

動的在庫モデルの最適政策（Ⅰ）：連続編

児玉，正憲

<https://doi.org/10.15017/4491760>

出版情報：経済学研究. 53 (4/5), pp.51-68, 1988-02-10. 九州大学経済学会
バージョン：
権利関係：



動的在庫モデルの最適政策 (I)

—— 連 続 編 ——

児 玉 正 憲

需要が一般形態の在庫モデルについて、筆者は静的在庫モデルの最適政策を論じてきた¹⁾。

本小論では、需要量が連続的な動的在庫モデルについて、多くの需要形態を含む統合モデルを導入し、過剰需要が後期需要として取扱われる場合と取扱われない場合に分けて最適政策を検討する。

1. 過剰需要が後期需要として取扱われない場合

1.1. 単純な特定在庫モデル²⁾

単純な特定在庫モデルの代表として、発注量は発注間隔の期首に即時的にみたされ、需要はすべて期首に即時に払い込まれる場合の N 期間の動的な購入・販売在庫モデルを取りあげる。また、過剰需要は後期の需要とみなされないものとする。まず、

B : 各期の発注間隔の間の需要量を表す確率変数

$$P(B \leq b) = \int_0^b \phi(t) dt, \quad b \text{ は } B \text{ の実現値}, \quad E(B) = \int_0^\infty b\phi(b)db < \infty$$

x : 初期の在庫量

z : $z-x$ だけ発注した後の期首在庫量

c : 購入コスト (単位当たり)

h : 在庫維持コスト (単位時間, 単位当たり)

p : 品切れコスト (単位時間, 単位当たり) $p > c$

α : 割引率 ($0 < \alpha < 1$)

$f_n(x)$: 初期在庫量を x としたとき、 n 期間にわたる期待割引費用を最小にするという意味での最適購入政策を取ったときの費用関数

とする³⁾。

このとき、第1期の平均費用 $L(z; x)$ は

$$L(z; x) = c \cdot (z-x) + h \int_0^z (z-b)\phi(b)db + p \int_z^\infty (b-z)\phi(b)db \quad (1.1)$$

となる⁴⁾。

1) 児玉正憲・北原貞輔 [5], 児玉正憲 [6], [7], [8]。

2) Arrow, K. J., S. Karlin and H. Scharf [1], 136 ページ。

3) c, h, p, α に関する仮定は本論文を通じて同じとする。

4) 北原貞輔・児玉正憲 [4], ページ87。無限積分は仮定 $E(B) < \infty$ より存在。

最適性の原理より $f_n(x)$ は次のようになる⁵⁾。

$$f_1(x) = \underset{z \geq x}{\text{Min}} \{L(z; x)\} \quad (1.2)$$

$$f_n(x) = \underset{z \geq x}{\text{Min}} \left\{ L(z; x) + \alpha \left[f_{n-1}(0) \int_z^\infty \phi(b) db + \int_0^z f_{n-1}(z-b) \phi(b) db \right] \right\} \quad (1.3)$$

$n = 2, 3, \dots,$

上式の意味を考えてみよう。まず、初期在庫量を x として将来の n 期間にわたりある購入政策を施していくときの費用の期待値は (1.1) 式で与えられる第 1 期の費用の期待値および第 2 期以降の費用の期待値の和で表わされる。しかしながら、ここではこの両者の和を考えるとという立場をとらず、後者、即ち第 2 期以降の費用の期待値を第 1 期において勘定に入れる場合には、ある割引率 α ($0 < \alpha < 1$) をかけたものを考え、前者とそれとの和を全期間にわたる費用の期待値と考える。第 1 期において $z-x$ だけ購入したとして、第 2 期以降の費用の期待値の最小値 $f_{n-1}(z, b)$ は、第 1 期の需要量が b のとき、

$$f_{n-1}(z, b) = \begin{cases} f_{n-1}(z-b) & b \leq z \\ f_{n-1}(0) & b > z \end{cases} \quad (1.4)$$

と表される⁶⁾。需要量 B は確率変数であるから

$$E\{f_{n-1}(z, B)\} = \int_0^\infty f_{n-1}(z, b) \phi(b) db = \int_0^z f_{n-1}(z-b) \phi(b) db + f_{n-1}(0) \int_z^\infty \phi(b) db \quad (1.5)$$

となる。したがって割引された第 2 期以降の費用の期待値は

$$\alpha \left[f(0) \int_z^\infty \phi(b) db + \int_0^z f_{n-1}(z-b) \phi(b) db \right] \quad (1.6)$$

となる。以上のことより (1.3) 式が得られている。このとき、次の定理をうる。

定理 1 最適購入政策は

$$\begin{aligned} x &\leq \bar{x}_n \text{ ならば } \bar{x}_n - x \text{ だけ購入する} \\ x &\geq x_n \text{ ならば } \text{購入しない} \end{aligned} \quad (1.7)$$

つまり、

$$\begin{aligned} z &= \bar{x}_n, \quad 0 \leq x \leq \bar{x}_n \\ z &= x, \quad \bar{x}_n \leq x \end{aligned} \quad (1.8)$$

である。ここに $\bar{x}_n$ は、

$$p - c = \int_0^{\bar{x}_n} [h + p + \alpha f'_{n-1}(\bar{x}_n - b)] \phi(b) db, \quad p > c \quad (1.9)$$

の根である。ただし $f_0 = 0$ 、したがって $f'_0 = 0$

証明 帰納法による。

(i) $n = 1$ の場合の $\bar{x}_1$ は文献 [4] より

$$\frac{p-c}{p+h} = \int_0^{\bar{x}_1} \phi(b) db, \quad p > c \quad (1.10)$$

5) Bellman, R [3] ページ 83, 291。

6) Arrow, K. J., S. Karlin and H. Scharf [1], 136 ページ。

をみたす解で与えられる。すべての $x \geq 0$ に対して $\phi(x) > 0$ ならば、解は唯一つである。 $\phi(x) \geq 0$ の場合はある閉区間のすべての値に対して (1.10) 式が成立するかもしれない。このときは最小値を $\bar{x}_1$ とする。したがって、最適購入政策は $0 \leq x \leq \bar{x}_1$ ならば、 $z = \bar{x}_1$ 、 $x \geq \bar{x}_1$ ならば、 $z = x$ である。

$$z = \bar{x}_1 \text{ のとき, } f_1(x) = L(\bar{x}, x) \text{ よって } f'_1(x) = -c, \quad 0 \leq x \leq \bar{x}_1$$

$$z = x \text{ のとき, } f_1(x) = L(x, x) \text{ によって}$$

$$f'_1(x) = (h+p) \int_0^x \phi(b)db - p, \quad x \geq \bar{x}_1, \quad f'_1(\infty) = h$$

$$f''_1(x) = (h+p)\phi(x) \geq 0, \quad x \geq \bar{x}_1$$

(ii) $n = 2$, このとき

$$f_2(x) = \min_{z \geq x} \left\{ L(z; x) + \alpha \left[f_1(0) \int_z^\infty \phi(b)db + \int_0^z f_1(z-b)\phi(b)db \right] \right\} \quad (1.11)$$

$\bar{x}_2$ は z に関して $\{ \}$ を微分し、0とおいて得られる。つまり

$$c = p - (h+p) \int_0^z \phi(b)db - \alpha \int_0^z f'_1(z-b)\phi(b)db \quad (1.12)$$

をみたす z のことである。(1.12) 式の右辺を $F_1(z)$ とおくと、

$$F'_1(z) = -[(h+p) + \alpha f'_1(0)]\phi(z) - \alpha \int_0^z f''_1(z-b)\phi(b)db \quad (1.13)$$

となる。 $f'_1 \geq 0$, $h+p+\alpha f'_1(0) = h+p-ac > 0$ ($\because p > c$)

