リードタイムのある動的在庫モデルの最適政策

児玉, 正憲

https://doi.org/10.15017/4491780

出版情報：經濟學研究. 54 (1/2), pp.93-118, 1988-06-10. 九州大学経済学会
バージョン：
権利関係：

リードタイムのある動的在庫モデルの最適政策

児　玉　正　憲

需要が一般形態の確率的・動的在庫モデルで，配達遅れ（リードタイム）のない場合の最適購入政策を検討した[1)]。

本小論では，需要量が連続的な，配達遅れのある動的在庫モデルについて，多くの需要形態を含む統合モデルを導入し，過剰需要が後期需要として取扱われる場合と取扱われない場合に分けて最適政策を検討する。

発注間隔の期首に発注された発注量は λ 期（λ は一定）の配達遅れを伴い λ 期後の期首に納入されるものとし，各期の需要量を表わす確率変数は互いに独立で同じ分布に従うものとする。また各期の需要の発生は，期を通じて一様に発生する場合や，期首に突発的に発生する場合などを特殊な場合として含む一般的かつ総合的形態をとるものとする（(1.8) 式で表現される)。

本論文を通して使用する記号を導入する。

B_i　：i 期の需要量を表す確率変数

$$P(B_i \leqq b) = \int_0^b \phi(t)dt \ , \quad b \text{ は } B_i \text{ の実現値} \ , \quad E(B_i) = \int_0^\infty b\phi(b)db < \infty$$

x　：現期の繰越在庫量

α　：割引率（$0 < \alpha < 1$）

$c(z)$：発注量が z のときの費用関数

$h(z)$：在庫量が z のときの在庫維持費用関数，$z \leqq 0$ のとき $h(z) = 0$

$p(z)$：在庫不足量が z のときの品切費用関数 $z \leqq 0$ のとき $p(z) = 0$

$c(z)$，$h(z)$ および $p(z)$ は 2 回微分可能を仮定する。

$f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1})$：現期の繰越在庫量を x, 次期の初めに配達される発注量を y_1, 再来期の初めに配達される発注量を $y_2, \cdots$, $\lambda-1$ 期遅れて配達される発注量を $y_{\lambda-1}$ としたとき，n 期間にわたる期待割引費用を最小にするという意味での最適発注政策を取ったときの費用関数（$n > \lambda$)

$f(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1})$：現期の繰越在庫量を x, 次期の初めに配達される発注量を y_1, 再来期の初めに配達される発注量を $y_2, \cdots$, $\lambda-1$ 期遅れて配達される発注量を $y_{\lambda-1}$ としたとき，無限期間にわたる期待割引費用を最小にするという意味での最適発注政策を取ったときの費用関数

---

1)　児玉正憲 [9]，[10]

1. 過剰需要が後期需要として取扱われる場合

1.1. 単純な特定在庫モデル

単純な特定在庫モデルの代表として，発注量は発注間隔の期首に即時的にみたされ，需要はすべて期首に即時に拡いだされる場合の無限期間動的在庫モデル（Arrow-Harris-Marschak 型モデル）[2] を取り上げる。この場合 $f(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1})$ は次の関数方程式を満たす。

$$f(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}) = \operatorname*{Min}_{z \geqq 0} \left\{ c(z) + L(x\,;\phi) + \alpha \int_0^\infty f(x-b+y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}, z)\phi(b)db \right\} \quad (1.1)$$

ここに

$$L(x\,;\phi) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x h(x-b)\phi(b)db + \int_x^\infty p(b-x)\phi(b)db & x > 0, \\ \displaystyle\int_0^\infty p(b-x)\phi(b)db & x < 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

{　　}の第1項は現期で発注量が z のときの発注費用 $c(z)$ を表し，第2項は現期の繰越在庫量が x のとき，需要が期首に突発的に発生し，期首に即時にみたされる場合の（期待在庫費用＋期待品切れ損失費用）を表している[3]。第3項は次期以降の期待最小費用を現期において勘定に入れる場合の費用を表す[4]。したがって最適性の原理より（1.1）式が得られるのである。

図1に現期の需要量 b が x より小さい場合と大きい場合の在庫状態を示す。

最小期待費用 $f(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1})$ を与える発注量 z は $x, y_1, \cdots, y_{\lambda-1}$ の関数であるので $z(x, y, \cdots, y_{\lambda-1})$ とかく。このとき次の定理が成立することが知られている[5]。

定理1　最適発注量 $z(x, y_1, \cdots, y_{\lambda-1})$ は $x, y_1, \cdots, y_{\lambda-1}$ の和 $x+y_1+\cdots y_{\lambda-1}$ だけの関数である。

この定理は発注量決定の際の在庫量は手持の在庫量だけでなく，1期遅れて配達される量 $y_1, \cdots, \lambda-1$ 期遅れて配達される $y_{\lambda-1}$ の和 $x+y_1+\cdots+y_{\lambda-1}$ を新しい在庫量と考えて発注量を決定すればよいことを意味している。

定理1における最適発注政策の性質を調べるため $c(z) = c \cdot z$ と仮定すると，次の定理が成立することが知られている。

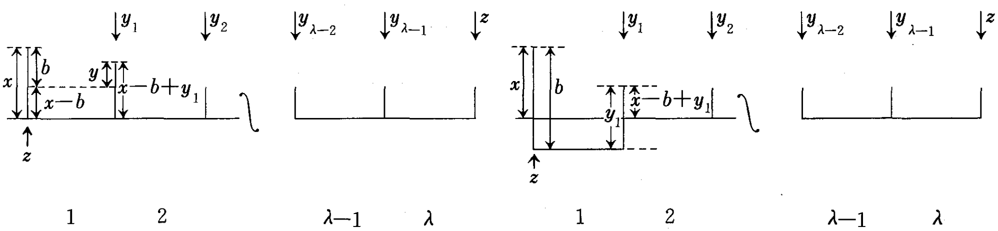

図1　単純な在庫モデル
（$b < x$ の場合）
（$b > x$ の場合）

2),3),4)　Arrow K. J., S. Karlin and Scharf [1] pp. 155
5)　Arrow K. J., S. Karlin and Scharf [1] pp. 155

定理 2　$c(z)=c\cdot z$, $h(x)$ と $p(x)$ が凸増加関数で，$h(0)=p(0)$ ならば最適発注量 $z=z(x_1, y_1, \cdots, y_{\lambda-1})$ は

$$z=\mathrm{Max}\,(0, \bar{x}-(x+y_1+y_2+\cdots+y_{\lambda-1})) \tag{1.3}$$

である。ここに $\bar{x}$ は

$$c(1-\alpha)+\alpha^{\lambda}\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}L'(\bar{x}-b_1-b_2-\cdots-b_{\lambda})\phi(b_1)\phi(b_2)\cdots\phi(b_{\lambda})db_1db_2\cdots db_{\lambda}=0 \tag{1.4}$$

の唯一の根である。ここで，$L_r(u)$ を（1.5）式で定義すると，（1.4）式は（1.6）式で表される。

$$L_r(u)=\int_0^{\infty}L_{r-1}(u-b)\phi(b)db\ ,\quad L_0(u)=L(u) \tag{1.5}$$

$$c(1-\alpha)+\alpha^{\lambda}\int_0^{\infty}L_{\lambda-1}(\bar{x}-b)\phi(b)db=0 \tag{1.6}$$

方程式（1.5）の根 $\bar{x}$ は λ に依存するから，$\bar{x}(\lambda-1)$ で表すと，次の定理を得る。

定理 3　定理 2 の仮定のもとで，十分 1 に近い α に対して，

$$\bar{x}(1)<\bar{x}(2)<\cdots<\bar{x}(\lambda-1) \tag{1.7}$$

となる。

1.2.　需要形態の一般的在庫モデル

1.1. における需要形態は突発需要で，それが期首に発生する例になっている。また期を通じて一様に発生する場合もよくみる例である。そこでこれらを特殊な場合として含む一般的かつ総合的需要形態を表すモデルとして

$$Q(T)=x-g(T/t)b\ ,\quad 0\leqq T\leqq t \tag{1.8}$$

を用いる。ここに

$Q(T)$ ：時点 $T(\leqq t)$ における在庫量（ただし，T は発注時点からはかる）

x ：現期の繰越在庫量

t ：発注間隔

b ：需要量（実現値）

$g(y)$ ：$g(0)=0$, $g(1)=1$, $\dfrac{dg(y)}{dy}>0$ なる x の関数（$0\leqq y\leqq 1$）[6)]

このとき，現期の期待在庫費用と期待品切損失費用の和を $L^*(x\,;\phi)$ で表すと，論文[9]より $L^*(x\,;\phi)$ は次の式で与えられる。

$$L^*(x\,;\phi)=\int_0^{x}h(x-bG(1))\phi(b)db+\int_x^{\infty}h(xg^{-1}(x/b)-bG(g^{-1}(x/b)))\phi(b)db$$

6)　$g(y)=0$, $g(y)=1(0\leqq y\leqq 1)$ の場合は $g(y)$ の仮定に反するが適当に修正することによって本論文の議論は成立する。論文［6］を参照

$$+\int_x^\infty p(b(G(1)-G(g^{-1}(x/b)))-x(1-g^{-1}(x/b)))\phi(b)db \qquad x>0, \tag{1.9}$$

$$L^*(x\,;\phi)=\int_0^\infty p(bG(1)-x)\phi(b)db \qquad x<0. \tag{1.10}$$

ここに

$$G(y)=\int_0^y g(s)ds\ , \tag{1.11}$$

$g^{-1}(x/b)$ は

$$x=bg(z) \tag{1.12}$$

を満足する z を表わす。

このモデルにおける $f(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1})$ を $f^*(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-+})$ で表わすと最適性の原理より $f^*(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1})$ は次の関数方程式を満たす。

$$f^*(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1})=\operatorname*{Min}_{z\geqq 0}\left\{c(z)+L^*(x\,;\phi)+\alpha\int_0^\infty f^*(x-b+y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}, z)\phi(b)db\right\} \tag{1.13}$$

このモデルにおける最適発注量を $z^*(x, y_1, \cdots, y_{\lambda-1})$ とすると定理4～定理6を得る。

定理4　最適発注量 $z^*(x, y_1, \cdots, y_{\lambda-1})$ は $x, y_1, \cdots, y_{\lambda-1}$ の和 $(x+y_1+\cdots+y_{\lambda-1})$ だけの関数である。

