動的計画による不等式論

岩本, 誠一

https://doi.org/10.15017/4491781

出版情報：經濟學研究. 54 (1/2), pp.119-161, 1988-06-10. 九州大学経済学会
バージョン：
権利関係：

動的計画による不等式論

岩　本　誠　一

1．概　　要

いわゆる一般不等式については個々にそれぞれいくつかの互に異なる証明が考えられている。例えば，最も有名な A-G(算術平均・幾何平均)不等式については12通りの証明方法が Beckenback and Bellman [3] によって与えられている。本論文では，このようないくつかの証明方法の一つに動的計画法による証明があることを紹介し，併せて動的計画による不等式の取り扱い方を考える総合報告とする。動的計画法による証明は，古典的変分法によるのと同様に，最適化問題を解くことに基づいている。その基本的な考え方は，最適化問題と不等式の間の一対一対応すなわち同値命題

$$\text{(P)} \qquad \underset{x\in X}{\mathrm{Max}}\ f(x) = M \iff \begin{array}{ll} \text{(i)} & \forall x \in X \quad f(x) \leqq M \\ \text{(ii)} & \exists x_0 \in X \quad f(x_0) = M \end{array} \qquad \text{(I)}$$

にある。

ここでは，最適値問題(P)を解くことによって，不等式(I)を証明する立場に立つ。一般に(P)を解くには，問題の大きさ・構造に応じて，変分法，ラグランジュ乗数法，クーン・タッカー法，動的計画法などの最適化法が考えられる。ここでは(P)に動的計画構造(再帰性と単調性)を導入して，その再帰式を逐次解くことによって最大解(値と点)を求める。この方法は A-G 不等式については E. F. Beckenbach and R. Bellman [3] が最初に考え，その後 S. Iwamoto [14-19, 22]，C.-L. Wang [43-50]，A. Kovacec [33] によって多くの不等式が証明されている。

まず，パラメトリック最適化問題と不等式の間の一対一関係を明らかにしておく(§2)。次に，動的計画可能関数 $f, g : X \longrightarrow R^1$ に対する問題群 $\mathrm{P}=\{\mathrm{P}(c)\}$ の最適値関数 $U=U(c)$ を再帰式を解いて求める。ただし

$$\mathrm{P}(c) \qquad \mathrm{Max} \quad f(x) \quad \text{s.t.} \quad g(x) \leqq c\ , \quad x \in X.$$

したがって，不等式 $f(x) \leqq U(g(x))$ $x \in X$ が得られる(§3)。この方法によって，A-G，Hölder, Schwarz, Minkowski, Jensen, Milne 等の古典的不等式[3, 13, 36, 37]が証明される(§4)。

他方，微分可能な狭義増加凸関数 $f : R^1 \longrightarrow R^1$ の線形化 $f(x\,;h)=f(x)+f'(x)(h-x)$ を N 回繰り返した関数

$$F(x\,;h) = f(x_1\,; f(x_2\,; \cdots ; f(x_N\,; h)\cdots))$$

に対して，逐次準線形化不等式　$F(x\,;h) \leqq f^N(h)$ $(x, h) \in R^N \times R^1$　を得る。ただし　$f^N(h)=$

$f(f(\cdots f(h)\cdots))$。これは逆関数 f^{-1}，反転関数 f_{-1}，共役関数 f^* に適用される(§5)。積分を含む不等式は Bellman equation を解いて証明される(§6)。最後に，不等式 $f \leqq U \circ g$ の逆 $g \geqq V \circ f$，および不等式 $f \leqq g$ の反転 $f_{-1} \geqq g_{-1}$ についてそれぞれ考える。

なお，参考文献については本論文を書くに際して直接引用したものはもちろん，間接的にも関係ある文献等を幅広く列挙している。いずれも，不等式および動的計画に関するものばかりである。

2. 最適化問題と不等式

この節では一つの最適化問題に一つの不等式が対応し，逆も対応することを示す。特にパラメトリックな最適化問題と不等式の間の一対一対応を明確にする。すなわち，不等式を樹立することは最適化問題を解くこと――最適解(最適点と最適値)を求めること――に同等である。本論文ではこの事実に基づいて，種々の最適化問題を解くことによって不等式(の成立)を証明していく立場に立つ。

以下，X を空でない集合とし，関数 $f: X \longrightarrow R^1$ とする。このとき，最適化問題

$$\text{Maximize} \quad f(x) \quad \text{subject to} \quad x \in X$$

すなわち略して

$$\mathrm{P}_1 \qquad \text{Max} \quad f(x) \quad \text{s.t.} \quad x \in X \tag{1}$$

を考える。

定理 2.1 (基本定理) 次の（i）と（ii-a),（ii-b) は同値である。

$$(\mathrm{i}) \qquad \underset{x \in X}{\text{Max}}\, f(x) = M \tag{2}$$

$$(\mathrm{ii}\text{-a}) \qquad \forall x \in X \quad f(x) \leqq M \tag{3}$$

$$(\mathrm{ii}\text{-b}) \qquad \exists x^* \in X \quad f(x^*) = M. \tag{4}$$

これは定理というよりも，むしろ(関数 $f: X \longrightarrow R^1$ の X における最大値 M の(3),(4)による)定義と言うべきだろう。しかし，われわれは最大値問題 (1) を解く立場に立って，あえて基本定理としておく。

われわれは，以下，問題 P_1 を何んらかの方法で――本論文では特に動的計画法で――解いて最大値 M を求める。したがって，Max を含んだ等式 (2) が得られ結局，不等式 (3) と等式 (4) を得ることになる。

さて，実数 $a < b$ に対して $<a, b>$ を実数空間 R^1 における a, b を端点とする区間とする。関数 $f: X \longrightarrow <a, b>$, $g: X \longrightarrow <\alpha, \beta>$ のうち g は上への関数とする。

まず，$c \in <\alpha, \beta>$ をパラメータとする等式制約下の最大化問題

$$\mathrm{P}_2(c) \qquad \text{Max} \quad f(x) \quad \text{s.t.} \quad g(x) = c \ , \quad x \in X$$

から成る問題群 $\mathrm{P}_2 = \{\mathrm{P}_2(c)\}$ を考える。

定理 2.2 次の（i）と（ii-a),（ii-b）は同値である。

（i）　問題群 P_2 が最大値関数 $U : <\alpha, \beta> \longrightarrow <a, b>$ をもつ。（したがって，ある $x^* : <\alpha, \beta> \longrightarrow X$ が最大点関数である。）

（ii-a）　$\forall x \in X \quad f(x) \leqq U(g(x))$

（ii-b）　$\forall c \in <\alpha, \beta> \quad \exists x^* \in X \quad g(x^*) = c \;,\; f(x^*) = U(g(x^*)).$

次に，$c \in <\alpha, \beta>$ をパラメータとする不等式制約下の最大化問題

$$P_3(c) \qquad \mathrm{Max} \quad f(x) \quad \mathrm{s.t.} \quad g(x) \leqq c \;, \quad x \in X$$

から成る問題群 $P_3 = \{P_3(c)\}$ を考える。

定理 2.3 関数 $U : <\alpha, \beta> \longrightarrow <a, b>$ は非減少とする。次の（i）と（ii-a),（ii-b）は同値である。

（i）　問題群 P_3 が最大値関数 $U : <\alpha, \beta> \longrightarrow <a, b>$ をもつ。

（ii-a）　$\forall x \in X \quad f(x) \leqq U(g(x))$

（ii-b）　$\forall c \in <\alpha, \beta> \quad \exists x^* \in X \quad g(x^*) \leqq c \;,\; f(x^*) = U(g(x^*)).$

この定理 2.3においては，最大値関数 U は自動的に非減少になる。U の非減少性は（ii）⇒（i）の証明のときのみに仮定として用いられ，（i）⇒（ii）のときは結果である。

定理 2.4 問題群 P_3 を考える。関数 $U : <\alpha, \beta> \longrightarrow <a, b>$ は狭義増加とする。このとき，次の（i）と（ii-a),（ii-b）は同値である。

（i）　問題群 P_3 が最大値関数 U をもつ。

（ii-a）　$\forall x \in X \quad f(x) \leqq U(g(x))$

（ii-b）　$\forall c \in <\alpha, \beta> \quad \exists x^* \in X \quad g(x^*) = c \;,\; f(x^*) = U(g(x^*)).$

証明　（i）⇒（ii）　$X \ni \forall x$ に対して $g(x) = c$ とする。問題 $P_3(c)$ の最大値が $U(c)$ だから，$f(x) \leqq U(c)$。ゆえに $f(x) \leqq U(g(x))$。また，$P_3(c)$ の最大点を $x^*(c)$ とすれば，

$$g(x^*(c)) \leqq c \;, \quad U(c) = f(x^*(c)).$$

もし $g(x^*(c)) \equiv c' < c$ ならば，問題 $P_3(c')$ の最大値 $U(c')$ は，$g(x^*(c)) = c'$ より，

$$U(c') \geqq f(x^*(c)) = U(c)$$

を満たす。ところが，$c' < c$ および U の狭義増加性より

$$U(c') < U(c)$$

となり，矛盾。ゆえに，$g(x^*(c)) = c$ である。

（ii）⇒（i）　さて $<\alpha, \beta> \ni \forall\, c$ を固定して，問題 $P_3(c)$ を考える。$g(x) \leqq c, x \in X$ ならば，（ii-a）および U の非減少性より

$$f(x) \leqq U(g(x)) \leqq U(c).$$

他方，(ii-b) より

$$\exists x^* \in X \quad g(x^*) = c\ ,\quad f(x^*) = U(g(x^*)).$$

よって，

$$f(x^*) = U(c).$$

ゆえに，$P_3(c)$ の最大値は $U(c)$（しかも，x^* が最大点）である。

以上は，1パラメータ c の問題であった。次に，2パラメータ (c, d) の問題を考える。$p(\geqq 3)$ パラメータの問題も考えられるが，2パラメータと同様に議論できるので，省略する。

さて，さらに関数 $h: X \longrightarrow <\gamma, \delta>$ も上への として，$(c, d) \in <\alpha, \beta> \times <\gamma, \delta>$ をパラメータとする等式制約下の最大化問題

$$P_4(c,d) \qquad \begin{aligned} \text{Max} \quad f(x) \quad \text{s.t.} \quad & g(x) = c \\ & h(x) = d \\ & x \in X \end{aligned}$$

から成る問題群 $P_4 = \{P_4(c, d)\}$ を考える。

定理 2.5　次の（i）と（ii-a），（ii-b）は同値である。

（i）　問題群 P_4 が最大値関数 $U: <\alpha, \beta> \times <r, \delta> \longrightarrow <a, b>$ をもつ。

（ii-a）　$\forall x \in X \quad f(x) \leqq U(g(x), h(x))$

（ii-b）　$\forall (c, d) \in <\alpha, \beta> \times <\gamma, \delta> \quad \exists x^* \in X \quad g(x^*) = c\ ,\ h(x^*) = d,$
$f(x^*) = U(g(x^*), h(x^*)).$

次に，不等式制約下の最大化問題

$$P_5(c,d) \qquad \begin{aligned} \text{Max} \quad f(x) \quad \text{s.t.} \quad & g(x) \leqq c \\ & h(x) \leqq d \\ & x \in X \end{aligned}$$

から成る問題群 $P_5 = \{P_5(c, d)\}$ に対しては，次の同値命題を成立する。

定理 2.6　$U: <\alpha, \beta> \times <\gamma, \delta> \longrightarrow <a, b>$ は各 c に対する $U(c, \cdot)$ と各 d に対する $U(\cdot, d)$ がともに非減少とする。このとき，次の（i）と（ii-a），（ii-b）は同値である。

（i）　問題群 P_5 が最大値関数 U をもつ。

（ii-a）　$\forall x \in X \quad f(x) \leqq U(g(x), h(x))$

（ii-b）　$\forall (c, d) \in <\alpha, \beta> \times <\gamma, \delta> \quad \exists x^* \in X \quad g(x^*) \leqq c\ ,\ h(x^*) \leqq d\ ,\ f(x^*) =$
$U(g(x^*), h(x^*)).$

ここでも，U の非減少性は，定理2.3と同様に，（ii）⇒（i）の証明のみに用いられ，（i）⇒（ii）では結果である。

3．動的計画の関数方程式

この節では前述の最適化問題群 $P_1 \sim P_5$ に**動的計画構造**を導入して，それらの再帰式を導いて最大解を求める。

本節では，集合 X は N 次元ユークリッド空間 R^N の区間，すなわち

$$X = <d_1, e_1> \times <d_2, e_2> \times \cdots \times <d_N, e_N> \tag{5}$$

とする。ただし $-\infty \leqq d_k < e_k \leqq +\infty$. 連続関数 $f: X \longrightarrow R^1$ が **X 上の再帰型関数**であるとは

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_N) = f_1(x_1\,; f_2(x_2\,; \cdots ; f_{N-1}(x_{N-1}\,; f_N(x_N))\cdots)) \tag{6}$$

と表されるときをいう。ただし $f_N: <d_N, e_N> \longrightarrow R^1$, $f_k: <d_k, e_k> \times \mathrm{range}(f_{k+1}) \longrightarrow R^1\ (1 \leqq k \leqq N-1)$ は連続である。ここに

$$\mathrm{range}(f_N) = \{y | y = f_N(x), x \in <d_N, e_N>\}$$
$$\mathrm{range}(f_k) = \{z | z = f_k(x\,; y), (x, y) \in <d_k, e_k) \times \mathrm{range}(f_{k+1})\} \quad 1 \leqq k \leqq N-1.$$

特に f が **E 上で狭義増加性をもつ再帰型関数**とは，各 $f_k(x\,; \cdot)\ (1 \leqq k \leqq N-1, x \in <d_k, e_k>)$ と f_N が狭義増加のときをいう。再帰型関数 $f: X \longrightarrow R^1$ に対しては各 $n\ (1 \leqq n \leqq N)$ について $f_n: <d_n, e_n> \times <d_{n+1}, e_{n+1}> \times \cdots \times <d_N, e_N> \longrightarrow R^1$ を

$$f_n(x_n, x_{n+1}, \cdots, x_N) = f_n(x_n\,; f_{n+1}(x_{n+1}\,; \cdots ; f_{N-1}(x_{N-1}\,; f_N(x_N))\cdots)) \tag{7}$$

で定義する。したがって，特に

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_N) = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_N)$$

である。

さて，$f: X \longrightarrow <a, b>$, $g: X \longrightarrow <\alpha, \beta>$, $h: X \longrightarrow <\gamma, \delta>$ を X 上で狭義増加性をもつ再帰型関数とし，特に g, h は上への関数とする。このとき，$n\ (1 \leqq n \leqq N)$, $c\ (\in <\alpha, \beta>)$ および $d\ (\in <\gamma, \delta>)$ をパラメータとする最大化問題群

$$\mathrm{P}_n(c) \qquad \begin{array}{ll} \mathrm{Max} & f_n(x_n, x_{n+1}, \cdots, x_N) \\ \mathrm{s.t.} & g_n(x_n, x_{n+1}, \cdots, x_N) \leqq c (\in \mathrm{range}(g_n)) \\ & x_m \in <d_m, e_m> \quad n \leqq m \leqq N \end{array}$$

および

$$\mathrm{P}_n(c, d) \qquad \begin{array}{ll} \mathrm{Max} & f_n(x_n, x_{n+1}, \cdots, x_N) \\ \mathrm{s.t.} & g_n(x_n, x_{n+1}, \cdots, x_N) \leqq c (\in \mathrm{range}(g_n)) \end{array}$$

$$h_n(x_n, x_{n+1}, \cdots, x_N) \leqq d (\in \mathrm{range}(h_n))$$
$$x_m \in < d_m, e_m > \quad n \leqq m \leqq N$$

を考える。問題 $\mathrm{P}_n(c)$，$\mathrm{P}_n(c, d)$ の最大値をそれぞれ $u^{N-n}(c)$，$w^{N-n}(c, d)$ とすると，次の再帰式が成り立つ。

$$\begin{cases} u^{N-n}(c) = \underset{x_n;*}{\mathrm{Max}} \quad f_n(x_n\,;u^{N-n+1}((g_n^{x_n})^{-1}(c))) \\ u^0(c) = f_N(g_N^{-1}(c)) \end{cases} \tag{8}$$

ただし，$*$ は x_n を条件

$$x_n \in < d_n, e_n > \ , \quad (g_n^{x_n})^{-1}(c) \in \mathrm{range}\,(g_{n+1})$$