したがって、 $F'_1(z) \leq 0$, $\phi(z) > 0$ ($z \geq 0$) ならば $F'_1(z) < 0$, $F_1(0) = p > c$, $F_1(\infty) < 0$ ($\because f'_1(\infty) > 0$) であるから、 $\phi(z) > 0$ ($z \geq 0$) ならば (1.12) は唯一つの根をもつ。 $\phi(z) \geq 0$ のとき、ある閉区間のすべての z に対して (1.12) 式が成立するかもしれない。このときは最小値を $\bar{x}_2$ とする。したがって、

$$f_2(x) = -c, \quad 0 \leq x \leq \bar{x}_2$$

$$f_2(x) = \int_0^x [h+p+\alpha f'_1(x-b)]\phi(b)db - p, \quad x \geq \bar{x}_2, \quad f'_2(\infty) > 0 \quad (\because f'_1(\infty) = h > 0)$$

$$f''_2(x) = [h+p+\alpha f'_1(0)]\phi(x) + \alpha \int_0^x f''_1(x-b)\phi(b)db \geq 0 \quad (\because p > c, \quad f'_1(0) = -c, \quad f''_1 \geq 0)$$

となる。最適購入政策は

$$\begin{aligned} z &= \bar{x}_2, \quad 0 \leq x \leq \bar{x}_2 \\ z &= x, \quad \bar{x}_2 \leq x \end{aligned} \quad (1.14)$$

である。

(iii) $n = k$ のとき定理が成立しているとする。このとき

$$f'_k(x) = -c, \quad 0 \leq x \leq \bar{x}_k$$

$$f'_k(x) = \int_0^x [h+p+\alpha f'_{k-1}(x-b)]\phi(b)db - p, \quad x \geq \bar{x}_k, \quad f'_k(\infty) > 0$$

$$f''_k(x) = [h+p+\alpha f'_{k-1}(0)]\phi(x) + \alpha \int_0^x f''_{k-1}(x-b)\phi(b)db \geq 0, \quad x \geq \bar{x}_k$$

ここに $\bar{x}_k$ は

$$c = p - (h+p) \int_0^{\bar{x}_k} \phi(b)db - \alpha \int_0^{\bar{x}_k} f'_{k-1}(\bar{x}_k-b)\phi(b)db \quad (1.15)$$

をみたす。このとき、

$$f_{k+1}(x) = \min_{z \geq x} \left\{ L(z; x) + \alpha \left[f_k(0) \int_z^\infty \phi(b) db + \int_0^z f_k(z-b) \phi(b) db \right] \right\} \quad (1.16)$$

$\bar{x}_{k+1}$ は z に関して (1.16) 式の右辺の $\{ \}$ を微分して, 0 とおいて得られる。つまり

$$c = p - (h + p) \int_0^z \phi(b) db - a \int_0^z f_k'(z - b) \phi(b) db \quad (1.17)$$

をみたす z のことである。(1.17) の右辺を $F_k(z)$ とおくと,

$$F'_k(z) = -[h + p + \alpha f'_k(0)]\phi(z) - \alpha \int_0^z f''_k(z-b)\phi(b)db \quad (1.18)$$

$$f'_k \geq 0, \quad h+p+\alpha f'_k(0) = h+p-\alpha c > 0$$

したがって $F_k''(0) \leq 0$, もしも $\phi(z) > 0$ ($z \geq 0$) ならば, $F_k''(z) < 0$.

$$F_1(0) = p > c \quad , \quad F_1(\infty) < 0 \quad (\because f'_k(\infty) > 0)$$

よって $\phi(z) > 0$ ($z \geq 0$) ならば (1.17) は唯一つの根をもつ。 $\phi(z) \geq 0$ のとき, ある閉区間のすべての z が (1.15) 式をみたす場合は最小値を $\bar{x}_{k+1}$ とする。

このとき最適購入政策は

$$z = \bar{x}_{k+1}, \quad 0 \leq x \leq \bar{x}_{k+1}$$

$$z = x, \quad \bar{x}_{k+1} \leq x$$

である。よってこの定理は証明された。

1.2. 需要形態の一般的在庫モデル

前節における需要形態は突発需要で、それが期首に発生する例になっている。また期を通じて一様に発生する場合もよくみる例である。そこでこれらを特殊な場合として含む一般的かつ総合的需要形態を表わすモデルとして

$$Q(T) = z - g(T/t)b, \quad 0 \leq T \leq t \quad (1.19)$$

を用いることにする。ここに

$Q(T)$: 時点 $T(\leq t)$ における在庫量 (ただし T は発注時点からはかる)

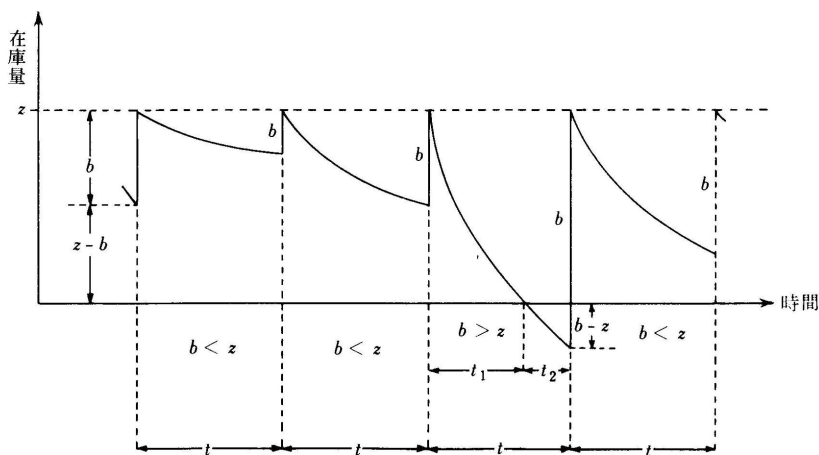


図1 一般的需要在庫モデルの在庫状態

z : 期着在庫量

t : 発注間隔

$g(x)$: $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, $\frac{dg(x)}{dx} > 0$ なる x の関数 ($0 \leq x \leq 1$)

そこでわれわれの目的は $g(x)$ を需要形態を表わす統一モデルとして使用し、そのときの最適条件を求め、最適政策を考察することにある。他の仮定や記号は前節の場合と全く同じとする。

需要量 B が連続的であるから、在庫の状態は図 1 に示される。需要量が b のときの期(発注間隔当たり)平均在庫量 ($I_1(b)$), 期平均在庫不足量 ($I_2(b)$) を求めよう。 T 時点の在庫量は (1.19) 式で表わされるから、 $b \leq z$, $b > z$ の各々の場合 (図 1 参照) について、 $I_1(b)$, $I_2(b)$ はそれぞれ以下のようなになる。

(i) $b \leq z$ の場合

$$I_1(b) = \frac{1}{t} \int_0^t [z - bg(T/t)] dT = \frac{1}{t} \left[zt - tb \int_0^1 g(y) dy \right] = z - bG(1) \quad (1.20)$$

ここに

$$G(x) = \int_0^x g(y) dy \quad (1.21)$$

$$I_2(b) = 0 \quad (1.22)$$

(ii) $b > z \geq 0$ の場合

$$I_1(b) = \frac{1}{t} \int_0^{t_1} [z - bg(T/t)] dT = \frac{1}{t} \left[zt_1 - tb \int_0^{t_1/t} g(y) dy \right] = z \left(\frac{t_1}{t} \right) - bG \left(\frac{t_1}{t} \right) \quad (1.23)$$

ところで図 1 から t_1 時点では

$$Q(t_1) = z - bg(t_1/t) = 0 \quad (1.24)$$

が成り立つ。 $g(y)$ は単調増加関数であるから (1.24) 式を t_1/t について解いて

$$t_1/t = g^{-1}(z/t) \quad (1.25)$$

とおく。このとき $\frac{\partial g^{-1}(z/t)}{\partial z} > 0$ 。(1.25) 式を (1.23) 式に代入して

$$I_1(b) = zg^{-1}(z/t) - tG(g^{-1}(z/b)) \quad (1.26)$$

となる。また、 $I_2(b)$ についても (1.25) 式を用いて

$$\begin{aligned} I_2(b) &= \frac{1}{t} \int_{t_1}^t [bg(T/t) - z] dT = \int_{t_1/t}^1 [bg(y) - z] dy \\ &= b[G(1) - G(g^{-1}(z/b))] - z[1 - g^{-1}(z/b)] \end{aligned} \quad (1.27)$$

