リードタイムのある確率的在庫モデル : 離散編

児玉, 正憲

https://doi.org/10.15017/4491804

出版情報：經濟學研究. 55 (1/2), pp.1-19, 1989-10-10. 九州大学経済学会

リードタイムのある確率的在庫モデル

——離　散　編——

児　玉　正　憲

需要の発生が一般的で発注量が発注間隔内の任意に定められた時点に入荷する確率的在庫モデルの最適政策を検討した[1)]。その場合，需要量は連続確率変数にしたがうと仮定した。

本小論では需要量が離散確率変数にしたがう場合の最適政策を検討する。

ここで取りあげるモデルは発注コストを考慮する必要がない購入・販売モデルである。発注は期首に行われ，発注量は期間(t)内の任意の時点 $t_0(\leqq t)$ に入荷するものとする。ただし，t_0/t の値は $1, 1/2, 1/3, \cdots, 1/m, \cdots, 0$ をとるものとする，$t/t_0 = n$ とおく，$n = 1, 2, 3, \cdots$。確率的に変化するのは需要量Bだけである。需要の発生については次の三つの場合を取扱う。

1. 需要が一回きりで，すべて期首に払い出される（単純な特定モデル（1））
2. 需要は期を通じて一様に発生する（単純な特定モデル（2））
3. 需要は期の間一般的な関数にしたがって発生する（需要形態の一般的モデル）

論文を通じて使用する以下の記号を導入する。

x：前期からの繰越在庫量

y：発注量（仮定によって期間 t の内の任意の時点 t_0 に入荷）

$z = x + y$

$\phi(b)$：需要星 B の確率関数，$P\{B = b\} = \phi(b)$

c：購入コスト（単位あたり）

h：在庫維持コスト（期，単位あたり）

p：品切コスト（期，単位あたり）

1.　単純な特定モデル（1）

需要量 B の実現値が b のときの期平均在庫量および期平均在庫不足量をそれぞれ $I_1(b, z)$，$I_2(b, z)$ とおくと，次式で与えられる[2)]。

1)　児玉正憲［18］
2)　児玉正憲［18］

$$I_1(b, z) = \begin{cases} \left(1-\frac{1}{n}\right)z+\frac{1}{n}x-b \ , & 0 \leqq b \leqq x \\ \left(1-\frac{1}{n}\right)(z-b) \ , & x < b < z \\ 0 \ , & z \leqq b \end{cases} \tag{1.1}$$

$$I_2(b, z) = \begin{cases} 0 \ , & 0 \leqq b \leqq x \\ \frac{1}{n}(b-x) \ , & x < b < z \\ -\left(1-\frac{1}{n}\right)z-\frac{1}{n}x+b \ , & z \leqq b \end{cases} \tag{1.2}$$

ところが，需要量 B は離散確率変数であるので期待期平均在庫量 I_1，期待期平均在庫不足量 I_2 は次のようになる。

$$\begin{aligned} I_1 &= E\{I_1(B, z)\} = \sum_{b=0}^{\infty} I_1(b, z)\phi(b) \\ &= \sum_{b=0}^{x} \left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)z+\frac{x}{n}-b\right\}\phi(b)+\sum_{b=x+1}^{z-1} \left(1-\frac{1}{n}\right)(z-b)\phi(b) \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= E\{I_2(B, z)\} = \sum_{b=0}^{\infty} I_2(b, z)\phi(b) \\ &= \sum_{b=x+1}^{z-1} \frac{1}{n}(b-x)\phi(b)+\sum_{b=z}^{\infty}\left\{-\left(1-\frac{1}{n}\right)z-\frac{1}{n}x+b\right\}\phi(b) \end{aligned} \tag{1.4}$$

したがって，このモデルの総期待費用 $E\{C(B, z)\}$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} E\{C(B, z)\} &= c\cdot(z-x)+h\cdot I_1+p\cdot I_2 \\ &= c\cdot(z-x)+h\left[\sum_{b=0}^{x}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)z+\frac{1}{n}x-b\right\}\phi(b)+\sum_{b=x+1}^{z-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)(z-b)\phi(b)\right] \\ &\quad +p\left[\sum_{b=x+1}^{z-1}\frac{1}{n}(b-x)\phi(b)+\sum_{b=2}^{\infty}\left\{-\left(1-\frac{1}{n}\right)z-\frac{1}{n}x+b\right\}\phi(b)\right] \\ &= c\cdot(z-x)-p\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)z+\frac{1}{n}x-\sum_{b=0}^{\infty} b\phi(b)\right\} \\ &\quad +(h+p)\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)\sum_{b=0}^{z}(z-b)\phi(b)+\frac{1}{n}\sum_{b=0}^{x}(x-b)\phi(b)\right\} \end{aligned} \tag{1.5}$$

$E\{C(B, z)\}$ を最小にする z の値 z^* および最小値を求めるために，$E\{C(B, z)\}$ の差分を計算しておく。

$$\begin{aligned} \varDelta E\{C(B, z)\} &= E\{C(B, z+1)\}-E\{C(B, z)\} \\ &= c-\left(1-\frac{1}{n}\right)p+\left(1-\frac{1}{n}\right)(h+p)\sum_{b=0}^{z}\phi(b) \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned} \varDelta^2 E\{C(B, z)\} &= \varDelta E\{C(B, z+1)\}-\varDelta E\{C(B, z)\} \\ &= \left(1-\frac{1}{n}\right)(h+p)\phi(z+1) \geqq 0 \end{aligned} \tag{1.7}$$

したがって z^* は，

$$\left.\begin{aligned} E\{C(B, z+1)\} \geqq E\{C(B, z)\} \\ E\{C(B, z-1)\} \geqq E\{C(B, z)\} \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

をみたす z の値である。これは（1.6）より $\{(1-1/n)p-c\}/\{(1-1/n)(h+p)\}$ を q とおくと，

$$\sum_{b=0}^{z^*} \phi(b) \geqq q \geqq \sum_{b=0}^{z^*-1} \phi(b)\ ,\quad \left(1-\frac{1}{n}\right)p > c \tag{1.9}$$

をみたさなければならない。したがって次の定理を得る。

定理 1　最適発注政策は $(1-1/n)p > c$ のとき，

$x < z^*$　ならば　発注量 $= z^*-x$

$x \geqq z^*$　ならば　発注量 $= 0$

である。ここに z^* は（1.9）の根である。

$(1-1/n)p \leqq c$ のときは（1.6）より $\varDelta E\{C(B,z)\} \geqq 0$ となり，$E\{C(B,z)\}$ は z の非減少関数となるので，発注しないこと $(y=0)$，つまり $z=x$ が最適となる。

$t_0 = 0\ (n=\infty)$ とおくと論文［9］の単純な特定モデル（1）に一致する。

$t_0 = t\ (n=1)$ の場合は $\varDelta E\{C(B,z)\} > 0$（(1.6) ** 参照）となり，$E\{C(B,z)\}$ は z の狭義増加関数となり，発注しないことが最適となる。

注 1　（1.7）より $\phi(z) > 0 (z \geqq 0)$ のときは（1.9）の等号はとれ，z^* は唯一である。$\phi(z) \geqq 0 (z \geqq 0)$ の場合は z^* は唯一とは限らない。

（i）$\displaystyle\sum_{b=0}^{z^*-1} \phi(b) = q = \sum_{b=0}^{z^*} \phi(b)$

（ii）$\displaystyle\sum_{b=0}^{z^*-1} \phi(b) < q = \sum_{b=0}^{z^*} \phi(b)$

（iii）$\displaystyle\sum_{b=0}^{z^*-1} \phi(b) = q < \sum_{b=0}^{z^*} \phi(b)$

（i）は 3 個以上の z^* が存在し，（ii），（iii）は 2 個の z^* が存在する。

また，（1.8）が成立すれば $\varDelta E\{C(B,0)\} < 0,\ \lim_{z\to\infty} \varDelta E\{C(B,z)\} < 0$ が成立している。