の下で動かすことを示す。$(g_n^{x_n})^{-1}$ は・の実変数関数 $g_n(x_n\,;\cdot)$ の逆関数である。

$$\begin{cases} w^{N-n}(c, d) = \underset{x_n;**}{\mathrm{Max}} \quad f_n(x_n\,;w^{N-n+1}((g_n^{x_n})^{-1}(c), (h_n^{x_n})^{-1}(d))) \\ w^0(c, d) = f_N(g_N^{-1}(c) \vee h_N^{-1}(d)) \end{cases}$$

ただし，$p \vee q$ は p，q の大きい方を表し，$**$ は x_n を

$$x_n \in < d_n, e_n > \ , \quad (g_n^{x_n})^{-1}(c) \in \mathrm{range}\,(g_{n+1}) \ , \quad (h_n^{x_n})^{-1}(d) \in \mathrm{range}\,(h_{n+1})$$

の下で動かすことを表す。特に，問題 $\mathrm{P}_1(c)$，$\mathrm{P}_1(c, d)$ は，それぞれ前節の問題

$$\mathrm{P}_3(c) \qquad \begin{array}{ll} \mathrm{Max} & f(x_1, x_2, \cdots, x_N) \\ \mathrm{s.t.} & g(x_1, x_2, \cdots, x_N) \leqq c \\ & x_n \in < d_n, e_n > \quad 1 \leqq n \leqq N \ , \end{array}$$

$$\mathrm{P}_5(c, d) \qquad \begin{array}{ll} \mathrm{Max} & f(x_1, x_2, \cdots, x_N) \\ \mathrm{s.t.} & g(x_1, x_2, \cdots, x_N) \leqq c \\ & h(x_1, x_2, \cdots, x_N) \leqq d \\ & x_n \in < d_n, e_n > \quad 1 \leqq n \leqq N \end{array}$$

になる。したがって，たとえば問題群 $\mathrm{P}_3 = \{\mathrm{P}_3(c)\}$ の最大値関数 $U : < \alpha, \beta > \longrightarrow < a, b >$ は，今得られた再帰式を u^0 から $u^0 \to u^1 \to \cdots \to u^{N-1}$ と解いて最後に $u^{N-1} \equiv U$ として求められる。特に，この $U : < \alpha, \beta > \longrightarrow < a, b >$ が狭義増加ならば，定理 2.4の不等式（ii-a）と等式（ii-b）が成立する。 2パラメータ問題群についても同様に $w^0 \to w^1 \to \cdots \to w^{N-1} \equiv U$ として，求める最大値関数 $U : < \alpha, \beta > \times < \gamma, \delta > \longrightarrow < a, b >$ が得られ，定理 2.6 の不等式（ii-a）と等式（ii-b）が成立する。以上の接近法を**動的計画法**という。これは，一制約式および二制約式についてそれぞれ述べたが，3以上の多制約式についても成立する（[16]）。

次に，$X = <d_1, e_1> \times <d_2, e_2> \times \cdots \times <d_N, e_N>$ 上で狭義増加性をもつ再帰型関数 $f: X \longrightarrow R^1$ の代表的な型を 3 つ挙げておこう。

(1) 加法型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_N) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \cdots + f_N(x_N)$$

ただし $f_N: <d_N, e_N> \longrightarrow R^1$ は狭義増加とする。

(2) 乗法型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_N) = f_1(x_1) \times f_2(x_2) \times \cdots \times f_N(x_N)$$

ただし $f_k: <d_k, e_k> \longrightarrow R^1_+ \ (1 \leqq k \leqq N)$ で，f_N は狭義増加とする。

(3) 乗加法型

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \cdots, x_N) = & f_1(x_1) + \beta_1(x_1) f_2(x_2) + \beta_1(x_1)\beta_2(x_2) f_3(x_3) + \cdots \\ & + \beta_1(x_1)\beta_2(x_2) \cdots \beta_{N-1}(x_{N-1}) f_N(x_N) \end{aligned}$$

ただし $\beta_k: <d_k, e_k> \longrightarrow R^1_+ \ (1 \leqq k \leqq N)$ で，f_N は狭義増加とする。もちろん，乗加法型において $\beta_k(x) \equiv 1$ ならば加法型になる。

さらに，次の最大型，最小型は必ずしも狭義増加性はもたないが，非減少性をもつ再帰型関数であることを注意しておく。

(4) 最大型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_N) = \max_{1 \leqq n \leqq N} f_n(x_n).$$

(5) 最小型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_N) = \min_{1 \leqq n \leqq N} f_n(x_n) \ .$$

以上の典型的な再帰型関数は次節で目的関数・制約関数となって現れる。特に，目的関数，制約関数ともに加法型のとき，すなわち

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & f_1(x_1) + f_2(x_2) + \cdots + f_N(x_N) \\ \text{s.t.} \quad & g_1(x_1) + g_2(x_2) + \cdots + g_N(x_N) \leqq c \\ & x_k \in <d_k, e_k> \quad 1 \leqq k \leqq N \end{aligned}$$

に対する再帰式 (8) は

$$\begin{cases} u^{N-n}(c) = \underset{x_n; *}{\text{Max}} \ [f_n(x_n) + u^{N-n+1}(c - g_n(x_n))] \quad 1 \leqq n \leqq N \\ \\ u^0(c) = f_N(g_N^{-1}(c)) \end{cases}$$

になる。ただし，＊は x_n が

$$x_n \in < d_n, e_n > \ , \quad 0 \leqq g_n(x_n) \leqq c$$

を満たすことを表す。同様に，f, g, h がすべて加法型のときの再帰式は

$$\begin{cases} w^{N-n}(c, d) = \underset{x_n; **}{\mathrm{Max}} \ [f_n(x_n) + w^{N-n}(c - g_n(x_n), d - h_n(x_n))] \\ w^0(c, d) = f_N(g_N^{-1}(c) \vee h_N^{-1}(d)) \end{cases}$$

になる。ここに＊＊は

$$x_n \in < d_n, e_n > \ , \quad 0 \leqq g_n(x_n) \leqq c \ , \quad 0 \leqq h_n(x_n) \leqq d$$

を意味する。

4. 古典的不等式

この節ではほとんどの有名な不等式は，目的関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_N)$，制約関数 $g(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ に適当な再帰型関数を選んで，前節の最大値問題群 P を解くことによって証明されることを示す。

4.1. 一般化された算術平均・幾何平均不等式

いわゆる算術平均・幾何平均不等式

$$\prod_{n=1}^{N} x_n \leqq \left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n\right)^N \quad x \in R_+^N$$

は Beckenbach and Bellman [3] が最初に動的計画法 [5] で証明しているが，ここでは一般化された次の不等式を DP の再帰式を解いて証明する。

$$\prod_1^N x_n^{p_n} \leqq \prod_1^N \left(\frac{p_n}{q_n t_n}\right)^{(p_n,/t_n)} \cdot \left(\sum_1^N q_n x_n^{t_n}\right)^{(\sum_1^N p_n/t_n)} \Big/ \left\{\left(\sum_1^N \frac{p_n}{t_n}\right)^{(\sum_1^N p_n/t_n)}\right\} \quad x \in R_+{}^N,$$

ただし $p_n > 0$，$q_n > 0$，$t_n > 0\,(1 \leqq n \leqq N)$ は定数で，等号は

$$\frac{q_1 t_1 x_1^{t_1}}{p_1} = \frac{q_2 t_2 x_2^{t_2}}{p_2} = \cdots = \frac{q_N t_N x_N^{t_N}}{p_N}$$

のときに限る。

この不等式に対しては，乗法型関数，加法型関数

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_N) = \prod_1^N x_n^{p_n} : \ R_+^N \longrightarrow R^1$$

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_N) = \sum_1^N q_n x_n^{t_n} : \ R_+^N \longrightarrow R^1$$

をそれぞれ目的関数，制約関数とした最大化問題

$$
\mathrm{P}_1(c) \qquad \begin{array}{ll} \text{Max} & \prod_1^N x_n^{p_n} \\ \text{s.t.} & \sum_1^N q_n x_n^{t_n} \leqq c \ (\geqq 0) \\ & x_n \geqq 0 \ , \quad 1 \leqq n \leqq N \end{array}
$$

を考える。対応する再帰式

$$
\begin{cases} u^{N-n}(c) = \underset{x_n;\,*}{\text{Max}} \left[x_n^{p_n} \times u^{N-n+1}(c - q_n x_n^{t_n}) \right] & c \geqq 0 \ , \quad 1 \leqq n \leqq N-1 \\ u^0(c) = \left(\dfrac{c}{q_N} \right)^{p_N/t_N} & c \geqq 0 \end{cases}
$$

（ただし$*$は $0 \leqq x_n \leqq \left(\dfrac{c}{q_n} \right)^{1/t_n}$ を示す）

は1変数関数の最大化を$(N-1)$回繰り返して解かれ，最大値関数列 $u^0 \to u^1 \to \cdots \to u^{N-1}$ および同時併行的に最大点関数列（すなわち最適政策）$\pi_{N-1}^* \to \pi_{N-2}^* \to \cdots \to \pi_1^*$ が得られる：

$$
u^n(c) = \prod_{N-n}^{N} \left(\frac{p_k}{q_k t_k} \right)^{p_k/t_k} \cdot c^{\sum_{N-n}^{N} p_k/t_k} \Big/ \left\{ \left(\sum_{N-n}^{N} \frac{p_k}{t_k} \right)^{\sum_{N-n}^{N} p_k/t_k} \right\},
$$

$$
\pi_n^*(c) = \left(\frac{p_n}{q_n t_n} \right)^{1/t_n} \cdot c^{1/t_n} \Big/ \left\{ \left(\sum_n^N \frac{p_k}{t_k} \right)^{1/t_n} \right\} .
$$

したがって，最大化問題 $\mathrm{P}_1(c)$ は次の最大値 $U(c)$ と最大点 $(x_1^*(c), x_2^*(c), \cdots, x_N^*(c))$ をもつ。

$$
U(c) = u^{N-1}(c) = \prod_1^N \left(\frac{p_n}{q_n t_n} \right)^{p_n/t_n} \cdot c^{\sum_1^N p_n/t_n} \Big/ \left\{ \left(\sum_1^N \frac{p_n}{t_n} \right)^{\sum_1^N p_n/t_n} \right\},
$$

$$
x_n^*(c) = \left(\frac{p_n}{q_n t_n} \right)^{1/t_n} \cdot c^{1/t_n} \Big/ \left\{ \left(\sum_1^N \frac{p_n}{t_n} \right)^{1/t_n} \right\}, \quad 1 \leqq n \leqq N.
$$

ゆえに，定理2.4より，一般化された算術平均・幾何平均不等式が証明された。

特別な場合として次の不等式（表1）が挙げられる。

4.2. Minkowski の不等式

この不等式では $x = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$，$y = (y_1, y_2, \cdots, y_N)$ のうち y を定数 $y = b$ と見做して，x だけ変数と考える。すなわち，$p > 1$ として，次の不等式を証明する。

$$
\sum_1^N (b_n + x_n)^p \leqq \left\{ \left(\sum_1^N b_n{}^p \right)^{1/p} + \left(\sum_1^N x_n{}^p \right)^{1/p} \right\}^p \quad \text{on } R_+{}^N
$$

ただし $b_n > 0$，$1 \leqq n \leqq N$ は定数。$0 < p < 1$ のとき，不等号は逆転して $\geqq$ になる。等号は

$$
\frac{x_1}{b_1} = \frac{x_1}{b_2} = \cdots = \frac{x_N}{b_N}
$$

表1

式番号	不　等　式	等号条件
4.1.1[a]	$x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_N^{p_N} \leqq \left(\frac{p_1x_1+p_2x_2+\cdots p_Nx_N}{p_1+p_2+\cdots p_N}\right)^{p_1+p_2+\cdots+p_N}$ on $R_+{}^N$	$x_1=x_2=\cdots=x_N$
4.1.2	$(x_1x_2\cdots x_N)^{1/N} \leqq \frac{x_1+x_2+\cdots+x_N}{N}$ on $R_+{}^N$	$x_1=x_2=\cdots=x_N$
4.1.3[b]	$\frac{\Pi}{\Sigma^\Sigma}\left(\sum_1^N x_n\right)^\Sigma \geqq \prod_1^N x_n{}^n$ on $R_+{}^N$	$\frac{x_1}{1}=\frac{x_2}{2}=\cdots=\frac{x_N}{N}$
4.1.4	$\frac{2^23^3}{6^6}(x+y+z) \geqq xy^2z^3$ on $R_+{}^3$	$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$
4.1.5[c]	$\prod_1^N x_n \leqq \Delta\cdot\left(\sum_1^N x_n{}^n\right)^\Gamma \Big/ \Gamma^\Gamma$ on $R_+{}^N$	$x_1=2x_2{}^2=\cdots=Nx_N{}^N$
4.1.6	$11\cdot2^{-8/11}\cdot3^{-9/11}\cdot(xyz)^{9/11} \leqq x+y^2+z^3$ on $R_+{}^3$	$x=2y^2=3z^3$

[a] $p_n>0,\ 1\leqq n\leqq N$ は定数.
[b] $\Sigma=\sum_1^N n,\ \Pi=\prod_1^N n^n$.
[c] $\Delta=\prod_1^N(1/n)^{1/n},\ \Gamma=\sum_1^N(1/n)$.

のときに限る。$p>1$ に対しては，目的関数，制約関数としてそれぞれ

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_N)=\sum_1^N(b_n+x_n)^p:\ R_+{}^N \longrightarrow \left[\textstyle\sum_1^N b_n{}^p, \infty\right)$$

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_N)=\sum_1^N x_n{}^p:\ R_+{}^N \longrightarrow [0, \infty)$$

とする最大化問題

$$\begin{aligned}&\text{Max} && \sum_1^N(b_n+x_n)^p\\ &\text{s.t.} && \sum_1^N x_n \leqq c\ (\geqq 0)\\ & && x_n \geqq 0\ ,\quad 1\leqq n\leqq N\end{aligned}$$

を考える。再帰式

$$\begin{cases} u^{N-n}(c)=\underset{0\leqq x_n\leqq c}{\text{Max}}\left[(b_n+x_n)^p+u^{N-n-1}(c-x_n)\right] & c\geqq0,\ 1\leqq n\leqq N-1\\ u^0(c)=(b_n+c)^p & c\geqq 0\end{cases}$$

を解くと，最大値関数列 $\{u^0, u^1, \cdots, u^{N-1}\}$ と最適政策 $\{\pi_1^*, \pi_2^*, \cdots, \pi_{N-1}^*\}$ は

$$u^n(c)=\left\{\left(\sum_{N-n}^N b_k{}^p\right)^{1/p}+c^{1/p}\right\}^p,\qquad 0\leqq n\leqq N-1,$$

$$\pi_n^*(c)=b_n\cdot c^{1/p}\Big/\left\{\left(\sum_n^N b_k{}^p\right)^{1/p}\right\},\qquad 1\leqq n\leqq N-1$$

となり，最大値関数 U と最大点関数 $(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_N^*)$

$$U(c) = \left\{\left(\sum_1^N b_n{}^p\right)^{1/p}\right\}^p,$$

$$x_n{}^*(c) = b_n \cdot c^{1/p} \Big/ \left\{\left(\sum_1^N b_n{}^p\right)^{1/p}\right\}, \qquad 1 \leqq n \leqq N$$

が得られ，定理 2.4より Minkowski の不等式が成立する。また，$0<p<1$ に対しては，f と g を入れ替えて同様に議論すればよい。

4.3. Hölder および Cauchy-Schwarz の不等式

ここでも x，y のうち y は定数と考えて，次の型の Hölder の不等式を証明する。$p>1$ のとき

$$\sum_1^N b_n x_n \leqq \left(\sum_1^N b_n{}^q\right)^{1/q} \cdot \left(\sum_1^N x_n{}^p\right)^{1/p} \quad \text{on} \quad R_+{}^N$$

ただし，$b_n>0$，$1 \leqq n \leqq N$ は定められた定数で，q は p と共役な実数，すなわち，$q=p/(p-1)$.
$0<p<1$ のとき，逆向きの不等式が成立する。等号は

$$x_1/b_1^{p-1} = x_2/b_2^{p-1} = \cdots = x_N/b_N^{p-1}$$

のときに限る。もちろんこの Hölder の不等式は $p=2\,(=q)$ のとき，Cauchy-Schwarz の不等式

$$\sum_1^N b_n x_n \leqq \left(\sum_1^N b_n{}^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_1^N x_n{}^2\right)^{1/2} \quad \text{on} \quad R_+{}^N$$