証明　(1.13) 式は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned}f^*(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1})&=\operatorname*{Min}_{z\geqq 0}\left\{c(z)+L^*(x\,;\phi)+\alpha\int_0^\infty f^*(x-b+y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}, z)\phi(b)db\right\}\\&=L^*(x\,;\phi)+\operatorname*{Min}_{z\geqq 0}\left\{c(z)+\alpha\int_0^\infty f^*(x+y_1-b, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}, z)\phi(b)db\right\}\end{aligned} \tag{1.14}$$

(1.14)式の最小値が得られたとき，z^* は $z^*=z^*(x+y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1})$ の型の関数であることは明らかである。z^* を (1.14) 式に代入すると，$f^*(x, y_1, \cdots, y_{\lambda-1})$ は次式で表される。

$$f^*(x, y_1, \cdots, y_{\lambda-1})=a(x)+d(x+y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}) \tag{1.15}$$

ここに

$$a(x)=L^*(x\,;\phi)$$

この式は最小費用が $x+y_1$ の和を通してのみ y_1 に依存していることを示している。(1.15)式を(1.14)式に代入して次の式を得る。

$$\begin{aligned}f^*(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1})&=a(x)+\operatorname*{Min}_{z\geqq 0}\left\{c(z)+\alpha\int_0^\infty [a(x+y_1-b)\right.\\&\qquad\left.+d(x+y_1+y_2-b, y_3, y_4\cdots, y_{\lambda-1}, z)]\phi(b)db\right\}\\&=a(x)+a_1(x+y_1)+\operatorname*{Min}_{z\geqq 0}\left\{c(z)\right.\end{aligned}$$

$$+\alpha\int_0^\infty d(x+y_1+y_2-b,\ y_3,\ \cdots,\ y_{\lambda-1},\ z)\phi(b)db\Big\} \tag{1.16}$$

上の式は $z^*(x, y_1, \cdots, y_{\lambda-1})$ が $z^*=z^*(x+y_1+y_2, y_3\cdots, y_{\lambda-1})$ の型となることを示している。z^* を (1.16) に代入すると,

$$f^*(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}) = a(x)+a_1(x+y_1)+d_1(x+y_1+y_2, y_3, \cdots, y_{\lambda-1})$$

を得る。この方式を繰り返すと

$$f^*(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}) = a(x)+a_1(x+y_1)+a_2(x+y_1+y_2)+\cdots+a_{\lambda-1}(x+y_1+y_2+\cdots+y_{\lambda-1}), \tag{1.17}$$

であり, $z^*(x, y_1, \cdots, y_{\lambda-1})$ は $z^*=z^*(x+y_1+\cdots+y_{\lambda-1})$ の型をもつことがわかる。

[証終]

関数 $a(x)$ は発注費用 $c(z)$ を除いた手持の在庫量 x の関数として現期の期待費用を表している。y_1, $\cdots$, $y_{\lambda-1}$ は現期の費用に影響を与えないし, 発注量 z は λ 期後まで関係しない。$a_1(x+y)$ は発注費用を除いた第 2 期における期待費用を表し, 第 2 期の初めまでに配達された全部の量 $x+y_1$ の関数である。$a_i(x+y_1+\cdots+y_i)$ は発注費用を除いた第 $(i+1)$ 期における期待費用を表し, i 期までに配達された全部の量 $x+y_1+\cdots y_i$ の関数となっている。$a_{\lambda-1}(x+y_1+\cdots+y_{\lambda-1})$ は λ 期の期待費用で, 現期の発注費用を含んでいる。

定理 5　$c(z)=c\cdot z$, $\lim_{x\to\infty} p'(x) > c/\alpha^\lambda$, $h(x)$ が狭義の凸関数かつ増加関数, $p(x)$ が凸増加関数, $h(0)=p(0)=0$ ならば, 最適発注量 $z^*(x, y_1, \cdots, y_{\lambda-1})$ は

$$z^* = \mathrm{Max}\,(0,\ \bar{x}^*-(x+y_1+\cdots+y_{\lambda-1})) \tag{1.18}$$

である。ここに $\bar{x}^*$ は

$$c(1-\alpha)+\alpha^\lambda\int_0^\infty L^{*\prime}_{\lambda-1}(\bar{x}-b)\phi(b)db = 0 \tag{1.19}$$

の唯一の根である。ここに

$$L^*_\gamma(u) = \int_0^\infty L^*_{\gamma-1}(u-b)\phi(b)db\ ,\quad L^*_0(u) = L^*(u, \phi) \tag{1.20}$$

定理 5 を証明するために次の補題 1, 補題 2 を証明する。

補題 1　定理 5 の仮定のもとで, $\lambda=1$ の場合の最適発注量 $z^*(x)$ は

$$z^*(x) = \begin{cases} \bar{x}^*-x & x < \bar{x}^* \\ 0 & x \geqq \bar{x}^* \end{cases} \tag{1.21}$$

ここに $\bar{x}^*$ は

$$c(1-\alpha)+\alpha\int_0^\infty L^{*\prime}(\bar{x}^*-b\,;\phi)\phi(b)db = 0 \tag{1.22}$$

の唯一の根である。

証明　n 期間モデルを考えると，$f_n^*(x)$ は最適性の原理より（1.23）式を満たす。

$$f_n^*(x) = \underset{z \geq 0}{\mathrm{Min}} \left\{ c \cdot z + L^*(x\,;\phi) + \alpha \int_0^\infty f_{n-1}^*(x+z-b)\phi(b)db \right\} \tag{1.23}$$

$L^*(x\,;\phi)$ は（1.9）～（1.10）式で与えられる。

$z_n^*(x)$ を n 期間モデルの最適発注量とする。このとき一般理論[7]は $\lim_{x\to\infty} f_n^*(x) = \lim_{x\to\infty} f^*(x)$, $f^*(x)$ は（1.13）式（$\lambda=1$）を満たすことを保証する。このことによって，$z_n^*(x)$ は具体的に求められる無限期間モデルの最適発注量 $z^*(x)$ に収束することを示そう。証明は n に関する帰納法を用いる。

（i）$n=1$ の場合　このとき，

$$f_1^*(x) = \underset{z \geq 0}{\mathrm{Min}} \left\{ c \cdot z + L^*(x\,;\phi) \right\} = L^*(x\,;\phi) \tag{1.24}$$

$$f_1^{*\prime}(x) = L^{*\prime}(x\,;\phi) \tag{1.25}$$

$$f_1^{*\prime\prime}(x) = L^{*\prime\prime}(x\,;\phi) \geqq 0 \tag{1.26}$$

$$z_1^*(x) = 0 \quad x > -\infty \tag{1.27}$$

を得る。発注したものは次期に納入されるので，1期モデルでは発注しないことが最適であることを意味している。つまり任意の x に対して $z^*(x)=0$ である。$\bar{x}_1^* = -\infty$ と定義しておく。

（ii）$n=2$ の場合

$$f_2^*(x) = \underset{z \geq 0}{\mathrm{Min}} \left\{ c \cdot z + L^*(x\,;\phi) + \alpha \int_0^\infty f_1^*(x+z-b)\phi(b)db \right\} \tag{1.28}$$

｛　｝の中を z に関して微分し，$x+z=y$ とおいた関数を $H_1(y)$ と表すと，

$$H_1(y) = c + \alpha \int_0^\infty f_1^{*\prime}(y-b)\phi(b)db \tag{1.29}$$

となる。（1.26）式と定理の仮定より $H_1(y)$ は y の増加関数で，$\lim_{y\to\infty} H_1(y) > 0$ となる。（1.25）式と定理の仮定より $\lim_{y\to\infty} H_1(y) < 0$ となるので $H_1(y)$ は少くとも1つの零点をもつ。$\phi(x) > 0$ で（1.28）式の｛　｝の中の第2項を除いたものは z の関数として凸関数であるので，$H_1(y)$ は高々 $(-\infty, x_0)$ で一定で $y > x_0$ なる y に対しては狭義増加関数であることがわかる（図2参照）。したがって $H_1(y)$ は唯一の零点 $\bar{x}_2^*$ をもつ。明らかに $\bar{x}_2^* > \bar{x}_1^*$ で，$x+z=y$，および（1.28）式，（1.29）式より

$$z_2^*(x) = \begin{cases} \bar{x}_2^* - x & x < \bar{x}_2^* \\ 0 & x > \bar{x}_2^* \end{cases} \tag{1.30}$$

したがって

7) Bellman, R [3]

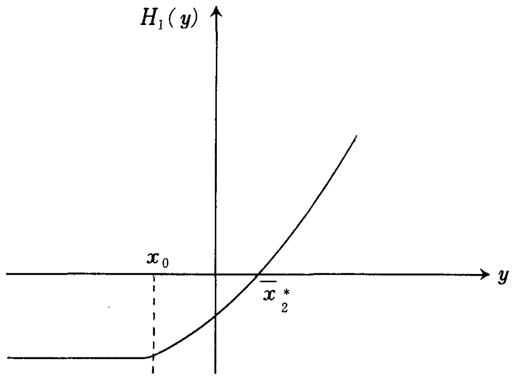

図 2　$H_1(y)$ のグラフ

$$f_2^*(x)=\begin{cases} c(\bar{x}_2^*-x)+L^*(x\,;\phi)+\alpha\int_0^\infty f_1^*(\bar{x}_2^*-b)\phi(b)db & x<\bar{x}_2^* \\ L^*(x\,;\phi)+\alpha\int_0^\infty f_1^*(x-b)\phi(b)db & x>\bar{x}_2^* \end{cases} \tag{1.31}$$

となり，

$$f_2^{*\prime}(x)=\begin{cases} -c+L^{*\prime}(x\,;\phi) & x<\bar{x}_2^* \\ L^{*\prime}(x\,;\phi)+\alpha\int_0^\infty f_1^{*\prime}(x-b)\phi(b)db & x>\bar{x}_2^* \end{cases} \tag{1.32}$$

となる。$H_1(\bar{x}_2^*)=0$ を用いると，$f_2^{*\prime}(x)$ は，$x=\bar{x}_2^*$ で連続であることがわかる。

$x<\bar{x}_2^*$ に対して

$$-f_2^{*\prime}(x)=c-L^{*\prime}(x\,;\phi)>-L^{*\prime}(x\,;\phi)=-f_1^{*\prime}(x) \tag{1.33}$$

$L^*(x\,;\phi)$ は凸関数で $f_1^{*\prime}(x)$ は連続であるので $\bar{x}_2^*$ を除いたすべての点で $f_2^{*\prime\prime}(x)\geqq 0$ となる。また点 $\bar{x}_2^*$ における右 2 階微分係数，左 2 階微分係数は存在する。