注 2　$t_0 = 0\ (n=\infty)$, $t_0 = t\ (n=1)$ の場合の重要な式を列記する。対応する式にそれぞれ＊および＊＊を付記する。

$$I_1^*(b,z) = \begin{cases} z-b & ,\quad 0 \leqq b < z \\ 0 & ,\quad z \leqq b \end{cases} \tag{1.1*}$$

$$I_2^*(b,z) = \begin{cases} 0 & ,\quad 0 \leqq b < z \\ b-z & ,\quad z \leqq b \end{cases} \tag{1.2*}$$

$$\begin{aligned} E\{C(B,z)\}^* &= c\cdot(z-x) + h\sum_{b=0}^{z-1}(z-b)\phi(b) + \sum_{b=z}^{\infty}(b-z)\phi(b) \\ &= c\cdot(z-x) - p\left\{z - \sum_{b=0}^{\infty} b(\phi)(b)\right\} + (h+p)\sum_{b=0}^{z}(z-b)\phi(b) \end{aligned} \tag{1.5*}$$

$$\varDelta E\{C(B,z)\}^* = c - p + (h+p)\sum_{b=0}^{z}\phi(b) \tag{1.6*}$$

$$\varDelta^2 E\{C(B,z)\}^* = (h+p)\phi(z+1) \tag{1.7*}$$

$$I_1^{**}(b,z) = \begin{cases} x-b, & 0 \leqq b < x \\ 0 & ,\quad x \leqq b \end{cases} \tag{1.1**}$$

$$I_2^{**}(b,z)=\begin{cases}0 & , \quad 0\leqq b<x\\ b-x, & x\leqq b\end{cases} \tag{1.2}**$$

$$E\{C(B,z)\}^{**}=c\cdot(z-x)+h\sum_{b=0}^{x-1}(x-b)\phi(b)+p\sum_{b=x}^{\infty}(b-x)\phi(b)$$

$$=c\cdot(z-x)-p\{x-\sum_{b=0}^{\infty}b\phi(b)\}+(h+p)\sum_{b=0}^{x}(x-b)\phi(b) \tag{1.5}**$$

$$\Delta E\{C(B,z)\}^{**}=c \tag{1.6}**$$

$$\Delta^2 E\{C(B,z)\}^{**}=0 \tag{1.7}**$$

(1.1) *,(1.2) *,(1.1) **,(1.2) ** は (1.1),(1.2) と比較して b のとる値の範囲が3つの場合から2つの場合に変っている。

2. 単純な特定モデル (2)

需要量 B の実現値が b のときの期平均在庫量および期平均在庫不足量をそれぞれ $I_1(b,z)$, $I_2(b,z)$ とおくと,次式で与えられる[3]。

$nx<z$ の場合

$$I_1(b,z)=\begin{cases}\left(1-\frac{1}{n}\right)z+\frac{1}{n}x-\frac{b}{2} & , \quad 0\leqq b<nx\\ \frac{x^2}{2b}+\left(1-\frac{1}{n}\right)z-\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)b & , \quad nx\leqq b<z\\ \frac{x^2}{2b}+\frac{z^2}{2b}-\frac{1}{n}z+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 b & , \quad z\leqq b<nz\\ \frac{x^2}{2b} & , \quad nz\leqq b\end{cases} \tag{2.1}$$

$$I_2(b,z)=\begin{cases}0 & , \quad 0\leqq b<nx\\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 b+\frac{x^2}{2b}-\frac{1}{n}x & , \quad nx\leqq b<z\\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 b+\frac{x^2}{2b}-\frac{1}{n}x+\frac{b}{2}-z+\frac{z^2}{2b} & , \quad z\leqq b<nz\\ \frac{x^2}{2b}-\frac{1}{n}x+\frac{b}{2}-\left(1-\frac{1}{n}\right)z & , \quad nz\leqq b\end{cases} \tag{2.2}$$

$nx\geqq z$ の場合

$$I_1(b,z)=\begin{cases}\left(1-\frac{1}{n}\right)z+\frac{1}{n}x-\frac{b}{2} & , \quad 0\leqq b<z\\ \frac{z^2}{2b}-\frac{1}{n}z+\frac{1}{n}x & , \quad z\leqq b<nx\\ \frac{x^2}{2b}+\frac{z^2}{2b}-\frac{1}{n}z+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 b & , \quad nx\leqq b<nz\\ \frac{x^2}{2b} & , \quad nz\leqq b\end{cases} \tag{2.3}$$

3) 児玉正憲 [18]

$$I_2(b,z)=\begin{cases}0 & ,\quad 0\leqq b<z\\ \dfrac{z^2}{2b}-z+\dfrac{b}{2} & ,\quad z\leqq b<nx\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}\right)^2 b+\dfrac{x^2}{2b}+\dfrac{1}{n}x+\dfrac{b}{2}-z+\dfrac{z^2}{2b} & ,\quad nx\leqq b<nz\\ \dfrac{x^2}{2b}-\dfrac{1}{n}x+\dfrac{b}{2}-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)z & ,\quad nz\leqq b\end{cases}\tag{2.4}$$

したがって期待総費用 $E\{C(B,z)\}$ はモデル（1）の場合と同様にして次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}E\{C(B,z)\}&=c\cdot(z-x)+h\Biggl\{\sum_{b=0}^{nx-1}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)z+\frac{1}{n}x-\frac{b}{2}\right]\phi(b)\\&\quad+\sum_{b=nx}^{z-1}\left[\frac{x^2}{2b}+\left(1-\frac{1}{n}\right)z-\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)b\right]\phi(b)\\&\quad+\sum_{b=z}^{nz-1}\left[\frac{x^2}{2b}+\frac{z^2}{2b}-\frac{1}{n}z+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 b\right]\phi(b)\\&\quad+\sum_{b=nz}^{\infty}\frac{x^2}{2b}\phi(b)\Biggr\}+p\Biggl\{\sum_{b=nx}^{z-1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 b+\frac{x^2}{2b}-\frac{1}{n}x\right]\phi(b)\\&\quad+\sum_{b=z}^{nz-1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 b+\frac{x^2}{2b}-\frac{1}{n}x+\frac{b}{2}-z+\frac{z^2}{2b}\right]\phi(b)\\&\quad+\sum_{b=nz}^{\infty}\left[\frac{x^2}{2b}-\frac{1}{n}x+\frac{b}{2}-\left(1-\frac{1}{n}\right)z\right]\phi(b)\Biggr\}\\&=c\cdot(z-x)-p\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)z+\frac{1}{n}x-\frac{1}{2}\sum_{b=0}^{\infty}b\phi(b)\right]\\&\quad+(h+p)\left\{\sum_{b=0}^{z-1}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)z-\frac{b}{2}\right]\phi(b)+\frac{1}{n}x\sum_{b=0}^{nx-1}\phi(b)\right\}\\&\quad+(h+p)\Biggl\{\frac{x^2}{2}\sum_{b=nx}^{\infty}\frac{\phi(b)}{b}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2\sum_{b=nx}^{nz-1}b\phi(b)\\&\quad+\sum_{b=z}^{nz-1}\left(\frac{z^2}{2b}-\frac{1}{n}z\right)\phi(b)\Biggr\},\quad z\geqq 1\\&=\frac{p}{2}\sum_{b=0}^{\infty}b\phi(b)\qquad ,\quad z=0\end{aligned}\right\}\tag{2.5}$$

（2.5）は $nx<z$ の場合について，（2.1），（2.2）を用いて計算した式であるが，$nx\geqq z$ の場合について（2.3），（2.4）を用いて計算しても同じ（2.5）を得る。

$n=\infty$, $n=1$ の場合は（2.5）は簡単な式になる。

$$\begin{aligned}E\{C(B,z)\}&=c\cdot(z-x)-p\left\{z-\frac{1}{2}\sum_{b=0}^{\infty}b\phi(b)\right\}\\&\quad+(h+p)\left\{\sum_{b=0}^{z-1}\left(z-\frac{b}{2}\right)\phi(b)+\sum_{b=z}^{\infty}\frac{z^2}{2b}\phi(b)\right\}\quad n=\infty,\quad z\geqq 1\end{aligned}\tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}E\{C(B,z)\}&=c\cdot(z-x)-p\left\{x-\frac{1}{2}\sum_{b=0}^{\infty}b\phi(b)\right\}\\&\quad+(h+p)\left\{\sum_{b=0}^{x-1}\left(x-\frac{b}{2}\right)\phi(b)+\frac{x^2}{2}\sum_{b=x}^{\infty}\frac{\phi(b)}{b}\right\}\quad n=1,\quad z\geqq 1\end{aligned}\tag{2.7}$$

$E\{C(B,z)\}$ を最小にする z の値 z^* および最小値を求めるために，$E\{C(B,z)\}$ の差分を計算しておく

$$\varDelta E\{C(B,z)\} = E\{C(B,z+1)\} - E\{C(B,z)\}$$

$$= c-\left(1-\frac{1}{n}\right)p+(h+p)\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)\phi(0)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2\sum_{b=0}^{n-1} b\phi(b)\right.$$

$$\left.+\sum_{b=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2b}-\frac{1}{n}\right)\phi(b)\right\}, \quad z=0 \tag{2.8}$$

$$= c-\left(1-\frac{1}{n}\right)p+(h+p)\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)\sum_{b=0}^{z-1}\phi(b)-\frac{\phi(z)}{2z}+\sum_{b=z}^{nz-1}\left(\frac{2z+1}{2b}-\frac{1}{n}\right)\phi(b)\right.$$

$$\left.+\sum_{b=nz}^{n(z+1)-1}\left[\frac{\left(z+1-\frac{b}{n}\right)^2}{2b}\right]\phi(b)\right\}, \quad z \geqq 1 \tag{2.9}$$