とその等号条件

$$\frac{x_1}{b_1} = \frac{x_2}{b_2} = \cdots = \frac{x_N}{b_N}$$

になる。$p>1$ に対しては，加法型関数

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_N) = \sum_1^N b_n x_n : \ R_+^N \longrightarrow R_+^1$$

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_N) = \sum_1^N x_n{}^p : \ R_+^N \longrightarrow R_+^1$$

をそれぞれ目的関数，制約関数として，最大値問題 $\mathrm{P}(c)$ の再帰式を解くと，最大値関数列 $\{u^0, u^1, \cdots, u^{N-1}\}$ と最適政策 $\{\pi_1^*, \pi_2^*, \cdots, \pi_{N-1}^*\}$ を得る。

$$u^n(c) = \left(\sum_{N-n}^N b_k{}^q\right)^{1/q} \cdot c^{1/p}, \qquad 0 \leqq n \leqq N-1,$$

$$\pi_n{}^*(c) = b_n^{q-1} \cdot c^{1/p} \Big/ \left\{\left(\sum_n^N b_k{}^q\right)^{1/p}\right\}, \qquad 1 \leqq n \leqq N-1.$$

したがって，最大値関数 U と最大点関数 $(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_N^*)$ は

$$U(c)=\left(\sum_1^N b_n{}^q\right)^{1/q}\cdot c^{1/p}\ ,$$

$$x_n{}^*(c)=c^{1/p}\cdot b_n^{q-1}\Big/\left\{\left(\sum_1^N b_k{}^q\right)^{1/p}\right\},\quad 1\leqq n\leqq N$$

になり，Hölder の不等式が証明された。$0<p<1$ のときは，関数 f と g を入れ替えて，同様に最大値問題を解けばよい。

4.4. その他の不等式

われわれは，狭義増加性または非減少性をもつ再帰型関数 $f: X \longrightarrow <a, b>$，$g: X \longrightarrow <\alpha, \beta>$ を適当に選んで，それぞれ目的関数，制約関数にもつ最大値問題群

$$\begin{aligned} &\text{Max} \quad f(x_1, x_2, \cdots, x_N) \\ &\text{s.t.} \quad g(x_1, x_2, \cdots, x_N) \leqq c \\ &\qquad x_n \in <d_n, e_n> \quad 1 \leqq n \leqq N \end{aligned}$$

の最大値関数 $U(c)$ と最大点関数 $(x_1^*(c), x_2^*(c), \cdots, x_n^*(c))$ を動的計画の再帰式を逐次解くことによって求めることができる。したがって，定理2.3，2.4より，不等式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_N) \leqq U(g(x_1, x_2, \cdots, x_N)) \quad \text{on} \quad X$$

とその等号条件を求めることができる。表2はこの方法によって得られた不等式と等号条件をまとめたものである。

表 2

式番号	不　等　式	等 号 条 件
4.4.1[a]	$N\cdot f\left(\left(\prod_1^N x_n\right)^{1/N}\right) \leqq \sum_1^N f(x_n)$ on $R_+{}^N$	$x_1=x_2=\cdots=x_N$
4.4.2[b]	$f\left(\sum_1^N x_n/N\right) \leqq \max_{1\leqq n\leqq N} f(x_n)$ on $R_+{}^N$	$x_1=x_2=\cdots=x_N$
4.4.3[c]	$f\left(\sum_1^N a_nx_n \Big/ \sum_1^N a_n\right) \leqq \sum_1^N a_nf(x_n) \Big/ \sum_1^N a_n$ on $R_+{}^N$	$x_1=x_2=\cdots=x_N$
4.4.4[d]	$\dfrac{\prod_1^N a_n\cdot\sum_1^N b_nx_n}{\sum_1^N a_1a_2\cdots a_{n-1}b_na_{n+1}\cdots a_N} \leqq \max_{1\leqq n\leqq N}(a_nx_n)$ on $R_+{}^N$	$\dfrac{x_1}{a_2a_3\cdots a_N}=\dfrac{x_2}{a_1a_3\cdots a_N}=\cdots=\dfrac{x_N}{a_1a_2\cdots a_{N-1}}$
4.4.5	$\sum_1^4 x_n{}^2 \geqq \dfrac{3}{5}(x_1+\min(x_2, x_3+x_4))^2$ on $R_+{}^4$	$x_1/3=x_2/2=x_3=x_4$

[a] $f:R_+{}^1 \longrightarrow R_+{}^1$ は上への狭義増加な凸関数。
[b] $f:R_+{}^1 \longrightarrow R_+{}^1$ は上への狭義増加関数。
[c] $f:R_+{}^1 \longrightarrow R_+{}^1$ は上への狭義増加な凸関数で，$a_n>0$, $1\leqq n\leqq N$ は定数。Jensen の不等式という。
[d] $a_n>0$, $b_n>0$, $1\leqq n\leqq N$ は定数。

表 2 の続き

式番号	不　等　式	等　号　条　件
4.4.6 [e]	$\prod_1^N x_n \leqq [2^{(N-2)2^N+2}/\{(2^N-1)^{2^N-1}\}]\cdot\left\{\sum_1^N\left(x_n\Big/\prod_1^{n-1}x_k\right)\right\}^{2^N-1}$ on $\underbrace{(0,\infty)\times(0,\infty)\times\cdots\times(0,\infty)}_{N\text{-個}}$	$\frac{x_1}{2^{N-1}}=\left\{\frac{x_2}{2^{(N-1)+(N-2)}}\right\}^{1/2}$ $=\left\{\frac{x_3}{2^{2(N-1)+(N-2)+(N-3)}}\right\}^{1/2^2}=\cdots$ $=\left\{\frac{x_N}{2^{2^{N-2}(N-1)+2^{N-3}(N-2)+\cdots+2^1\cdot 2+1+0}}\right\}^{1/2^{N-1}}$
4.4.7	$\max_{1\leqq n\leqq N} x_n$ $\geqq\left(\frac{x_1^N+x_1x_3^{N-1}+x_1x_2x_3^{N-2}+\cdots+x_1x_2\cdots+x_N}{N}\right)^{1/N}$ on $R_+{}^N$	$x_1=x_2=\cdots=x_N$
4.4.8	$x_1+(x_3+\cdots+(x_{N-1}+x_N)^2\cdots)^2)^2)^2$ $\geqq 2^{2(N-1)}\prod_1^N x_n$ on $R_+{}^N$	$2^{(2^2)}x_1{}^2=2^{(2^3)}x_2^{(2^2)}=2^{(2^8)}x_3^{(2^8)}$ $=\cdots=2^{(2^N)}x_{N-1}^{(2^{N-1})}=2^{(2^{N+1})}x_N^{(2^N)}$
4.4.9	$\min_{1\leqq n\leqq N}\frac{x_n}{1+x_n}\leqq\frac{\sum_1^N x_n}{N+\sum_1^N x_n}$ on $R_+{}^N$	$x_1=x_2=\cdots=x_N$
4.4.10	$x+\frac{y}{1-y}\geqq\frac{2\min(x,y)-\{\min(x,y)\}^2}{1-\min(x,y)}$ on $[0,1)\times[0,1)$	$x=y$
4.4.11	$\min(x,(\min(y,z))^2)$ $\leqq x+y+z+2-2(x+y+z+1)^{1/2}$ on $R_+{}^3$	$x^{1/2}=y=z$
4.4.12 [f]	$\min_{1\leqq k\leqq N} b_kx_k^{q_k}\leqq\min_{1\leqq k\leqq N} b_k\{(\max_{1\leqq n\leqq N} a_nx_n^{y_n})/a_k\}^{q_k/y_k}$ on $R_+{}^N$	$a_1x_1^{p_1}=a_2x_2^{p_2}=\cdots=a_Nx_N^{p_N}$ or $b_1x_1^{q_1}=b_2x_2^{q_2}=\cdots=b_Nx_N^{q_N}$
4.4.13 [g]	$\max_{1\leqq k\leqq N} a_kx_k^{p_k}\geqq\max_{1\leqq k\leqq N} a_k\{(\min_{1\leqq n\leqq N} b_nx_n^{q_n})/b_k\}^{p_k/q_k}$ on R^N	$a_1x_1^{p_1}=a_2x_2^{p_2}=\cdots=a_Nx_N^{p_N}$ or $b_1x_1^{q_1}=b_2x_2^{q_2}=\cdots=b_Nx_N^{q_N}$
4.4.14	$\sum_1^N\{x_n/(1+x_n)\}\leqq N\left(\prod_1^N x_n\right)^{1/N}\Big/\left\{1+\left(\prod_1^N x_n\right)^{1/N}\right\}$ on $\underbrace{(0,\infty)\times(0,\infty)\times\cdots\times(0,\infty)}_{N\text{-個}}$	$x_1=x_2=\cdots=x_N$
4.4.15	$\min(x,y)\leqq\frac{1}{4}\left(x+\frac{y}{x}\right)^2$ for $0<x+\frac{y}{x}<2$ $\leqq x+\frac{y}{x}-1$ for $x+\frac{y}{x}>2$ on $(0,\infty)\times(0,\infty)$	$x^2=y$ for $0<x+\frac{y}{x}\leqq 2$ $x=y$ for $x+\frac{y}{x}>2$
4.4.16 [h]	$\sum_1^N\frac{a_nx_n}{a_n+x_n}\leqq\frac{(\sum_1^N a_n)(\sum_1^N x_n)}{\sum_1^N(a_n+x_n)}$ on $R_+{}^N$	$\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=\cdots=\frac{x_N}{a_N}$
4.4.17	$\prod_1^N x_n\leqq\left[\frac{\{\prod_1^N(a_n+x_n)\}^{1/N}}{(\prod_1^N a_n)^{1/N}}-1\right]^N\cdot\left(\prod_1^N a_n\right)$ on $R_+{}^N$	$\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=\cdots=\frac{x_N}{a_N}$

[e] $\prod_1^0 x_k=1$

[f] $a_n>0,\ b_n>0,\ q_n>0,\ 1\leqq n\leqq N$ は定数。

[g] $a_n>0,\ b_n>0,\ 1\leqq n\leqq N$ は定数。$p_n>0,\ q_n>0,\ 1\leqq n\leqq N$ は正の奇数。

[h] $a_n>0,\ 1\leqq n\leqq N$ は定数。Milne-Crystle の不等式という。

5. 逐次準線形化不等式

前3，4節では動的計画法の基本原理である最適性の原理をいわば直感的に適用して再帰式を導いた。本節では，まず，最適性の原理と数学的に同値なマクシマックス定理を述べて，この定理と凸関数の準線形化技法を繰り返し用いて得られる不等式を紹介する。

X，Y を空でない集合とし，$X \ni$ 各 x に対し $Y(x)$ を Y の空でない部分集合とする。すなわち $Y(\cdot): X \longrightarrow 2^Y$ を点対集合値写像とする。ただし 2^Y は集合 Y の空でない部分集合の全体とする。集合値写像 $Y(\cdot)$ のグラフを

$$Gr(Y)=\{(x,y)|\, y\in Y(x),\ x\in X\}\subset X\times Y$$

で定義する。

補題 5.1 （マクシマックス定理 [27；p. 268]） 関数 $f: X\times R^1 \longrightarrow R^1$ は各 $x\in X$ に対して $f(x;\cdot): R^1 \longrightarrow R^1$ が非減少とする。 関数 g は $g: Gr(Y) \longrightarrow R^1$ とする。このとき，$\underset{x\in X}{\mathrm{Max}}\, f(x;\ \underset{y\in Y(x)}{\mathrm{Max}}\, g(x,y))$ が存在すれば，$\underset{(x,y)\in Gr(Y)}{\mathrm{Max}}\, f(x;\ g(x,y))$ も存在して，両者は等しい。

$$\underset{x\in X}{\mathrm{Max}}\, f(x;\ \underset{y\in Y(x)}{\mathrm{Max}}\, g(x,y)) = \underset{(x,y)\in Gr(Y)}{\mathrm{Max}}\, f(x;\ g(x,y)). \tag{9}$$

この等号は，Max を min に替えても，この条件のままで成り立つ。さらに，特別な場合には

$$\underset{x\in R^1}{\mathrm{Max}}\, f(x;\ \underset{y\in R^1}{\mathrm{Max}}\, g(y)) = \underset{x,y\in R^1}{\mathrm{Max}}\, f(x;\ g(y)) \tag{10}$$

になる。

一般に，任意の微分可能な凸関数 $f: R^1 \longrightarrow R^1$ に対して

$$\begin{aligned} f(h) &= \underset{x\in R^1}{\mathrm{Max}}\ [f(x)+(h-x)f'(x)] \\ &= \underset{x\in R^1}{\mathrm{Max}}\ [F(x)+f'(x)h] \\ &= \underset{x\in R^1}{\mathrm{Max}}\ f(x\,;h) \end{aligned} \tag{11}$$

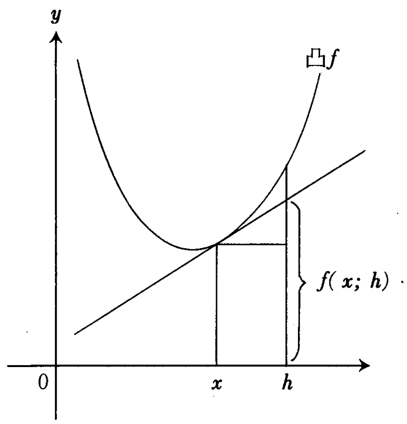

図 1

が成り立つ。ただし

$$F(x) = f(x) - xf'(x)$$
$$f(x\,;h) = F(x) + f'(x)h. \tag{12}$$

表現(11)は関数 $f(h)$ の**準線形化**である([5 ; p. 135])。さらに，補題5.1より，$f'(x) \geqq 0 \ x \in R^1$ の下では

$$\begin{aligned} f(f(h)) &= \operatorname*{Max}_{x_1 \in R^1} [F(x_1) + f'(x_1)f(h)] \\ &= \operatorname*{Max}_{x_1 \in R^1} [F(x_1) + f'(x_1)[\operatorname*{Max}_{x_2 \in R^1} [F(x_2) + f'(x_2)h]]] \\ &= \operatorname*{Max}_{x_1, x_2 \in R^1} [F(x_1) + f'(x_1)F(x_2) + f'(x_1)f'(x_2)h] \\ &= \operatorname*{Max}_{x_1, x_2 \in R^1} f(x_1\,;\, f(x_2\,;h)) \end{aligned} \tag{13}$$

が成り立つ。したがって，関数 $f:\ R^1 \longrightarrow R^1$ と自然数 N に対して

$$F(x\,;h) = f(x_1\,; f(x_2\,; \cdots ; f(x_N\,;h)\cdots))$$
$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_N) \in R^N$$

とすれば，次の定理を得る。

定理 5.1 (i) 関数 $f:\ R^1 \longrightarrow R^1$ が微分可能な増加凸ならば，不等式

$$f^N(h) \geqq F(x\,;h) \qquad (x, h) \in R^{N+1} \tag{14}$$

が成立する。等号は

$$x_1 = f^{N-1}(h),\ x_2 = f^{N-2}(h),\ \cdots,\ x_{N-1} = f(h),\ x_N = h$$

のときに限る。

(ii) 関数 $g:\ R^1 \longrightarrow R^1$ が微分可能な増加凹ならば，不等式

$$g^N(k) \leqq G(y\,;k) \qquad (y, k) \in R^{N+1} \tag{15}$$

が成立する。等号は

$$y_1 = g^{N-1}(k),\ y_2 = g^{N-2}(k),\ \cdots,\ y_{N-1} = g(k),\ y_N = k$$

のときに限る。ただし

$$f^n(x) = f(f(\cdots f(x)\cdots))$$
$$G(y\,;k) = g(y_1\,; g(y_2\,; \cdots ; g(y_N\,;k)\cdots))$$
$$g(y\,;k) = G(y) + g'(y)k$$
$$G(y) = g(y) - yg'(y)$$
$$y = (y_1, y_2, \cdots, y_N).$$

