

動的在庫モデルの最適政策（Ⅱ）：連続編

児玉，正憲

<https://doi.org/10.15017/4491679>

出版情報：経済学研究. 53 (6), pp.15-30, 1988-03-10. 九州大学経済学会
バージョン：
権利関係：



動的在庫モデルの最適政策 (II)

—— 連続編 ——

児 玉 正 憲

需要が一般形態の確率的・動的在庫モデルで、費用関数が線形の場合の最適購入政策を論じた¹⁾。

本小論では、単純な特定在庫モデルと需要形態の一般的在庫モデルの同値問題について論じ、さらに需要形態および費用関数が共に一般の場合の最適政策を検討する。本論文を通じて使用される記号を導入する。

B : 各期の需要量を表す確率変数

$$P(B \leq b) = \int_0^b \phi(t) dt, \quad b \text{ は } B \text{ の実現値}, \quad E(B) = \int_0^\infty b\phi(b)db < \infty$$

x : 初期の在庫量

z : $z-x$ だけ発注した後の期首在庫量

α : 割引率 ($0 < \alpha < 1$)

$f_n(x)$: 初期在庫量を x としたとき、 n 期間にわたる期待割引費用を最小にするという意味での最適購入政策を取ったときの費用関数

$f(x)$: 初期在庫量を x としたとき、無限期間にわたる期待割引費用を最小にするという意味での最適購入政策を取ったときの費用関数

$c(z)$: 購入量が z のときの費用関数

$p(z)$: 在庫不足量が z のときの品切費用関数, $z \leq 0$ のとき, $p(z) = 0$

$h(z)$: 在庫量が z のときの在庫維持費用関数, $z \leq 0$ のとき, $h(z) = 0$

$c(z)$, $p(z)$ および $h(z)$ は 2 階微分可能と仮定する。

第 1 節では $c(z) = c \cdot z$, $p(z) = p \cdot z$, $h(z) = h \cdot z$ とする。

1. 同 値 問 題

変数 $z_1, z_2, \dots, z_n$ に関して 2 つのシステム A, B が同値であれば、B のふるまいを調べることで A のふるまいを知ることができる。このとき、B が A に比して簡単であれば好都合である。論文 [9] で述べた需要形態の一般的在庫モデルと単純な特定在庫モデルを、それぞれ A, B で表わすものと考え、その同値関係について考察する。A, B のいずれについても制御可能な変数は在庫水準だけである。在庫水準のシステムへの影響は期待総費用である。したがって期待総費用について同値関係を求

1) 児玉正憲 [9]

めることが本節の目的となる。

1.1. 過剰需要が後期需要として取扱われない場合

1.1.1. 有限期間在庫モデル

(i) 単純な特定在庫モデル

単純な在庫モデルの代表として、発注量は発注間隔の期首に即時的にみたされ、需要はすべて期首に即時に払いだされる場合の n 期間の動的な購入・販売在庫モデルを取りあげる。論文 [9] より $f_n(x)$ は次のようになる。

$$f_1(x) = \min_{z \geq x} \{L(z; x, \phi)\} \quad (1.1)$$

$$f_n(x) = \min_{z \geq x} \{L(z; x, \phi) + \alpha[f_{n-1}(0) \int_z^\infty \phi(b)db + \int_0^z f_{n-1}(z-b)\phi(b)db]\}, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (1.2)$$

ここに

$$L(z; x, \phi) = c \cdot (z-x) + h \int_0^z (z-b)\phi(b)db + p \int_z^\infty (b-z)\phi(b)db \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} &= -cx + cz + h \int_0^z (z-b)\phi(b)db + p \int_z^\infty (b-z)\phi(b)db \\ &\equiv -cx + H(z; \phi) \end{aligned} \quad (1.4)$$

(ii) 需要形態の一般的在庫モデル

(i) における需要形態は突発需要で、それが期首に発生する例になっている。また期を通じて一様に発生する場合もよくみる例である。そこでこれらを特殊な場合として含む一般的かつ総合的需要形態を表わすモデルとして

$$Q(T) = z - g(T/t)b, \quad 0 \leq T \leq t \quad (1.5)$$

を用いる。ここに

$Q(T)$: 時点 $T(\leq t)$ における在庫量 (ただし T は発注時点からはかる)

z : 期首在庫量

t : 発注間隔

$g(x)$: $g(0)=0, g(1)=1, \frac{dg(x)}{dx} > 0$ なる x の関数 ($0 \leq x \leq 1$)²⁾

このモデルにおける $f_n(x)$ を $f_n^*(x)$ とかくと、論文 [9] より $f_n^*(x)$ は次のようになる。

$$f_1^*(x) = \min_{z \geq x} \{L^*(z; x, \phi)\} \quad (1.6)$$

$$f_n^*(x) = \min_{z \geq x} \{L^*(z; x, \phi) + \alpha[f_{n-1}^*(0) \int_z^\infty \phi(b)db + \int_0^z f_{n-1}^*(z-b)\phi(b)db]\}, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (1.7)$$