(iii) $n=k$ に対して (1.35) 式を満たす唯一の根 $\bar{x}_k^*$ を用いて最適発注量 $z_k^*(x)$ が (1.34) 式で表されたと仮定する。

$$z_k^*(x)=\begin{cases} \bar{x}_k^*-x & x<\bar{x}_k^* \\ 0 & x>\bar{x}_k^* \end{cases} \tag{1.34}$$

$$c+\alpha\int_0^\infty f_{k-1}^{*\prime}(\bar{x}_k^*-b)\phi(b)db=0 \tag{1.35}$$

さらに $\bar{x}_k^*$ は次の性質をもっていると仮定する。

i) $\bar{x}_k^*\geqq\bar{x}_{k-1}^*$;

ii) $f_k^{*\prime}(x)=\begin{cases} -c+L^{*\prime}(x\,;\phi) & x<\bar{x}_k^* \\ L^{*\prime}(x\,;\phi)+\alpha\int_0^\infty f_{k-1}^{*}(x-b)\phi(b)db & x>\bar{x}_k^*\,; \end{cases}$

iii) $f_k^*(x)$ は x の凸関数で $x=\bar{x}_k^*$ を除いて 2 階導関数が存在し，$\bar{x}_k^*$ では右 2 階微分係数，左 2 階

微分係数が存在する。

iv) $-f_k^{*\prime}(x) \geqq -f_{k-1}^{*\prime}(x) \quad x < \bar{x}_k^*$

このとき,

$$f_{k+1}^*(x) = \underset{z \geqq 0}{\mathrm{Min}}\left\{c \cdot z + L^*(x\,;\phi) + \alpha \int_0^\infty f_k^*(x+z-b)\phi(b)db\right\} \tag{1.36}$$

となる。

(1.36) 式の{　}の中を z で微分し，$x+z$ を y とおいた関数を $H_k(y)$ で表すと,

$$H_k(y) = c + \alpha \int_0^\infty f_k^{*\prime}(y-b)\phi(b)db \tag{1.37}$$

iii) より $H_k(y)$ は y の増加関数となり，定理の仮定より $\lim_{y\to\infty} H_k(y) > 0$。また ii) と定理の仮定より $\lim_{y\to-\infty} H_k(y) < 0$ となる。(ii) の場合と同様な議論より $H_k(y) = 0$ は唯一の根 $\bar{x}_{k+1}^*$ をもつことがわかる。

iv) より $y < \bar{x}_k^*$ に対して $H_{k+1}(y) < H_k(y)$ となり，$H_k(\bar{x}_k^*) = 0$ であること，および $H_{k+1}(y)$, $H_k(y)$ が増加関数であることから $\bar{x}_{k+1}^* \geqq \bar{x}_k^*$ を得る。また $x+z$ を y とおいたこと，および (1.36) 式，(1.37) 式から

$$z_{k+1}^*(x) = \begin{cases} \bar{x}_{k+1}^* - x & x < \bar{x}_{k+1}^* \\ 0 & x > \bar{x}_{k+1}^* \end{cases} \tag{1.38}$$

を得る。

$$f_{k+1}^*(x) = \begin{cases} c \cdot [\bar{x}_{k+1}^* - x] + L^*(x\,;\phi) + \alpha \int_0^\infty f_k^*(\bar{x}_{k+1}^* - b)\phi(b)db & x < \bar{x}_{k+1}^* \\ L^*(x\,;\phi) + \alpha \int_0^\infty f_k^*(x-b)\phi(b)db & x > \bar{x}_{k+1}^* \end{cases} \tag{1.39}$$

であるから

$$f_{k+1}^{*\prime}(x) = \begin{cases} -c + L^{*\prime}(x\,;\phi) & x < \bar{x}_{k+1}^* \\ L^{*\prime}(x\,;\phi) + \alpha \int_0^\infty f_k^{*\prime}(x-b)\phi(b)db & x > \bar{x}_{k+1}^* \end{cases} \tag{1.40}$$

$\bar{x}_k^* < x < \bar{x}_{k+1}^*$ なる x に対して

$$c + \alpha \int_0^\infty f_{k-1}^*(x-b)\phi(b)db > 0$$

であるから

$$-f_{k+1}^{*\prime}(x) = c - L^*(x\,;\phi) > L^{*\prime}(x\,;\phi) - \alpha \int_0^\infty f_{k-1}^{*\prime}(x-b)\phi(b)db = -f_k^{*\prime}(x)\ .$$

また $x \leqq \bar{x}_k^*$ に対しては，$-f_{k+1}^{*\prime}(x) = c - L^{*\prime}(x\,;\phi) = -f_k^{*\prime}(x)$ となるので $n = k+1$ に対して iv) が成立する。$L^*(x\,;\phi)$ は凸関数，$f_k^{*\prime}(x)$ は連続関数であるので $x = \bar{x}_{k+1}^*$ を除いたすべての x に対して

$f_{k+1}^{*\prime\prime}(x) \geqq 0$ となり，$\bar{x}_{k+1}^{*}$ における右2階微分係数，左2階微分係数は存在する。このことより $f_{k+1}^{*}(x)$ がiii）の性質をもつことがわかる。

ここで $n \to \infty$ とすると，$\lim_{n\to\infty} f_n^*(x) = f^*(x)$ を用いて，$\lim_{n\to\infty} z_n^*(x) = z^*(x)$ なる $z^*(x)$ は (1.21) 式で与えられる。ここに $\bar{x}^*$ は $f^*(x)$ が凸関数である次の方程式の唯一の根である。

$$c+\alpha\int_0^\infty f^{*\prime}(\bar{x}^*-b)\phi(b)db = 0 \tag{1.41}$$

(1.13) で $\lambda=1$ とおき，$x < \bar{x}^*$ に対して (1.21) 式を用いると，

$$f^*(x) = c[\bar{x}^*-x]+L^*(x\,;\phi)+\alpha\int_0^\infty f^*(x^*-b)\phi(b)d$$

となる。従って

$$f^{*\prime}(x) = -c+L^{*\prime}(x\,;\phi) \quad x < \bar{x}^* \tag{1.42}$$

となり，(1.41) 式で $\bar{x}^*-b < \bar{x}^*$ であるから (1.42) 式を (1.41) 式に代入して $\bar{x}^*$ は (1.22) 式の根であることがわかる。唯一の根であることは $H_n(y)$ が唯一の零点をもつことを示した方法で容易に示される。

[証終]

注 1 $\bar{x}_2^*$ の存在の証明のとき $\lim_{x\to\infty} p'(x) > c/\alpha$ が必要で，$n>2$ の場合の $\bar{x}_n^*$ の存在の証明の場合は条件がゆるめられ，$\lim_{x\to\infty} p'(x) > c(1-\alpha)/\alpha$ でよい。

補題 2 定理2の仮定のもとで，$\lambda=2$ の場合の最適発注量 $z^*(x, y_1)$ は

$$z^*(x, y) = \begin{cases} \bar{x}^*-x-y_1 & x+y_1 < \bar{x}^* \\ 0 & x+y_1 \geqq \bar{x}^* \end{cases} \tag{1.43}$$

ここに $\bar{x}^*$ は

$$c(1-\alpha)+\alpha^2\int_0^\infty\int_0^\infty L^{*\prime}(\bar{x}^*-b_1-b_2\,;\phi)\phi(b_1)\phi(b_2)db_1db_2 = 0 \tag{1.44}$$

の唯一の根である。

証明　$\lambda=2$ の n 期間 ($n>2$) モデルを考察する。このとき，$f_3^*(x, y)$，$z_3^*(x, y_1)$ は直接的計算により次のような性質があることがわかる。

$$f_3^*(x, y_1) = \min_{z\geqq 0}\left\{c\cdot z+L^*(x\,;\phi)+\alpha\int_0^\infty L^*(x+y_1-b\,;\phi)\phi(b)db\right\} \tag{1.45}$$

$$= L^*(x\,;\phi)+\alpha\int_0^\infty L(x+y_1-b\,;\phi)\phi(b)db$$

$$= L^*(x\,;\phi)+b_3(x+y_1) \tag{1.46}$$

$$z_3^*(x, y_1) = 0 \quad x+y_1 > -\infty$$

$$b_3'(x+y_1) = \alpha\int_0^\infty L^{*\prime}(x+y_1-b\,;\phi)\phi(b)db \tag{1.47}$$

$$b_3''(x+y_1) = \alpha \int_0^\infty L^{*''}(x+y_1-b\,;\phi)\phi(b)db \geqq 0 \tag{1.48}$$

(1.46) 式を用いて $f_4^*(x, y_1)$ を変形すると，

$$\begin{aligned} f_4^*(x, y_1) &= \underset{z\geqq 0}{\mathrm{Min}}\left\{c\cdot z+L^*(x\,;\phi)+\alpha\int_0^\infty f_3^*(x+y_1-b, z)\phi(b)db\right\} \\ &= L^*(x\,;\phi)+\underset{z\geqq 0}{\mathrm{Min}}\left\{c\cdot z+\alpha\int_0^\infty f_3^*(x+y_1-b, z)\phi(b)db\right\} \\ &= L^*(x\,;\phi)+\alpha\int_0^\infty L^*(x+y_1-b\,;\phi)\phi(b)db \\ &\quad +\underset{z\geqq 0}{\mathrm{Min}}\left\{c\cdot z+\alpha\int_0^\infty b_3(x+y_1+z-b)\phi(b)db\right\} \\ &= L^*(x\,;\phi)+b_4(x+y_1) \end{aligned} \tag{1.49}$$

ここに

$$b_4(x+y_1) = \alpha\int_0^\infty L^*(x+y_1-b\,;\phi)\phi(b)db+\underset{z\geqq 0}{\mathrm{Min}}\left\{c\cdot z+\alpha\int_0^\infty b_3(x+y_1+z-b)\phi(b)db\right\} \tag{1.50}$$

(1.50) 式の{　}を z で微分して $x+y_1+z=u$ とおいた関数を $K_4(u)$ で表すと，

$$K_4(u) = c+\alpha\int_0^\infty b_3'(u-b)\phi(b)db \tag{1.51}$$

$b_3(v)$ は v の凸関数であるから $K_4(u)$ は u の増加関数で，(1.47) 式と定理の仮定より $\lim_{u\to\infty} K_4(u) > 0$, $\lim_{u\to-\infty} K_4(u) < 0$ となる。$\lambda=1$ における場合と同様な方法により，$K_4(u)=0$ は唯一の根 $\bar{x}_4^*$ をもつ。明らかに $\bar{x}_4^* > \bar{x}_3^*$ (ここで $\bar{x}_3^*-\infty$ と定義する)。$x+y_1+z=u$, (1.49) 式，および (1.50) 式より

$$z_4^*(x, y_1) = \begin{cases} \bar{x}_4^*-x-y_1 & x+y_1 < \bar{x}_4^* \\ 0 & x+y_1 \geqq \bar{x}_4^* \end{cases} \tag{1.52}$$

$$b_4'(x+y_1) = \begin{cases} -c+\alpha\int_0^\infty L^{*\prime}(x+y_1-b\,;\phi)\phi(b)db & x+y_1 < \bar{x}_4^* \\ \alpha\int_0^\infty L^{*\prime}(x+y_1-b\,;\phi)\phi(b)db+\alpha\int_0^\infty b_3^*(x+y_1-b)\phi(b)db & x+y_1 \geqq \bar{x}_4^* \end{cases} \tag{1.53}$$