定理5.1の不等式はそれぞれ

$$f^N(h) \geqq F(x_1)+f'(x_1)F(x_2)+\cdots+f'(x_1)f'(x_2)\cdots f'(x_{N-1})F(x_N) \\ +f'(x_1)f'(x_2)\cdots f'(x_N)h, \tag{16}$$

$$g^N(k) \leqq G(y_1)+g'(y_1)G(y_2)+\cdots+g'(y_1)g'(y_2)\cdots g'(y_{N-1})G(y_N) \\ +g'(y_1)g'(y_2)\cdots g'(y_N)k \tag{17}$$

で表される。

5.1. 逆と反転と共役と

まず逆を考えよう。関数 f: $R^1 \longrightarrow R^1$ が上への微分可能な狭義増加凸であるための必要十分条件は，逆関数 f^{-1}: $R^1 \longrightarrow R^1$ が上への微分可能な狭義増加凹であるから，次の系が得られる。

系　（i）関数 f: $R^1 \longrightarrow R^1$ が上への微分可能な狭義増加凸ならば，不等式

$$f^{-N}(k) \leqq F^{-1}(y\,;k) \qquad (y,k) \in R^{N+1} \tag{18}$$

が成立する。等号は

$$y_1 = f^{-N+1}(k),\ y_2 = f^{-N+2}(k),\ \cdots,\ y_{N-1} = f^{-1}(k),\ y_N = k$$

のときに限る。ただし

$$f^{-n}(y) = f^{-1}(f^{-1}(\cdots f^{-1}(y)\cdots))$$
$$F^{-1}(y) = f^{-1}(y) - yf^{-1\prime}(y)$$
$$f^{-1}(y\,;k) = F^{-1}(y) + f^{-1\prime}(y)k$$
$$F^{-1}(y\,;k) = f^{-1}(y_1\,;f^{-1}(y_2\,;\cdots\,;f^{-1}(y_N\,;k)\cdots)).$$

（ii）関数 g: $R^1 \longrightarrow R^1$ が上への微分可能な狭義増加凹ならば，不等式

$$g^{-N}(h) \geqq G^{-1}(x\,;h) \qquad (x,h) \in R^{N+1} \tag{19}$$

が成立する。等号は

$$x_1 = g^{-N+1}(h), x_2 = g^{-N+2}(h), \cdots, x_{N-1} = g^{-1}(h), x_N = h$$

のときに限る。ただし

$$G^{-1}(x) = g^{-1}(x) - xg^{-1\prime}(x)$$
$$g^{-1}(x\,;h) = G^{-1}(x) + g^{-1\prime}(x)h$$
$$G^{-1}(x\,;h) = g^{-1}(x_1\,;g^{-1}(x_2\,;\cdots\,;g^{-1}(x_N\,;h)\cdots)).$$

系の中の不等式は次のようになる。

$$f^{-N}(k) \leqq F^{-1}(y_1)+f^{-1\prime}(y_1)F^{-1}(y_2)+\cdots+f^{-1\prime}(y_1)f^{-1\prime}(y_2)\cdots f^{-1\prime}(y_{N-1})F^{-1}(y_N)$$

$$+f^{-1\prime}(y_1)f^{-1\prime}(y_2)\cdots f^{-1\prime}(y_N)k \tag{20}$$

$$g^{-N}(h) \geqq G^{-1}(x_1)+g^{-1\prime}(x_1)G^{-1}(x_2)+\cdots+g^{-1\prime}(x_1)g^{-1\prime}(x_2)\cdots g^{-1\prime}(x_{N-1})G^{-1}(x_N)$$
$$+g^{-1\prime}(x_1)g^{-1\prime}(x_2)\cdots g^{-1\prime}(x_N)h \tag{21}$$

次に，2 変数関数 $f(x\,;h)$ の反転を考えよう。 任意の微分可能な狭義増加凸関数 $f\colon R^1 \longrightarrow R^1$ に対して

$$\begin{aligned} f(x\,;h) &= f(x)+(h-x)f'(x) \\ &= F(x)+f'(x)h \end{aligned} \tag{22}$$

で定義された 2 変数関数 $f(x\,;h)$ は，各 $x \in R^1$ を固定すると h の連続狭義増加関数だから，その逆関数 $f_{-1}(x\,;\cdot)$ が

$$\begin{aligned} f_{-1}(x\,;k) &= x-\frac{f(x)}{f'(x)}+\frac{k}{f'(x)} \\ &= F_{-1}(x)+\frac{k}{f'(x)} \end{aligned} \tag{23}$$

として定義される。ただし

$$F_{-1}(x) = x-\frac{f(x)}{f'(x)} \;.$$

$f_{-1}(x\,;k)$ を $f(x\,;h)$ の**反転関数** (reverse function) という。準線形化技法によれば，微分可能な狭義増加凸 f に対して

$$\begin{aligned} f(h) &= \underset{x\in R^1}{\mathrm{Max}}\, f(x\,;h) \\ &= \underset{x\in R^1}{\mathrm{Max}}\, [F(x)+f'(x)h] \qquad h \in R^1 \\ &= \underset{x\in R^1}{\mathrm{Max}}\, [f(x)-xf'(x)+f'(x)h] \end{aligned} \tag{24}$$

かつ $x^* = h$ が最大点であった。これはまた次に同値である。

$$\begin{aligned} f^{-1}(k) &= \min_{x\in R^1} f_{-1}(x\,;k) \\ &= \min_{x\in R^1}\left[F_{-1}(x)+\frac{k}{f'(x)}\right] \\ &= \min_{x\in R^1}\left[x-\frac{f(x)}{f'(x)}+\frac{k}{f'(x)}\right] \end{aligned} \tag{25}$$

かつ $\hat{x} = f^{-1}(k)$ が最小点である（図 2 ）。この事実は，Newton 法の考え方を最適化の立場から見直したことになっている。

定理 5.2 （i）関数 $f\colon R^1 \longrightarrow R^1$ が微分可能な狭義増加凸ならば，不等式

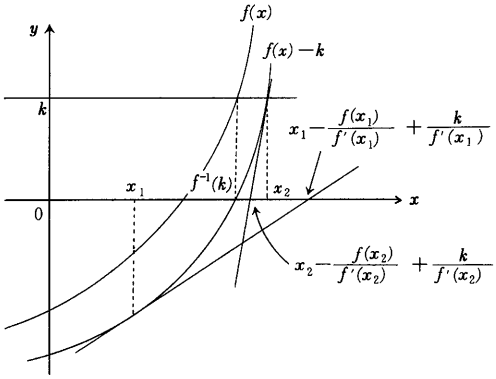

図 2

$$f^{-N}(k) \leqq F_{-1}(x\,;k) \qquad (x, k) \in R^{N+1} \tag{26}$$

が成立する。等号は

$$x_1 = f^{-N}(k),\ x_2 = f^{-N+1}(k),\ \cdots,\ x_{N-1} = f^{-2}(k),\ x_N = f^{-1}(k)$$

のときに限る。ただし

$$F_{-1}(x\,;k) = f_{-1}(x_1\,;f_{-1}(x_2\,;\cdots\,;f_{-1}(x_N\,;k)\cdots)).$$

(ii) 関数 g: $R^1 \longrightarrow R^1$ が微分可能な狭義増加凹ならば，不等式

$$g^{-N}(h) \geqq G_{-1}(y\,;h) \qquad (y, h) \in R^{N+1} \tag{27}$$

が成立する。等号は

$$y_1 = g^{-N}(h),\ y_2 = g^{-N+1}(h),\ \cdots,\ y_{N-1} = g^{-2}(h),\ y_N = g^{-1}(h)$$

のときに限る。ただし

$$G_{-1}(y) = y - \frac{g(y)}{g'(y)}$$

$$g_{-1}(y\,;h) = G_{-1}(y) + \frac{h}{g'(y)}$$

$$G_{-1}(y\,;h) = g_{-1}(y_1\,;g_{-1}(y_2\,;\cdots\,;g_{-1}(y_N\,;h)\cdots)).$$

定理5.2の不等式は次になっている。

$$f^{-N}(k) \leqq F_{-1}(x_1) + \frac{F_{-1}(x_2)}{f'(x_1)} + \cdots + \frac{F_{-1}(x_N)}{f'(x_1)f'(x_2)\cdots f'(x_{N-1})} + \frac{k}{f'(x_1)f'(x_2)\cdots f'(x_N)} \tag{28}$$

$$g^{-N}(h) \geqq G_{-1}(y_1) + \frac{G_{-1}(y_2)}{g'(y_1)} + \cdots + \frac{G_{-1}(y_N)}{g'(y_1)g'(y_1)\cdots g'(y_{N-1})} + \frac{h}{g'(y_1)g'(y_2)\cdots g'(y_N)}\ . \tag{29}$$

定理 5.3 （i）関数 $f:\ R^1 \longrightarrow R^1$ は上への微分可能な狭義増加凸とする。単調変換 $y=f(x)$ によって $F^{-1}(y\,;\,k)$ は $F_{-1}(x\,;k)$ になる。また，単調変換 $y_n=f(x_n)$ $1\leqq n\leqq N$ によって $F^{-1}(y\,;\,k)$ は $F_{-1}(x\,;k)$ になる。

（ii）関数 $g:\ R^1 \longrightarrow R^1$ は上への微分可能な狭義増加凹とすると，単調変換 $x=g(y)$ によって $G^{-1}(x\,;h)$ は $G_{-1}(y\,;h)$ になる。また，単調変換 $x_n=g(y_n)$ $1\leqq n\leqq N$ によって $G^{-1}(x\,;h)$ は $G_{-1}(y\,;h)$ になる。

最後に，共役作用素 $*$ と $\wedge$ を考えよう。一般に，任意の凸関数 $f:\ R^1 \longrightarrow R^1$ にその共役関数 f^* を

$$f^*(y)=\operatorname*{Sup}_{x\in R^1}[xy-f(x)] \qquad y\in R^1 \tag{30}$$

で定義し，凹関数 $g:\ R^1 \longrightarrow R^1$ に対してはその共役関数 $\hat{f}$ を

$$\hat{g}(x)=\inf_{y\in R^1}[yx-g(y)] \qquad x\in R^1 \tag{31}$$

で定める。作用 $*$ と $\wedge$ は次の意味で双対をなしている。

$$\widehat{(-f)}(y)=-f^*(-y) \qquad y\in R^1$$

補題 5.2 関数 $f:\ R^1 \longrightarrow R^1$ は 2 回微分可能で狭義増加狭義凸とする。このとき，$f'(-\infty)<y<f'(\infty)$ に対して次が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} && f^*(y)=xy-f(x)\\
&\text{(ii)} && f^{*\prime}(y)=x\ ,\ \ \text{特に}\ f^{*\prime}(y)>0\ (f'(0)<y<f'(\infty)\ \text{のとき})\\
&\text{(iii)} && f^{*\prime\prime}(y)=\frac{1}{f'(x)}>0
\end{aligned} \tag{32}
$$

ただし x は $f'(x)=y$ を満たす（唯一の実数）。

したがって，$f^*:\ (f'(0),f'(\infty))\longrightarrow R^1$ は狭義増加・狭義凸であるから，次の定理が得られる。

定理 5.4 関数 $f:\ R^1 \longrightarrow R^1$ は 2 回微分可能で狭義増加・狭義凸とすると，$f'(0)<y_n<f'(\infty)$，$f'(0)<f^{*n}(h)<f'(\infty)$ $1\leqq n\leqq N$ なる (y,h) に対して

$$f^{*N}(h)\geqq F^*(y\,;h) \tag{33}$$

が成立する。等号は

$$y_1=f^{*(N-1)}(h),\ y_2=f^{*(N-2)}(h),\ \cdots,\ y_{N-1}=f^*(h),\ y_N=h$$

のときに限る。ただし

$$F^*(y)=f^*(y)-yf^{*\prime}(y)$$
$$f^*(y\,;h)=F^*(y)+f^{*\prime}(y)h$$

$$F^*(y\,;\ h) = f^*(y_1\,; f^*(y_2\,; \cdots; f^*(y_N\,; h)\cdots)).$$

この不等式は次のよう書ける。

$$f^{*N}(h) \geqq F^*(y_1) + f^{*\prime}(y_1)F^*(y_2) + \cdots + f^{*\prime}(y_1)f^{*\prime}(y_2)\cdots f^{*\prime}(y_{N-1})F^*(y_N)$$
$$+ f^{*\prime}(y_1)f^{*\prime}(y_2)\cdots f^{*\prime}(y_N)h. \tag{34}$$

同様に凹関数については次のとおり。

補題 5.3　関数 $g: R^1 \longrightarrow R^1$ は 2 回微分可能で狭義増加・狭義凹とする。このとき，$g'(\infty) < x < g'(-\infty)$ なる x に対して次が成り立つ。

（i）　$\hat{g}(x) = yx - g(y)$

（ii）　$\hat{g}'(x) = y$ ，特に $\hat{g}'(x) > 0\,(y'(\infty) < x < g'(0)$ のとき)

（iii）　$\hat{g}'(x) = \dfrac{1}{g''(y)} < 0$

ただし y は一意に $g'(y) = x$ を満たすもの。

定理 5.5　関数 $g: R^1 \longrightarrow R^1$ は 2 回微分可能で狭義増加・狭義凹とすると，$g'(\infty) < x_n < g'(0)$, $g'(\infty) < \hat{g}^n(k) < g'(0)$ $1 \leqq n \leqq N$ なる (x, k) に対して

$$\hat{g}^N(k) \geqq \hat{G}(x\,; k) \tag{36}$$

が成立する。等号は

$$x_1 = \hat{g}^{N-1}(k),\ x_2 = \hat{g}^{N-2}(k),\ \cdots,\ x_{N-1} = \hat{g}(k),\ x_N = k$$

のときに限る。ただし

$$\hat{G}(x) = \hat{g}(x) - x\hat{g}'(x)$$
$$\hat{g}(x\,; k) = \hat{G}(x) + \hat{g}'(x)k$$
$$\hat{G}(x\,; k) = \hat{g}(x_1\,; \hat{g}(x_2\,; \cdots; \hat{g}(x_N\,; k)\cdots)).$$

この不等式は次のように表される。

$$\hat{g}^N(k) \geqq \hat{G}(x_1) + \hat{g}'(x_1)\hat{G}(x_2) + \cdots + \hat{g}'(x_1)\hat{g}'(x_2)\cdots\hat{g}'(x_{N-1})\hat{G}(x_N)$$
$$+ \hat{g}'(x_1)\hat{g}'(x_2)\cdots\hat{g}'(x_N)k. \tag{37}$$

5.2. 例　　題

この節では，代表的な凸関数 f を与えて，$f^{-1} \equiv g$，f_{-1}，f^*，$\hat{g}$，F，F^{-1}，F_{-1}，F^*，G，G^{-1}，$G_{-1}, \cdots$ などを計算して逐次準線形化不等式（主）$f^N(h) \geqq F(x\,; h)$，（逆）$f^{-N}(k) \leqq F^{-1}(y\,; k)$，（反転）$f^{-N}(h) \leqq F_{-1}(x\,; k), \cdots$ などを具体的に求める。

5.2.1. $f(x)=e^x:(-\infty,\infty)\longrightarrow(0,\infty)$

この関数 f は上への狭義増加な狭義凸関数で，線形近似は

$$f(x\,;h)=(1-x+h)e^x \quad -\infty<x,h<\infty$$

になり，逐次準線形化不等式

$$(\text{主})\qquad \underset{(N\text{ 個の }e)}{e^{e^{\cdots e^{e^h}}}} \geqq e^{x_1}(1-x_1)+e^{x_1+x_2}(1-x_2)+\cdots$$
$$+e^{x_1+x_2+\cdots+x_{N-1}}(1-x_N)+e^{x_1+x_2+\cdots+x_N}h \qquad (x,h)\in R^{N+1}$$

が得られる。等号は

$$x_1=\underset{((N-1)\text{ 個の }e)}{e^{e^{\cdots e^h}}},\quad x_2=\underset{((N-2)\text{ 個の }e)}{e^{\cdots e^h}},\quad \cdots,\quad x_{N-1}=e^h,\quad x_N=h$$

のときに限る。 ただし，この例では $e^{e^{\cdots e^h}}$ 等については特に印刷上

$$e^{e\cdots e^h}=e^{e^{\cdots e^h}}$$

とする。 さて，この不等式の逆については

$$g(y)=f^{-1}(y)=\log y:\ (0,\infty)\longrightarrow(-\infty,\infty)$$
$$g(y\,;k)=f^{-1}(y\,;k)=-1+\log y+\frac{k}{y} \qquad 0<y,\ k<\infty$$