(2.8)，(2.9) を $n=\infty(t_0=0)$, $n=1(t_0=t)$, $n \geqq 2(0<t_0<t)$ の場合について計算すると，

i) $n=\infty$ $(t_0=0)$

$$\varDelta E\{C(B,z)\} = c-p+(h+p)\left\{\sum_{b=0}^{z}\phi(b)+\sum_{b=z+1}^{\infty}\frac{(2z+1)}{2b}\phi(b)\right\}, \quad z \geqq 0 \tag{2.10}$$

ii) $n=1$ $(t_0=t)$

$$\varDelta E\{C(B,z)\} = c, \quad z \geqq 0 \tag{2.11}$$

iii) $n \geqq 2$ $(0<t_0<t)$

$$\varDelta E\{C(B,z)\} = (2.8), \quad z=0$$

$$= c-\left(1-\frac{1}{n}\right)p+(h+p)\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)\phi(0)-\frac{\phi(1)}{2}+\sum_{b=1}^{n-1}\left(\frac{3}{2b}-\frac{1}{n}\right)\phi(b)\right.$$

$$\left.+\sum_{b=n}^{2n-1}\left[\frac{\left(2-\frac{b}{n}\right)^2}{2b}\right]\phi(b)\right\}, \quad z=1 \tag{2.12}$$

$$= c-\left(1-\frac{1}{n}\right)p+(h+p)\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)\sum_{b=0}^{z}\phi(b)+\sum_{b=z+1}^{nz-1}\left(\frac{2z+1}{2b}-\frac{1}{n}\right)\phi(b)\right.$$

$$\left.+\sum_{b=nz}^{n(z+1)-1}\left[\frac{\left(z+1-\frac{b}{n}\right)^2}{2b}\right]\phi(b)\right\}, \quad z \geqq 2 \tag{2.13}$$

また，(2.10)～(2.11) より，

$$\varDelta^2 E\{C(B,z)\} = \varDelta E\{C(B,z+1)\} - \varDelta E\{C(B,z)\}$$

$$= (h+p)\left\{\frac{\phi(z+1)}{2(z+1)}+\sum_{b=z+2}^{\infty}\frac{\phi(b)}{b}\right\}, \quad z \geqq 0, \quad n=\infty \tag{2.14}$$

$$= 0, \quad z \geqq 0, \quad n=1 \tag{2.15}$$

$n \geqq 2$ に対しては，(2.8)，(2.12)，(2.13) より

$$\varDelta^2 E\{C(z,B)\} = (h+p)\left\{-\frac{\phi(1)}{2}+\sum_{b=1}^{n-1}\left[\frac{1}{b}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 b\right]\phi(b)\right.$$

$$\left.+\sum_{b=n}^{2n-1}\left[\frac{\left(2-\frac{b}{n}\right)^2}{2b}\right]\phi(b)\right\}, \quad z=0, \quad n \geqq 2 \tag{2.16}$$

$$= (h+p)\left\{\frac{3}{8}\phi(1)+\sum_{b=2}^{3}\left(\frac{b}{8}+\frac{2}{b}-1\right)\phi(b)\right\}, \quad n=2, \quad z=0 \tag{2.17}$$

$$= (h+p)\left\{\frac{3}{8}\phi(1)+\sum_{b=2}^{n-1}\left[\frac{2-\left(\frac{b}{n}\right)^2}{2b}\right]\phi(b)+\sum_{b=n}^{2n-1}\left[\frac{\left(2-\frac{b}{n}\right)^2}{2b}\right]\phi(b)\right\},$$
$$n>2, \quad z=0 \tag{2.18}$$

$$= (h+p)\left\{-\frac{1}{4}\phi(2)+\sum_{b=2}^{n-1}\frac{\phi(b)}{b}+\sum_{b=n}^{2n-1}\left[\frac{2-\left(1-\frac{b}{n}\right)^2}{2b}\right]\phi(b)\right.$$
$$\left.+\sum_{b=2n}^{3n-1}\left[\frac{\left(3-\frac{b}{n}\right)^2}{2b}\right]\phi(b)\right\}, \qquad n \geqq 2, \quad z=1$$

$$= (h+p)\left\{\frac{1}{4}\phi(2)+\frac{7}{24}\phi(3)+\sum_{b=4}^{5}\left[\frac{\left(3-\frac{b}{2}\right)^2}{2b}\right]\phi(b)\right\}, \quad n=2, \quad z=1 \tag{2.19}$$

$$= (h+p)\left\{\frac{1}{4}\phi(2)+\sum_{b=3}^{n-1}\frac{\phi(b)}{b}+\sum_{b=n}^{2n-1}\left[\frac{2-\left(1-\frac{b}{n}\right)^2}{2b}\right]\phi(b)\right.$$
$$\left.+\sum_{b=2n}^{3n-1}\left[\frac{\left(3-\frac{b}{n}\right)^2}{2b}\right]\phi(b)\right\}, \quad n \geqq 3, \quad z=1 \tag{2.20}$$

$$= (h+p)\left\{-\frac{\phi(z+1)}{2(z+1)}+\sum_{b=z+1}^{nz-1}\frac{\phi(b)}{b}+\sum_{b=nz}^{n(z+1)-1}\left[\frac{2-\left(z-\frac{b}{n}\right)^2}{2b}\right]\phi(b)\right.$$
$$\left.+\sum_{b=n(z+1)}^{n(z+2)-1}\left[\frac{\left(z+2-\frac{b}{n}\right)^2}{2b}\right]\phi(b)\right\}, \quad n \geqq 2, \quad z \geqq 2 \tag{2.21}$$

次に $\varDelta^2 E\{C(B,z)\} \geqq 0$ を示しておこう。

補題 1　$\varDelta^2 E\{C(B,z)\} \geqq 0$ である。

証明

（i）$n=\infty$ の場合

(2.14) より明らか

（ii）$n=1$ の場合

(2.15) より明らか

（iii）$n \geqq 2$ の場合

$b=nz+j \ (j=0,1,\cdots,n-1)$ とおき，(2.21) の｛　｝の中の第 3 項を計算すると，

$$\frac{2-\left(z-\frac{nz+j}{n}\right)^2}{2(nz+j)}=\frac{2-\left(\frac{j}{n}\right)^2}{2(nz+j)}>0 \quad \left(\because \quad 0 \leqq \frac{j}{n}<1\right) \tag{2.22}$$

より

$$\sum_{b=nz}^{n(z+1)-1}\left[\frac{2-\left(z-\frac{b}{n}\right)^2}{2b}\right]\phi(b)=\sum_{j=0}^{n-1}\left[\frac{2-\left(\frac{j}{n}\right)^2}{2(nz+j)}\right]\phi(nz+j)\geqq 0 \tag{2.23}$$

また，{　}の第1項と第2項の和は $n\geqq 2,\ z\geqq 2$ より

$$\frac{\phi(z+1)}{2(z+1)}+\sum_{b=z+2}^{nz+1}\frac{\phi(b)}{b}\geqq 0$$

となる。よって（2.23）より（2.21）は非負となる。(2.22)，(2.23）より（2.17)，(2.18)，(2.19)，(2.20）は非負となる。よって証明された。

補題1より $E\{C(B,z)\}$ を最小にする z^* は

$$\left.\begin{aligned}E\{C(B,z+1)\}&\geqq E\{C(B,z)\}\\ E\{C(B,z-1)\}&\geqq E\{C(B,z)\}\end{aligned}\right\} \tag{2.24}$$

をみたす z の値である。この z^* は（2.13）[4] より

$$q=\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)p-c}{h+p}$$

$$M\left(z,\frac{1}{n}\right)=\left(1-\frac{1}{n}\right)\sum_{b=0}^{z}\phi(b)+\sum_{b=nz}^{n(z+1)-1}\left[\frac{\left(z-\frac{b}{n}\right)^2}{2b}\right]\phi(b)+\sum_{b=z+1}^{n(z+1)-1}\left(\frac{2z+1}{2b}-\frac{1}{n}\right)\phi(b)$$

とおけば，

$$M\left(z^*,\frac{1}{n}\right)\geqq q\geqq M\left(z^*-1,\frac{1}{n}\right),\quad \left(1-\frac{1}{n}\right)p>c \tag{2.25}$$

をみたさなければならない。

また，(2.25）が成立すれば $\varDelta E\{C(B,0)\}<0,\ \lim_{z\to\infty}\varDelta E\{C(B,z)\}>0$ も成立する。