となる。また $b_4'(u)$ は $u=\bar{x}_4^*$ で連続である。

$L^*(x\,;\phi)$ および $b_3(v)$ は凸関数であることから $b_4(v)$ は凸関数で $\bar{x}_4^*$ を除いたすべての点で $b_4'(v) \geqq 0$ となる。また，$\bar{x}_4^*$ における右2階微分係数，左2階微分係数が存在する。

$x+y_1 < \bar{x}_4^*$ に対して

$$b_4'(x+y_1) = -c+\alpha\int_0^\infty L^{*\prime}(x+y_1-b\,;\phi)\phi(b)db = -c+b_3'(x+y_1) < b_3'(x+y_1)$$

よって

$$-b_4'(u) < -b_3^{*}(u) \quad u < \bar{x}_4^{*} \tag{1.54}$$

を得る。

次に，$\lambda=2$ の n 期間（$n>2$）モデルを考察する。このとき

$$f_n^{*}(x, y_1) = \underset{z \geqq 0}{\mathrm{Min}} \left\{ c \cdot z + L^{*}(x\,;\phi) + \alpha \int_0^{\infty} f_{n-1}^{*}(x+y_1-b, z)\phi(b)db \right\} \tag{1.55}$$

となる。$f_{n-1}^{*}(x, y_1)$ が次の性質をもつことが示されたと仮定しよう。

i）$f_{n-1}^{*}(x, y_1) = L^{*}(x\,;\phi) + b_{n-1}(x+y_1)$；

ii）$z_{n-1}^{*}(x, y_1) = \bar{x}_{n-1}^{*} - x - y_1 , \quad x+y_1 < \bar{x}_{n-1}^{*} ,$

$\qquad = 0 \qquad\qquad\qquad x+y_1 \geqq \bar{x}_{n-1}^{*} ,$

ここに $\bar{x}_{n-1}^{*}$ は次の方程式の唯一の根である。

$$c + \alpha \int_0^{\infty} b_{n-2}'(y-b)\phi(b)db = 0\,; \tag{1.56}$$

iii）$\bar{x}_{n-1}^{*} \geqq \bar{x}_{n-2}^{*}$；

iv）
$$b_{n-1}'(x+y_1) = \begin{cases} -c + \alpha \displaystyle\int_0^{\infty} L^{*\prime}(x+y_1-b\,;\phi)\phi(b)db & y_1+x < \bar{x}_{n-1}^{*} \\ \alpha \displaystyle\int_0^{\infty} L^{*\prime}(x+y_1-b\,;\phi)\phi(b)db & y_1+x \geqq \bar{x}_{n-1}^{*} \\ \quad + \alpha \displaystyle\int_0^{\infty} b_{n-2}'(x+y_1-b)\phi(b)db & \end{cases}$$

$b_{n-1}'(x+y_1)$ は変数 $x+y_1$ の連続関数である；

v）$b_{n-1}(u)$ は u の凸関数で，$u = \bar{x}_{n-1}^{*}$ を除いて $b_{n-1}'(u) \geqq 0$，$u = \bar{x}_{n-1}^{*}$ では右2階微分係数，左2回微分係数が存在する；

vi）$-b_{n-1}'(u) \geqq -b_{n-2}'(u) \quad u < \bar{x}_{n-1}^{*}$

n の場合を調べるために，i）を（1.45）式に代入すると，

$$\begin{aligned} f_n^{*}(x, y_1) &= L^{*}(x\,;\phi) + \alpha \int_0^{\infty} L^{*}(x+y_1-b\,;\phi)\phi(b)db \\ &\quad + \underset{z \geqq 0}{\mathrm{Min}} \left\{ c \cdot z + \alpha \int_0^{\infty} b_{n-1}(x+y_1+z-b)\phi(b)db \right\} \\ &= L^{*}(x\,;\phi) + b_n(x+y_1) , \end{aligned} \tag{1.57}$$

ここに

$$b_n(x+y_1) = \alpha \int_0^{\infty} L^{*}(x+y_1-b\,;\phi)\phi(b)db + \underset{z \geqq 0}{\mathrm{Min}} \left\{ c \cdot z + \alpha \int_0^{\infty} b_{n-1}(x+y_1+z-b)\phi(b)db \right\} \tag{1.58}$$

（1.48）式の｛　｝のを z を で微分して，$x+y_1+z$ を ω とおいた関数を $K_n(\omega)$ で表すと，

$$K_n(\omega) = c + \alpha \int_0^{\infty} b_{n-1}'(x+y_1+z-b)\phi(b)db \tag{1.59}$$

v）より $K_n(\omega)$ は ω の増加関数となり，定理の仮定より $\lim_{\omega\to\infty} K_n(\omega) > 0$。またiv）と定理の仮定より $\lim_{\omega\to-\infty} K_n(\omega) < 0$ となる。$\lambda = 1$ の場合と同様な論法により，$K_n(\omega) = 0$ は唯一の根 $\bar{x}_n^*$ をもつ。$x+y_1+z = \omega$,（1.58）式および（1.59）式より，

$$z_n^*(x, y_1) = \begin{cases} \bar{x}_n^* - x - y_1 & x+y_1 < \bar{x}_n^* \\ 0 & x+y_1 \geqq \bar{x}_n^* \end{cases} \tag{1.60}$$

$$b_n'(x+y_1) = \begin{cases} -c+\alpha\int_0^\infty L^{*\prime}(x+y_1-b\,;\phi)\phi(b)db & x+y_1 < \bar{x}_n^* \\ \alpha\int_0^\infty L^{*\prime}(x+y_1-b\,;\phi)\phi(b)db + \alpha\int_0^\infty b_{n-1}'(x+y_1-b)\phi(b)db & x+y_1 \geqq \bar{x}_n^* \end{cases} \tag{1.61}$$

となる。また，$b_n'(u)$ は u の連続関数である。

iv），$K_{n-1}(\omega)$ および $K_n(\omega)$ の定義より

$$\bar{x}_n^* \geqq \bar{x}_{n-1}^* \tag{1.62}$$

となる。

$L^*(x)$ および $b_{n-1}(u)$ は凸関数であるから，$b_n(u)$ は凸関数で，$\bar{x}_n^*$ を除いたすべての点で $b_n''(u) \geqq 0$ である。また，$\bar{x}_n^*$ における右2階微分係数，左2階微分係数が存在する。

$\bar{x}_{n-1}^* < x+y_1 < \bar{x}_n^*$ に対して $K_{n-1}(\omega) > 0$ であるから

$$\begin{aligned} -b_n'(x+y_1) &= c-\alpha\int_0^\infty L^{*\prime}(x+y_1-b\,;\phi)\phi(b)db \\ &> -\alpha\int_0^\infty L^{*\prime}(x+y_1-b\,;\phi)\phi(b)db - \alpha\int_0^\infty b_{n-2}'(x+y_1-b)\phi(b)db \\ &= -b_{n-1}'(x+y_1)\ , \end{aligned}$$

$x+y_1 \leqq \bar{x}_{n-1}^*$ に対しては

$$-b_n'(x+y_1) = c-\alpha\int_0^\infty L^{*\prime}(x+y_1-b\,;\phi)\phi(b)db = -b_{n-1}'(x+y_1)$$

となる。したがって

$$-b_n'(u) \geqq -b_{n-1}'(u) \quad u < \bar{x}_n^* \tag{1.63}$$

を得る。

$n \to \infty$ として次の結果を得る。

$$z^*(x, y_1) = \begin{cases} \bar{x} - x - y_1 & x+y_1 < \bar{x}^* \\ 0 & x+y_1 \geqq \bar{x}^*. \end{cases}$$

ここに $\bar{x}$ は

$$c+\alpha\int_0^\infty b'(\bar{x}^*-b)\phi(b)db=0 \tag{1.64}$$

の唯一の根である。i）で $n\to\infty$ とすると次式を得る。

$$f_n^*(x, y_1)=L^*(x\,;\phi)+b(x+y)$$

ここに

$$b'(\omega)=\begin{cases} -c+\alpha\displaystyle\int_0^\infty L^{*\prime}(\omega-b\,;\phi)\phi(b)db & \omega<\bar{x}^* \\ \alpha\displaystyle\int_0^\infty L^{*\prime}(\omega-b\,;\phi)\phi(b)db+\alpha\int_0^\infty b'(\omega-b)\phi(b)db & \omega>\bar{x}^* \end{cases} \tag{1.65}$$

(1.64) 式で $\bar{x}-b<\bar{x}^*$ であるから $\omega<\bar{x}^*$ に対する (1.65) 式を (1.64) 式に代入すると，$\bar{x}^*$ は

$$c(1-\alpha)+\alpha^2\int_0^\infty\int_0^\infty L^{*\prime}(x-b_1-b_2\,;\phi)\phi(b_1)\phi(b_2)db_1db_2=0 \tag{1.66}$$

の唯一の根であることがわかる。

［証終］

定理 5 の証明　λ 期の配達遅れのある場合は補題 1，2 の自然な拡張である。このとき次の諸式を得る，

$$\begin{aligned} f(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}) &= L^*(x\,;\phi)+L_1(x+y_1)+L_2(x+y_1+y_2)+\cdots \\ &\quad +L_{\lambda-2}(x+y_1+y_2+\cdots+y_{\lambda-2})+b(x+y_1+y_2+\cdots+y_\lambda)\ , \end{aligned} \tag{1.67}$$

$$z^*(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1})=\begin{cases} \bar{x}-(x+y_1+y_2+\cdots+y_{\lambda-1}) & x+y_1+y_2+\cdots+y_{\lambda-1}<\bar{x}^* \\ 0 & x+y_1+y_2+\cdots+y_{\lambda-1}\geqq\bar{x}^* \end{cases} \tag{1.68}$$