ここに

$$L^*(z; x, \phi) = c \cdot (z-x) + h \left\{ \int_0^z [z - bG(1)]\phi(b)db + \int_z^\infty [zg^{-1}(z/b) - bG(g^{-1}(z/b))]\phi(b)db \right\}$$

2) $g(x)=0, g(x)=1$ の場合は $g(x)$ の仮定に反するが適当に修正することによって本論文の議論は成立する。論文 [6] を参照

$$+ p \int_z^\infty \{b[G(1) - G(g^{-1}(z/b))] - z[1 - g^{-1}(z/b)]\} \phi(b) db \quad (1.8)$$

$$\equiv -cx + H^*(z; \phi) \quad (1.9)$$

論文 [5] より

$$s(b) = \int_b^\infty \frac{\partial g^{-1}(b/x)}{\partial b} \phi(x) dx \quad (1.10)$$

を導入すると, $s(b)$ は確率密度関数であり $\int_0^\infty bs(b)db < \infty$ であることが証明されている。このとき, 次の定理をうる。

定理 1 (1.3) 式の $\phi(b)$ を (1.10) 式の $s(b)$ でおきかえると,

$$f_n(x) = \text{Min}_{z \geq x} \left\{ L(z; x, s) + \alpha \left[f_{n-1}(0) \int_z^\infty f_{n-1}(z-b) \phi(b) db \right] \right\} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} &= \text{Min}_{z \geq x} \left\{ L^*(z; x, \phi) + \alpha \left[f_{n-1}^*(0) \int_z^\infty \phi(b) db + \int_0^z f_{n-1}^*(z-b) \phi(b) db \right] \right\} \\ &= f_n^*(x), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.12)$$

が成立する。

証明 帰納法による。

(i) $n=1$ の場合論文 [5] で証明されている。

(ii) $n=k$ のとき定理が成立しているとする。つまり

$$f_k(x) = f_k^*(x) \quad (x \geq 0)$$

とする。このとき,

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= \text{Min}_{z \geq x} \left\{ L(z; x, s) + \alpha \left[f_k(0) \int_z^\infty \phi(b) db + \int_z^\infty f_k(z-b) \phi(b) db \right] \right\} \\ &= \text{Min}_{z \geq x} \left\{ L^*(z; x, \phi) + \alpha \left[f_k^*(0) \int_z^\infty \phi(b) db + \int_0^z f_k^*(z-b) \phi(b) db \right] \right\} \\ &= f_{k+1}^*(x) \end{aligned}$$

[証終]

注意 歳入を考慮する場合は, 売価の単価を r とすると,

$$\begin{aligned} L(z; x, s) &= c \cdot (z-x) + \int_0^z [h \cdot (z-b) - rb] s(b) db + \int_z^\infty [p \cdot (b-z) - rz] s(b) db \\ L^*(z; x, \phi) &= c \cdot (z-x) + \int_0^z \{h \cdot [z-bG(1)] - rb\} \phi(b) db + h \int_z^\infty [zg^{-1}(z/b) - bG(g^{-1}(z/b))] \\ &\quad \cdot \phi(b) db + \int_z^\infty \{p \cdot [b[G(1) - G(g^{-1}(z/b))] - z[1 - g^{-1}(z/b)]] - rz\} \phi(b) db \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(z; x, s)}{\partial z} &= c - p - r + (h + p + r) \int_0^z s(b) db \\ \frac{\partial^2 L(z; x, s)}{\partial z^2} &= (h + p + r) s(z) \\ \frac{\partial L^*(z; x, \phi)}{\partial z} &= c - (p + r) + (h + p + r) \int_0^z \phi(b) db + (h + p) \int_z^\infty g^{-1}(z/b) \phi(b) db \\ \frac{\partial^2 L^*(z; x, \phi)}{\partial z^2} &= r \phi(z) + (h + p) \int_z^\infty \frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z} \phi(b) db \end{aligned}$$

であるから³⁾,

$$s(z) = \frac{r\phi(z)}{h+p+r} + \frac{r}{h+p+r} \int_z^\infty \frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z} \phi(b) db \quad (1.13)$$