以上をまとめると、

$$I_1(b) = \begin{cases} z - bG(1) & , \quad b \leq z \\ zg^{-1}(z/b) - bG(g^{-1}(z/b)) & , \quad b > z \geq 0 \end{cases} \quad (1.28)$$

$$I_2(b) = \begin{cases} 0 & , \quad b \leq z \\ b[G(1) - G(g^{-1}(z/b))] - z[1 - g^{-1}(z/b)] & , \quad b > z \geq 0 \end{cases} \quad (1.29)$$

ところが、需要量 B は確率変数であるので期待期平均在庫量 I_1 、期待期平均在庫不足量 I_2 は次のようになる。

$$\begin{aligned} I_1 &= E\{I_1(B)\} = \int_0^\infty I_1(b)\phi(b)db \\ &= \int_0^z [z - bG(1)]\phi(b)db + \int_z^\infty [zg^{-1}(z/b) - bG(g^{-1}(z/b))]\phi(b)db \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= E\{I_2(B)\} = \int_0^\infty I_2(b)\phi(b)db \\ &= \int_z^\infty \{b[G(1) - G(g^{-1}(z/b))] - z[1 - g^{-1}(z/b)]\}\phi(b)db \end{aligned} \quad (1.31)$$

したがって、このモデルの第 1 期の期待費用 $L^*(z; x)$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} L^*(z; x) &= c \cdot (z - x) + h \left\{ \int_0^z [z - bG(1)]\phi(b)db + \int_z^\infty [zg^{-1}(z/b) - bG(g^{-1}(z/b))]\phi(b)db \right. \\ &\quad \left. + p \int_z^\infty \{b[G(1) - G(g^{-1}(z/b))] - z[1 - g^{-1}(z/b)]\}\phi(b)db \right\} \end{aligned} \quad (1.32)$$

このモデルにおける $f_n(x)$ を $f_n^*(x)$ で表わすと、最適性の原理より

$$f_1^*(x) = \min_{z \geq x} \{L^*(z; x)\} \quad (1.33)$$

$$f_n^*(x) = \min_{z \geq x} \left\{ L^*(z; x) + \alpha \left[f_{n-1}^*(0) \int_z^\infty \phi(b)db + \int_0^z f_{n-1}^*(z-b)\phi(b)db \right] \right\} \quad (1.34)$$

このときつぎの定理をうる。

定理 2 最適購入政策は、

$$\begin{aligned} z &= \bar{x}_n^*, \quad 0 \leq x \leq \bar{x}_n^* \\ z &= x, \quad \bar{x}_n^* \leq x \end{aligned}$$

である。ここに $\bar{x}_n^*$ は

$$p = c + \int_0^{\bar{x}_n^*} [h + p + \alpha f_{n-1}^*(\bar{x}_n^* - b)]\phi(b)db + (h + p) \int_{\bar{x}_n^*}^\infty g^{-1}(\bar{x}_n^*/b)\phi(b)db, \quad p > c \quad (1.35)$$

の唯一の根である。

証明 帰納法による。

(i) $n = 1$ の場合の $\bar{x}_1^*$ は文献 [5]⁷⁾ より

$$\frac{p-c}{p+h} = \int_0^{\bar{x}_1^*} \phi(b)db + \int_{\bar{x}_1^*}^\infty g^{-1}(\bar{x}_1^*/b)\phi(b)db \quad (1.36)$$

をみたす唯一の根である。 $\frac{\partial g^{-1}(x/b)}{\partial x} \geq 0$ のとき、ある閉区間のすべての x の値で (1.36) が成立するかもしれない。このときは最小値を $\bar{x}_1$ とする。したがって最適購入政策は、 $0 \leq x \leq \bar{x}_1^*$ ならば $z = \bar{x}_1^*$ 、 $x \geq \bar{x}_1^*$ ならば $z = x$ である。

$$\begin{aligned} z &= \bar{x}_1^* \text{ のとき } f_1^*(x) = L(\bar{x}_1^*, x) \\ \text{よって } f_1^{*'}(x) &= -c, \quad 0 \leq x \leq \bar{x}_1^* \end{aligned} \quad (1.37)$$

$z = x$ のとき $f_1^*(x) = L(x, x)$ よって関係式

$$g^{-1}(1) = 1, \quad z/x = g(g^{-1}(z/x)), \quad \frac{\partial G(g^{-1}(z/x))}{\partial z} = g(g^{-1}(z/x)) \cdot \frac{\partial g^{-1}(z/x)}{\partial z},$$

7) 児玉正憲・北原貞輔 [5] で $g(b, T/t) = bg(T/t)$, $g^{-1}(b, z) = g^{-1}(z/b)$ 。

$$\frac{\partial g^{-1}(z/x)}{\partial z} > 0 \quad (1.38)$$

を用いると,

$$\begin{aligned} f_1^*(x) &= h \left\{ \int_0^x \phi(b) db + x(1-G(1))\phi(x) + \int_x^\infty \left[g^{-1}(x/b) + x \frac{\partial g^{-1}(x/b)}{\partial x} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - b \frac{\partial G(g^{-1}(x/b))}{\partial x} \right] \phi(b) db - [xg^{-1}(1) - xG(g^{-1}(1))] \right\} \\ &\quad + p \left\{ \int_x^\infty \left[-b \frac{\partial G(g^{-1}(x/b))}{\partial x} - (1-g^{-1}(x/b)) + x \frac{\partial g^{-1}(x/b)}{\partial x} \right] \right. \\ &\quad \left. \times \phi(b) db - [x[G(1) - G(g^{-1}(1))] - x(1-g^{-1}(1))] \phi(x) \right\} \\ &= (h+p) \left\{ \int_0^x \phi(b) db + \int_x^\infty g^{-1}(x/b) \phi(b) db \right\} - p, \quad x \geq \bar{x}_1^*, \quad f_1^*(\infty) = h \end{aligned} \quad (1.39)$$

$$f_1^{*''}(x) = (h+p) \int_x^\infty \frac{\partial g^{-1}(x/b)}{\partial x} \phi(b) db \geq 0, \quad x \geq \bar{x}_1^* \quad (1.40)$$

(ii) $n=2$, このとき

$$f_2^*(x) = \min_{z \geq x} \left\{ L^*(z; x) + a \left[f_1^*(0) \int_z^\infty \phi(b) db + \int_0^z f_1^*(z-b) \phi(b) db \right] \right\} \quad (1.41)$$

$\bar{x}_2^*$ は z に関して (1.41) 式の $\{ \}$ を微分し, 0 とおいて得られる。つまり

$$c = p - (h+p) \left\{ \int_0^z \phi(b) db + \int_z^\infty g^{-1}(z/b) \phi(b) db \right\} - a \int_0^z f_1^{*'}(z-b) \phi(b) db \quad (1.42)$$

をみたとす z のことである。(1.42) 式の右辺を $F_1(z)$ とおくと,

$$F_1'(z) = - \left[(h+p) \int_z^\infty \frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z} \phi(b) db + a f_1^*(0) \phi(z) \right] - a \int_0^z f_1^{*''}(z-b) \phi(b) db \quad (1.43)$$

となる。もし次式

$$\int_z^\infty - \frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z} \phi(b) db > \frac{ac}{h+p} \phi(z) \quad (1.44)$$

が成立すれば, $f_1^*(0) = -c$, $f_1^{*''} \geq 0$ であるから $F_1'(z) < 0$ となる。(1.44) 式の左辺を $r(z)$ とおくと $r(z)$ は確率密度関数となり⁸⁾, 両辺を $0 \leq z \leq \infty$ の全区間で積分したとき, (1.44) 式が成立しない

いとすると $1 \leq \frac{ac}{h+p} < 1$ と矛盾する。したがって (1.44) 式は成立する。

$$F_1(0) = p > c, \quad F_1(\infty) < 0 (\because f_1^*(\infty) > 0)$$

であるから, (1.42) 式は唯一の根をもつ。

このときの最適購入政策は

$$\begin{aligned} z &= \bar{x}_2^*, \quad 0 \leq x \leq \bar{x}_2^* \\ z &= x, \quad \bar{x}_2^* \leq x \end{aligned}$$