ここに

$$L_\gamma^*(u)=\int_0^\infty L_{\gamma-1}^*(u-b)\phi(b)db\ ,\quad L_0^*(u)=L^*(u\,;\phi) \tag{1.69}$$

また，

$$b'(\omega)=\begin{cases} -c+\alpha\displaystyle\int_0^\infty L'_{\lambda-2}(\omega-b)\phi(b)db & \omega<\bar{x}^* \\ L'_{\lambda-2}(\omega-b)+\alpha\displaystyle\int_0^\infty b'(\omega-b)\phi(b)db & w\geqq\bar{x}^*. \end{cases} \tag{1.70}$$

$\bar{x}^*$ は (1.71) 式の唯一の根である。

$$c(1-\alpha)+\alpha^\lambda\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty L^{*\prime}(\bar{x}^*-b_1-b_2-\cdots-b_\lambda\,;\phi)\phi(b_1)\phi(b_2)\cdots\phi(b_\lambda)db_1\cdots db_\lambda=0 \tag{1.71}$$

よって定理は証明された。

［証終］

方程式 (1.19) 式の根 $\bar{x}^*$ は λ に依存するから $\bar{x}^*(\lambda-1)$ で表すと，次の定理を得る。

定理 6　定理 5 の仮定のもとで，十分 1 に近い α に対して，

$\bar{x}_1^*(1) < \bar{x}^*(2) < \cdots < \bar{x}^*(\lambda-1)$

となる。

証明　y_γ を次の方程式の唯一の根とする。

$$\int_0^\infty L_{\gamma-1}^{*\prime}(y_\gamma - b)\phi(b)db = 0$$

y_γ が唯一であることは $\bar{x}^*(\gamma)$ の唯一性と同様にして証明される。

$L_{\gamma-1}(u)$ は凸関数であるから

$$L^{*\prime}(y_\gamma - b) \geqq L_{\gamma-1}^{*\prime}(y_\gamma - b - b_1) \quad \forall b > 0\ , \forall b_1 > 0$$

となり，ある点で $L^{*\prime}(y_\gamma - b) > L_{\gamma-1}^{*\prime}(y_\gamma - b - b_1)$ が成立するから

$$0 = \int_0^\infty L_{\gamma-1}^{*\prime}(y_\gamma - b)\phi(b)db > \int_0^\infty \int_0^\infty L_{\gamma-1}^{*\prime}(y_\gamma - b - b_1)\phi(b)\phi(b_1)dbdb_1$$

$$= \int_0^\infty L_\gamma^{*\prime}(y_\gamma - b)\phi(b)db \tag{1.72}$$

$$\int_0^\infty L_\gamma^{*\prime}(y-b)\phi(b)db$$

は y の増加関数であるから（1.72）式から

$y_{r+1} > y_r$.

$\bar{x}^*(r)$ は

$$c(1-\alpha) + \alpha^r \int_0^\infty L_{\gamma-1}^{*\prime}(\bar{x}^*(r) - b)\phi(b)db = 0 \tag{1.73}$$

の根である。$\alpha \to 1$ のとき $\bar{x}^*(r) \to y_\lambda$ したがって十分1に近い α に対して

$\bar{x}_1^*(1) < \bar{x}_2^*(2) < \cdots < \bar{x}^*(\lambda-1)$

［証終］

2.　過剰需要が後期需要として取扱われる場合

2.1.　単純な特定モデル

この場合は（1.1）に対応して $f(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1})$ は次の関数方程式をみたす。

$$f(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}) = \min_{z \geqq 0} \Big\{ c(z) + L(x\,;\phi) + \alpha f(y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}, z) \int_x^\infty \phi(b)db$$
$$+ \alpha \int_0^x f(x - b + y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}, z)\phi(b)db \Big\} \tag{2.1}$$

ここに

$$L(x\,;\phi)=\int_0^x h(x-b)\phi(b)db+\int_x^\infty p(b-x)\phi(b)db \tag{2.2}$$

このモデルの場合，最適発注量 $z(x, y_1, \cdots, y_{\lambda-1})$ は簡単な形にならない。次の定理７，定理８が成立することが知られている[8)]。

定理７　在庫が少ないとき，ある正の量を発注することが必要で，在庫が多いとき，ある正の量を発注することが不利益ならば，最適発注量 $z(x, y_1, \cdots, y_{\lambda-1})$ は $x+y_1+\cdots+y_{\lambda-1}$ の関数とはならない。

定理８　$c(z)=c\cdot z$，$p(x)=p\cdot z$，$h(x)$ は凸増加関数，$\phi(b)>0\,(b\geqq 0)$，$\lambda=1$ ならば，最適発注量 $z(x)$ は x の連続関数で次の型をもつ，

$$\begin{array}{ll} z(x)>0 & x<\bar{x} \\ z(x)=0 & x\geqq \bar{x}\ . \end{array}$$

さらに，$z(x)$ は $x<\bar{x}$ に対して狭義減少関数で，$|dz(x)/dx|<1$ である。

2.2.　需要形態の一般的在庫モデル

この場合は（1.13）に対応して $f^*(x, y_1, \cdots, y_{\lambda-1})$ は次の関数方程式をみたす。

$$\begin{aligned} f^*(x, y_1, \cdots, y_{\lambda-1}) = \operatorname*{Min}_{z\geqq 0}\Big\{&c(z)+L^*(x\,;\phi)+\alpha f^*(y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}, z)\int_x^\infty \phi(b)db \\ &+\alpha\int_0^x f^*(x-b+y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}, z)\phi(b)db\Big\} \end{aligned} \tag{2.3}$$

ここに，

$$\begin{aligned} L^*(x\,;\phi) = &\int_0^x h(x-bG(1))\phi(b)db+\int_x^\infty h(xg^{-1}(x/b)-bG(g^{-1}(x/b)))\phi(b)db \\ &+\int_x^\infty p(b(G(1)-G(g^{-1}(x/b)))-x(1-g^{-1}(x/b)))\phi(b)db \end{aligned} \tag{2.4}$$

このモデルにおける最適発注量を $z^*(x, y_1, \cdots, y_{\lambda-1})$ とすると定理９および定理10を得る。

定理９　在庫が少ないとき，ある正の量を発注することが必要で，在庫が多いとき，ある正の量を発注することが不利益ならば，最適発注量 $z^*(x, y_1, \cdots, y_{\lambda-1})$ は $x+y_1+\cdots+y_{\lambda-1}$ の関数とはならない。

証明　最適発注量 z が $z(x+y_1+\cdots+y_{\lambda-1})$ の形をもつと仮定し，このとき得られる結果が定理の仮定と矛盾することを，$\lambda=2$ の場合に対して示そう。この証明は一般性を失わない。$z(u)$ は有限個の不連続点だけをもつと仮定する（発注量が唯一であればごく自然の仮定で，発注量が複数個存在すれば，この形の特別な一つが選ばれる）まず次の３つの補題を証明する。

補題３　$z(\bar{u})=\bar{z}>0$ とする。このとき，$y=\bar{z}$ における $\partial f(x,y)/\partial y$ は $x\leqq\bar{u}$ なる x に依存しない。

証明　$x+y=\bar{u}$ なる任意の (x, y) に対して次の $G(x, y\,;z)$ を定義する。

$$G(x, y\,;z)=\Big\{c(z)+L^*(x\,;\phi)+\alpha f^*(y, z)\int_x^\infty \phi(b)db+\alpha\int_0^x f^*(x+y-b, z)\phi(b)db\Big\} \tag{2.5}$$

8) Arrow K. J., S. Karlin and H. Scharf [1]

$\bar{z}$ は最適発注量であることから (2.3) 式より

$$\frac{\partial G(x, y ; z)}{\partial z}=0 \tag{2.6}$$

の根である。したがって (2.6) 式を x, y について微分して

$$\frac{\partial^2(G(x, y ; z)}{\partial x \partial z}+\frac{\partial^2 G(x, y ; z)}{\partial^2 z} \frac{\partial z}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial^2 G(x, y ; z)}{\partial y \partial z}+\frac{\partial^2 G(x, y ; z)}{\partial^2 z} \frac{\partial z}{\partial y}=0$$

となる。とのころが $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}$ であるから

$$\frac{\partial^2 G(x, y ; z)}{\partial x \partial z}=\frac{\partial^2 G(x, y ; z)}{\partial y \partial z}$$

となる。$\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial z}$, $\frac{\partial^2 G}{\partial y \partial z}$ が連続であるから

$$\frac{\partial^2 G(x, y ; z)}{\partial z \partial x}-\frac{\partial^2 G(x, y ; z)}{\partial z \partial y}=0 \quad z=\bar{z} \tag{2.7}$$

を得る。

$$\frac{\partial G(x, y ; z)}{\partial x}=c'(z) \frac{\partial z}{\partial x}+\alpha \frac{\partial f(y, z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \int_x^{\infty} \phi(b) db+\alpha \int_0^x \frac{\partial f(x+y-b, z)}{\partial x} \phi(b) db$$

$$\frac{\partial^2 G(x, y ; z)}{\partial z \partial x}=c''(z) \frac{\partial z}{\partial x}+\alpha \frac{\partial^2 f(y, z)}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial x} \int_x^{\infty} \phi(b) db+\alpha \int_0^x \frac{\partial^2 f(x+y-b, z)}{\partial z \partial x} \phi(b) db$$

$$\frac{\partial G(x, y ; z)}{\partial y}=c'(z) \frac{\partial z}{\partial y}+\alpha\left\{\frac{\partial f(y, z)}{\partial y}+\frac{\partial f(y, z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y}\right\} \int_x^{\infty} \phi(b) ab+\int_x^{\infty} \frac{\partial f(x+y-b, z)}{\partial y} \phi(b) db$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G(x, y ; z)}{\partial z \partial x}= & c''(z) \frac{\partial z}{\partial y}+\alpha\left\{\frac{\partial^2 f(y, z)}{\partial z \partial y}+\frac{\partial^2 f(y, z)}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial y}\right\} \int_x^{\infty} \phi(b) db \\ & +\alpha \int_0^x \frac{\partial^2 f(x+y-b, z)}{\partial z \partial y} \phi(b) db\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f(x+y-b, z)}{\partial x}=\frac{\partial f(x+y-b, z)}{\partial y}$$

が成立するから，(2.7) 式の左辺を計算することにより

$$\frac{\partial^2 G(x, y ; z)}{\partial z \partial x}-\frac{\partial^2 G(x, y ; z)}{\partial z \partial y}=-\alpha \frac{\partial^2 f(y, z)}{\partial z \partial y} \int_x^{\infty} \phi(b) db$$