だから，不等式

$$(\text{逆})\qquad \underset{(N\text{ 個の }\log)}{\log\log\cdots\log\log k} \leqq -1+\log y_1+\frac{-1+\log y_2}{y_1}+\cdots$$
$$+\frac{-1+\log y_N}{y_1y_2\cdots y_{N-1}}+\frac{k}{y_1y_2\cdots y_N} \qquad 0<y_n<\infty,\ k\gg 0$$

になる。等号は

$$y_1=\underset{((N-1)\text{ 個})}{\log\log\cdots\log k},\quad y_2=\underset{((N-2)\text{ 個})}{\log\cdots\log k},\quad \cdots,\quad y_{N-1}=\log k,\quad y_N=k$$

のときに限る。ただし，$k\gg 0$ は k が十分大きな正数であることを示す。ここでも次の反転不等式においても $\log\log\cdots\log\log k$（N 回の log 作用）が well-defined になる程の正数。すなわち

$$k>\begin{cases}0\\ 1\\ e^{\cdots e}\\ ((N-2)\text{個の }e)\end{cases} \qquad N\begin{cases}=1\\ =2\\ \geqq 3\end{cases}\quad \text{のとき.}$$

この反転は，

$$f_{-1}(x\,;k)=x-1+e^{-x}k \quad -\infty<x<k\ ,\quad 0<k<\infty$$

より，

(反転)　$\underset{(N\text{個の}\log)}{\log\log\cdots\log\log k} \leqq x_1-1+e^{-x_1}(x_2-1)+\cdots+e^{-x_1-x_2-\cdots-x_{N-1}}(x_N-1)+e^{-x_1-x_2-\cdots-x_N}k$

$$-\infty < x_n < \infty, \qquad k \gg 0$$

になる。等号は

$$x_1 = \underset{(N\text{個})}{\log\log\cdots\log\log k},\ x_2 = \underset{((N-1)\text{個})}{\log\log\cdots\log k},\ \cdots,\ x_{N-1} = \log\log k,\ x_N = \log k$$

のときに限る。

さらに共役については

$$f^*(y) = (-1+\log y)y : (0, \infty) \longrightarrow [-1, \infty)$$
$$f^{*\prime}(y) = \log y > 0 \qquad 1 < y < \infty$$
$$f^{*\prime}(y) = 1/y > 0$$
$$f^*(y\,;k) = -y+k\log y \qquad y > 1\ ,\quad k > 1$$

だから，不等式

(共役)　$f^{*N}(k) \geqq -y_1-y_2\log y_1-\cdots-y_N\log y_1\log y_2\cdots\log y_{N-1}+k\log y_1\log y_2\cdots\log y_N$

$$y_n > 1, \qquad k > e^2$$

が成立する。等号は

$$y_1 = f^{*(N-1)}(k),\ y_2 = f^{*(N-2)}(k),\ \cdots,\ y^*_{N-1} = f^*(k),\ y^*_N = k$$

のときに限る。

さらに，関数 $f(x) = e^x$ の逆関数 $g(y) = f^{-1}(y) = \log y$ の共役については，

$$\hat{g}(x) = 1+\log x : (0, \infty) \longrightarrow (-\infty, \infty)$$
$$\hat{g}(x\,;h) = \log x+\frac{h}{x} \quad 0 < x, h < \infty$$

になり，不等式

$$\hat{g}^N(h) \leqq \log x_1+\frac{\log x_2}{x_1}+\cdots+\frac{\log x_N}{x_1x_2\cdots x_{N-1}}+\frac{h}{x_1x_2\cdots x_N}$$
$$x_n > 0,$$
$$h > e^{-1+e^{-1+e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{-1-e^{-1}}}}}}} \quad (N\text{個の}\ e) \tag{38}$$

が成立する。等号は

$$x_1 = \hat{g}^{N-1}(h),\ x_2 = \hat{g}^{N-2}(h),\ \cdots,\ x_{N-1} = \hat{g}(h),\ x_N = h$$

のときに限る。次に，$g(y) = \log y$ の一次近似 $g(y\,;k) = -1+\log y+\dfrac{k}{y}$ の反転は

$$g_{-1}(y\,;h) = y(1-\log y)+yh \qquad y > 0\ ,\quad -\infty < h < \infty$$

だから，不等式

$$g^{-N}(h) \geqq y_1(1-\log y_1)+y_1y_2(1-\log y_2)+\cdots$$
$$+y_1y_2\cdots y_N(1-\log y_N)+y_1y_2\cdots y_Nh \qquad y_n>0,\ -\infty<h<\infty \tag{39}$$

と等号条件

$$y_1=g^{-N}(h),\quad y_2=g^{-N+1}(h),\quad \cdots,\quad y_{N-1}=g^{-2}(h),\quad y_N=g^{-1}(h)$$

を得る。ただし

$$g^{-n}(h)=e^{\cdots e^h}\ (n\text{ 個の } e).$$

また，$\hat{g}(x)=1+\log x$ の一次近似 $\hat{g}(x\,;h)=\log x+\dfrac{k}{x}$ の反転は

$$\hat{g}_{-1}(x\,;k)=-x\log x+xk \qquad x>0$$

だから，不等式

$$\hat{g}^{-N}(k) \geqq -x_1\log x_1-x_1x_2\log x_2-\cdots-x_1x_2\cdots x_N\log x_N+x_1x_2\cdots x_Nk$$
$$x_n>0\ ,\quad -\infty<k<\infty \tag{40}$$

と等号条件

$$x^1=\hat{g}^{-N}(k),\quad x_2=\hat{g}^{-N+1}(k),\quad \cdots,\quad x_{N-1}=\hat{g}^{-2}(k),\quad x_N=\hat{g}^{-1}(k)$$

が得られる。ここに

$$\hat{g}^{-1}(k)=e^{k-1}$$
$$\hat{g}^{-n}=\hat{g}^{-1}(\hat{g}^{-1}(\cdots\hat{g}^{-1}(k)\cdots)) \quad n\text{ 回繰り返し合成関数。}$$

5.2.2. $f(x)=x^2:\ [0,\infty]\longrightarrow[0,\infty]$

この関数 f も上への狭義増加な狭義凸関数で

$$f(x\,;h)=-x^2+2xh \qquad x\geqq 0\ ,\quad h\geqq 0$$

だから，逐次準線形化不等式

(主) $$h^{2^N} \geqq -x_1^2-2x_1x_2^2-\cdots-2^{N-1}x_1x_2\cdots x_{N-1}x_N^2+2^Nx_1x_2\cdots x_Nh \qquad x_n\geqq 0\ ,\quad h\geqq 0$$

が成り立つ。等号は

$$x_1=h^{2^{N-1}},\quad x_2=h^{2^{N-2}},\quad \cdots,\quad x_{N-1}=h^2,\quad x_N=h$$

のときに限る。この不等式の $N=1$ のときは，最も簡単な準線形化([5 ; p. 134])

$$\underset{-\infty<x<\infty}{\mathrm{Max}}\,[2xh-x^2]=h^2 \qquad -\infty<h<\infty \tag{41}$$

に同値である。さて，逆は

$$g(y)=f^{-1}(y)=\sqrt{y}:\ [0,\infty]\longrightarrow[0,\infty]$$
$$g(y\,;k)=f^{-1}(y\,;k)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{y}+\frac{k}{\sqrt{y}}\right) \qquad y,k>0$$

だから，不等式

$$\text{(逆)}\qquad k^{1/2^N} \leqq \frac{1}{2}\sqrt{y_1}+\frac{1}{2^2}\sqrt{\frac{y_2}{y_1}}+\cdots+\frac{1}{2^N}\sqrt{\frac{y_N}{y_1y_2\cdots y_{N-1}}}+\frac{k}{2^N\sqrt{y_1y_2\cdots y_N}}$$

$$y_n>0\ ,\ k>0$$

が成立する。等号は

$$y_1=k^{1/2^{N-1}},\quad y_2=k^{1/2^{N-2}},\quad \cdots,\quad y_{N-1}=k^{1/2},\quad y_N=k$$

のときに限る。特に，$N=1$ のときは，この不等式は準線形化

$$\min_{x>0}\left[\frac{1}{2}\sqrt{x}+\frac{k}{2\sqrt{x}}\right]=\sqrt{k}\qquad k>0 \tag{42}$$

に同値である（[5；p. 134]）。次に反転については，

$$f_{-1}(x\,;k)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{k}{x}\right)\qquad x,k>0$$

より，不等式

$$\text{(反転)}\qquad k^{1/2N} \leqq \frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2^2}\frac{x_2}{x_1}+\cdots+\frac{1}{2^N}\frac{x_N}{x_1x_2\cdots x_{N-1}}+\frac{k}{2^Nx_1x_2\cdots x_N}$$

$$x_n>0\ ,\ k>0$$

と等号条件

$$x_1=k^{1/2^N},\quad x_2=k^{1/2^{N-1}},\quad \cdots,\quad x_{N-1}=k^{1/2^2},\quad x_N=k^{1/2}$$

で表される。これは Bellman[5：p. 58]が考えたであろう不等式

$$2^{2(1-1/2^N)}k^{1/2^N} \leqq x_1+\frac{x_2}{x_1}+\cdots+\frac{x_N}{x_1x_2\cdots x_{N-1}}+\frac{k}{x_1x_2\cdots x_N}\qquad x_n>0\ ,\ k>0 \tag{43}$$

と等号条件

$$x_1=2^{(1-1/2^{N-1})}k^{1/2^N},\quad x_2=2^{(1-1/2^{N-2})}k^{1/2^{N-1}},\quad \cdots,\quad x_{N-1}=2^{1/2}k^{1/2^2},\quad x_N=k^{1/2}$$

に同値である。

次に，共役については，まず $f(x)=x^2$ に対しては

$$f^*(y)=\frac{1}{4}y^2\colon [0,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$$

$$f^*(y\,;k)=-\frac{1}{4}y^2+\frac{1}{2}yk\qquad y\geqq 0\ ,\quad k\geqq 0$$

だから，不等式

$$\text{(共役)}\qquad \frac{1}{4^{2^{N+1}-1}}k^{2^N} \geqq -\frac{1}{4}y_1^2-\frac{1}{4\cdot 2}y_1y_2^2-\cdots-\frac{1}{4\cdot 2^{N-1}}y_1y_2\cdots y_{N-1}y_N^2+\frac{1}{2^N}y_1y_2\cdots y_Nk\ ,$$

$$y_n\geqq 0\ ,\quad k\geqq 0$$

が成立する。等号は

$$y_1 = \frac{1}{4^{2^{N}-1}} k^{2^{N-1}}, \quad y_2 = \frac{1}{4^{2^{N-1}-1}} k^{2^{N-2}}, \quad \cdots, \quad y_{N-1} = 2^{-2} k^2, \quad y_N = k$$

のときに限る。

次に，$g(y) = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ の共役については

$$\widehat{g}(x) = -\frac{1}{4}x : (0, \infty) \longrightarrow (-\infty, 0)$$

$$\widehat{g}(x\,;h) = -\frac{1}{2x} + \frac{h}{4x^2} \qquad x > 0\ , \quad h > 0$$

になる。ここに，不等号

$$-\frac{1}{4x} \leqq -\frac{1}{2x} + \frac{h}{2x^2} \qquad x > 0\ , \quad h > 0$$

と等号条件

$$x = h$$

は得られるが，これを $N(\geqq 2)$ 変数 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$ の逐次不等式に拡張することはできない。なぜなら $\widehat{g}(h) < 0$，$h > 0$ だから。

5.2.3. $f(x) = x + \sqrt{\varepsilon^2 x^2 + 1} : (-\infty, \infty) \longrightarrow (-\infty, \infty) \quad 0 < \varepsilon < 1$

これは

$$f'(x) = 1 + \frac{\varepsilon^2 x}{\sqrt{\varepsilon^2 x^2 + 1}} > 0$$

$$f''(x) = \frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon^2 x^2 + 1)^{3/2}} > 0$$

だから，狭義増加・狭義凸である。また

$$f(x\,;h) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 x^2 + 1}} + \left(1 + \frac{\varepsilon^2 x}{\sqrt{\varepsilon^2 x^2 + 1}}\right)h \qquad -\infty < x\,, h < \infty$$

$$g(y) = f^{-1}(y) = \frac{y - \sqrt{\varepsilon^2 y^2 + (1-\varepsilon^2)}}{1-\varepsilon^2} : (-\infty, \infty) \longrightarrow (-\infty, \infty)$$

になる。$F = F(x\,;h)$，$F^{-1} \equiv G$，F_{-1}，G_{-1}，f^*，$\widehat{g}$，F^*，$\widehat{G}$，$\cdots$ さらには，対応するそれぞれの不等式を書き下すことは余りにもスペースを要する。

5.2.4. $g(y) = y - \sqrt{\varepsilon^2 y^2 + 1} : (-\infty, \infty) \longrightarrow (-\infty, \infty) \quad 0 < \varepsilon < 1$

このときは

$$g'(y) = 1 - \frac{\varepsilon^2 y}{\sqrt{\varepsilon^2 y^2 + 1}} > 0$$

$$g''(y) = -\frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon^2y^2+1)^{3/2}} < 0$$

だから，g は狭義増加・狭義凹である。また

$$g(y\,;k) = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2y^2+1}}+\left(1-\frac{\varepsilon^2 y}{\sqrt{\varepsilon^2y^2+1}}\right)k \quad -\infty < y,\ k< \infty$$

$$f(x) = g^{-1}(x) = \frac{x+\sqrt{\varepsilon^2x^2+(1-\varepsilon^2)}}{1-\varepsilon^2} : (-\infty, \infty) \longrightarrow (-\infty, \infty)\ .$$

他の関数ならびに対応する不等式は省略する。

6. 積 分 不 等 式

この節では，第4節での古典的不等式の連続化すなわち積分化を考える。特に，Hölder, Minkowski, 算術平均・幾何平均の積分不等式を，離散(時間)の動的計画の再帰式に対応するベルマン方程式を実際に変数分離法で解くことによって，証明する。

本節では，$C_1 = C_1(R^1_+) = \{h \mid h\colon R^1_+ \longrightarrow R^1_+ \text{ 連続}\}$ として，一般に最大化問題

$$\begin{aligned} &\text{Max} \quad \int_0^T f(a(t), x(t))dt \\ &\text{s.t.} \quad \int_0^T g(a(t), x(t))dt \leqq c\ , \qquad c \geqq 0 \quad x \in C_1 \end{aligned}$$

を考える。ただし，$a \in C_+$，f，$g\colon R^1_+ \times R^1_+ \longrightarrow R^1_+$ は連続，$0 < T < \infty$. この最大値関数 $F\colon R^1_+ \times [0, T] \longrightarrow R^1_+$ を

$$F(c, t) = \max\left\{\int_t^T f(a(s), x(s))ds \,\middle|\, \int_t^T g(a(s), x(s))dx \leqq c,\ t \leqq s \leqq T\right\}$$

で定義すると，ベルマンの最適性原理より，max を含んだ偏微分方程式 (Partial Differential Equation, PDE)

$$\begin{cases} -F_t = \max\limits_x\,[f(a(t), x)-g(a(t), x)F_c]\ , & 0 \leqq t < T\ ,\quad c \geqq 0 \\ F(c, T) = 0\ , \quad c \geqq 0 \end{cases}$$

が成り立つ。 与えられた問題の最大値はこれを解いて $F(c, 0)$ で与えられる。 この偏微分方程式を**後ろ向きのベルマン方程式**と呼ぶ。このとき積分を含む不等式

$$\int_0^T f(a(t), x(t))dt \leqq F\left(\int_0^T g(a(t), x(t))dt, 0\right) \tag{44}$$

が成り立つ。

他方，

$$\hat{F}(c,t)=\max\left\{\int_0^t f(a(s),x(s))ds \,\middle|\, \int_0^t g(a(s),x(s))ds \leqq c,\ 0\leqq s\leqq t\right\}$$

で定義される最大値関数 $\hat{F}:\ R^1_+\times[0,\,T]\longrightarrow R^1_+$ は前向きのベルマン方程式

$$\begin{cases}\hat{F}_t=\max\limits_x\,[f(a(t),x)-g(a(t),x)\hat{F}_c]\ , & 0<t\leqq T\ ,\quad c\geqq 0\\ \hat{F}(c,0)=0 & c\geqq 0\end{cases}$$