である。この場合, (i) と同様にして次式を得る。

$$\begin{aligned} f_2^*(x) &= -c, \quad 0 \leq x \leq \bar{x}_2^* \\ f_2^*(x) &= (h+p) \left\{ \int_0^x \phi(b) db + \int_x^\infty g^{-1}(x/b) \phi(b) db \right\} + a \int_0^x f_1^{*'}(x-b) \phi(b) db - p, \quad x \geq \bar{x}_2^* \\ f_2^*(\infty) &> 0 (\because f_1^{*'}(\infty) > 0) \end{aligned}$$

8) 児玉正憲・北原貞輔 [5]。

$$f_2^{**'}(x) = (h+p) \int_x^\infty \frac{\partial g^{-1}(x/b)}{\partial x} \phi(b) db - ac\phi(x) + \alpha \int_0^x f_1^{**'}(x-b)\phi(b) db > 0, \quad x \geq \bar{x}_2^* \\ (\because (1.40), (1.44) \text{ より})$$

(iii) $n = k$ のとき定理が成立しているとする。このとき

$$f_k^{**'}(x) = -c, \quad 0 \leq x \leq \bar{x}_k^* \\ f_k^{**'}(x) = (h+p) \left\{ \int_0^x \phi(b) db + \int_x^\infty g^{-1}(x/b) \phi(b) db \right\} + \alpha \int_0^x f_{k-1}^{**'}(x-b)\phi(b) db - p, \quad x \geq \bar{x}_k^* \\ f_k^{**'}(\infty) > 0 \\ f_k^{**'}(x) = (h+p) \int_x^\infty \frac{\partial g^{-1}(x/b)}{\partial x} \phi(b) db - ac\phi(x) + \alpha \int_0^x f_{k-1}^{**'}(x-b)\phi(b) db \geq 0, \quad x \geq \bar{x}_k^*$$

ここに $\bar{x}_k^*$ は

$$c = p - (h+p) \left\{ \int_0^{\bar{x}_k^*} \phi(b) db + \int_{\bar{x}_k^*}^\infty g^{-1}(\bar{x}_k^*/t) \phi(b) db \right\} - \alpha \int_0^{\bar{x}_k^*} f_{k-1}^{**'}(\bar{x}_k^* - b) \phi(b) db \quad (1.45)$$

をみtas。このとき、

$$f_{k+1}^{**'}(x) = \min_{z \geq x} \left\{ L^*(z; x) + \alpha \left[f_k^{**'}(0) \int_z^\infty \phi(b) db + \int_0^z f_k^{**'}(z-b) \phi(b) db \right] \right\} \quad (1.46)$$

$\bar{x}_{k+1}^*$ は z に関して (1.46) 式の右辺の $\{ \}$ を微分して、0とおいて得られる。つまり、

$$c = p - (h+p) \left\{ \int_0^z \phi(b) db + \int_z^\infty g^{-1}(z/b) \phi(b) db \right\} - \alpha \int_0^z f_k^{**'}(z-b) \phi(b) db \quad (1.47)$$

をみtas z のことである。(1.47) 式の右辺を $F_k(z)$ とおくと、

$$F_k'(z) = - \left[(h+p) \int_z^\infty \frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z} \phi(b) db + \alpha f_k^{**'}(0) \phi(z) \right] - \alpha \int_0^z f_k^{**'}(z-b) \phi(b) db \quad (1.48)$$

となる。 $f_k^{**'}(0) = -c$, $f_k^{**'} \geq 0$ であるから $F_k'(z) < 0$ となる。

$$F_k(0) = p > c \quad F_k(\infty) < 0 (\because f_k^{**'}(\infty) > 0)$$

であるから、(1.47) 式は唯一の根をもつ。

このとき最適購入政策は

$$z = \bar{x}_{k+1}^*, \quad 0 \leq x \leq \bar{x}_{k+1}^* \\ z = x, \quad \bar{x}_{k+1}^* \leq x$$

である。よって定理は証明された。

また、この動的モデルにおける、 $\bar{x}_n^*$, $f_n^{**'}(x)$ について定理2と同じ仮定のもとで次の定理を得る。

定理3

$$(a) \quad f_{n-1}^{**'}(x) > f_n^{**'}(x) > -p$$

$$(b) \quad f_n^{**'}(x) \geq 0$$

$$(c) \quad \bar{x}_n^* > \bar{x}_{n-1}^*$$

ただし、 $f_0^{**'} = h$, $\bar{x}_0^* = 0$ と定義する。

証明 (b) は定理2の中で証明されている。

(i) $n = 1$ の場合、(1.39) 式より

$$f_1^{**'}(x) = (h+p) \left\{ \int_0^x \phi(b) db + \int_x^\infty g^{-1}(x/b) \phi(b) db \right\} - p > -p, \quad x \geq \bar{x}_1^*$$

$\{ \}$ は x の増加関数であり、 $f_1^{**'}(\infty) = h$ であるから、(1.37) 式を用いて、 $h > f_1^{**'}(x) > -p$ つまり

(a) を得る。 $\bar{x}_1^* > 0 = \bar{x}_0^*$ は定理 2 の中で示されている。

(ii) $n = k$ の場合定理が成立していると仮定する。このとき、 $\bar{x}_k^*$ は (1.45) 式より

$$c = p - (h+p) \left\{ \int_0^{\bar{x}_k^*} \phi(b) db + \int_{\bar{x}_k^*}^{\infty} g^{-1}(\bar{x}_k^*/b) \phi(b) db \right\} - \alpha \int_0^{\bar{x}_k^*} f_{k-1}^*(\bar{x}_k^* - b) \phi(b) db \quad (1.49)$$

をみたす。右辺の関数 $F_{k-1}(\bar{x}_k^*)$ は $\bar{x}_k^*$ の単調減少関数である。帰納法の仮定より $-af_{k-1} < -af_k$ となるから $F_{k-1}(x) < F_k(x)$ である。(1.49) 式で f_{k-1}^* を f_k^* , $\bar{x}_k^*$ を $\bar{x}_{k+1}^*$ でおきかえた式は $\bar{x}_{k+1}^*$ のみたす式であり、右辺は $F_k(\bar{x}_{k+1}^*)$ である。これらのことより $\bar{x}_k^* < \bar{x}_{k+1}^*$ を得る。 $F_{k-1}(x)$ および $F_k(x)$ が凸減少関数の場合を図 2 に示す。

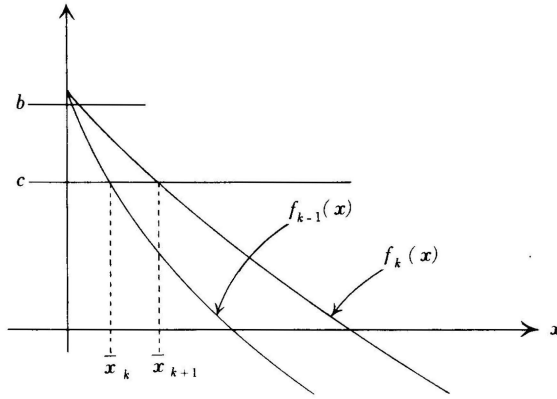


図 2 $F_{k-1}(x)$ と $F_k(x)$

(c) より $\bar{x}_{k+1}^* > \bar{x}_k^*$

$x \leq \bar{x}_k^*$ のとき, $f_k^{**}(x) = f_{k+1}^*(x) = -c > -p$, $x > \bar{x}_{k+1}^*$ のとき, $f_k^{**} < f_{k-1}^*$ より

$$\begin{aligned} f_{k+1}^*(x) &= (h+p) \left\{ \int_0^x \phi(b) db + \int_x^{\infty} g^{-1}(x/b) \phi(b) db \right\} + \alpha \int_0^x f_{k-1}^*(x-b) \phi(b) db - p \\ &< (h+p) \left\{ \int_0^x \phi(b) db + \int_x^{\infty} g^{-1}(x/b) \phi(b) db \right\} + \alpha \int_0^x f_k^*(x-b) \phi(b) db - p \\ &= f_k^{**}(x) \end{aligned}$$