を得る。したがって

$$\frac{\partial^2 f(y, z)}{\partial y \partial z}=0 \quad z=\bar{z}, \quad y \leqq \bar{u} \tag{2.8}$$

となる。(2.8) 式を y について積分することにより補題3を得る。

補題 4　和の関数である一つの最適発注量が存在すれば，$z(x+y)$ がまた最適発注量であるような有限個の区間上で一定である関数 $z(u)$ が存在する。

証明　$z(u)$ は有限個の不連続点をもつから，z の値域は有限個のかさならない区間から構成される。z_1 と z_2 を同じ区間内の任意の2点とする(図3に $z(u)$ が1次減少関数の例が示されている。z_1 は $x+y=u_1$，z_2 は $x+y=u_2$ に対して最適であると仮定する，ただし $u_1 \leqq u_2$ で，一般性を失うことなく z_1，z_2 は I_1 の任意の2点としている)。

補題1から

$$f(y, z_1)-f(y, z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial f(y, z)}{\partial z} dz$$

$$= K(z_1, z_2) \quad y \leqq u_1$$

となる。$x+y \leqq u_1$ に対して $y \leqq u_1$，$x+y-b \leqq x+y \leqq u_1$ となるから $G(x, y\,; z)$ の定義式より

$$\begin{aligned}
&G(x, y\,; z_1)-G(x, y\,; z_2)\\
&\quad = c(z_1)-c(z_2)+\alpha\{f(y, z_1)-f(y, z_2)\}\\
&\quad \cdot \int_x^{\infty} \phi(b)db+\alpha \int_0^x \{f(x+y-b, z_1)-f(x+y-b, z_2)\}\phi(b)db\\
&\quad = c(z_1)-c(z_2)+\alpha K(z_1, z_2)\int_x^{\infty} \phi(b)db+\alpha\int_0^x K(z_1, z_2)\phi(b)db\\
&\quad = c(z_1)-c(z_2)+\alpha K(z_1, z_2) \qquad x+y \leqq u_1 \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

となる。z_1 は $x+y=u_1$ で最適であるから

$$G(x, y\,; z_1) \leqq G(x, y\,; z) \qquad z \in I_{11}$$

したがって (2.9) 式から

$$0 \geqq G(x, y\,; z_1)-G(x, y\,; z) = c(z_1)-c(z)+\alpha K(z_1, z)$$

となる。よって

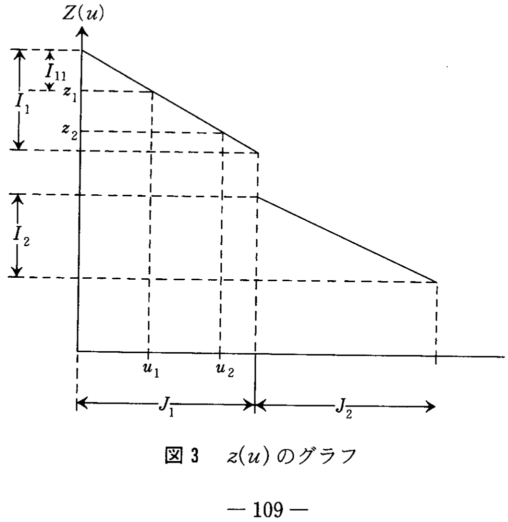

図3　$z(u)$ のグラフ

$$c(z_1)+\alpha K(z_1, z_2) \leqq c(z)+\alpha\{K(z_1, z_2)-K(z_1, z)\}$$
$$= c(z)+\alpha K(z, z_2) \qquad z \in I_{11}$$

を得る。つまり z_1 は区間 I_{11} で $c(z)+\alpha K(z, z_2)$ を最小にする z の値となっている。したがって (x, y) が $x+y \leqq u_1$ をみたす点であれば最適発注量は z_1 である。よって u_1 を区間 J_1 におけるすべての (x, y) に対して $\max(x+y)$ に接して選ぶことにのって補題4を得る。

補題 5　和の関数である最適発注量をもつならば，また在庫量のいかんにかかわらず一定量を発注することが最適である最適発注政策が存在する。

証明　補題4で述べた性質をもつ発注政策を考えよう（図4，図5参照)。いま u を関数 z が z_1 から z_2 にジャンプする点とする。$G(x, y; z)$ が z の連続関数であるから，$x+y=u$ において $G(x, y; z_1) > G(x, y; z_2)$ とすると，$x+y<u$ のもとで z_1 だけ発注することが最適であることに矛盾する。また $x+y=u$ において，$G(x, y; z_1) < G(x, y; z_2)$ とすると，z_2 が $u \leqq x+y < u_1$ で最適であることに矛盾する。よって $x+y=u$ において $G(x, y; z_1) \equiv G(x, y; z_2)$ となり，その結果

$$\frac{\partial G(x, y; z_1)}{\partial x}-\frac{\partial G(x, y; z_1)}{\partial y} \equiv \frac{\partial G(x, y; z_2)}{\partial x}-\frac{\partial G(x, y; z_2)}{\partial y} \qquad x+y=u$$

となる。上式の両辺を G の定義より直接計算すると（補題3の計算を参照）

$$\frac{\partial f(y, z_1)}{\partial y}=\frac{\partial f(y, z_2)}{\partial y} \quad y \leqq u$$

を得る。これは $f(y, z_1)-f(y, z_2)$ が y に依存しないことを示している。補題4の証明と同様にして

$$G(x, y; z_1)=G(x, y; z_2)+c(z_1)-c(z_2)+\alpha[f(y, z_1)-f(y, z_2)] \quad x+y \leqq u$$

となり，$x+y=u$ において，$G(x, y; z_1)=G(x, y; z_2)$ であるから

$$c(z_2)-c(z_1)+\alpha[f(y, z_2)-f(y, z_1)]=0 \quad x+y=u$$

ところが上式の左辺は y に依存しないから，$x+y \leqq u$ に対して $G(x, y; z_1) \equiv G(x, y; z_2)$ を得る。こ

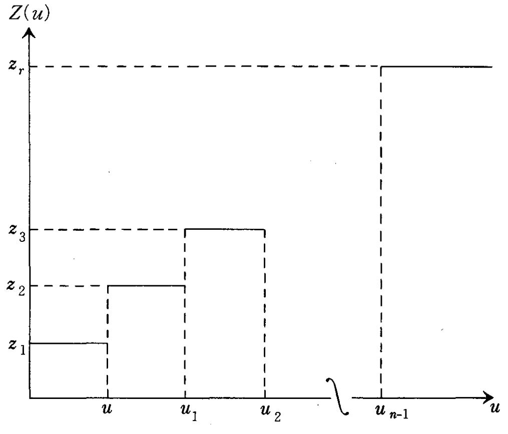

図 4　$z(u)$ のグラフ

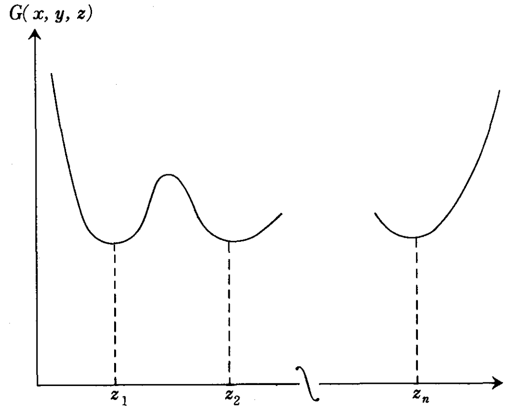

図 5　$G(x, y, z)$ のグラフ

のことは z_2 も不連続点 u 以下の区間 $(x+y \leqq u)$ で最適であることを示し，図4において1個少いジャンプをもつ新しい最適発注政策の構成を可能とする $(x+y < u_1$ のとき z_2，$u_1 \leqq x+y < u_2$ のとき $z_3, \cdots$ の発注を行うことが最適発注政策である)上の議論を $u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}$ で行うことにより補題5を得る。

定理9の仮定は補題5と矛盾する。

[証終]

定理10　$c(z)=c\cdot z$，$p(x)=p\cdot z$，$h(x)$ は凸関数で，狭義増加関数，$\phi(b)>0\ (b \geqq 0)$，$\lambda=1$ ならば最適発注量 $z^*(x)$ は x の連続関数で次の型をもつ，

$$z^*(x)>0 \qquad x<\bar{x}^*$$
$$z^*(x)=0 \qquad x>\bar{x}^* .$$

さらに，$z^*(x)$ は $x<\bar{x}^*$ に対して狭義減少関数で，$|dz^*(x)/dx|<1$ である。

証明　この場合の関数方程式は次式で与えられる

$$f^*(x)=\underset{z\geqq 0}{\mathrm{Min}}\left\{c\cdot z+L^*(x\,;\phi)+\alpha f(z)\int_x^\infty \phi(b)db+\alpha\int_0^x f(x+z-b)\phi(b)db\right\} \tag{2.10}$$

ここに $L^*(x\,;\phi)$ は (2.4) 式で与えられる。また n 期間モデルに対する $f_n^*(x)$ は次式で与えられる。

$$f_n^*(x)=\underset{z\geqq 0}{\mathrm{Min}}\left\{c\cdot z+L^*(x\,;\phi)+\alpha f_{n-1}^*(z)\int_x^\infty \phi(b)db+\alpha\int_0^x f_{n-1}^*(x+z-b)\phi(b)db\right\} \tag{2.11}$$

まず，n 期間モデルを取扱い，$n\to\infty$ とすることにより定理を証明する。

(i) $n=1$ の場合　このとき，次の諸式を得る[9]。

$$f_1^*(x)=\underset{z\geqq 0}{\mathrm{Min}}\left\{c\cdot z+L^*(x\,;\phi)\right\}=L^*(x\,;\phi) \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}-f_1^{*\prime}(x)=-L^{*\prime}(x\,;\phi)&=p\int_x^\infty \phi(b)db-\int_0^x h'(x-bG(1))\phi(b)db\\&\quad-\int_x^\infty[h'(xg^{-1}(x/b)-bG(g^{-1}(x/b)))+p]g^{-1}(x/b)\phi(b)db\leqq p\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}f_1^{*\prime\prime}(x)=L^{*\prime\prime}(x\,;\phi)&=\int_0^x h''(x-bG(1))\phi(b)db\\&\quad+\int_x^\infty\Big\{h''(xg^{-1}(x/b)-bG(g^{-1}(x/b)))(g^{-1}(x/b))^2+[h'(xg^{-1}(x/b)\\&\quad-bG(g^{-1}(x/b)))+p]\frac{\partial g^{-1}(x/b)}{\partial x}\Big\}\phi(b)db\\&\quad>0\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\lim_{x\to\infty} f_1^{*\prime}(x)\geqq 0 \tag{2.15}$$