したがって，次の定理を得る。

定理 2　最適発注政策は $\left(1-\frac{1}{n}\right)p>c$ のとき

$x<z^*$　ならば　発注量 $=z^*-x$

$x\geqq z^*$　ならば　発注量 $=0$

である。ここに z^* は（2.25）の根である。

$n=1$ のとき $\left(1-\frac{1}{n}\right)p>c$ は成立しない。このとき $\varDelta E\{C(B,z)\}>0$（(2.11）を参照）となり，$E\{C(B,z)\}$ は z の狭義増加関数となり発注しないことが最適である。

$\left(1-\frac{1}{n}\right)p\leqq c$ のときは，

$$\sum_{b=z+1}^{nz-1}\left(\frac{2z+1}{2b}-\frac{1}{n}\right)\phi(b)=\sum_{j=1}^{(n-1)z-1}\left(\frac{2z+1}{z+j}-\frac{1}{n}\right)\phi(z+j)$$

4)　(2.13）は $n=\infty$ の場合にも成立する

$$= \sum_{j=1}^{(n-1)z-1} \frac{\left[2z+1-\dfrac{1}{n}(z+j)\right]}{z+j}\phi(z+j)$$

$$\geqq \sum_{j=1}^{(n-1)z-1} \frac{\left[2z+1-\dfrac{1}{n}(nz-1)\right]}{z+j}\phi(z+j)$$

$$= \sum_{j=1}^{(n-1)z-1} \frac{\left(z+1+\dfrac{1}{n}\right)}{z+j}\phi(z+j) \geqq 0 \ , \tag{2.26}$$

$(\because (z+j)/n$ は j の狭義増加関数であるから，j が最大値 $(n-1)z-1$ のとき，最大となる。$(z+j)/n < (nz-1)/n = z-1/n < 2z+1)$ となるから，(2.13) より $\Delta E\{C(B,z)\} \geqq 0$ となり，$E\{C(B,z)\}$ は z の非減少関数となり，発注しないことが最適となる。

$n=\infty$ とおくと，論文 [9] の単純な特定モデル (2) に一致する。

注 3　$n=\infty$, $n=1$ の場合の重要な式を列記する。対応する式にそれぞれ＊および＊＊を付記する。

$$I_1(b,z)^* = \begin{cases} z-\dfrac{b}{2} & , \ 0 \leqq b < z \\ \dfrac{z^2}{2b} & , \ z \leqq b \end{cases} \tag{2.3)*}$$

$$I_2(b,z)^* = \begin{cases} 0 & , \ 0 \leqq b < z \\ \dfrac{(b-z)^2}{2b} & , \ z \leqq b \end{cases} \tag{2.4)*}$$

この場合 $nx < z$ の場合は起こらない。

$$I_1(b,z)^{**} = \begin{cases} x-\dfrac{b}{2} & , \ 0 \leqq b < x \\ \dfrac{x^2}{2b} & , \ x \leqq b \end{cases} \tag{2.1)**}$$

$$I_2(b,z)^{**} = \begin{cases} 0 & , \ 0 \leqq b < x \\ \dfrac{(b-x)^2}{2b} & , \ x \leqq b \end{cases} \tag{2.2)**}$$

この場合 $nx \geqq z$ の場合は起らない。

3.　需要形態の一般的モデル

1における需要形態は，突発需要でそれが期首に発生する例になっており，2のそれは期を通じて一様に発生する場合である。そこでこれらを特殊な場合として含む一般的かつ総合的な需要形態を表すモデルとして，考察期間 t における需要量 B の実現値 b が与えられたとき，期における需要の発生は

$$g\left(b, \frac{T}{t}\right), \quad 0 \leqq T \leqq t \tag{3.1}$$

にしたがうものとする。ここに $g(b,x)$ は $g(b,0)=0$, $g(0,x)=0$, $g(b,1)=b$ となる $\partial g(b,x)/\partial x$

>0 なる b の狭義増加関数である $(0 \leqq x \leqq 1)$。

需要量 B の実現値が b のとき，期平均在庫量および期平均在庫不足量をそれぞれ $I_1(b,z)$, $I_2(b,z)$ とおくと次式で与えられる[5]。

$g_*^{-1}(x,1/n) < z$ の場合

$$I_1(b,z)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}x+\left(1-\dfrac{1}{n}\right)z-G(b,1) & 0\leqq b<g_*^{-1}(x,1/n)\\ g^{-1}(b,x)x-G(b,g^{-1}(b,x))+\left(1-\dfrac{1}{n}\right)z-G(b,1)+G\left(b,\dfrac{1}{n}\right) & \\ & g_*^{-1}(x,1/n)\leqq b<z\\ g^{-1}(b,x)x-G(b,g^{-1}(b,x))+\left(g^{-1}(b,z)-\dfrac{1}{n}\right)z-G(b,g^{-1}(b,z))+G\left(b,\dfrac{1}{n}\right) & \\ & z\leqq b<g_*^{-1}(z,1/n)\\ g^{-1}(b,x)x-G(b,g^{-1}(b,x)) & g_*^{-1}(z,1/n)\leqq b\end{cases} \tag{3.1}$$

$$I_2(b,x)=\begin{cases}0 & 0<b<g_*^{-1}(x,1/n)\\ G\left(b,\dfrac{1}{n}\right)-G(b,g^{-1}(b,x))+\left(g^{-1}(b,x)-\dfrac{1}{n}\right)x & g_*^{-1}(x,1/n)\leqq b<z\\ G\left(b,\dfrac{1}{n}\right)-G(b,g^{-1}(b,x))+\left(g^{-1}(b,x)-\dfrac{1}{n}\right)x & \\ \quad+G(b,1)-G(b,g^{-1}(b,z))+(g^{-1}(b,z)-1)z & z\leqq b<g_*^{-1}(z,1/n)\\ \left(g^{-1}(b,x)-\dfrac{1}{n}\right)x-G(b,g^{-1}(b,x))+G(b,1)-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)z & g_*^{-1}(z,1/n)\leqq b\end{cases} \tag{3.2}$$

ここに

$$G(b,x)=\int_0^x g(b,y)dy \tag{3.3}$$

$x=g(b,T/t)$ となる T/t の値を $g^{-1}(b,x)$, $z=g(b,T/t)$ となる T/t の値を $g^{-1}(b,z)$, $x=g(b,1/n)$ となる b を $g_*^{-1}(x,1/n)$, $z=g(b,1/n)$ となる b を $g_*^{-1}(z,1/n)$ とおくこのような値が存在することは $g(b,T/t)$ に関する仮定から明らかである。ただし，$n=\infty$ の場合は $g_*^{-1}(x,0)=g_*^{-1}(z,0)=\infty$ とする。$g_*^{-1}(\cdot,1/n)$ は $[g_*^{-1}(\cdot,1/n)]$ の意味であるが，[ ] は省略する。

$g_*^{-1}(x,1/n) \geqq z$ の場合

$$I_1(b,z)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}x+\left(1-\dfrac{1}{n}\right)z-G(b,1) & 0\leqq b<z\\ \dfrac{1}{n}x+\left(g^{-1}(b,z)-\dfrac{1}{n}\right)z-G(b,g^{-1}(b,z)) & z\leqq b<g_*^{-1}(x,1/n)\\ g^{-1}(b,x)x-G(b,g^{-1}(b,x))+\left(g^{-1}(b,z)-\dfrac{1}{n}\right)z & \\ \quad-G(b,g^{-1}(b,z))+G\left(b,\dfrac{1}{n}\right) & g_*^{-1}(x,1/n)\leqq b<g_*^{-1}(z,1/n)\\ g^{-1}(b,x)x-G(b,g^{-1}(b,x)) & g_*^{-1}(z,1/n)\leqq b\end{cases} \tag{3.4}$$

5) 児玉正憲［18］

$$
I_2(b,z)=\begin{cases}
0 & 0\leqq b<z\\
(g^{-1}(b,z)-1)z+G(b,1)-G(b,g^{-1}(b,z)) & z\leqq b<g_*^{-1}(x,1/n)\\
G\Big(b,\dfrac{1}{n}\Big)-G(b,g^{-1}(b,x))+\Big(g^{-1}(b,x)-\dfrac{1}{n}\Big)x+G(b,1)-G(b,g^{-1}(b,z)) & \\
\quad +(g^{-1}(b,z)-1)z & g_*^{-1}(x,1/n)\leqq b<g_*^{-1}(z,1/n)\\
\Big(g^{-1}(b,x)-\dfrac{1}{n}\Big)x-G(b,g^{-1}(b,x))+G(b,1)-\Big(1-\dfrac{1}{n}\Big)z & g_*^{-1}(z,1/n)\leqq b
\end{cases}
\tag{3.5}
$$