とおくと, $s(z)$ が確率密度関数であり, $L(z; x, s) = L^*(z; x, \phi)$ が成立することが示される⁴⁾。この場合も定理1は成立する。

1.1.2. 無限期間在庫モデル⁵⁾

(i) 単純な特定在庫モデル

最適性の原理より $f(x)$ は次の関数方程式をみたす。

$$f(x) = \min_{z \geq x} \left\{ L(z; x, \phi) + a \left[f(0) \int_z^\infty \phi(b) db + \int_0^z f(z-b) \phi(b) db \right] \right\} \quad (1.14)$$

(ii) 一般需要形態の在庫モデル

このモデルにおける $f(x)$ を $f^*(x)$ で表すことにすると, 最適性の原理より $f^*(x)$ は次の関数方程式をみたす。

$$f^*(x) = \min_{z \geq x} \left\{ L^*(z; x, \phi) + a \left[f^*(0) \int_z^\infty \phi(b) db + \int_0^z f^*(z-b) \phi(b) db \right] \right\} \quad (1.15)$$

このとき次の定理をうる。

定理2 (1.3) 式の $\phi(b)$ を (1.10) 式で定義される $s(b)$ で置きかえると

$$f(x) = \min_{z \geq x} \left\{ L(z; x, s) + a \left[f(0) \int_z^\infty \phi(b) db + \int_z^\infty f(z-b) \phi(b) db \right] \right\} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} &= \min_{z \geq x} \left\{ L^*(z; x, \phi) + a \left[f^*(0) \int_z^\infty \phi(b) db + \int_z^\infty f^*(z-b) \phi(b) db \right] \right\} \\ &= f^*(x) \end{aligned} \quad (1.17)$$

証明 定理1より $f_n(x) = f_n^*(x)$ ($n \geq 1$), 一般論⁶⁾より $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = f^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^*(x)$ が云える

ことより明らかである。

[証終]

定理1および定理2は, 一般的需要形態の在庫モデルの最適政策を論ずる場合, (1.12) 式および (1.16) 式のかわりに (1.11) 式および (1.17) 式で論ずればよいことを示している。つまり次の2つの定理が成立することを示している。

定理3 有限期間の一般的需要形態の動的在庫モデルの最適購入政策は

$$\begin{aligned} z &= \tilde{x}_n, & 0 \leq x \leq \tilde{x}_n \\ z &= x, & \tilde{x}_n \leq x \end{aligned}$$

である。ここに $\tilde{x}_n$ は

$$p - c = \int_0^{\tilde{x}_n} [(h+b)s(b) + af'_{n-1}(\tilde{x}_n - b)\phi(b)] db$$

の唯一の根である⁷⁾。ただし, $f'_0 = 0$

3), 4) 児玉正憲・北原貞輔 [5] の方法で示される

5) 児玉正憲 [9]

6) Bellman, R [3]

証明 論文 [9] の定理 1 の証明と同様である。[証終]

定理 4 無限期間の一般的需要形態の動的在庫モデルの最適購入政策は

$$z = \bar{x}, \quad 0 \leq x \leq \bar{x}$$

$$z = x, \quad \bar{x} \leq x$$

である。ここに $\bar{x}$ は

$$p - c = \int_0^{\bar{x}} [(h+p)s(b) - ac\phi(b)]db$$

の唯一の根である⁸⁾。

証明 同値関係を使用しないで (1.17) を用いて解いた $\bar{x}$ は論文 [9] の定理 5 より

$$p - c = \int_0^{\bar{x}} [h+p-ac]\phi(b)db + (h+p) \int_{\bar{x}}^{\infty} g(\bar{x}/b)\phi(b)db$$

の唯一の根である。したがって

$$\int_0^{\bar{x}} s(b)db = \int_0^{\bar{x}} \phi(b)db + \int_{\bar{x}}^{\infty} g^{-1}(\bar{x}/b)\phi(b)db \quad (1.18)$$

なる関係を示せばよい

$$\begin{aligned} \int_0^{\bar{x}} s(b)db &= \int_0^{\bar{x}} \left(\int_b^{\infty} \frac{\partial g^{-1}(b/y)}{\partial b} \phi(y)dy \right) db \\ &= \int_0^{\bar{x}} \left(\int_0^y \frac{\partial g^{-1}(b/y)}{\partial b} db \right) \phi(y)dy + \int_{\bar{x}}^{\infty} \left(\int_0^{\bar{x}} \frac{\partial g^{-1}(b/y)}{\partial b} db \right) \phi(y)dy \\ &= \int_0^{\bar{x}} [g^{-1}(b/y)]_{b=0}^{b=y} \phi(y)dy + \int_{\bar{x}}^{\infty} [g^{-1}(b/y)]_{b=0}^{b=\bar{x}} \phi(y)dy \\ &= \int_0^{\bar{x}} \phi(y)dy + \int_{\bar{x}}^{\infty} g^{-1}(\bar{x}/y)\phi(y)dy \quad (\because g^{-1}(1) = 1, g^{-1}(0) = 0) \end{aligned}$$