(ii) n 期間モデルの解に関して，次の諸性質が成り立っていると仮定する。

---

9)　児玉正憲・北原貞輔 [5]

i）$z_n^*(x)$ は最適発注政策にしたがって発注された最適発注量を表し，$z_n^*(x)$ について次式が成立している。

$$\begin{cases} -1 < \dfrac{dz_n^*(x)}{dx} < 0 & x < \bar{x}_n^* , \\ \quad z_n^*(x) = 0 & x \geqq \bar{x}_n^* ; \end{cases} \tag{2.16}$$

ii）$-f_n^{*\prime}(x) \leqq p$ （$f_n^{*\prime}(x)$ は存在し連続）；

iii）$f_n^{*\prime\prime}(x) > 0 \quad x > 0$；

iv）$\lim_{x \to \infty} f_n^{*\prime}(x) \geqq 0$。

このとき，$(n+1)$ 期間モデルに対する関数方程式は

$$f_{n+1}^*(x) = \underset{z \geqq 0}{\mathrm{Min}} \left\{ c \cdot z + L^*(x ; \phi) + \alpha \int_0^x f_n^*(x+z-b)\phi(b)db + \alpha f_n^*(z) \int_x^\infty \phi(b)db \right\} \tag{2.17}$$

となる。{　} を z に関して微分したものを $K_n(z ; x)$ とおくと，

$$c + \alpha \int_0^x f_n^{*\prime}(x+z-b)\phi(b)db + \alpha f_n^{*\prime}(z) \int_x^\infty \phi(b)db = K_n(z ; x) \tag{2.18}$$

iii）によって $K_n(z ; x)$ は x を固定したとき，z の狭義増加関数であり，z を固定したとき，x の狭義増加関数である。iv）により $\lim_{x \to \infty} K_n(z ; x) > 0$。$z_{n-1}^*(x)$ を（2.18）式の唯一の零点が存在すれば，零点を表すものとし，存在しない場合は $z_{n-1}^*(x) = 0$ とする。$z_{n+1}^*(x)$ はiv）により有界で，x を固定したとき，$K_n(z ; x) = 0$ の唯一の根として求められるから x の連続関数である。$K_n(z ; x)$ は x の狭義増加関数であるから，$z_{n+1}(x)$ は連続な導関数をもち，かつ

$$\begin{cases} \dfrac{dz_{n+1}^*(x)}{dx} < 0 & x < \bar{x}_{n+1}^* \\ z_{n+1}^*(x) = 0 & x \geqq \bar{x}_{n+1}^* \end{cases} \tag{2.19}$$

である。$K_n(z_{n+1}^*(x) ; x) = 0$ を x に関して微分して次の関係式を得る。

$$0 = \left(1 + \frac{dz_{n+1}^*(x)}{dx}\right) \int_0^x f_n^{*\prime\prime}(x + z_{n+1}^*(x) - b)\phi(b)db + f_n^{*\prime\prime}(z_{n+1}^*(x)) \int_x^\infty \phi(b)db \cdot \frac{dz_{n+1}^*(x)}{dx}$$

iii）と（2.19）式より

$$1 + \frac{dz_{n+1}^*(x)}{dx} > 0 . \tag{2.20}$$

よって $n+1$ に対して（2.16）式が成立する。（2.17）式に $z_{n+1}^*(x)$ を代入すると，

$$f_{n+1}^*(x) = c \cdot z_{n+1}^*(x) + L^*(x ; \phi) + \alpha \int_0^x f_n^*(x + z_{n+1}^*(x) - b)\phi(b)db + \alpha f_n^*(z_{n+1}^*(x)) \int_x^\infty \phi(b)db \tag{2.21}$$

となり，（2.16）式および（2.17）式を用いると次式を得る。

$$f^{*\prime}_{n+1}(x) = \begin{cases} \alpha \int_0^x f^{*\prime}_n(x+z^*_{n+1}(x)-b)\phi(b)db + L^{*\prime}(x\,;\phi) & x < \bar{x}^*_{n+1} \\ \alpha \int_0^x f^{*\prime}_n(x-b)\phi(b)db + L^{*\prime}(x\,;\phi) & x \geqq \bar{x}^*_{n+1} \end{cases} \tag{2.22}$$

また，(2.13) 式と ii) を用いると，

$$-f^{*\prime}_{n+1}(x) \leqq \alpha p \int_0^x \phi(b)db + p\int_x^\infty \phi(b)db < p$$

を得る。したがって $(n+1)$ 期間モデルに対して i) と ii) が示された。iv) は (2.15) 式，帰納法の仮定および (2.22) 式から明らかである。次にiii) を示す。

(2.22) 式および (2.14) 式から，$x < \bar{x}^*_{n+1}$ に対して

$$\begin{aligned} f^{*\prime\prime}_{n+1}(x) &= \left[\alpha \int_0^x f^{*\prime\prime}_n(x+z^*_{n+1}(x)-b)\phi(b)db\right]\left[1+\frac{dz^*_{n+1}(x)}{dx}\right] + \alpha f^{\prime}_n(z^*_{n+1}(x))\phi(x) + L^{*\prime\prime}(x\,;\phi) \\ &\geqq \left[\alpha \int_0^x f^{*\prime\prime}_n(x+z^*_{n+1}(x)-b)\phi(b)db\right]\left[1+\frac{dz^*_{n+1}(x)}{dx}\right] + \int_0^x h''(x-bG(1))\phi(b)db \\ &\quad + \int_x^\infty \left[h''(xg^{-1}(x/b)-bG(g^{-1}(x/b)))(g^{-1}(x/b))^2 + h'(xg^{-1}(x/b)\right. \\ &\quad \left. -bG(g^{-1}(x/b)))\,\frac{\partial g^{-1}(x/b)}{\partial x}\right]\phi(b)db + p\left[\int_x^\infty \frac{\partial g^{-1}(x/b)}{\partial x}\phi(b)db - \alpha\phi(x)\right] \\ &> 0 \end{aligned}$$

となる。これは上式の最終項が正の値をとること[10] から明らかである。

$x \geqq x^*_{n+1}$ に対して

$$\begin{aligned} f^{*\prime\prime}_{n+1}(x) &= \alpha \int_0^x f^{*\prime\prime}_n(x-b)\phi(b)db + \alpha f^{*\prime}_n(0)\phi(x) + L^{*\prime\prime}(x\,;\phi) \\ &\geqq \alpha \int_0^x f^{*\prime\prime}_n(x-b)\phi(b)db + \int_0^x h''(x-bG(1))\phi(b)db \\ &\quad + p\left[\int_x^\infty \frac{\partial g^{-1}(x/b)}{\partial x}\phi(b)db - \alpha\phi(x)\right] \\ &\quad + \int_x^\infty \left[h''(xg^{-1}(x/b)-bG(g^{-1}(x/b)))(g^{-1}(x/b))^2\right. \\ &\quad \left. + h'(xg^{-1}(x/b)-bG(g^{-1}(x/b)))\,\frac{\partial g^{-1}(x/b)}{\partial x}\right]\phi(b)db > 0 \end{aligned}$$

したがってiii) は示された。

$z^*_n(x)$ は $dz^*_n(x)/dx \leqq 0$ なる連続微分可能な減少関数であるから x の連続減少関数である極限関数 $z^*(x)$ を選びうる。$z^*(x)$ は (2.23) 式で与えられる関数で (2.24) 式を満している。

$$z^*(x) > 0 \quad x < \bar{x}^*\,, \quad z^*(x) = 0 \quad x > \bar{x}^* \tag{2.23}$$

---

10) 児玉正憲 [9]
本節では，$c(z) = c\cdot z$，$p(z) = p\cdot z$，$h(z) = h\cdot z$ を仮定する。論文 [5] より

$$f^*(x) = c\cdot z^*(x) + L^*(x\,;\phi) + \alpha\int_0^x f(x+z^*(x)-b)\phi(b)db + f(z^*(x))\int_x^\infty \phi(b)db \qquad (2.24)$$

(2.22) 式から次式を得る。

$$f^{*\prime}(x) = \begin{cases} \alpha\int_0^x f^{*\prime}(x+z^*(x)-b)\phi(b)db + L^{*\prime}(x\,;\phi) & x < \bar{x}^* \\ \alpha\int_0^x f^{*\prime}(x-b)\phi(b)db + L^{*\prime}(x\,;\phi) & x > \bar{x}^* \end{cases} \qquad (2.25)$$

$f_n^*(x)$ と $f_n^{*\prime}(x)$ はそれぞれ $f^*(x)$ と $f^{*\prime}(x)$ に一様収束するから $f(x)$ は凸関数で $f'(x)$ はいたるところ存在し，$-f^{*\prime}(x) < p$ であることがいえる。

実際

$$-f^{*\prime}(x) \leqq \alpha p\int_0^x \phi(b)db - L^{*\prime}(x\,;\phi) \leqq \alpha p\int_0^x \phi(b)db + p\int_x^\infty \phi(b)db < p$$

となり，$f^*(x)$ の狭義凸性は，$f^{*\prime\prime}(x) \geqq 0$ であるから，$x < \bar{x}^*$ に対して

$$f^{*\prime\prime}(x) = \alpha\int_0^x f^{*\prime\prime}(x+z^*(x)-b)\phi(b)db\left(1+\frac{dz^*(x)}{dx}\right) + L^{*\prime\prime}(x\,;\phi)$$

左辺は $\geqq 0$, $L^*(x\,;\phi)$ が狭義凸関数であるから右辺は >0 となり，$f^{*\prime\prime}(x) > 0$ を得る。同様にして $x < \bar{x}^*$ に対して $f^{*\prime\prime}(x) > 0$ である。$f^{*\prime}(x)$ は $x = \bar{x}^*$ に対して連続であるから $f^*(x)$ は狭義凸関数である。

$K_n(x\,;z^*) = 0$ は $x < \bar{x}^*$ に対して，$z^*(x)$ は

$$0 = c + \alpha\int_0^x f^{*\prime}(x+z-b)\phi(b)db + \alpha f^{*\prime}(z)\int_x^\infty \phi(b)db \qquad (2.26)$$

の唯一の根であることを意味している。(2.26) 式の両辺を x で微分して

$$0 = \alpha\left(1+\frac{dz}{dx}\right)\int_0^x f^{*\prime\prime}(x+z-b)\phi(b)db + \alpha f^{*\prime\prime}(z)\frac{dz}{dx}\int_x^\infty \phi(b)db$$