したがって，期待総費用 $E\{C(B,z)\}$ はモデル（1）の場合と同様にして次式で与えられる。

$g_*^{-1}(x,1/n)<z$ の場合

$$
\begin{aligned}
E\{C(B,z)\}&=c\cdot(z-x)+h\Big\{\sum_{b=0}^{g_*^{-1}(x,\frac{1}{n})-1}\Big[\frac{1}{n}x+\Big(1-\frac{1}{n}\Big)z-G(b,1)\Big]\phi(b)\\
&\quad+\sum_{b=g^{-1}(x,\frac{1}{n})}^{z-1}\Big[g^{-1}(b,x)x-G(b,g^{-1}(b,x))+\Big(1-\frac{1}{n}\Big)z-G(b,1)+G\Big(b,\frac{1}{n}\Big)\Big]\phi(b)\\
&\quad+\sum_{b=z}^{g_*^{-1}(z,\frac{1}{n})-1}\Big[g^{-1}(b,x)x-G(b,g^{-1}(b,x))+(g^{-1}(b,z)-\frac{1}{n})z-G(b,g^{-1}(b,z))\\
&\quad+G\Big(b,\frac{1}{n}\Big)\Big]\phi(b)+\sum_{b=g_*^{-1}(z,\frac{1}{n})}^{\infty}[g^{-1}(b,x)x-G(b,g^{-1}(b,x))]\phi(b)\Big\}\\
&\quad+p\Big\{\sum_{b=g_*^{-1}(x,\frac{1}{n})}^{z-1}\Big[G\Big(b,\frac{1}{n}\Big)-G(b,g^{-1}(b,x))-\Big(\frac{1}{n}-g^{-1}(b,x)\Big)x\Big]\phi(b)\\
&\quad+\sum_{b=z}^{g_*^{-1}(z,\frac{1}{n})-1}\Big[G\Big(b,\frac{1}{n}\Big)-G(b,g^{-1}(b,x))+(g^{-1}(b,x)-\frac{1}{n}\Big)x\\
&\quad+G(b,1)-G(b,g^{-1}(b,z))+(g^{-1}(b,z)-1)z\Big]\phi(b)\\
&\quad+\sum_{b=g_*^{-1}(z,\frac{1}{n})}^{\infty}\Big[\Big(g^{-1}(b,x)-\frac{1}{n}\Big)x-G(b,g^{-1}(b,x))+G(b,1)-\Big(1-\frac{1}{n}\Big)z\Big]\phi(b)\Big\}
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

$$
\begin{aligned}
&=c\cdot(z-x)-p\Big\{\Big(1-\frac{1}{n}\Big)z+\frac{1}{n}x-\sum_{b=0}^{\infty}G(b,1)\phi(b)\Big\}\\
&\quad+(h+p)\Big\{\sum_{b=0}^{z-1}\Big[\Big(1-\frac{1}{n}\Big)-G(b,1)\Big]\phi(b)+\frac{1}{n}x\sum_{b=0}^{g_*^{-1}(x,\frac{1}{n})-1}\phi(b)\Big\}\\
&\quad+(h+p)\Big\{\sum_{b=g_*^{-1}(x,\frac{1}{n})}^{\infty}\Big[g^{-1}(b,x)x-G(b,g^{-1}(b,x))\Big]\phi(b)+\sum_{b=g_*^{-1}(x,\frac{1}{n})}^{g_*^{-1}(z,\frac{1}{n})-1}G\Big(b,\frac{1}{n}\Big)\phi(b)\\
&\quad\sum_{b=z}^{g_*^{-1}(z,\frac{1}{n})-1}\Big[\Big(g^{-1}(b,z)-\frac{1}{n}\Big)z-G(b,g^{-1}(b,z))\Big]\phi(b)\Big\}
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

$n=\infty$, $n=1$ の場合は（3.7）は簡単な式になる。

$$
\begin{aligned}
E\{C(B,z)\}&=c\cdot(z-x)-p\Big\{z-\sum_{b=0}^{\infty}G(b,1)\phi(b)\Big\}+(h+p)\sum_{b=0}^{z-1}\{z-G(b,1)\}\phi(b)\\
&\quad+(h+p)\sum_{b=z}^{\infty}\Big\{\Big(g^{-1}(b,z)-\frac{1}{n}\Big)z-G(b,g^{-1}(b,z))\Big\}\phi(b)\ ,\quad n=\infty,
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

$$E\{C(B,z)\}=c\cdot(z-x)-p\Big\{x-\sum_{b=0}^{\infty}G(b,1)\phi(b)\Big\}$$
$$+(h+p)\{\sum_{b=0}^{x-1}[x-G(b,1)]\phi(b)+\sum_{b=x}^{\infty}[g^{-1}(b,x)x-G(b,g^{-1}(b,x))]\phi(b)\},$$
$$n=1, \tag{3.9}$$

（∵　定義より，$g_*^{-1}(x,1)=x$，$g_*^{-1}(z,1)=z$）

$g_*^{-1}(x,1/n)\geqq z$ の場合

$$E\{C(B,z)\}=c\cdot(z-x)+h\Big\{\sum_{b=0}^{z-1}\Big[\frac{1}{n}x+\Big(1-\frac{1}{n}\Big)z-G(b,1)\Big]\phi(b)$$
$$+\sum_{b=z}^{g_*^{-1}(x,\frac{1}{n})-1}\Big[\frac{1}{n}x+\Big(g^{-1}(b,z)-\frac{1}{n}\Big)z-G(b,g^{-1}(b,z))\Big]\phi(b)$$
$$+\sum_{b=g_*^{-1}(x,\frac{1}{n})}^{g_*^{-1}(z,\frac{1}{n})-1}\Big[g^{-1}(b,x)x-G(b,g^{-1}(b,x))+(g^{-1}(b,z)-\frac{1}{n})z-G(b,g^{-1}(b,z))$$
$$+G\Big(b,\frac{1}{n}\Big)\Big]\phi(b)$$
$$+\sum_{b=g_*^{-1}(z,\frac{1}{n})}^{\infty}[g^{-1}(b,x)x-G(b,g^{-1}(b,x))]\phi(b)\Big\}$$
$$+p\Big\{\sum_{b=z}^{g_*^{-1}(x,\frac{1}{n})-1}[(g^{-1}(b,z)-1)z+G(b,1)-G(b,g^{-1}(b,z))]\phi(b)$$
$$+\sum_{b=g_*^{-1}(x,\frac{1}{n})}^{g_*(z,\frac{1}{n})-1}\Big[G\Big(b,\frac{1}{n}\Big)-G(b,g^{-1}(b,x))+\Big(g^{-1}(b,x)-\frac{1}{n}\Big)x$$
$$+G(b,1)-G(b,g^{-1}(b,z))+(g^{-1}(b,z)-1)z\Big]\phi(b)$$
$$+\sum_{b=g_*^{-1}(z,\frac{1}{n})}^{\infty}\Big[\Big(g^{-1}(b,x)-\frac{1}{n}\Big)x-G(b,g^{-1}(b,x))+G(b,1)-\Big(1-\frac{1}{n}\Big)z\Big]\phi(b)\Big\}$$
$$\tag{3.10}$$

この式は変形すると（3.7）と同値となる。

$E\{C(B,z)\}$ を最小にする z の値 z^* および最小値を求めるために，$E\{C(B,z)\}$ の差分を計算しておく

$$\varDelta E\{C(B,z)\}=E\{C(B,z+1)\}-E\{C(B,z)\}$$
$$=c-\Big(1-\frac{1}{n}\Big)p+(h+p)\Big\{\Big[\Big(1-\frac{1}{n}\Big)z-G(z,1)\Big]\phi(z)+\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\sum_{b=0}^{z}\phi(b)$$
$$+\sum_{b=g_*^{-1}(z,\frac{1}{n})}^{g_*^{-1}(z+1,\frac{1}{n})-1}G\Big(b,\frac{1}{n}\Big)\phi(b)$$
$$+\sum_{b=z+1}^{g_*^{-1}(z+1,\frac{1}{n})-1}\Big[\Big(g^{-1}(b,z+1)-\frac{1}{n}\Big)(z+1)-G(b,g^{-1}(b,z+1))\Big]\phi(b)$$
$$-\sum_{b=z}^{g_*^{-1}(z,\frac{1}{n})-1}\Big[\Big(g^{-1}(b,z)-\frac{1}{n}\Big)z-G(b,g^{-1}(b,z))\Big]\phi(b)\Big\} \tag{3.11}$$

