出版会, 1987.
- 6) —:「動的計画」と累次積分について」経済学研究, Vol. 53, No. 4~5, 九州大学経済学会, 1987.
- 7) Karlin, S: The Structure of Dynamic Programming Models, Naval Research Logistic Quarterly, Vol. II, No. 4, December 1955.
- 8) 北原貞輔・児玉正憲:「ORによる在庫管理システム」九州大学出版会, 1982.
- 9) 児玉正憲・北原貞輔:「種々の需要形態に関する統一的在庫モデルの研究」経済学研究, Vol. 47, No. 5・6, 九州大学経済学会, 1983.
- 10) 児玉正憲:「種々の需要形態に関する確率的在庫モデル」, 経済学研究, Vol. 51, No. 5, 九州大学経済学会, 1986.
- 11) —:「確率的在庫モデルの最適政策 (I)」経済学研究, Vol. 52, No. 1~4, 九州大学経済学会, 1986.
- 12) —:「確率的在庫モデルの最適政策 (II)」経済学研究, Vol. 52, No. 5, 九州大学経済学会, 1986.
- 13) —:「動的在庫モデルの最適政策 (I) 連続編」経済学研究, Vol. 53, No. 4・5, 九州大学経済学会, 1987.
- 14) —:「動的在庫モデルの最適政策 (II) 連続編」経済学研究, Vol. 53, No. 6, 九州大学経済学会, 1987.
- 15) —:「リードタイムのある動的在庫モデルの最適政策」経済学研究, Vol. 54, No. 1・2, 九州大学経済学会, 1988.

リードタイムのある確率的在庫モデル (離散編)

- 16) ——:「リードタイムのある動的在庫モデルの定常政策」経済学研究, Vol. 54, No. 3, 九州大学経済学会, 1988.
- 17) ——:「一般的生産・需要形態に関する静態的在庫モデル」経済学研究, Vol. 54, No. 4・5, 九州大学経済学会, 1988.
- 18) ——:「リードタイムのある確率的在庫モデル」経済学研究, Vol. 54, No. 6, 九州大学経済学会, 1989.
- 19) Monks, J. G.: Operations Management, Theory and Problem, McGraw-Hill, 1977.
- 20) Nadder, E: Inventory System. John Wiley, 1966.
- 21) Scarf, H. E., D. M. Gilford, and M. W. Shelly: Multistage Inventory Models and Techniques, Stanford, Calif. Stanford Univ, Press, 1963.
- 22) Tahu, H. A.: Operations Research, An Introduction, Macmillan, 1976.