$dz/dx \leqq 0$ で f は狭義凸関数であることが示されているから，$\dfrac{dz}{dx} = 0$ なら右辺が正となり矛盾，したがって $dz/dx < 0$。また $(1+dz/dx) \geqq 0$ であるが $(1+dz/dx) = 0$ なら右辺は負の値となり矛盾，したがって $(1+dz/dx) > 0$ よって，$-1 < dz/dx < 0$ を得る。

［証終］

3. 同 値 問 題

変数　$z_1, z_2, \cdots, z_n$ に関して2つのシステム A, B が同値であれば，B のふるまいを調べることで A のふるまいを知ることができる。このとき，B が A に比して簡単であれば好都合である。需要形態の一般的在庫モデルと単純な特定在庫モデルを，それぞれ A，B で表すものと考え，その同値関係につ

いて考察する。A, B のいずれについても制御可能な変数は発注量 $z(x, y_1, \cdots, y_{\lambda-1})$ だけである。発注量のシステムへの影響は期待総費用である。したがって期待総費用について同値関係を求めることが本節の目的となる。

本節では $c(z) = c \cdot z$, $p(z) = p \cdot z$, $h(z) = h \cdot z$ を仮定する。論文 [5] より

$$s(b) = \int_b^\infty \frac{\partial g^{-1}(b/x)}{\partial b} \phi(x) dx \tag{3.1}$$

を導入すると，$s(b)$ は確率密度関数であり $\int_0^\infty bs(b)db < \infty$ であることが証明されている。このとき，次の諸定理をうる。

定理11　(1.2) 式の $\phi(b)$ を (3.1) 式の $s(b)$ でおきかえると，過剰需要が後期の需要として取扱われる場合の有限期間モデルにおいて

$$\begin{aligned} & f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}) \\ &= \operatorname*{Min}_{z \geqq 0} \left\{ c(z) + L(x; s) + \alpha \int_0^\infty f_{n-1}(x-b+y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}, z) \phi(b) db \right\} && (3.2) \\ &= \operatorname*{Min}_{z \geqq 0} \left\{ c(z) + L^*(x; \phi) + \alpha \int_0^\infty f^*_{n-1}(x-b+y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}, z) \phi(b) db \right\} \\ &= f^*_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}) && (3.3) \end{aligned}$$

が成立する。

証明　帰納法による，

(i) $n = \lambda$ の場合はすでに証明した ($n < \lambda$ のとき，$f_{n-1} = f^*_{n-1} = 0$)

(ii) $n = k$ のとき成立しているとする ($k > \lambda$)。つまり

$$f_k(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}) = f^*_k(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1})$$

このとき，

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}) &= \operatorname*{Min}_{z \geqq 0} \left\{ c(z) + L(x; s) + \alpha \int_0^\infty f_k(x-b+y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}, z) \phi(b) db \right\} \\ &= \operatorname*{Min}_{z \geqq 0} \left\{ c(z) + L^*(x; \phi) + \alpha \int_0^\infty f^*_k(x-b+y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}, z) \phi(b) db \right\} \\ &= f^*_{k+1}(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}) \end{aligned}$$

定理12　(1.2) 式の $\phi(b)$ を (3.1) 式の $s(b)$ でおきかえると，(1.1) 式と (1.13) 式の間に

$$\begin{aligned} f(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}) &= \operatorname*{Min}_{z \geqq 0} \left\{ c(z) + L(x; s) + \alpha \int_0^\infty f(x-b+y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}, z) \phi(b) db \right\} && (3.4) \\ &= \operatorname*{Min}_{z \geqq 0} \left\{ c(z) + L^*(x; \phi) + \alpha \int_0^\infty f^*(x-b+y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}, z) \phi(b) db \right. \\ &= f^*(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}) && (3.5) \end{aligned}$$

が成立する。

証明　定理11より $f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}) = f^*_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1})$ ($n \geqq \lambda$) および一般論より $\lim\limits_{n\to\infty}$

$f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}) = f(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}) = f^*(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}) = \lim_{n\to\infty} f_n^*(x, y_1, y_2, \cdots, \cdots, y_{\lambda-1})$ がいえることより明らかである。

［証終］

定理13　(1.2) 式の $\phi(b)$ を (3.1) 式の $s(b)$ でおきかえると，過剰需要が後期需要として取扱われないモデルにおいて

$$f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}) = \min_{z\geqq 0}\Big\{c(z)+L(x\,;s)+\alpha f_{n-1}(y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}, z)\int_x^\infty \phi(b)db + \alpha\int_0^x f_{n-1}(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}, z)\phi(b)db\Big\} \tag{3.6}$$

$$= \min_{z\geqq 0}\Big\{c(z)+L^*(x\,;\phi)+\alpha f_{n-1}^*(y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}, z)\int_x^\infty \phi(b)db + \alpha\int_0^x f_{n-1}^*(x-b+y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}, z)\phi(b)db\Big\}$$

$$= f_n^*(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}) \tag{3.7}$$

が成立する。

証明　帰納法による。

(i) $n=\lambda$ のときは既に証明した ($n<\lambda$ のとき，$f_{n-1}=f_{n-1}^*=0$)

(ii) $n=k$ のとき成立しているとする。つまり

$$f_k(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}) = f_k^*(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1})$$

このとき，

$$f_{k+1}(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}) = \min_{z\geqq 0}\Big\{c(z)+L(x\,;s)+\alpha f_k(y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}, z)\int_x^\infty \phi(b)db + \alpha\int_0^x f_k(x-b+y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}, z)\phi(b)db\Big\}$$

$$= \min_{z\geqq 0}\Big\{c(z)+L^*(x\,;\phi)+\alpha f_k^*(y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}, z)\int_x^\infty \phi(b)db + \alpha\int_0^x f_k^*(x-b+y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}, z)\phi(b)db\Big\}$$

$$= f_{k+1}^*(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1})$$

［証終］

定理14　(1.2) 式の $\phi(b)$ を (3.1) 式の $s(b)$ でおきかえると，(2.1) 式と (2.3) 式の間に

$$f(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}) = \min_{z\geqq 0}\Big\{c(z)+L(x\,;s)+\alpha f(y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-+1}, z)\int_x^\infty \phi(b)db + \alpha\int_0^x f(x-b+y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}, z)\phi(b)db\Big\} \tag{3.8}$$

$$= \min_{z\geqq 0}\Big\{c(z)+L^*(x\,;\phi)+\alpha f^*(y_1, y_2, y_{\lambda-1}, z)\int_x^\infty \phi(b)db + \alpha\int_0^x f^*(x-b+y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}, z)\phi(b)db\Big\}$$

$$= f^*(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}) \tag{3.9}$$

証明　定理13より $f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}) = f_n^*(x, y_1, y_2, y_{\lambda-1})$ および一般論より $\lim_{n\to\infty} f_n(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}) = f(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}) = f^*(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1}) = \lim_{n\to\infty} f_n^*(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1})$ がいえることより明らかである。

定理11～定理14は，一般的需要モデルの最適政策を論ずる場合（3.3）式，（3.5）式，（3.7）式および（3.9）式のかわりに（3.2）式，（3.4）式，（3.6）式および（3.8）式で論ずればよいことを示している。例えば次の定理が成立することを示している。

定理15　$c(z) = c\cdot z$，$p(z) = p\cdot z$，$p > c/\alpha^\lambda$，$h(z) = h\cdot z$ ならば，過剰需要が後期需要として取扱われる場合，一般的需要形態の動的在庫モデルにおける最適発注量 $z^*(x, y_1, y_2, \cdots, y_{\lambda-1})$ は

$$z^* = \mathrm{Max}\,(0, \bar{x}^* - (x + y_1 + \cdots, y_{\lambda-1}))$$

である。ここに $\bar{x}^*$ は

$$c(1-\alpha) + \alpha^\lambda \int_0^\infty L_{\lambda-1}^{*\prime}(\bar{x} - b)\phi(b)db = 0$$

の唯一の根である。ここに

$$L_\gamma^*(u) = \int_0^\infty L_{\gamma-1}^*(u-b)\phi(b)db \;, \quad L_0^*(u) = L(u\,;s)$$

である。

定理5と異なる点は，定理の費用関数が線形であること，(1.20)式における $L^*(u\,;z)$ が $L(u\,;s)$ になっていることである。

上の議論は費用関数が線形関数であることによるので，一般費用関数の場合は成立しない。

4. む　す　び

配達遅れのある動的在庫モデルを検討した。過剰需要が後期の需要として取扱われる場合は最適政策は簡単な形式で表現できた。しかしながら，過剰需要が後期需要として取扱われない場合は，最適政策を簡単な形に表現できなかったが，次稿では政策を簡単な形に限定した上で期待費用を最小にする動的在庫問題を検討したい。

参　考　文　献

[1] Arrow K. J., S. Karlin and H. Scharf: *Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production,* Stanford, Calf. Stanford Univ. Press, 1958.

[2] ——: *Studies in Applied Probability and Management Science,* Stanford Calf. Stanford Univ. Press, 1962.

[3] Bellman, R: *Dynamic Programming,* Princetion, N. J., Princetion Univ. 'Press, 1957.

[4] 北原貞輔・児玉正憲：「OR による在庫管理システム」九州大学出版会，1982。

[5] 児玉正憲・北原貞輔：「種々の需要形態に関する統一的在庫モデルの研究」経済学研究，Vol. 47，No. 5・6，九州経済学会，1983。

[6] 児玉正憲：「種々の需要形態に関する確率的在庫モデル」経済学研究，Vol. 51，No. 5，九州大学経済学会，1986。
[7] ――：「確率的在庫モデルの最適政策（I)」経済学研究，Vol. 52，No. 1～4，九州大学経済学会，1986。
[8] ――：「確率的在庫モデルの最適政策（II)」経済学研究，Vol. 52，No. 5，九州大学経済学会，1986。
[9] ――：「動的在庫モデルの最適政策（I）連続編」経済学研究，Vol. 53，No. 4•5，九州大学経済学会，1987。
[10] ――：「動的在庫モデルの最適政策（II）連続編」経済学研究，Vol. 53，No. 6，九州大学経済学会，1987。
[11] Monks, J. G.: *Operations Management, Theory and Problem,* McGram, Hill, 1977.
[12] Naddor, E: *Inventory System,* John Wiley, 1966.
[13] Scharf, H. E., D. M. Gilford, and M. W. Shelly: *Multistage Inventory Models and Techniques,* Stanford, Calif, Stanford Univ, Press, 1963.
[14] Taha, H. A.: *Operations Research, An Introduction,* Macmillam, 1976.