（3.11）を $n=\infty$, $n=1$, $n\geqq 2$ の場合について計算すると，

$$\varDelta E\{C(B,z)\}=c-p+(h+p)\{\sum_{b=0}^{z}\phi(b)+\sum_{b=z+1}^{\infty}\{(z+1)g^{-1}(b,z+1)-G(b,g^{-1}(b,z+1))$$

$$-[zg^{-1}(b,z)-G(b,g^{-1}(b,z))]\}\phi(b)\}\ ,\quad n=\infty, \tag{3.12}$$

$$\varDelta E\{C(B,z)\}=c\ ,\quad n=1\ , \tag{3.13}$$

$$\varDelta E\{C(B,z)\}=c-\left(1-\frac{1}{n}\right)p+(h+p)\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)\sum_{b=0}^{z}\phi(b)+\sum_{b=z+1}^{g_*^{-1}(z+1,\frac{1}{n})-1}\left[G-\left(b,\frac{1}{n}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(g^{-1}(b,z+1)-\frac{1}{n}\right)(z+1)-G(b,g^{-1}(b,z+1))\right]\phi(b)\right\}\ ,$$
$$g_*^{-1}(z,1/n)=z+1\ ,\quad n\geqq 2, \tag{3.14}$$

$$=c-\left(1-\frac{1}{n}\right)p+(h+p)\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)\sum_{b=0}^{z}\phi(b)\right.$$
$$+\sum_{b=g_*^{-1}(z,\frac{1}{n})}^{g_*^{-1}(z+1,\frac{1}{n})-1}\left[G\left(b,\frac{1}{n}\right)+\left(g^{-1}(b,z+1)-\frac{1}{n}\right)(z+1)-G(b,g^{-1}(b,z+1))\right]\phi(b)$$
$$+\sum_{b=z+1}^{g_*^{-1}(z,\frac{1}{n})-1}\left[(z+1)g^{-1}(b,z+1)-G(b,g^{-1}(b,z+1))\right.$$
$$\left.\left.-(zg^{-1}(b,z)-G(b,g^{-1}(b,z)))-\frac{1}{n}\right]\phi(b)\right\}$$
$$g_*^{-1}(z,1/n)>z+1\ ,\quad n\geqq 2, \tag{3.15}$$

となる。$g_*^{-1}(z,1/n)=z+1$ のときは（3.15）の｛　｝の中の第3項は0となるので，（3.15）は $g_*^{-1}(z,1/n)\geqq z+1$ で成立している。$n=\infty$ のときは，$g_*^{-1}(z,1/n)=g_*^{-1}(z+1,1/n)=\infty$ となり（3.15）の｛　｝の中の第2項はなくなるので，（3.15）は $n=\infty$ で成立する。

$$\varDelta^2E\{C(B,z)\}=\varDelta E\{C(B,z+1)\}-\varDelta E\{C(B,z)\}$$
$$=0\ ,\qquad n=1 \tag{3.16}$$
$$=(h+p)\left\{G(1,1)\phi(1)+\sum_{b=g_*^{-1}(1,\frac{1}{n})}^{g_*^{-1}(2,\frac{1}{n})-1}\left[G\left(b,\frac{1}{n}\right)+2\left(g^{-1}(b,2)-\frac{1}{n}\right)\right.\right.$$
$$\left.-G(b,g^{-1}(b,2))\right]\phi(b)+\sum_{b=2}^{g_*^{-1}(1,\frac{1}{n})-1}\left[2(g^{-1}(b,2)-g^{-1}(b,1))\right.$$
$$\left.\left.+2G(b,g^{-1}(b,1))-G(b,g^{-1}(b,2))-G\left(b,\frac{1}{n}\right)\right]\phi(b)\right\}\ ,\qquad z=0\ ,\quad n\geqq 2$$
$$=(h+p)\{\{G(z+1,1)-z+[zg^{-1}(z+1,z)-G(z+1,g^{-1}(z+1,z))]\}\phi(z+1)$$
$$+\sum_{b=z+2}^{\infty}\{[(z+2)g^{-1}(b,z+2)-G(b,g^{-1}(b,z+2))]$$
$$-2[(z+1)g^{-1}(b,z+1)-G(b,g^{-1}(b,z+1))]$$
$$+[zg^{-1}(b,z)-G(b,g^{-1}(b,z)]\}\phi(b)\}\ ,\qquad n=\infty \tag{3.17}$$
$$=(h+p)\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)\phi(z+1)+\sum_{b=g_*^{-1}(z+1,\frac{1}{n})}^{g_*^{-1}(z+2,\frac{1}{n})-1}\left[G\left(b,\frac{1}{n}\right)\right.\right.$$
$$\left.+\left(g^{-1}(b,z+2)-\frac{1}{n}\right)(z+2)-G(b,g^{-1}(b,z+2)\right]\phi(b)$$
$$+\sum_{b=z+2}^{g_*^{-1}(z,\frac{1}{n})-1}\left[(z+2)g^{-1}(b,z+2)-\frac{1}{n}-(z+1)g^{-1}(b,z+1)\right.$$
$$\left.+G(b,g^{-1}(b,z+1))-G(b,g^{-1}(b,z+2))\right]\phi(b)$$

$$+\sum_{b=g_*^{-1}(z,\frac{1}{n})}^{g_*^{-1}(z+1,\frac{1}{n})-1}\Big[(z+2)g^{-1}(b,z+2)-\frac{1}{n}-(z+1)g^{-1}(b,z+1)$$

$$+G(b,g^{-1}(b,z+1))-G(b,g^{-1}(b,z+2))\Big]\phi(b)$$

$$-\sum_{b=g_*^{-1}(z,\frac{1}{n})}^{g_*^{-1}(z+1,\frac{1}{n})-1}\Big[G\Big(b,\frac{1}{n}\Big)+\Big(g^{-1}(b,z+1)-\frac{1}{n}\Big)(z+1)-G(b,g^{-1}(b,z+1))\Big]\phi(b)$$

$$-\sum_{b=z+2}^{g_*^{-1}(z,\frac{1}{n})-1}\Big[(z+1)g^{-1}(b,z+1)-\frac{1}{n}-zg^{-1}(b,z)$$

$$+G(b,g^{-1}(b,z))-G(b,g^{-1}(b,z+1))\Big]\phi(b)$$

$$-\Big[z\Big(\frac{1}{n}-g^{-1}(z+1,z)\Big)+G(z+1,g^{-1}(z+1,z))$$

$$+\Big(1-\frac{1}{n}\Big)(z+1)-G(z+1,1)\Big]\phi(z+1)\Big\}$$

$$=(h+p)\Big\{[z(g^{-1}(z+1,z)-1)+G(z+1,1)-G(z+1,g^{-1}(z+1,z))]\phi(z+1)$$

$$+\sum_{b=z+2}^{g_*^{-1}(z,\frac{1}{n})-1}[(z+2)g^{-1}(b,z+2)-2(z+1)g^{-1}(b,z+1)+zg^{-1}(b,z)$$

$$-G(b,g^{-1}(b,z))+2G(b,g^{-1}(b,z+1))-G(b,g^{-1}(b,z+2))]\phi(b)$$

$$+\sum_{b=g_*^{-1}(z+1,\frac{1}{n})}^{g_*^{-1}(z+2,\frac{1}{n})-1}\Big[G\Big(b,\frac{1}{n}\Big)+(z+2)g^{-1}(b,z+2)$$

$$-G(b,g^{-1}(b,z+2))-\frac{(z+2)}{n}\Big]\phi(b)$$

$$-\sum_{b=g_*^{-1}(z,\frac{1}{n})}^{g_*^{-1}(z+1,\frac{1}{n})-1}\Big[(z+2)g^{-1}(b,z+2)-2(z+1)g^{-1}(b,z+1)$$

$$-G\Big(b,\frac{1}{n}\Big)+2G(b,g^{-1}(b,z+1))-G(b,g^{-1}(b,z+2))+\frac{z}{n}\Big]\phi(b)\Big\}$$

$$n\geqq 2 \tag{3.18}$$

(3.18)は $n=\infty$ のときは，$g_*^{-1}(z,1/n)=g_*(z+1,1/n)=g_*^{-1}(z+2,1/n)=\infty$ となるので，(3.18)は $n=\infty$ で成立している。

(3.18) で一様需要を仮定すると，

$$g(b,x)=bx\ ,\quad G(b,y)=\frac{by^2}{2}\ ,\quad g^{-1}(b,z)=\frac{z}{b}\ ,$$

$$G(b,g^{-1}(b,z))=\frac{b}{2}\Big(\frac{z}{b}\Big)^2=\frac{z^2}{2b}\ ,\quad G\Big(b,\frac{1}{n}\Big)=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n}\Big)^2 b$$