$\bar{x}_k^* < x \leq \bar{x}_{k+1}^*$ のとき, (1.45) 式, および $F_{k-1}(x)$ が単調減少関数であることより

$$\begin{aligned} -f_{k+1}^{**}(x) &= c \\ &= p - (h+p) \left\{ \int_0^{\bar{x}_k^*} \phi(b) db + \int_{\bar{x}_k^*}^{\infty} g^{-1}(x/b) \phi(b) db \right\} - \alpha \int_0^{\bar{x}_k^*} f_{k-1}^*(\bar{x}_k^* - b) \phi(b) db \\ &> p - (h+p) \left\{ \int_0^x \phi(b) db + \int_x^{\infty} g^{-1}(x/b) \phi(b) db \right\} - \alpha \int_0^x f_{k-1}^*(x-b) \phi(b) db \\ &= -f_k^{**}(x) \end{aligned}$$

を得る。

注意 単純な特定在庫モデルでは $g(x) = 1$ となり $\frac{dg}{dx} > 0$ をみたさないが, $g^{-1}(x/b) = 0$, $\phi(b) > 0$ とおけば, 定理 2, 定理 3 は成立する。

1.3. 無限期間動的在庫モデル

この場合は、 $f(x)$ を初期在庫量を x としたとき、無限期間にわたる期待割引費用を最小にするという意味での最適購入政策を取ったときの費用関数とすると、最適性の原理より次の関数方程式をうる。

(i) 単純な特定在庫モデル

$$f(x) = \min_{z \geq x} \left\{ L(z; x) + \alpha \left[f(0) \int_z^\infty \phi(b) db + \int_0^z f(z-b) \phi(b) db \right] \right\} \quad (1.50)$$

$$= \min_{z \geq x} \{-cx + H(z)\} \quad (1.51)$$

ここに、

$$H(z) = cz + h \int_0^z (z-b) \phi(b) db + p \int_z^\infty (b-z) \phi(b) db + \alpha \left[f(0) \int_z^\infty \phi(b) db + \int_0^z f(z-b) \phi(b) db \right] \quad (1.52)$$

$$H'(z) = c - p + \int_0^z [h + p + \alpha f'(z-b)] \phi(b) db \quad (1.53)$$

(ii) 一般的需要形態の在庫モデル

このモデルにおける $f(x)$ を $f^*(x)$ で表わすことにする。

$$f^*(x) = \min_{z \geq x} \left\{ L^*(z; x) + \alpha \left[f^*(0) \int_z^\infty \phi(b) db + \int_0^z f^*(z-b) \phi(b) db \right] \right\} \quad (1.54)$$

$$= \min_{z \geq x} \{-cx + H^*(z)\} \quad (1.55)$$

ここに

$$H^*(z) = cz + h \left\{ \int_0^z [z - bG(1)] \phi(b) db + \int_z^\infty [zg^{-1}(z/b) - bG(g^{-1}(z/b))] \phi(b) db \right\} \\ + p \int_z^\infty \{b[G(1) - G(g^{-1}(z/b))] - z[1 - g^{-1}(z/b)]\} \phi(b) db + \alpha \left[f^*(0) \int_z^\infty \phi(b) db + \int_0^z f^*(z-b) \phi(b) db \right] \quad (1.56)$$

$$H^*(z) = c - p + (h + p) \left\{ \int_0^z \phi(b) db + \int_z^\infty g^{-1}(z/b) \phi(b) db \right\} \\ + \alpha \int_0^z f^{*'}(z-b) \phi(b) db \quad (1.57)$$

$f(x)$, $f^*(x)$ の存在、一意性は一般論より保証されている⁹⁾。このとき定理1、定理2に対応して次の定理をうる。

定理4 定理1と同じ仮定のもとで、最適購入政策は

$$z = \bar{x}, \quad 0 \leq x \leq \bar{x}$$

$$z = x, \quad \bar{x} \leq x$$

である。ここに $\bar{x}$ は

$$p - c = (h + p - \alpha c) \int_0^{\bar{x}} \phi(b) db \quad (1.58)$$

の根である¹⁰⁾。

9) Bellman, R [3]。

10) $\phi(x) > 0 (x \geq 0)$ ならば唯一の根で、 $\phi(x) \geq 0 (x \geq 0)$ ならばある閉区間のすべて x で (1.58) 式が成立するかもしれない。このときは最小値を $\bar{x}$ とする。

定理 5 定理 2 と同じ仮定のもとで最適購入政策は

$$\begin{aligned} z &= \bar{x}^*, \quad 0 \leq x \leq \bar{x}^* \\ z &= x, \quad \bar{x}^* \leq x \end{aligned}$$

である。ここに $\bar{x}^*$ は

$$p - c = \int_0^x [h + p - ac] \phi(b) db + (h + p) \int_x^\infty g^{-1}(x/b) \phi(b) db \quad (1.59)$$

の唯一の根である。

定理 4 は定理 5 において, $g(x) = 1$, $g^{-1}(x/b) = 0$ とおけば, 定理 5 の証明と同様にして得られるので定理 5 を証明する。

もし, $H^*(x) > H^*(x+y)$ ($y > 0$) がある正数 y に対して成立するならば, 購入しないことよりも購入するときの方が (1.56) 式の $\{ \}$ の中を小さくするから, 在庫水準が x のときには最適購入規則はある量を購入することになるのは明らかである。また, $H^*(x) < H^*(x+y)$ がすべての $y > 0$ に対して成立するならば, 最適購入規則は在庫水準が x のときには購入しないことになる。 $H^{**}(0) = c - p < 0$ であるから, 在庫水準が 0 のときおよび 0 のある近傍では最適購入規則はある量を購入することになる。いま $H^*(\bar{x}^*) = \min_{z \geq 0} H^*(z)$ を定義すると (このような $\bar{x}^*$ が 2 個以上あれば大きい方をとる), $H^*(z) \rightarrow \infty (z \rightarrow \infty)$, $H^{**}(0) < 0$ より, $0 < \bar{x}^* < \infty$ となる。したがって (1.55) 式より最適購入政策は $x \leq \bar{x}^*$ ならば $\bar{x}^* - x$ だけ購入することになる。 $x > \bar{x}^*$ のときの最適購入規則による購入法および $\bar{x}^*$ の決定法を考察するために

$$M(x) = c - p + \int_0^x [h + p - ac] \phi(b) db + (h + p) \int_x^\infty g^{-1}(x/b) \phi(b) db \quad (1.60)$$

を定義する。(1.55) 式より $x \leq \bar{x}^*$ に対して $f(x) = -cx + H^*(\bar{x}^*)$ であるから $f^{**}(x) = -c$, よって $M(x) = H^{**}(x)$ ($x \leq \bar{x}^*$), したがって定義より

$$M(\bar{x}^*) = H^{**}(\bar{x}^*) = 0 \quad (1.61)$$

をうる。よって $M(x)$ は既知の関数だけを含み $f(x)$ を含まないから上式より $\bar{x}^*$ を計算しうる。

補題 A すべての x に対して $H^{**}(x) \geq M(x)$ である。 $x \leq \bar{x}^*$ に対して, $H^{**}(x) = M(x)$ が成立する。

証明 $x_1 > x_2$ ならば

$$\begin{aligned} f^*(x_1) &= \min_{z \geq x_1} \{c(z - x_1) - cz + H^*(z)\} \\ &= \min_{z \geq x_1} \{c(z - x_2) - cz + H^*(z)\} + c(x_2 - x_1) \\ &\geq f^*(x_2) - c(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned} f^*(x_1) - f^*(x_2) &\geq -c(x_1 - x_2) \quad \therefore f^{**}(x) \geq -c \quad (0 \leq x \leq \infty) \\ \therefore H^{**}(x) &= c - p + (h + p) \left\{ \int_0^x \phi(b) db + \int_x^\infty g^{-1}(x/b) \phi(b) db \right\} + a \int_0^x f^{**}(x - b) \phi(b) db \\ &\geq c - p + (h + p - ac) \int_0^x \phi(b) db + (h + p) \int_x^\infty g^{-1}(x/b) \phi(b) db \\ &= M(x) \end{aligned}$$