を満たす。これを解いて最大値 $\hat{F}(c,\,T)$ が得られ，結局，不等式

$$\int_0^T f(a(t),x(t))dt\leqq \hat{F}\left(\int_0^T g(a(t),x(t))dt,\,T\right)$$

が得られる。$F(c,0)=\hat{F}(c,\,T)$ だから，両不等式は一致する。

以下，簡単のために $\int_0^T$，$a(t)$，$x(t)$ などをそれぞれ略して $\int$，a，x などで表す。

6.1. Hölder の不等式

$p>1$ のとき，Hölder の不等式は次のように書ける。

$$\int axdt\leqq\left(\int a^q dt\right)^{1/q}\left(\int x^p dt\right)^{1/p}\quad x\in C_+$$

ここに $a\in C_+$，$q=p/(p-1)$. $0<p<1$ のときは，$\leqq$ は逆向き $\geqq$ になる。どちらの場合でも，等号は $x=ka^p$ のときに限る。ただし k は定数。

$p>1$ として，最大値問題

$$\begin{aligned}&\text{Max} && \int axdt\\ &\text{s.t.} && \int x^p dt\leqq c\ ,\quad c\geqq 0\\ &&& x\in C_+\end{aligned}$$

を考える。このとき

$$F(c,t)=\max\left\{\int_t^T a(s)x(s)ds \,\middle|\, \int_t^T x^p(s)ds\leqq c\right\}$$

で定義される最大値関数 $F:\ R^1_+\times[0,\,T]\longrightarrow R^1_+$ は後向きベルマン方程式

$$\begin{cases}-F_t=\max\limits_x\,[a(t)x-F_c x^p] & 0\leqq t<T\ ,\quad c\geqq 0\\ F(c,\,T)=0 & c\geqq 0\end{cases}$$

を満たす。この最大化は

$$x=\left[\frac{a(t)}{pF_c}\right]^{1/(p-1)}$$

で到達されるから，max が取り除けて，

$$\begin{cases} -F_t=\dfrac{p-1}{p}[a(t)]^{p/(p-1)}/(pF_c)^{1/(p-1)} & 0\leqq t< T\ ,\quad c\geqq 0 \\ F(c,T)=0 & c\geqq 0 \end{cases}$$

になる。この PDE の解として $F(c,t)=\psi(t)\phi(c)$ なる型のものを求めよう。すると，

$$\phi(c)[\phi'(c)]^{1/(p-1)}=\frac{-[a(t)]^{p/(p-1)}}{(p/p-1)[\psi(t)]^{1/(p-1)}\psi'(t)p^{1/(p-1)}}\qquad 0\leqq t< T\ ,\quad c\geqq 0 \quad (45)$$

が得られる。右辺は t だけに依存し，左辺は t に無関係だから，両辺は同じ定数 λ でなければならない（[51；p. 63] 参照)。したがって，(45) から 2 つの(常)微分方程式 (Differential Equation, DE)

$$\phi^{p-1}(c)\phi'(c)=\lambda^{p-1}\ ,\quad \phi(0)=0\ ,$$

$$\frac{p}{p-1}[\psi(t)]^{1/(p-1)}\psi'(t)=\frac{[a(t)]^{p/(p-1)}}{\lambda p^{1/(p-1)}}\ ,\quad \psi(T)=0$$

が分離された。ここに，ϕ の初期値は 0 に設定した。これらは簡単な求積法で解けてそれぞれ

$$\phi(c)=p^{1/p}\lambda^{(p-1)/p}c^{1/p}$$

$$\psi(t)=\frac{1}{\lambda^{(p-1)/p}p^{1/p}}\left[\int_t^T(a(s))^{p/(p-1)}ds\right]^{(p-1)/p}$$

が得られるから，求める最大値関数は

$$F(c,t)=\left[\int_t^T(a(s))^q ds\right]^{1/q}c^{1/p}$$

になり，(44) より，Hölder 不等式が成立する。

$0<p<1$ のときは，積分 $\int axdt$ と $\int x^p dt$ を交換して同様に議論すればよい。

6.2. Minkowski の不等式

$p>1$ のとき，Minkowski の不等式は次のように表される。

$$\int(a+x)^p dt\leqq\left[\left(\int a^p dt\right)^{1/p}+\left(\int x^p dt\right)^{1/p}\right]^p\qquad x\in C_+$$

ただし $a\in C_+$. $0<p<1$ のとき逆向きの不等号が成り立つ。等号は，$x=ka$ のときに限る。ただし k は定数。

さて，$p>1$ のときの最大値問題

$$\text{Max}\quad\int(a+x)^p dt$$

$$\text{s.t.} \quad \int x^p dt \leqq c \ , \qquad c \geqq 0 \quad x \in C_+$$

を解こう。このとき，

$$F(c,\, t) = \max\left\{\int_t^T [a(s) + x(s)]^p ds \middle| \int_t^T x^p(s) ds \leqq c\right\}$$

で定義される最大値関数 $F:\ R_+^1 \times [0,\, T] \longrightarrow R_+^1$ は後向きベルマン方程式

$$\begin{cases} -F_t = \max\limits_x [(a(t) + x)^p - F_c x^p] & 0 \leqq t < T \ , \quad c \geqq 0 \\ F(c,\, T) = 0 & c \geqq 0 \end{cases}$$

を満たし，これは

$$x = \frac{a(t)}{F_c^{1/(p-1)} - 1}$$

で最大になるから

$$\begin{cases} -F_t = F_c a^p(t) / (F_c^{1/(p-1)} - 1)^{p-1} & 0 \leqq t < T \ , \quad c \geqq 0 \\ F(c,\, T) = 0 & c \geqq 0 \end{cases}$$

に帰着する。この PDE を

$$F = [\psi(t) + \phi(c)]^p$$

と分離して整理すると

$$\begin{cases} p^{1/(p-1)} \phi(c) - \dfrac{1}{[\phi'(c)]^{1/(p-1)}} = \dfrac{[a(t)]^{p/(p-1)}}{[-\psi'(t)]^{1/(p-1)}} - p^{1/(p-1)} \psi(t) \\ \psi(T) = -\phi(c) \end{cases}$$

になり，両辺は共通の定数 λ でなければならないから，2つの DE

$$p\left[\phi(c) - \frac{\lambda}{p^{1/(p-1)}}\right]^{p-1} \phi'(c) = 1 \ , \quad \phi(0) = \frac{\lambda}{p^{1/(p-1)}}$$

$$p\left[\psi(t) + \frac{\lambda}{p^{1/(p-1)}}\right]^{p-1} \psi'(t) = -a^p(t) \ , \quad \psi(T) = \frac{\lambda}{p^{1/(p-1)}}$$

が得られる。ここに $\phi(0)$ を $\lambda / p^{1/(p-1)}$ にした。これらはそれぞれ一般解

$$\phi(c) = c^{1/p} + \lambda / p^{1/(p-1)}$$

$$\psi(t) = \left(\int_t^T a^p(s) ds\right)^{1/p} - \lambda / p^{1/(p-1)}$$

をもつから，最大値関数は

$$F(c,t)=\left[\left(\int_t^T a^p(s)ds\right)^{1/p}+c^{1/p}\right]^p$$

となり，(44) より，Minkowski の不等式が証明された。

$0<p<1$ のときは，積分 $\int(a+x)^p dt$ と $\int x^p dt$ を入れ替えて同様に計算すればよい。

6.3. 算術平均・幾何平均不等式

ここでは算術平均・幾何平均不等式

$$\frac{\int a\log x dt}{\int adt}\leqq \log\frac{\int axdt}{\int adt}\qquad x\in C_+$$

を証明しよう。ただし $a\in C_+$. 等号は $x=$ 定数のときに限る。

さて，最大値問題

$$\begin{aligned}&\text{Max}\quad \int a\log xdt\Big/\int adt\\ &\text{s.t.}\quad \log\frac{\int axdt}{\int adt}\leqq c\ ,\quad c\geqq 0\qquad x\in C_+\end{aligned}$$

に対して

$$F(c,t)=\max\left\{\int_t^T a(s)\log x(s)ds\Big/\int_t^T a(s)ds\,\Big|\int_t^T a(s)x(s)ds\leqq c\right\}$$

で定義される最大値関数 $F: R_+^1\times[0,T]\longrightarrow R^1$ は次のベルマン方程式を満たす。

$$\begin{cases}-F_t=\max\limits_x\left[\dfrac{a(t)\log x}{A(t)}-a(t)F_c x-\dfrac{a(t)F}{A(t)}\right] & 0\leqq t<T\ ,\quad c\geqq 0\\ F(c,T)=0\qquad c\geqq 0.\end{cases}$$

ただし $A(t)=\int_t^T a(s)ds$. [　] 内は

$$x=\frac{1}{F_c A(t)}$$

で最大になるから，ベルマン方程式は PDE

$$\begin{cases}F_t=\dfrac{a(t)}{A(t)}[\log A(t)+\log F_c+F+1] & 0\leqq t<T\ ,\quad c\geqq 0\\ F(c,T)=0\qquad c\geqq 0\end{cases}$$

になる。これを

$$F = \log\left[\phi(c)/\psi(t)\right]$$

なる型に分離すれば，

$$\begin{cases} \log \phi'(c) = \log \psi(t) - \log A(t) + [\log \psi(t)]'/\log A(t)]' - 1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \leqq t < T \ , \quad c \geqq 0 \\ \phi(c) = \psi(T) \qquad c \geqq 0 \end{cases}$$

になる。したがって，両辺を λ とおき，$\psi(T) = 0$ とすれば，2 つの DE

$$\begin{cases} \phi'(c) = e^{\lambda} \ , \quad \phi(0) = 0 \\ \log \psi(t) - \log A(t) + [\log \psi(t)]'/[\log A(t)]' - 1 = \lambda \ , \quad \psi(T) = 0 \end{cases}$$

が得られる。第一の方程式からはただちに

$$\phi(c) = e^{\lambda} c.$$

第二の式は

$$[\log \psi(t)]' = [\log A(t)]' \ , \quad \psi(T) = 0$$

に注意すると，解として

$$\log \psi(t) = \lambda + \log A(t)$$

が得られる。結局，ベルマン方程式は，解

$$F(c, t) = \log\left[c/A(t)\right]$$

をもつ。したがって，算術平均・幾何平均不等式が証明された。

7. 不等式の逆と反転

この節では，不等式の逆と反転について考える。いずれも不等式の同値変形であるが，動的計画の考え方と深く結びついている。

7.1. 逆 理 論

われわれは，第 2，3，4，および 6 節ではもっぱら最大値問題だけを考えて，不等式を得てきた。不等式の逆理論とは，一言で言えば，最小値関題を解いて，やはり不等式の成立を証明することができ，最大値，最小値のいずれの問題を解いても得られる不等式は同値すなわち同一であるということである。ここに，最大値問題と最小値問題の対は，たとえば 2 節の問題群 P_1，P_2，P_3 についてはその

逆 I_1, I_2, I_3 との対であり，次のようになる。

$$\mathrm{P}_1 \qquad \mathrm{Max} \quad f(x) \quad \text{s.t.} \quad x \in X$$

$$\mathrm{I}_1 \qquad \min \quad g(x) \quad \text{s.t.} \quad x \in X \qquad (g(x) = -f(x))$$

$$\mathrm{P}_2(c) \qquad \mathrm{Max} \quad f(x) \quad \text{s.t.} \quad g(x) = c\ , \quad x \in X$$

$$\mathrm{I}_2(c) \qquad \min \quad g(x) \quad \text{s.t.} \quad g(x) = c\ , \quad x \in X$$

$$\mathrm{P}_3(c) \qquad \mathrm{Max} \quad f(x) \quad \text{s.t.} \quad g(x) \leqq c\ , \quad x \in X$$

$$\mathrm{I}_3(c) \qquad \min \quad g(x) \quad \text{s.t.} \quad f(x) \geqq c\ , \quad x \in X$$

このとき，定理2.1，2.2，2.3，2.4に対応する定理2.1′，2.2′，2.3′(以上省略)，2.4′がそれぞれ成立する。

定理 2.4′　問題群 I_3 を考える。関数 $V: <a, b> \longrightarrow <\alpha, \beta>$ は狭義増加とする。このとき，次の（i)′と（ii-a)′,（ii-b)′は同値である。

（i)′　問題群 I_3 が最小値関数 V をもつ。

（ii-a)′　$\forall x \in X \quad g(x) \geqq V(f(x))$

（ii-b)′　$\forall c \in <a, b> \quad \exists \hat{x} \in X \quad f(\hat{x}) = c\ , \quad g(\hat{x}) = V(f(\hat{x}))$.

また主問題群 P_3 の再帰式 (8) に対応する逆問題群 I_3 の再帰式は

$$\begin{cases} v^{N-n}(c) = \min\limits_{x_n;\ *} g_n(x_n\ ;\ v^{N-n+1}((f_n^{x_n})^{-1}(c))) \\ \\ v^0(c) = g_N(f_N^{-1}(c)) \end{cases} \tag{46}$$

になる。ただし＊は x_n が

$$x_n \in <d_n, e_n>\ , \quad (f_n^{x_n})^{-1}(c) \in \mathrm{range}\,(f_{n+1})$$

を満たしながら動くことを示す。この再帰式を $v^0 \to v^1 \to \cdots \to v^{N-1} \equiv V$ と解いて，逆問題 I_3 の最小値関数 V と同時に最小点関数 $\hat{x}$ を得ることによって不等式

$$g(x) \geqq V(f(x))$$

と等号条件が得られる。このとき次の逆関係が成り立つ。

定理 7.1. (逆定理)　(i) 主関題群 P_3 が上への連続狭義増加な最大値関数 $U: <\alpha, \beta> \longrightarrow <a,$

$b>$ と最大点関数 $x^* = (x_1^*, \cdots, x_N^*)$; $<\alpha, \beta> \longrightarrow X$ をもつならば，逆問題群 I_3 は，上への連続狭義増加な最小値関数 U^{-1} : $<a, b> \longrightarrow <\alpha, \beta>$ と最小点関数 $\hat{x} = (\hat{x}_1, \cdots, \hat{x}_N)$: $<a, b> \longrightarrow X$ をもつ。ただし，

$$\hat{x}_n = x_n^* \circ U^{-1} \quad 1 \leqq n \leqq N.$$

（ii）逆問題群 I_3 が上への連続狭義増加な最小値関数 V : $<a, b> \longrightarrow <\alpha, \beta>$ と最小点関数 $\hat{x} = (\hat{x}_1, \cdots, \hat{x}_N)$: $<a, b> \longrightarrow X$ をもつならば，主問題群 P_3 は上への連続狭義増加な最大値関数 V^{-1} : $<\alpha, \beta> \longrightarrow <a, b>$ と最大点関数 $x^* = (x_1^*, \cdots, x_N^*)$: $<\alpha, \beta> \longrightarrow X$ をもつ。ただし

$$x_n^* = \hat{x}_n \circ V^{-1} \quad 1 \leqq n \leqq N.$$

さらに，第 4，6 節の結果も，対応する最小値問題を個々に解いて不等式 $g(x) \geqq V(f(x))\ x \in X$ を得ることによって，証明される。詳細は省略する。

7.2. 反転理論

これは与えられた主関数 f を含む不等式と，反転関数 f_{-1} を含む不等式との間を関係づける理論である。反転関数は，逆関数の概念の逐次パラメトリックな拡張である。われわれは反転可能な関数として第 3 節が導入した狭義増加性をもつ再帰型関数を考える。

本節では次の記号をよく用いる。

$$R^N = \{x = (x_1, \cdots, x_N) | x_n \in R^1,\ n = 1, \cdots, N\} ;$$

$$\vec{x} = (x_1, \cdots, x_{N-1}) \ , \quad \overleftarrow{x} = (x_{N-1}, \cdots, x_1) \ .$$

集合 X_n は R^1 の区間 $(1 \leqq n \leqq N), N \geqq 2$. X は直積 $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_N$ とする。**$X \times R^1$ 上の再帰型関数** f : $X \times R^1 \longrightarrow R^1$ は

$$f(x, k) = f_1(x_1, f_2(x_2, \cdots, f_N(x_N, k) \cdots)) \tag{47}$$

と表されて f_n : $X_n \times \mathrm{range}\,(f_{n+1}) \longrightarrow R^1$ $(1 \leqq n \leqq N-1)$, f_N : $X_N \times R^1 \longrightarrow R^1$ がすべて連続となる関数である。特に，これらの関数がすべて狭義増加のとき，f を **$X \times R^1$ 上で狭義増加性をもつ再帰型関数**という（(6)参照）。