となり

$$[z(g^{-1}(z+1,z)-1)+G(z+1,1)-G(z+1,g^{-1}(z+1,z)]\phi(z+1)=\frac{\phi(z+1)}{2(z+1)}$$

$$[(z+2)g^{-1}(b,z+2)-2(z+1)g^{-1}(b,z+1)+zg^{-1}(b,z)-G(b,g^{-1}(b,z))$$

$$+2G(b,g^{-1}(b,z+1))-G(b,g^{-1}(b,z+2))]\phi(b)=\frac{\phi(b)}{b}$$

$$\left[G\left(b, \frac{1}{n}\right)+(z+2)g^{-1}(b, z+2)-G(b, g^{-1}(b, z+2))-\frac{(z+2)}{n}\right]\phi(b)$$

$$=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 b+\frac{z^2+4z+4}{2b}-\frac{(z+2)}{n}\right]\phi(b)$$

$$\left[(z+2)g^{-1}(b, z+2)-2(z+1)g^{-1}(b, z+1)-G\left(b, \frac{1}{n}\right)\right.$$

$$\left.+2G(b, g^{-1}(b, z+1))-G(b, g^{-1}(b, z+2))+\frac{z}{n}\right]\phi(b)$$

$$=-\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 b+\frac{z^2-2}{2b}-\frac{z}{n}\right]\phi(b)$$

となり，(2.8) に一致する。

次に $\Delta^2 E\{C(B, z)\} \geqq 0$ を示しておこう。

補題 2　$\Delta^2 E\{C(B, z)\} \geqq 0$ である。

証明

（i）$n=\infty$ の場合の論文［9］で証明した

（ii）$n=1$ の場合

(3.16) より明らか

(iii) $n \geqq 2$ の場合

$(\phi(b) \geqq 0$ であるから，(3.18) の各［　］が非負であることを示せば十分である。$g(b, y)$ は y の狭義増加関数で，$g(b, g^{-1}(b, z))=z$, $g^{-1}(z+1, z) < g^{-1}(z+1, z+1)=1$ であるから，

$$z[g^{-1}(z+1, z)-1]+G(z+1, 1)-G(z+1, g^{-1}(z+1, z))$$

$$=z[g^{-1}(z+1, z)-1]+\int_0^1 g(z+1, y)dy-\int_0^{g^{-1}(z+1,z)} g(z+1, y)dy$$

$$=z[g^{-1}(z+1, z)-1]+\int_{g^{-1}(z+1,z)}^1 g(z+1, y)dy$$

$$=z[g^{-1}(z+1, z)-1]+(1-g^{-1}(z+1, z))g(z+1, \theta)\ ,\quad (g^{-1}(z+1, z) < \theta < 1)$$

$$=(1-g^{-1}(z+1, z))(g(z+1, \theta)-z) > 0 \tag{3.19}$$

$(\because\quad z=g(z+1, g^{-1}(z+1, z)) < g(z+1, \theta))$

ii）$g^{-1}(b, z) < g^{-1}(b, z+1) < g^{-1}(b, z+1)$ であるから

$$(z+2)g^{-1}(b, z+2)-G(b, g^{-1}(b, z+2))-2[(z+1)g^{-1}(b, z+1)$$

$$-G(b, g^{-1}(b, z+1))]+zg^{-1}(b, z)-G(b, g^{-1}(b, z))$$

$$=\int_0^{g^{-1}(b,z+2)}[z+2-g(b, y)]dy-2\int_0^{g^{-1}(b,z+1)}[z+1-g(b, y)]dy+\int_0^{g^{-1}(b,z)}[z-g(b, y)]dy$$

$$=\left\{\int_0^{g^{-1}(b,z+1)}[z+2-g(b, y)]dy+\int_{g^{-1}(b,z+1)}^{g^{-1}(b,z+2)}[z+2-g(b, y)]dy\right\}$$

$$-\int_0^{g^{-1}(b,z+1)}(z+1-g(b, y)]dy$$

$$-\left\{\int_0^{g^{-1}(b,z)}[z+1-g(b, y)]dy+\int_{g^{-1}(b,z)}^{g^{-1}(b,z+1)}[z+1-g(b, y)]dy\right\}+\int_0^{g^{-1}(b,z)}[z-g(b, y)]dy$$

$$= \int_0^{g^{-1}(b,z+1)} dy - \int_0^{g^{-1}(b,z)} dy + \int_{g^{-1}(b,z+1)}^{g^{-1}(b,z+2)} [z+2-g(b,y)]dy - \int_{g^{-1}(b,z)}^{g^{-1}(b,z+1)} [z+1-g(b,y)]dy$$

$$= \int_{g^{-1}(b,z+1)}^{g^{-1}(b,z+2)} [z+2-g(b,y)]dy + \int_{g^{-1}(b,z)}^{g^{-1}(b,z+1)} [g(b,y)-z]dy > 0 \qquad (3.20)$$

$(\because \quad 1 = z+2-g(b, g^{-1}(b, z+1)) > z+2-g(b,y) > z+2-g(b, g^{-1}(b, z+2)) = 0$,

$0 = g(b, g^{-1}(b, z)) - z < g(b, g^{-1}(b, z+1)) - z = 1)$

iii) $g_*^{-1}(\cdot, 1/n)$ の定義から，$g_*^{-1}(z+1, 1/n) \leqq b < g_*^{-1}(z+2, 1/n)$ より $g^{-1}(b, z+1) \leqq 1/n < g^{-1}(b, z+2)$ を得る。したがって，

$$G\left(b, \frac{1}{n}\right) - \frac{(z+2)}{n} + (z+2)g^{-1}(b, z+2) - G(b, g^{-1}(b, z+2))$$

$$= \int_0^{1/n} [g(b,y)-(z+2)]dy + \int_0^{g^{-1}(b,z+2)} [z+2-g(b,y)]dy$$

$$= \int_0^{1/n} [g(b,y)-(z+2)]dy + \int_0^{1/n} [z+2-g(b,y)]dy + \int_{1/n}^{g^{-1}(b,z+2)} [z+2-g(b,y)]dy$$

$$= \int_{1/n}^{g^{-1}(b,z+2)} [z+2-g(b,y)]dy > 0 \qquad (3.21)$$

$(\because \quad 0 = z+2-g(b, g^{-1}(b, z+2)) < z+2-g(b,y) < z+2-g(b, 1/n))$

iv) $g_*^{-1}(z, 1/n) \leqq b < g_*^{-1}(z+1, 1/n)$ より $g^{-1}(b, z) \leqq 1/n < g^{-1}(b, z+1)$ また $g^{-1}(b, z+1) < g^{-1}(b, z+2)$, $g(g_*^{-1}(z, 1/n), 1/n) = z$ であるから

$$(z+2)g^{-1}(b, z+2) - G(b, g^{-1}(b, z+2)) - 2[(z+1)g^{-1}(b, z+1)$$
$$- G(b, g^{-1}(b, z+1))] + \frac{z}{n} - G\left(b, \frac{1}{n}\right)$$

$$= \int_0^{g^{-1}(b,z+2)} [z+2-g(b,y)]dy - 2\int_0^{g^{-1}(b,z+1)} [z+1-g(b,y)]dy + \int_0^{1/n} [z-g(b,y)]dy$$

$$= \int_0^{g^{-1}(b,z+2)} [z+2-g(b,y)]dy - 2\int_0^{g^{-1}(b,z+1)} [z+1-g(b,y)]dy$$
$$+ \int_0^{g^{-1}(b,z)} [z-g(b,y)]dy + \int_{g^{-1}(b,z)}^{1/n} [z-g(b,y)]dy$$

$$= \int_{g^{-1}(b,z+1)}^{g^{-1}(b,z+2)} [z+2-g(b,y)]dy + \int_{g^{-1}(b,z)}^{g^{-1}(b,z+1)} [g(b,y)-z]dy + \int_{g^{-1}(b,z)}^{1/n} [z-g(b,y)]dy$$

$$= \int_{g^{-1}(b,z+1)}^{g^{-1}(b,z+2)} [z+2-g(b,y)]dy + \int_{1/n}^{g^{-1}(b,z+1)} [g(b,y)-z]dy > 0 \qquad (3.22)$$

$(\because \quad 1 = z+2-g(b, g^{-1}(b, z+1)) > z+2-g(b,y) > z+2-g(b, g^{-1}(b, z+2)) = 0$,

$1 = g(b, g(b, g^{-1}(b, z+1)) - z > g(b,y) - z > g(b, 1/n) - z \geqq g(g_*^{-1}(z, 1/n), 1/n) - z = 0)$

以上より補題は証明された。

補題2より $E\{C(B, z)\}$ を最小にする z の値 z^* は

$$\left.\begin{array}{l} E\{C(B, z+1)\} \geqq E\{C(B, z)\} \\ E\{C(B, z-1)\} \geqq E\{C(B, z)\} \end{array}\right\} \qquad (3.23)$$