また, $x \leq \bar{x}^*$ ならば $f^{**}(x) = -c$, よって $H^{**}(x) = M(x)$

補題 B $M(x) = 0$ が唯一つの根 $\bar{x}^*$ をもつならば、最適購入政策は

$$\begin{aligned} z &= \bar{x}^*, & 0 \leq x \leq \bar{x}^* \\ z &= x, & \bar{x}^* \leq x \end{aligned}$$

である。

証明 $x > \bar{x}^*$ ならば

$$f^*(x) = \min_{z \geq x} \{-cx + H^*(z)\} = -cx + H^*(x) \quad (1.62)$$

となることを示せばよい。

$M(0) = c - p < 0$, $M(\bar{x}^*) = 0$, および定理の仮定より $M(x) > 0$ ($x > \bar{x}^*$), したがって補題 A より $H^*(x) \geq M(x) > 0$ (すべての $x > \bar{x}^*$) よって $x > \bar{x}^*$ なる x に対して $H^*(x)$ は狭義増加関数となることから明らかである。

定理 5 の証明

$M(x)$ が狭義増加関数で唯一の零点をもつことを示す

$$M'(x) = (h+p) \left\{ \int_x^\infty \frac{\partial g^{-1}(x/b)}{\partial x} \phi(b) db - \frac{ac}{h+p} \phi(x) \right\} \quad (1.63)$$

(1.44) 式より $M'(x) > 0$, よって $M(x)$ は狭義増加関数, $M(0) < 0$, $M(g) > 0$ ($y \rightarrow \infty$) よって $M(x) = 0$ は唯一つの根をもつ。

注意 $g(x) = 1$, $g^{-1}(x/b) = 0$ のとき, (1.60) 式より $M'(x) = (h+p+ac)\phi(x)$ となり, $\phi(x) > 0$ ならば $M'(x) > 0$ となる。

2. 過剰需要が後期需要として取扱われる

場合

この場合は第 1 期の期待費用を表わす式 (1.1) および (1.32) は次のように修正される。他の条件は変更する必要はない。

$$L(z; x) = c \cdot (z-x) + \begin{cases} h \int_0^z (z-b) \phi(b) db + p \int_z^\infty (b-z) \phi(b) db & z > 0 \\ p \int_0^\infty (b-z) \phi(b) db & z < 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

$L^*(z; x)$ は $z > 0$ の場合は (1.32) 式のままであるが, $z < 0$ の場合は

$$L^*(z; x) = c \cdot (z-x) + p \int_0^\infty [bG(1-z)] \phi(b) db \quad (2.2)$$

である。この節では初期在庫 x が負の値をとりうることに注意しよう。

単純な特定在庫モデルの場合は $g(x) = 1$ となり, 一般的需要形態の場合の $g(x)$ の条件をみたさないが, $g^{-1}(x/b) = 0$ とおき, 同様にして得られるので結果のみをあげる。

2.1. 単純な特定在庫モデル

このとき最適性の原理より $f_n(x)$ は次のようになる。

$$f_1(x) = \min_{z \geq x} \{L(z; x)\} \quad (2.3)$$

$$f_n(x) = \min_{z \geq x} \left\{ L(z; x) + \alpha \int_0^\infty f_{n-1}(z-b)\phi(b)db \right\}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.4)$$

定理 6 最適政策は

$$z = \bar{x}_n, \quad x \leq \bar{x}_n$$

$$z = x, \quad \bar{x}_n \leq x$$

である。ここに $\bar{x}_n$ は

$$p = c + (h+p) \int_0^z \phi(b)db + \alpha \int_0^\infty f'_{n-1}(z-b)\phi(b)db \quad (2.5)$$

の根である¹¹⁾。ここに $f'_0 = 0$ とする。

2.2. 一般的需要形態の在庫モデル

このモデルにおける $f_n(x)$ を $f_n^*(x)$ で表わす。

$$f_1^*(x) = \min_{z \geq x} \{L^*(z; x)\} \quad (2.6)$$

$$f_n^*(x) = \min_{z \geq x} \left\{ L^*(z; x) + \alpha \int_0^\infty f_{n-1}^*(z-b)\phi(b)db \right\}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.7)$$

定理 7 最適政策は

$$z = \bar{x}_n^*, \quad x \leq \bar{x}_n^*$$

$$z = x, \quad \bar{x}_n^* \leq x$$

である。ここに $\bar{x}_n^*$ は

$$p = c + (h+p) \left\{ \int_0^{\bar{x}_n^*} \phi(b)db + \int_{\bar{x}_n^*}^\infty g^{-1}(\bar{x}_n^*/b)\phi(b)db \right\} + \alpha \int_0^\infty f_{n-1}^{*'}(\bar{x}_n^*-b)\phi(b)db \quad (2.8)$$

の唯一の根である。ここに $f'_0 = 0$ とする。

証明 帰納法による。

(i) $n = 1$ の場合, $z < 0$ のとき

$$L^*(z; x) = -cx + H_1^*(z) \quad (2.9)$$

である。ここに

$$H_1^*(z) = cz + p \int_0^\infty [bG(1) - z]\phi(b)db \quad (2.10)$$

$$H_1^{*'}(z) = c - p < 0 \quad (2.11)$$

である。 $z > 0$ のとき,

$$L^*(z; x) = -cx + H_2^*(z) \quad (2.12)$$

$$H_2^*(z) = cz + h \left\{ \int_0^z [z - bG(1)]\phi(b)db + \int_z^\infty [zg^{-1}(z/b) - bG(g^{-1}(z/b))]\phi(b)db \right\} \\ + p \int_z^\infty \{b[G(1) - G(g^{-1}(z/b))] - z[1 - g^{-1}(z/b)]\}\phi(b)db \quad (2.13)$$

$$H_2^{*'}(z) = c - p + (h+p) \left\{ \int_0^z \phi(b)db + \int_z^\infty g^{-1}(z/b)\phi(b)db \right\} \quad (2.14)$$

11) この場合, 根は唯一の根かあるいはある閉区間におけるすべての値が根となる場合が起るかもしれない。このときは最小値を $\bar{x}_n$ とすればよい。

となる。

$H_1^*(0) = H_2^*(0) = pG(1)E(B)$, すべての $z < 0$ に対して $H_1^*(z) < 0$, $H_2^*(0) = c - p < 0$ であるから, $z > 0$ 場合を考察すれば十分である。この場合の $\bar{x}_1^*$ が (2.8) 式をみたすことは定理2ですでに述べられている。 $0 \leq x \leq \bar{x}_1^*$ が $x \leq \bar{x}_1^*$ と修正されることを除いて定理2と同じでいる。このとき,

$$f_1^{*'}(x) = -c \quad x \leq \bar{x}_1^* \quad (2.15)$$

$$f_1^{*'}(x) = (h+p) \left\{ \int_0^x \phi(b)db + \int_x^\infty g^{-1}(x/b)\phi(b)db \right\} - p, \quad x \geq \bar{x}_1^*, \quad f_1^*(\infty) = h > 0 \quad (2.16)$$

$$f_1^{*''}(x) = (h+p) \int_x^\infty \frac{\partial g^{-1}(x/b)}{\partial x} \phi(b)db > 0, \quad x \geq \bar{x}_1^* \quad (2.17)$$

(ii) $n = 2$ のとき,

$$L^*(z; x) + \alpha \int_0^\infty f_1^*(z-b)\phi(b)db \\ = \begin{cases} -cx + H_1^*(z) + \alpha \int_0^\infty f_1^*(z-b)\phi(b)db, & z < 0 \\ -cx + H_2^*(z) + \alpha \int_0^\infty f_1^*(z-b)\phi(b)db, & z > 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

$$= \begin{cases} -cx + H_1^*(z) + \alpha \int_0^\infty f_1^*(z-b)\phi(b)db, & z < 0 \\ -cx + H_2^*(z) + \alpha \int_0^\infty f_1^*(z-b)\phi(b)db, & z > 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