$X \times R^1$ 上で狭義増加性をもつ再帰型関数 f : $X \times R^1 \longrightarrow R^1$ に対して，その**反転関数** f_{-1} : $\tilde{X} \times R^1 \longrightarrow R^1$ を

$$f_{-1}(x_N, \overleftarrow{x}, c) = (f_N^{x_N})^{-1} \circ (f_{N-1}^{x_{N-1}})^{-1} \circ \cdots \circ (f_1^{x_1})^{-1}(c)$$

で定義する。ただし

$$\tilde{X} = X_N \times X_{N-1} \times \cdots \times X_1 \times \mathrm{range}\,(f_1)$$

$(f_n^{x_n})^{-1}$ は $f_n^{x_n}$ の逆関数，$\circ$ は関数の合成である。$\mathscr{F} = \{f \,|\, f : X \times R^1 \longrightarrow R^1\}$ を $X \times R^1$ 上で狭

義増加性をもつ再帰型関数の全体とする。

本節では X 自身の上での第３節での意味における狭義増加性をもつ再帰型関数の反転関数 f_{-1} も**自然なもの**を考える。また x^* は対応する最適化問題の**最適点**であるとする。

いま $f \in \mathscr{F}$ とし，f_{-1} をその反転関数とすると，動的計画の再帰式を解いて，

$$\max_{x} f(\vec{x}, x_N, k) = h$$

$$\min_{x} f_{-1}(x_N, \overleftarrow{x}, h) = k,$$

がそれぞれ得られるが，これらは互い同値である。定義より

$$f(\vec{x}, x_N, f_{-1}(x_N, \overleftarrow{x}, h)) = h$$

$$f_{-1}(x_N, \overleftarrow{x}, f(\vec{x}, x_N, k)) = k.$$

$h = h(k)$，$k = k(h)$ は共に狭義増加で互に逆関数の関係にある。

定理7.2. $f \in \mathscr{F}$，f_{-1} は f の反転関数，h，k は定数とする。このとき，主不等式

$$f(\vec{x}, x_N, k) \leqq h \quad (\text{or} \geqq h) \quad (\vec{x}, x_N) \in R^N$$

（が成り立つこと）と反転不等式

$$f_{-1}(x_N, \overleftarrow{x}, h) \geqq k \quad (\text{or} \leqq k) \quad (x_N, \overleftarrow{x}) \in R^N$$

（が成り立つこと）は同値である。いずれの場合でも，等号は $x = x^*$ のときに限る。

以下の記述では（が成り立つこと）は省略して不等式 A と B が同値であると表す。

例 7.1

（主）
$$(1-x_1)\exp(x_1)+(1-x_2)\exp(x_1+x_2)+\cdots+(1-x_N)\exp(x_1+x_2+\cdots+x_N)$$
$$+k\exp(x_1+x_2+\cdots+x_N) \leqq \underbrace{\exp\exp\cdots}_{N\text{コ}}\exp k \quad x \in R^N, \quad k \in R^1$$

（反転）
$$(x_N-1)+(x_{N-1}-1)\exp(-x_N)+\cdots+(x_2-1)\exp(-x_N-x_{N-1}-\cdots-x_3)$$
$$+(x_1-1)\exp(-x_N-x_{N-1}-\cdots-x_2)+h\exp(-x_N-x_{N-1}+\cdots-x_1)$$
$$\geqq \underbrace{\log\log\cdots}_{N\text{コ}}\log h \quad x \in R^N, \quad h \gg 0$$

等号は

$$x_n^* = \underbrace{\exp\cdots\exp}_{(N-n)\text{コ}} k = \underbrace{\log\cdots\log}_{n\text{コ}} h \quad 1 \leqq n \leqq N-1, \quad x_N^* = k = \underbrace{\log\cdots\log}_{N\text{コ}} h$$

のときに限る。

例 7.2

（主）
$$x_1+x_1^{-1}x_2+(x_1x_2)^{-1}x_3+\cdots+(x_1\cdots x_{N-1})^{-1}x_N+(x_1\cdots x_N)^{-1}k$$

$$\geqq 2^{2[1-(1/2^N)]}k^{1/2^N} \qquad x \in R_+^N, \quad k \geqq 0$$

(反転)　$$x_N(x_{N-1}(\cdots x_2(x_1(h-x_1)-x_2)\cdots-x_{N-1})-x_N)$$
$$\leqq h^{2^N}/2^{2(2^N-1)} \qquad (\quad) \geqq 0, \quad h \geqq 0.$$

等号は

$$x_n^* = 2^{1-(1/2^{(N-n)})}\cdot k^{1/2^{(N-n+1)}} = 2^{1-2^n}\cdot h^{2^{n-1}}, \quad 1 \leqq n \leqq N-1, \quad x_N^* = k^{1/2} = 2^{1-2^N}h^{2^{N-1}}$$

のときに限る。反転不等式は(　)$\geqq 0$ なる x について成り立つことを意味する。この左辺は次のように書ける。

$$-x_N^2 - x_N x_{N-1}^2 - \cdots - x_N x_{N-1} \cdots x_2 x_1^2 + x_N x_{N-1} \cdots x_2 x_1 h.$$

定理 7.3　$f, g \in \mathscr{F}$ とする。このとき

(主不等式)　$f(x) \leqq g(x) \qquad x \in R^N$

と

(反転不等式)　$f_{-1}(x) \geqq g_{-1}(x) \qquad x \in R^N$

は同値である。いずれの場合でも，等号は $x = x^*$ のときに限る。

証明　この f, $g \in \mathscr{F}$ に対しては

$$f(x) = f_1(x_1, f_2(x_2, \cdots, f_N(x_N))\cdots)$$
$$g(x) = g_1(x_1, g_2(x_2, \cdots, g_N(x_N))\cdots)$$

と書けて $f_n(x_n, \cdot)$, $g_n(x_n, \cdot)$ $(1 \leqq n \leqq N-1)$, $f_N(\cdot)$, $g_N(\cdot)$ はすべて連続狭義増加（したがって可逆）である。さて

$$x_0 = f(x) = f(\vec{x}, x_N)$$

とおくと，

$$x_N = f_{-1}(\overleftarrow{x}, x_0) = f_{-1}(x)$$

であるから，主不等式が $x \in R^N$ に対して成り立つとすると

$$x_0 \leqq g(\vec{x}, x_N).$$

これは

$$x_N \geqq g_{-1}(\overleftarrow{x}, x_0)$$

に同値である。したがって，反転不等式が成り立つ。逆向きも容易に成り立つ。等号は，最大値問題

$$\text{Max} \quad f(x) \quad \text{s.t.} \quad g(x) = c$$

の最大点 $x^* = x^*(c)$ のときに限る。

例 7.3　算術平均・幾何平均不等式とその反転

(主)　$(x_1\cdots x_N)^{1/N} \leqq (x_1+\cdots+x_N)/N \quad x_n \geqq 0 \quad 1 \leqq n \leqq N$

(反転)　$x_1^N(x_N\cdots x_2)^{-1} \geqq Nx_1-x_2-\cdots-x_N \quad x_1 \geqq 0\ ,\quad x_n > 0 \quad 2 \leqq n \leqq N.$

等号は $x_1^* = \cdots = x_N^*$ のとき，すなわち $x_2^* = \cdots = x_N^* = Nx_1^*-x_2^*-\cdots-x_N^*$ のときに限る。

例 7.4　関数 $r: [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ は上への連続・狭義増加・凸とする。このとき，算術平均・幾何平均不等式の拡張として次が成り立つ。

(主)　$r((x_1\cdots x_N)^{1/N}) \leqq [r(x_1)+\cdots+r(x_N)]/N \quad x_n \geqq 0 \quad 1 \leqq N$

(反転)　$(r^{-1}(x_1))^N(x_N\cdots x_2)^{-1} \geqq r^{-1}(Nx_1-r(x_2)-\cdots-r(x_N))$

$$x_n > 0\ ,\ 2 \leqq n \leqq N\ ,\quad Nx_1-r(x_2)-\cdots-r(x_N) \geqq 0.$$

等号は

$$x_1^* = \cdots = x_N^* = r^{-1}(Nx_1^*-r(x_2^*)-\cdots-r(x_N^*))$$

のときに限る。

例 7.5　Cauchy の不等式とその反転

$a_n > 0 \quad 1 \leqq n \leqq N$ のとき，

(主)　$(a_1x_1+\cdots+a_Nx_N)^2 \leqq (a_1^2+\cdots+a_N^2)(x_1^2+\cdots+x_N^2) \qquad x_n \geqq 0,\ 1 \leqq n \leqq N$

(反転)　$a_1^{-1}(x_1^{1/2}-a_2x_2-\cdots-a_Nx_N) \geqq [x_1(a_2^2+\cdots+a_N^2)^{-1}-x_2^2-\cdots-x_N^2]^{1/2}$

$$x_1 \geqq (a_2^2+\cdots+a_N^2)(x_2^2+\cdots+x_N^2), \qquad x_n \geqq 0 \quad 2 \leqq n \leqq N.$$

等号は

$$x_1^*/a_1 = x_2^*/a_2 = \cdots = x_N^*/a_N$$

のときに限る。

例 7.6　Szergö 不等式とその反転

関数 r は例 7.4と同じとすると

(主)　$r\left(\sum_{n=1}^{2N-1}(-1)^{n-1}x_n\right) \leqq \sum_{n=1}^{2N-1}(-1)^{n-1}r(x_n) \qquad x_1 > x_2 > \cdots > x_{2N-1} > 0$

(反転)　$r^{-1}(x_1)-\sum_{n=2}^{2N-1}(-1)^{n-1}x_n \geqq r^{-1}\left(x_1-\sum_{n=2}^{2N-1}(-1)^{n-1}r(x_n)\right)$

$$x_2 > x_3 > \cdots > x_{2N-1} > r^{-1}(x_1)-\textstyle\sum_{n=2}^{2N-1}(-1)^{n-1}x_n > 0.$$

定理 7.4　$f, g, h \in \mathscr{F}$ とし，$u: R^2 \longrightarrow R_+^1$ とする。このとき

$$\text{(主)}\qquad f(u(x_1, y_1), \cdots, u(x_N, y_N)) \leqq u(g(x), h(y)) \quad x, y \in R^N$$

$$\text{(反転)}\qquad f_{-1}(u(x_{N-1}, y_{N-1}), \cdots, u(x_1, y_1), u(x_0, y_0))$$
$$\geqq u(g_{-1}(\overleftarrow{x}, x_0), h_{-1}(\overleftarrow{y}, y_0)) \quad (\overleftarrow{x}, x_0), (\overleftarrow{y}, y_0) \in R^N.$$

証明　$x, y \in R^N$ に対して

$$x_0 = g(\vec{x}, x_N)$$
$$y_0 = h(\vec{y}, y_N),$$

とすると，

$$x_N = g_{-1}(\overleftarrow{x}, x_0)$$
$$y_N = h_{-1}(\overleftarrow{y}, y_0).$$

だから，主不等式は

$$f(u(x_1, y_1), \cdots, u(x_{N-1}, y_{N-1}), u(x_N, y_N)) \leqq u(x_0, y_0)$$

になり，定理 7.1を用いると

$$f_{-1}(u(x_{N-1}, y_{N-1}), \cdots, u(x_1, y_1), u(x_0, y_0)) \geqq u(x_N, y_N)$$

になり，反転不等式が得られる。これは逆向きも容易に成り立つ。等号は最大化問題

$$\begin{aligned} \text{Max}\quad & f(u(x_1, y_1), \cdots, u(x_N, y_N)) \\ \text{s.t.}\quad & g(x) = c \\ & h(y) = d \\ & x, y \in R^N \end{aligned}$$

の最大点 (x^*, y^*) のときに限り成立する。

例 7.7　Cauchy および Aczél の不等式

$$\text{(主)}\qquad x_1y_1 + \cdots + x_Ny_N \leqq (x_1^2 + \cdots + x_N^2)^{1/2}(y_1^2 + \cdots + y_N^2)^{1/2} \qquad x, y \in R_+^N$$

$$\text{(反転)}\qquad x_0y_0 - x_1y_1 - \cdots - x_{N-1}y_{N-1} \geqq ({}_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_{N-1}^2)^{1/2}(y_0^2 - y_1^2 - \cdots - y_{N-1}^2)^{1/2}$$
$$x_0 \geqq (x_1^2 + \cdots + x_{N-1}^2)^{1/2}\ ,\quad y_0 \geqq (y_1^2 + \cdots + y_{N-1})^{1/2}.$$

これは定理 7.2の

$$f(z) = z_1 + \cdots + z_N\ ,\quad g(z) = h(z) = (z_1^2 + \cdots + z_N^2)^{1/2}\ ,\ u(s, t) = st$$

の場合である。

以下，等号条件は省略する。

例 7.8　Hölder および Popoviciu の不等式

$p > 1$ のとき

（主）　$x_1y_1+\cdots+x_Ny_N \leqq (x_1^p+\cdots+x_N^p)^{1/p}(y_1^q+\cdots+y_N^q)^{1/q} \quad x, y \in R_+^N$

（反転）　$y_0y_0-x_1y_1-\cdots-x_{N-1}y_{N-1} \geqq (x_0^p-x_1^p-\cdots-x_{N-1}^p)^{1/p}(y_0^q-y_1^q-\cdots-y_{N-1}^q)^{1/q}$

$$x_0^p \geqq x_1^p+\cdots+x_{N-1}^p\ , y_0^q \geqq y_1^q+\cdots+y_{N-1}^q.$$

これは

$$g(z)=(z_1^p+\cdots+z_N^p)^{1/p}\ , \quad h(z)=(z_1^q+\cdots+z_N^q)^{1/q}$$

の場合である。ただし $q=p/(p-1)$．$0<p<1$ のとき，不等号は逆向きになる。

例 7.9 Minkowski および Lorentz の不等式

$p>1$ のとき，

（主）　$[(x_1+y_1)^p+(x_2+y_2)^p+\cdots+(x_N+y_N)^p]^{1/p}$

$$\geqq (x_1^p+x_2^p+\cdots+x_N^p)^{1/p}+(y_1^p+y_2^p+\cdots+y_N^p)^{1/p} \qquad x, y \in R_+^N$$

（反転）　$[(x_0+y_0)^p-(x_1+y_1)^p-\cdots-(x_{N-1}+y_{N-1})^p]^{1/p}$

$$\geqq (x_0^p-x_1^p-\cdots-x_{N-1}^p)^{1/p}+(y_0^p-y_1^p-\cdots-y_{N-1}^p)^{1/p}$$

$$x_0^p \geqq x_1^p+\cdots+x_{N-1}^p\ , \quad y_0^p \geqq y_1^p+\cdots+y_{N-1}^p.$$

これは

$$f(z)=g(z)=h(z)=(z_1^p+\cdots+z_N^p)^{1/p},\ u(s, t)=s+t$$

の場合である。

例 7.10 Cebyshev 不等式とその反転

（主）　$\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N x_n\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N y_n\right) \leqq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N x_ny_n$

$$x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_N\ , \quad y_1 \leqq y_2 \leqq \cdots \leqq y_N$$

or　$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_N\ , \quad y_1 \geqq y_2 \geqq \cdots \geqq y_N.$

（反転）　$(Nx_0-x_1-\cdots-x_{N-1})(Ny_0-y_1-\cdots-y_{N-1}) \geqq Nx_0y_0-x_1y_1-\cdots-x_{N-1}y_{N-1}$

$$y_1+\cdots+y_{N-2}+2y_{N-1} \leqq Ny_0\ , \quad y_1 \leqq \cdots \leqq y_{N-1},$$

$$x_1+\cdots x_{N-2}+2x_{N-1} \leqq Nx_0\ , \quad x_1 \leqq \cdots \leqq x_{N-1}$$

or　$x_1+\cdots+x_{N-2}+2x_{N-1} \geqq Nx_0\ , \quad x_1 \geqq \cdots \geqq x_{N-1},$

$$y_1+\cdots+y_{N-2}+2y_{N-1} \geqq Ny_0\ , \quad y_1 \geqq \cdots \geqq y_{N-1}$$

これは

$$f(z)=g(z)=h(z)=(1/N)(z_1+\cdots+z_N), \quad u(s, t)=st$$

の場合である。

定理 7.5 関数 $f, g, h: R^N \longrightarrow R^1$ は連続，$u: R^2 \longrightarrow R^1$ は連続で，各 $s \in R$ に対して $u(s, \cdot)$ が狭義増加関数とする。このとき，

$$(\text{主}) \qquad f(u(x_1, y_1), u(x_2, y_2), \cdots, u(x_N, y_N)) \geqq u(g(x), h(y)) \qquad x, y \in R^N$$