をまたす z の値である。この z^* は（3.12）より

$$q=\frac{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)p-c}{h+p}$$

$$M\left(z,\frac{1}{n}\right)=\left(1-\frac{1}{n}\right)\sum_{b=0}^{z}\phi(b)+\sum_{b=g_*^{-1}(z,\frac{1}{n})}^{g_*^{-1}(z+1,\frac{1}{n})-1}\left[G\left(b,\frac{1}{n}\right)+\left(g^{-1}(b,z+1)-\frac{1}{n}\right)(z+1)\right.$$
$$\left.-G(b,g^{-1}(b,z+1))\right]\phi(b)+\sum_{b=z+1}^{g_*^{-1}(z,\frac{1}{n})-1}\left[(z+1)g^{-1}(b,z+1)-G(b,g^{-1}(b,z+1))\right.$$
$$\left.-(zg^{-1}(b,z)-G(b,g^{-1}(b,z)))-\frac{1}{n}\right]\phi(b)$$

とおけば,

$$M\left(z^*,\frac{1}{n}\right)\geqq q\geqq M\left(z^*-1,\frac{1}{n}\right),\quad \left(1-\frac{1}{n}\right)p>c \tag{3.24}$$

をみたさなければならない。

また,（3.24）が成立すれば $\varDelta E\{C(B,0)\}<0,\ \lim_{z\to\infty}\varDelta E\{C(B,z)\}>0$ も成立する。

したがって，次の定理を得る。

定理 3　最適発注政策は $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)p>c$ のとき

$x<z^*$　ならば　発注量 $=z^*-x$

$x\geqq z^*$　ならば　発注量 $=0$

である。ここに z^* は（3.24）の根である。

$n=1$ のときは $(1-1/n)p>c$ は成立しない。このとき $\varDelta E\{C(B,z)\}>0$（(3.13) を参照）となり，$E\{C(B,z)\}$ は z の狭義増加関数となるから，$z=x$ つまり発注しないことが最適となる。

$(1-1/m)p\leqq c$ ときは,

補題 2 の証明iii）で $z+2$ を $z+1$ でおきかえることにより

$$\sum_{b=g_*^{-1}(z,\frac{1}{n})}^{g_*^{-1}(z+1,\frac{1}{n})-1}\left[G\left(b,\frac{1}{n}\right)+\left(g^{-1}(b,z+1)-\frac{1}{n}\right)(z+1)-G(b,g^{-1}(b,z+1))\right]\phi(b)\geqq 0 \tag{3.25}$$

を得る。また，$b<g_*^{-1}(z,1/n)$ のとき，$1/n<g_*^{-1}(b,z)$ となるから

$$\begin{aligned}&(z+1)g^{-1}(b,z+1)-G(b,g^{-1}(b,z+1))-(zg^{-1}(b,z)-G(b,g^{-1}(b,z)))-\frac{1}{n}\\&=\int_0^{g^{-1}(b,z+1)}[z+1-g(b,y)]dy-\int_0^{g^{-1}(b,z)}[z-g(b,y)]dy-\frac{1}{n}\\&=\int_0^{g^{-1}(b,z)}dy+\int_{g^{-1}(b,z)}^{g^{-1}(b,z+1)}[z+1-g(b,y)]dy-\frac{1}{n}\\&=\left[g^{-1}(b,z)-\frac{1}{n}\right]+\int_{g^{-1}(b,z)}^{g^{-1}(b,z+1)}[z+1-g(b,y)]dy>0\end{aligned} \tag{3.26}$$

となる。したがって(3.15)の｛　｝の中の第 3 項は非負で，$\varDelta E\{C(B,z)\}\geqq 0$ となる。$E\{C(B,z)\}$ は z の非減少関数となるから，発注しないことが最適である。

$n=\infty$ とおくと，論文［9］の需要形態の一般的モデルに一致する。

注4　$n=\infty$, $n=1$ の場合の重要な式を列記する。対応する式にそれぞれ＊および＊＊を付記する。

$$I_1(b,x)^* = \begin{cases} z-G(b,1) & 0 \leqq b < z \\ zg^{-1}(b,z)-G(b,g^{-1}(b,z)) & z \leqq b \end{cases} \tag{3.3)**}$$

$$I_2(b,z)^* = \begin{cases} 0 & 0 \leqq b < z \\ G(b,1)-G(b,g^{-1}(b,z))-z(1-g^{-1}(b,z)) & z \leqq b \end{cases} \tag{3.4)**}$$

この場合は $g_*^{-1}(x,0) = g_*^{-1}(z,0) = \infty$ となり $g_*^{-1}(x,1/.n) < z$ の場合に起らない。

$$I_1(b,z)^{**} = \begin{cases} x-G(b,1) & ,\quad 0 \leqq b < x \\ g^{-1}(b,x)x-G(b,g^{-1}(b,x)) & ,\quad x \leqq b \end{cases} \tag{3.1)**}$$

$$I_2(b,z)^{**} = \begin{cases} 0 & ,\quad 0 \leqq b < x \\ G(b,1)-G(b,g^{-1}(b,x))+(g^{-1}(b,x)-1)x & ,\quad x \leqq b \end{cases} \tag{3.2)**}$$

この場合は $g(b,1)=x$ となる b が $g_*^{-1}(x,1)$ であり，一方 $g(b,1)=b$ であるから $b=x=g_*^{-1}(x,1)$ となる。同様に $g_*^{=+}(z,1)=z$。したがって $g_*^{-1}(x,1/n) \geqq z$ の場合は起らない。

む　す　び

需要の発生が一般的で，発注量が発注間隔内の任意に定められた時点に入荷し，需要量が離散的確率変数と考えられる場合の在庫モデルの最適政策を検討した。このモデルの同値変換については次稿で検討したい。

文　　献

1) Arrow K. J., S. Karlin and H. Scharf: Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production, Stanford, Calf. Stanford Univ. Press, 1958.

2) ――: Studies in Applied Probability and Management Science, Stanford Calf. Stanford Univ. Press, 1962.

3) Bellman, R: Dynamic Programming, Princetion, N. J., Princetion Univ. Pres, 1957.

4) S. Iwamoto, Sequential minimaximization under dynamic programming structure, J. Math. Anal. Appl. 108, 1985.

5) 岩本誠一：「動的計画論」九州大学出版会，1987.

6) ――：「動的計画」と累次積分について」経済学研究，Vol. 53，No. 4～5，九州大学経済学会，1987.

7) Karlin, S: The Structure of Dynamic Programming Models, Naval Research Logistic Quarterly, Vol. II, No. 4, December 1955.

8) 北原貞輔・児玉正憲：「ORによる在庫管理システム」九州大学出版会，1982.

9) 児玉正憲・北原貞輔；「種々の需要形態に関する統一的在庫モデルの研究」経済学研究，Vol. 47，No. 5・6，九州大学経済学会，1983.

10) 児玉正憲：「種々の需要形態に関する確率的在庫モデル」，経済学研究，Vol. 51，No. 5，九州大学経済学会，1986.

11) ――：「確率的在庫モデルの最適政策（I）」経済学研究，Vol. 52，No. 1～4，九州大学経済学会，1986.

12) ――：「確率的在庫モデルの最適政策（II）」経済学研究，Vol. 52，No. 5，九州大学経済学会，1986.

13) ――：「動的在庫モデルの最適政策（I）連続編」経済学研究，Vol. 53，No. 4・5，九州大学経済学会，1987.

14) ――：「動的在庫モデルの最適政策（II）連続編」経済学研究，Vol. 53，No. 6，九州大学経済学会，1987.

15) ――：「リードタイムのある動的在庫モデルの最適政策」経済学研究，Vol. 54，No. 1・2，九州大学経済学会，1988.

16) ——：「リードタイムのある動的在庫モデルの定常政策」経済学研究，Vol. 54，No. 3，九州大学経済学会，1988.
17) ——：「一般的生産・需要形態に関する静態的在庫庫モデル」経済学研究，Vol. 54，No. 4・5，九州大学経済学会，1988.
18) ——：「リードタイムのある確率的在庫モデル」経済学研究，Vol. 54，No. 6，九州大学経済学会，1989.
19) Monks, J. G.: Operations Management, Theory and Problem, McGraw-Hill, 1977.
20) Nadder, E: Inventory System. John Wiley, 1966.
21) Scarf, H. E., D. M, Gilford, and M. W. Shelly: Multistage Inventory Models and Techniques, Stanford, Calif. Stanford Univ, Press, 1963.
22) Tahu, H. A.: Operations Research, An Introduction, Macmillan, 1976.