である。

(2.11) 式, (2.14) 式および (2.15) 式より $H_1^*(0) = H_2^*(0)$, $H_1^*(z) + \alpha \int_0^\infty f_1^{*'}(z-b)\phi(b)db = c(1-\alpha) - p < 0$, $H_2^*(0) = c(1-\alpha) - p < 0$ となるので, $z > 0$ の場合のみ考えれば十分である。 $\bar{x}_2^*$ は (2.19) 式の第2項と第3項の和を z に関して微分し, 0 とおくことによって得られる。つまり

$$c = p - (h+p) \left\{ \int_0^z \phi(b)db + \int_z^\infty g^{-1}(z/b)\phi(b)db \right\} - \alpha \int_0^\infty f_1^{*'}(z-b)\phi(b)db \quad (2.20)$$

をみたす z のことである。(2.20) 式の右辺を $F_1(z)$ とおくと, (2.17) 式, (2.15) 式, (2.16) 式より

$$F_1'(z) = -(h+p) \int_z^\infty \frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z} \phi(b)db - \alpha \int_0^\infty f_1^{*'}(z-b)\phi(b)db < 0 \quad (2.21)$$

$$F_1(0) = p - \alpha \int_0^\infty f_1^{*'}(-b)\phi(b)db = p + \alpha c > c, \quad F_1(\infty) < 0$$

であるから (2.20) 式は唯一つの根をもつ。このときの最適購入政策は

$$z = \bar{x}_2^*, \quad x \leq \bar{x}_2^*$$

$$z = x, \quad \bar{x}^* \leq x$$

である。この場合 (i) と同様に

$$f_2^{*'}(x) = -c, \quad x \leq \bar{x}_2^*$$

$$f_2^{*'}(x) = (h+p) \left\{ \int_0^x \phi(b)db + \int_x^\infty g^{-1}(x/b)\phi(b)db \right\} + \alpha \int_0^\infty f_1^{*'}(x-b)\phi(b)db - p, \quad x \geq \bar{x}_2^* \\ f_2^{*'}(\infty) > 0$$

$$f_2^{*''}(x) = (h+p) \int_x^\infty \frac{\partial g^{-1}(x/b)}{\partial x} \phi(b)db + \alpha \int_0^\infty f_1^{*''}(x-b)\phi(b)db > 0, \quad x \geq \bar{x}_2^*$$

(iii) $n = k$ のとき定理が成立しているとする。このとき

$$f_k^{*'}(x) = -c, \quad x \leq \bar{x}_k^* \quad (2.21)$$

$$f_k^{*'}(x) = (h+p) \left\{ \int_0^x \phi(b)db + \int_x^\infty g^{-1}(x/b)\phi(b)db \right\}$$

$$+ \alpha \int_0^{\infty} f_{k-1}^{*'}(x-b)\phi(b)db - p, \quad x \geq \bar{x}_k^*; f_k^{*'}(\infty) > 0 \quad (2.22)$$

ここに $\bar{x}_k^*$ は

$$c = p - (h+p) \left\{ \int_0^{\bar{x}_k^*} \phi(b)db + \int_{\bar{x}_k^*}^{\infty} g^{-1}(\bar{x}_k^*/b)\phi(b)db \right\} - \alpha \int_0^{\infty} f_{k-1}^{*'}(\bar{x}_k^* - b)\alpha(b)db$$

の唯一つの根である。このとき

$$f_{k+1}^*(x) = \min_{z \geq x} \left\{ L^*(z; x) + \alpha \int_0^{\infty} f_k^*(z-b)\phi(b)db \right\} \quad (2.23)$$

$$L^*(z; x) + \alpha \int_0^{\infty} f_k^*(z-b)\phi(b)db$$

$$= \begin{cases} -cx + H_1^*(z) + \alpha \int_0^{\infty} f_k^*(z-b)\phi(b)db, & z < 0 \\ -cx + H_2^*(z) + \alpha \int_0^{\infty} f_k^*(z-b)\phi(b)db, & z > 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

$$(2.25)$$

(ii) と同様な議論より $z > 0$ の場合のみ考えれば十分である。 $\bar{x}_{k+1}$ は (2.25) 式の第 2 項と第 3 項の和を z に関して微分して、0 とおいて得られる。つまり

$$c = p - (k+p) \left\{ \int_0^z \phi(b)db + \int_z^{\infty} g^{-1}(z/b)\phi(b)db \right\} - \alpha \int_0^{\infty} f_k^{*'}(z-b)\phi(b)db \quad (2.26)$$

をみtas z のことである。(2.26) 式の右辺を $F_k(z)$ とおくと、(2.22) 式、(2.21) 式より

$$F_k'(z) = -(k+p) \int_z^{\infty} \frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z} \phi(b)db - \alpha \int_0^{\infty} f_k^{*''}(z-b)\phi(b)db < 0$$

$$F_k(0) = p - \alpha \int_0^{\infty} f_k^{*'}(-b)\phi(b)db = p + \alpha c > c, \quad F_k(\infty) < 0$$

となるから、(2.26) 式は唯一の根をもつ。

このときの最適購入政策は

$$z = \bar{x}_{k+1}^*, \quad x \leq \bar{x}_{k+1}^*$$

$$z = x, \quad \bar{x}_{k+1}^* \leq x$$

である。よって定理は証明された。

また、この動的モデルにおける $\bar{x}_n^*$, $f_n^*(x)$ について次の定理を得る。

定理 8

$$(a) \quad f_{n-1}^{*'}(x) > f_n^{*'}(x) > -p$$

$$(b) \quad f_n^{*''}(x) \geq 0$$

$$(c) \quad \bar{x}_n^* > \bar{x}_{n-1}^*$$

ただし、 $f_0^{*'} = h$, $\bar{x}_0^* = 0$ とする。

証明 定理 3 と同様に証明される。

2.3. 無限期間動的在庫モデル

この場合 $f(x)$ 、1.3. と同様に定義すると次の関数方程式 (2.27), (2.31) をうる。

(i) 単純な特定モデル

$$f(x) = \underset{z \geq x}{\text{Min}} \left\{ L(z; x) + \alpha \int_0^\infty f(z-b)\phi(b)db \right\} \quad (2.27)$$

$$= \underset{z \geq x}{\text{Min}} \{-cx + H(z)\} \quad (2.28)$$

ここに

$$H(z) = \begin{cases} cz + h \int_0^z (z-b)\phi(b)db + p \int_z^\infty (b-z)\phi(b)db + \alpha \int_0^\infty f(z-b)\phi(b)db, & z > 0 \\ cz + p \int_0^\infty (b-z)\phi(b)db + \alpha \int_0^\infty f(z-b)\phi(b)db, & z < 0 \end{cases} \quad (2.29)$$

$$H'(z) = \begin{cases} c - p + (h+p) \int_0^z \phi(b)db + \alpha \int_0^\infty f'(z-b)\phi(b)db, & z > 0 \\ c - p + \alpha \int_0^\infty f'(z-b)\phi(b)db, & z < 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

(ii) 一般的需要形態の在庫モデル

このモデルにおける $f(x)$ を $f^*(x)$ で表わすことにする。

$$f^*(x) = \underset{z \geq x}{\text{Min}} \left\{ L^*(z; x) + \alpha \int_0^\infty f^*(z-b)\phi(b)db \right\} \quad (2.31)$$

$$= \underset{z \geq x}{\text{Min}} \{-cx + H^*(z)\} \quad (2.32)$$

ここに

$$H^*(z) = cz + h \left\{ \int_0^z [z - bG(1)]\phi(b)db + \int_z^\infty [zg^{-1}(z/b) - bG(g^{-1}(z/b))]\phi(b)db \right\} \\ + p \int_z^\infty \{b[G(1) - G(g^{-1}(z/b))] - z[1 - g^{-1}(z/b)]\}\phi(b)db + \alpha \int_0^\infty f^*(z-b)\phi(b)db, \quad z > 0 \quad (2.33)$$

$$H^*(z) = cz + p \int_0^\infty [bG(1) - z]\phi(b)db + \alpha \int_0^\infty f^*(z-b)\phi(b)db, \quad z < 0 \quad (2.34)$$

$$H^{*'}(z) = \begin{cases} c - p + (h+p) \left\{ \int_0^z \phi(b)db + \int_z^\infty g^{-1}(z/b)\phi(b)db \right\} + \alpha \int_0^\infty f^{*'}(z-b)\phi(b)db, & z > 0 \\ c - p + \alpha \int_0^\infty f^{*'}(z-b)\phi(b)db, & z < 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