と

$$(u\text{-反転}) \quad h(u_{-1}(x_1, z_1), u_{-1}(x_2, z_2), \cdots, u_{-1}(x_N, z_N)) \leqq u_{-1}(g(x), f(z)) \quad x, z \in R^N$$

は同値である。等号はそれぞれ $x = x^*$，$y = y^*$，$x = x^*$，$z = z^*$ のときに限る。ただし

$$z_n^* = u(x_n^*, y_n^*) \quad 1 \leqq n \leqq N.$$

この変換によって y を z に変えれば，証明は明らかであろう。この反転を特に **u-反転**という。

例 7.11 Minkowski の不等式（例7.9参照）とその u-反転

これは $p > 1$ のとき

$$(u\text{-反転}) \qquad \left[\sum_{n=1}^{N} (z_n^{1/p} - x_n)^p\right]^{1/p} \leqq \left(\sum_{n=1}^{N} z_n\right)^{1/p} - \left(\sum_{n=1}^{N} x_n^p\right)^{1/p}$$
$$x \in R^N, \quad z_n \geqq x_n^p \quad 1 \leqq n \leqq N$$

になる。

$$f(z) = \textstyle\sum_{n=1}^{N} z_n, \quad g(z) = h(z) = (\sum_{n=1}^{N} z_n^p)^{1/p}, \quad u(s, t) = (s+t)^p$$

の場合である。

さて，積分を含む不等式の反転を考えよう。ここでは $x, y: [0, T] \longrightarrow R_+^1$ は連続関数，$T > 0$，$f, g, h: R_+^1 \longrightarrow R_+^1$ は上への連続狭義増加，$u: R_+^1 \times R_+^1 \longrightarrow R_+^1$ は連続とする。このとき，x, y の積分不等式を $X(t) = \int_t^T g(x(s))ds$，$Y(t) = \int_t^T h(y(s))ds$ の積分不等式で表すことを考える。以下，証明は略して具体例を挙げる。$\dot{z}$ は dz/dt を表す。

定理 7.6 主不等式

$$f^{-1}\left(\int_t^T f(u(x(s), y(s)))ds\right) \leqq u\left(g^{-1}\left(\int_t^T g(x(s))ds\right), h^{-1}\left(\int_t^T h(y(s))ds\right)\right)$$

と反転不等式

$$\int_t^T f(u(g^{-1}(-\dot{X}(s)), h^{-1}(-\dot{Y}(s)))ds$$
$$\leqq f(u(g^{-1}(X(t)), h^{-1}(Y(t)))$$

は同値である。さらに，等号は $x = x^*$，$y = y^*$ すなわち $X = X^*$，$Y = Y^*$ のときに限り成り立つ。ただし　$X^*(t) = \int_t^T g(x^*(s))ds$，$Y^*(t) = \int_t^T h(y^*(s))ds$.

例 7.12　Minkowski の不等式とその反転

$p>1$ のとき，

$$\text{(主)}\qquad \left[\int_t^T (x(s)+y(s))^p ds\right]^{1/p} \leqq \left[\int_t^T x^p(s)ds\right]^{1/p} + \left[\int_t^T y^p(s)ds\right]^{1/p}$$

$$x(t) \geqq 0\ ,\quad y(t) \geqq 0 \quad \text{on } [0,\ T].$$

等号は $y(t)=cx(t)$ on $[0,\ T]$ のときに限る。ただし c は正の定数。これは

$$\text{(反転)}\qquad \int_t^T [(-\dot{X}(s))^{1/p}+(-\dot{Y}(s))^{1/p}]^p ds \leqq [X^{1/p}(t)+Y^{1/p}(t)]^p$$

$$X(t)=\left[\int_t^T x^p(s)ds\right]^{1/p},\quad Y(t)=\left[\int_t^T y^p(s)ds\right]^{1/p} \quad \text{on} \quad [0,\ T].$$

この等号は $Y(t)=cX(t)$ on $[0,\ T]$ のときに限る。

これは定理の

$$f(t)=g(t)=h(t)=t^p,\quad u(s,\ t)=s+t$$

の場合である。$0<p<1$ のとき，不等号は逆向きになる。x から X への以上の変換は**後向き積分変換**であるが，**前向き積分変換** $X(t)=\int_0^t g(x(s))ds$ によっても同様の反転不等式が得られる。これは省略する。

最後に汎関数を含む不等式とその反転化の定理を掲げておこう。

定理 7.7　$T>0$，$f(t,x,\dot{x})$ は x について $[0,\infty)$ 上で狭義増加，$\dot{x}$ について $(-\infty,0]$ 上で狭義減少とする。このとき，主不等式

$$\int_t^T f(s,x,\dot{x})ds \geqq F(t,x(t))$$

$$0 \leqq t \leqq T\ ,\ x=x(\cdot)\ ,\ x(T)=0\ ,\ x(t) \geqq 0\ ,\ \dot{x}(t) \leqq 0$$

と反転不等式

$$\int_t^T g(s,y,\dot{y})ds \leqq G(t,y(t))$$

$$0 \leqq t \leqq T\ ,\ y=y(\cdot)\ ,\ y(t)=\int_t^T f(t,x(s),\dot{x}(s))ds\ ,\ \dot{x}(t) \leqq 0$$

は同値である。ただし等号はそれぞれ $x=x^*$，$y=\bar{y}$ のときに限る。ここに

$$\bar{y}(t)=\int_t^T f(s,x^*(s),\dot{x}^*(s))ds$$

である。

例 7.13　「2点間の最短距離は直線である」とその反転

（主）　$$\int_t^T \sqrt{1+\dot{x}^2(s)}\,ds \geqq \sqrt{x^2(t)+(T-t)^2}$$

$$0 \leqq t \leqq T\ ,\quad x = x(\cdot)\ ,\ x(T) = 0\ ,\ \dot{x}(t) \leqq 0 \quad \text{on } [0, T]$$

（反転）　$$\int_t^T \sqrt{\dot{y}^2(s)-1}\,ds \leqq \sqrt{y^2(t)-(T-t)^2}$$

$$0 \leqq t \leqq T\ ,\ y = y(\cdot)\ ,\ y(T) = 0\ ,\ \dot{y}(t) \leqq -1 \quad \text{on } [0, T].$$

$$\begin{aligned} x^*(s) &= (x^*(t)/(T-t))(T-s) \\ \hat{y}(s) &= (\hat{y}(t)/(T-t))(T-s) \end{aligned} \qquad 0 \leqq t \leqq s \leqq T.$$

この変換は

$$y(t) = \int_t^T \sqrt{1+\dot{x}^2(s)}\,ds$$

である。

例 7.14　定常二乗評価不等式とその反転

（主）　$$\int_t^T (x^2+\dot{x}^2)ds \geqq \coth(T-t)x^2(t)$$

$$0 \leqq t \leqq T\ ,\ x = x(\cdot)\ ,\ x(T) = 0\ ,\ x(t) \geqq 0 \quad \text{on } [0, T]$$

（反転）　$$\int_t^T \sqrt{-y\tanh(T-s)-\dot{y}}\,ds \leqq \sqrt{y(t)\tanh(T-t)}$$

$$0 \leqq t \leqq T\ ,\ y = y(\cdot)\ ,\ y(T) = 0\ ,\ y(t) \geqq 0 \quad \text{on } [0, T].$$

$$\begin{aligned} x^*(s) &= x^*(t)\sinh(T-s)/\sinh(T-t) \\ \hat{y}(s) &= \hat{y}(t)\sinh 2(T-s)/\sinh 2(T-t) \end{aligned} \qquad 0 \leqq t \leqq s \leqq T$$

$$y(t) = \int_t^T (x^2+\dot{x}^2)ds.$$

例 7.15　非定常二乗評価不等式とその反転

（主）　$$\int_t^1 (s+1)^2\dot{x}^2 ds \geqq x^2(t)\Big/\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{2}\right)$$

$$0 \leqq t \leqq 1\ ,\ x = x(\cdot)\ ,\ x(1) = 0\ ,\ x(t) \geqq 0 \quad \text{on } [0, 1]$$

（反転）　$$\int_t^1 \frac{\sqrt{-\dot{y}}}{s+1}ds \leqq \sqrt{y(t)\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{2}\right)}$$

$$0 \leqq t \leqq 1\ ,\ y = y(\cdot)\ ,\ y(1) = 0\ ,\ y(t) \geqq 0 \quad \text{on } [0, 1].$$

$$\begin{aligned} x^*(s) &= x^*(t)(1/(s+1)-1/2)/(1/(t+1)-1/2) \\ \hat{y}(s) &= \hat{y}(t)(1/(s+1)+1/2)/(1/(t+1)-1/2) \end{aligned} \qquad 0 \leqq t \leqq s \leqq 1$$

$$y(t) = \int_t^T (s+1)^2\dot{x}^2 ds.$$

参 考 文 献

[1] J. Aczél and O. Varga, Bemerkung zur Cauchy-Kleinschen Maßbestimmung, *Publications Mathematicae* **4**(1955-1956), 3-15.

[2] A. Angel and R. Bellman, *Dynamic Programming and Partial Differential Equations,* Academic Press, New York, 1972.

[3] E. F. Beckenbach and R. Bellman, *Inequalities,* 3rd revised printing, Springer, New York, 1971.

[4] R. Bellman, On an inequality concerning an indefinite form, *Amer. Math. Monthly* **62** (1956), 108-109.

[5] R. Bellman, *Dynamic Programming,* Princeton Univ. Press, New Jersey, 1957；小田中敏男他訳，ダイナミック・プログラミング，東京図書，1973。

[6] R. Bellman, Quasi-linearization and upper and lower bounds for variational problems, *Quart. Appl. Math.* **19** (1962), 249-250.

[7] R. Bellman and R. Kalaba, *Quasilinearization and Nonlinear Boundary-value Problems,* American Elsevier, New York, 1965.

[8] D. C. Benson, Inequalities involving integrals of functions and their derivatives, *J. Math. Anal. Appl.* **17** (1967), 292-308.

[9] S. Bochner, Group invariance of Cauchy's formula in several variables, *Anals of Math.* **45** (1944), 686-707.

[10] K. Fan, O. Taussky and J. Todd, Discrete analogs of inequalities of Wirtinger, *Monatshefte für Mathematik* **59** (1955), 73-90.

[11] K. Friedrichs, Ein Verfahren der Variationsrechnung das Minimum eines Integrals als das Maximum eines anderen Ausdrucks darzustellen, *Gött, Nachr.,* 1929, 13-20.

[12] M. Freimer and G. S. Mudholkar, A class of generalizations of Hölder's inequality, *Inequalities in Statistics and Probability, IMS Lecture Notes-Monograph Series* **5** (1984), 59-67.

[13] G. H. Hardy, J. E Littlewood and G. Polya, *Inequalities,* 2nd ed, Cambridge Univ. Press, London and New York, 1952.

[14] S. Iwamoto, Inverse dynamic programming, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A* **30** (1976), 24-42.

[15] S. Iwamoto, Inverse theorem in dynamic programming I, *J. Math. Anal. Appl.* **58** (1977), 113-134.

[16] S. Iwamoto, Inverse theorem in dynamic programming II, *J. Math. Anal. Appl.* **58** (1977), 247-279.

[17] S. Iwamoto, Inverse theorem in dynamic programming III, *J. Math. Anal. Appl.* **58** (1977), 439-448.

[18] S. Iwamoto, Dynamic programming approach to inequalities, *J. Math. Anal. Appl.* **58** (1977), 687-704.

[19] S. Iwamoto, Inverse dynamic programming II, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A* **31** (1977), 24-44.

[20] 岩本誠一，逐次決定過程としての動的計画論（I），オペレーションズ・リサーチ **22**（1977），427-434。

[21] 岩本誠一，逐次決定過程としての動的計画論（II），オペレーションズ・リサーチ **22**（1977），496-501。

[22] S. Iwamoto, Recursive programming approach to inequalities, *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A* **32** (1978), 165-190.

[23] 岩本誠一，動的計画の理論と応用，数学 **31**（1979），331-348。

[24] S. Iwamoto, A new inversion of continuous-time optimal control processes, *J. Math. Anal. Appl.* **82** (1981), 49-65.

[25] S. Iwamoto, Reverse function, reverse program, and reverse theorem in mathematical programming, *J. Math. Anal. Appl.* **95** (1983), 1-19.

[26] S. Iwamoto, A dynamic inversion of the classical variational problems, *J. Math. Anal. Appl.* **100** (1984), 354-374.

[27] S. Iwamoto, Sequential minimaximization under dynamic programming structure, *J. Math. Appl. Appl.* **108** (1985), 267-282.

[28] 岩本誠一，順序配分過程について，経済学研究 **52**（1987），569-592。

[29] S. Iwamoto, R. J. Tomkins and C.-L. Wang, Some theorems on reverse inequalities, *J. Math. Anal. Appl.* **119** (1986), 282-299.

[30] S. Iwamoto and C.-L. Wang, Continuous dynamic programming approaches to inequalities, *J. Math. Anal. Appl.* **96** (1983), 119-129.

[31] S. Iwamoto and C.-L. Wang, Continuous dynamic programming approaches to inequalities II, *J. Math. Anal. Appl.* **118** (1986), 279-286.

[32] S. Iwamoto, R. J. Tomkins and C.-L. Wang, Inequalities and mathematical programming, III, In : *General Inequalities* **5** (W. Walter Ed.), Birkhäuser Verlag, Basel and Stuttgart, (1987), 419-432.

[33] A. Kovacec, Contributions to inequalities II, In : *General Inequalities* **5** (W. Walter Ed.), Birkhfäuser Verlag, Basel and Stuttgart, (1987), 65-72.

[34] E. S. Lee, Dynamic programming, quasilinearization, and dimensionality difficulty, *J. Math. Anal. Appl.* **27** (1968), 303-322.

[35] E. S. Lee, *Quasilinearization and Invariant Imbedding,* Academic Press, New York, 1968.

[36] A. W. Marshall and I. Olkin, *Inequalities : Theory of Majorization and its Applications.* Academic Press, New York, 1979.

[37] D. S. Mitrinović, *Analytic Inequalities,* Springer, New York, 1970.

[38] G. S. Mudholkar, M. Freimer and P. Subbaiah, An extension of Hölder's. inequality, *J. Math. Anal. Appl.* **102** (1984), 435-441.

[39] F. D. Murnaghan, Schwarz' inequality and Lorentz space, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **36** (1950), 673-626.

[40] G. L. Nemhauser, *Introduction to Dynamic Programming,* John Wiley, New York, 1966.

[41] D. G. Northcott, Some inequalities between periodic functions and their derivatives, *J. London Math. Soc.* **14** (1939), 198-202.

[42] T. Popoviciu, On an inequalities, (Romanian), *Gaz. Mat. Fiz.* **A11 (64)** (1959), 451-461.

[43] C.-L. Wang, Functional equation approach to inequalities, *J. Math. Anal. Appl.* **71** (1979), 423-430.

[44] C.-L. Wang, Functional equation approach to inequalities, II, *J. Math. Anal. Appl.* **78** (1980), 522-530.

[45] C.-L. Wang, Functional equation approach to inequalties, III, *J. Math. Anal. Appl.* **80** (1981), 31-35.

[46] C.-L. Wang, Functional equation approach to inequalities, IV, *J. Math. Anal. Appl.* **86** (1982), 96-98.

[47] C.-L. Wang, Inequalities and mathematical programming, in *General Inequalities* **3** (E. F. Beckenbach Ed.) Proceedings of the Third International Conference on General Inequalities, Oberwolfach, 1981, Birkhäuser-Verlag, Basel/Stuttgart, (1983), 149-164.

[48] C.-L. Wang, Functional equation approach to inequalities, VI, *J. Math Anal. Appl.* **104** (1984), 95-102.

[49] C.-L. Wang, Inequalities and mathematical programming, II, in *General Inequalities* **4** (W. Walter Ed.) Proceedings of the Fourth International Conference on General Inequalities, Oberwolfach, 1983, Birkhäuser-Verlag, Basel/Stuttgart, (1984), 381-393.

[50] C. -L. Wang, The principle and models of dynamic programming, *J. Math. Anal. Appl.* **118** (1986), 287-308.

[51] H. S. Weinsberger,*Partial Differential Equations,* Blaisdell, New York, 1965.