このとき、定理4、定理5に対応して次の定理をうる。

定理9 定理4と同じ仮定のもとで、最適購入政策は

$$z = \bar{x}, \quad x \leq \bar{x}$$

$$z = x, \quad \bar{x} \leq x$$

である。ここに $\bar{x}$ は

$$p - c(1 - \alpha) = (h + p) \int_0^{\bar{x}} \phi(b)db \quad (2.36)$$

の根である¹²⁾。

12) $\phi(b) > 0 (b > 0)$ ならば $\bar{x}$ は唯一の根であり、 $\phi(b) \geq 0 (b > 0)$ ならばある正の閉区間のすべて x で(2.36)式をみたすこともありうるが、この場合は最小値を $\bar{x}$ とする。

定理10 定理5と同じ仮定のもとで最適購入政策は

$$z = \bar{x}, \quad x \leq \bar{x}$$

$$z = x, \quad \bar{x} \leq x$$

である。ここに $\bar{x}$ は

$$p - c(1 - \alpha) = (h + p) \left\{ \int_0^x \phi(b) db + \int_x^\infty g^{-1}(x/b) \phi(b) db \right\} \quad (2.37)$$

の唯一の根である。

定理9の証明は定理10において、 $g(x) = 1$, $g^{-1}(x/b) = 0$ とおけば、定理10の証明と同様にして得られるので定理10を証明する。

定理10の証明

$H^*(\bar{x}^*) = \text{Min} H^*(z)$ を定義する(このような $\bar{x}^*$ が2個以上あれば大きい方をとる)。 $H^*(z) \rightarrow \infty$ ($z \rightarrow \infty$), $H^*(z) \rightarrow \infty$ ($z \rightarrow -\infty$) であるから $-\infty < \bar{x}^* < \infty$ となる。したがって (2.32) 式より最適購入政策は $x \leq \bar{x}^*$ ならば $\bar{x}^* - x$ だけ購入することになる。 $x > \bar{x}^*$ のときの最適購入規則による購入法および $\bar{x}^*$ の決定法を考察するために $M(x)$ を次のように定義する。

$$M(x) = \begin{cases} c(1 - \alpha) - p + (h + p) \left[\int_0^x \phi(b) db + \int_x^\infty g^{-1}(x/b) \phi(b) db \right], & x > 0 \\ c(1 - \alpha) - p, & x < 0 \end{cases} \quad (2.38)$$

(2.32) 式より $x \leq \bar{x}^*$ に対して $f^*(x) = -cx + H^*(\bar{x}^*)$ であるから、 $f^{*'}(x) = -c$ よって $M(x) = H^{*'}(x)$ ($x \leq \bar{x}^*$)。したがって定義より

$$M(\bar{x}^*) = H^{*'}(\bar{x}^*) = 0 \quad (2.39)$$

をうる。 $M(x)$ は既知の関数だけを含み $f(x)$ を含まないから上式より $\bar{x}^*$ を計算しうる。

補題C すべての x に対して $H^{*'}(x) \geq M(x)$ である。 $x \leq \bar{x}^*$ に対して、 $H^{*'}(x) = M(x)$ が成立する。

証明 $x_1 > x_2$ ならば

$$\begin{aligned} f^*(x_1) &= \text{Min}_{z \geq x_1} \{c(z - x_1) - cz + H^*(z)\} \\ &= \text{Min}_{z \geq x_1} \{c(z - x_2) - cz + H^*(z)\} + c(x_2 - x_1) \\ &\geq f^*(x_2) - c(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned} f^*(x_1) - f^*(x_2) &\geq -c(x_1 - x_2) \quad \therefore f^{*'}(x) \geq -c \quad (-\infty < x < \infty) \\ \therefore H^{*'}(x) &= \begin{cases} c - p + (h + p) \left\{ \int_0^x \phi(b) db + \int_x^\infty g^{-1}(x/b) \phi(b) db \right\} + \alpha \int_0^\infty f^{*'}(x - b) \phi(b) db, & x > 0 \\ c - p + \alpha \int_0^\infty f^{*'}(x - b) \phi(b) db, & x < 0 \end{cases} \\ &\geq \begin{cases} c(1 - \alpha) - p + (h + p) \left\{ \int_0^x \phi(b) db + \int_x^\infty g^{-1}(x/b) \phi(b) db \right\} \\ c(1 - \alpha) - p \end{cases} \\ &= M(x) \end{aligned}$$

また、 $x \leq \bar{x}$ ならば $f^{*'}(x) = -c$ よって $H^{*'}(x) = M(x)$ 。

補題D $M(x) = 0$ が唯一の根 $\bar{x}^*$ をもつならば、最適購入政策は

$$z = \bar{x}^*, \quad x \leq \bar{x}^*$$

$$z = x, \quad \bar{x}^* \leq x$$

である。

証明 $x > \bar{x}^*$ ならば

$$f^*(x) = \min_{z \geq x} \{-cx + H^*(z)\} = -cx + H^*(x)$$

となることを示せばよい。

$M(x) < 0$ ($x \leq 0$), $M(\bar{x}^*) = 0$ および定理の定理より $M(x) > 0$ ($x > \bar{x}^*$)。したがって補題Cより $H^*(x) \geq M(x) > 0$ ($x > \bar{x}^*$) よって $x > \bar{x}^*$ なる x に対して $H^*(x)$ は狭義増加関数となることから明らかである。

定理5の証明

$M(x) = 0$ が唯一の正根をもつことを示す。

$$M'(x) = \begin{cases} (h+p) \int_x^\infty \frac{\partial g^{-1}(x/b)}{\partial x} \phi(b) db > 0, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$M(x) = c(1-\alpha) - p < 0$ ($x \leq 0$), $M(y) > 0$ ($y \rightarrow \infty$), $x > 0$ のとき $M(x)$ は狭義増加関数, よって $M(x) = 0$ は唯一の正根をもつ。

3. む す び

需要が一般形態の確率的・動的在庫モデルで, 費用関数が線形の場合の最適購入政策を論じた。費用関数の一般化や単純な特定在庫モデルと需要形態の一般的在庫モデルの同値問題については次稿に検討したい。

参 考 文 献

- [1] Arrow, K. J., S. Karlin and H. Scharf.: *Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production*, Stanford, Calif. Stanford Univ. Press, 1958.
- [2] —: *Studies in Applied Probability and Management Science*, Stanford Calif. Stanford Univ. Press, 1962.
- [3] Bellman, R.: *Dynamic Programming*, Princeton, N. J., Princeton Univ. Press, 1957.
- [4] 北原貞輔・児玉正憲: 「OR による在庫管理システム」九州大学出版会, 1982.
- [5] 児玉正憲・北原貞輔: 「種々の需要形態に関する統一的在庫モデルの研究」経済学研究, Vol. 47, No. 5・6, 九州大学経済学会, 1983.
- [6] 児玉正憲: 「種々の需要形態に関する確率的在庫モデル」経済学研究, Vol. 51, No. 5, 九州大学経済学会, 1986.
- [7] —: 「確率的在庫モデルの最適政策 (I)」経済学研究, Vol. 52, No. 1~4, 九州大学経済学会, 1986.
- [8] —: 「確率的在庫モデルの最適政策 (II)」経済学研究, Vol. 52, No. 5, 九州大学経済学会, 1986.
- [9] Monks, J. G.: *Operations Management, Theory and Problem*, McGraw-Hill, 1977.
- [10] Naddor, E.: *Inventory System*, John Wiley, 1966.
- [11] Scharf, H. E., D. M. Gilford, and M. W. Shelly: *Multistage Inventory Models and Techniques*, Stanford, Calif. Stanford Univ. Press, 1963.
- [12] Taha, H. A.: *Operations Research, An Introduction*, Macmillan, 1976.