最適政策については論文 [9] の定理から明らかである。

[証終]

1.2. 過剰需要が後期需要として取扱われる場合

1.2.1. 有限期間在庫モデル⁹⁾

論文 [9] で検討したので後の解析に必要な定式化の結果をあげておく。

(i) 単純な特定在庫モデル

$$f_1(x) = \min_{z \geq x} \{L(z; x, \phi)\}$$

$$f_n(x) = \min_{z \geq x} \{L(z; x, \phi) + \alpha \int_0^{\infty} f_{n-1}(z-b)\phi(b)db\}$$

ここに

$$L(z; x, \phi) = c \cdot (z-x) + \begin{cases} h \int_0^z (z-b)\phi(b)db + p \int_z^{\infty} (b-z)\phi(b)db, & z > 0 \\ p \int_0^{\infty} (b-z)\phi(b)db, & z < 0 \end{cases} \quad (1.19)$$

7), 8) $s(b) = \phi(b)$ のとき, つまり単純な特定モデルの場合, ある正の閉区間のすべての値が根となるかもしれない。このときは最小値を $\bar{x}_n$ とする

(ii) 需要形態の一般的在庫モデル

このモデルにおける $f_n(x)$ を $f_n^*(x)$ で表すことにする。

$$f_n^*(x) = \min_{z \geq x} \{L^*(z; x, \phi)\}$$

$$f_n^*(x) = \min_{z \geq x} \{L^*(z; x, \phi) + \alpha \int_0^\infty f_{n-1}^*(z-b)\phi(b)db\}, \quad n = 2, 3, \dots$$

ここに

$$L^*(z; x, \phi) = c \cdot (z-x) + h \left\{ \int_0^z [z-bG(1)]\phi(b)db + \int_z^\infty [zg^{-1}(z/b) - bG(g^{-1}(z/b))]\phi(b)db \right\} \\ + p \int_0^\infty \{b[G(1) - G(g^{-1}(z/b))] - z[1 - g^{-1}(z/b)]\}\phi(b)db, \quad z > 0 \quad (1.20)$$

$$L^*(z; x, \phi) = c \cdot (z-x) + p \int_0^\infty [bG(1) - z]\phi(b)db, \quad z < 0 \quad (1.21)$$

$L(z; x, \phi)$ および $L^*(z; x, \phi)$ は無限期間の場合も同じである。

このとき次の定理をうる。

定理 5 (1.19) 式の $\phi(b)$ を (1.10) 式で定義される $s(b)$ でおきかえると,

$$f_n(x) = \min_{z \geq x} \left\{ L(z; x, s) + \alpha \int_0^\infty f_{n-1}(z-b)\phi(b)db \right\} \\ = \min_{z \geq x} \left\{ L^*(z; x, \phi) + \alpha \int_0^\infty f_{n-1}^*(z-b)\phi(b)db \right\} \\ = f_n^*(x), \quad n = 1, 2, \dots,$$

が成立する。

証明 帰納法による。

(i) $n=1$ の場合は論文 [5] で証明されている。

(ii) $n=k$ のとき定理が成立しているとする。つまり

$$f_k(x) = f_k^*(x)$$

とする。このとき

$$f_{k+1}(x) = \min_{z \geq x} \left\{ L(z; x, s) + \alpha \int_0^\infty f_k(z-b)\phi(b)db \right\} \\ = \min_{z \geq x} \left\{ L^*(z; x, \phi) + \alpha \int_0^\infty f_k^*(z-b)\phi(b)db \right\} \\ = f_{k+1}^*(x)$$

[証終]

1.2.2. 無限期間在庫モデル¹⁰⁾

(i) 単純な特定在庫モデル

$$f(x) = \min_{z \geq x} \left\{ L(z; x, \phi) + \alpha \int_0^\infty f(z-b)\phi(b)db \right\}$$

ここに $L(z; x, \phi)$ は (1.19) 式で与えられる。

(ii) 一般需要形態の在庫モデル

9) 児玉正憲 [9]

10) 児玉正憲 [9]

この場合の $f(x)$ を $f^*(x)$ で表すことにする。

$$f^*(x) = \min_{z \geq x} \left\{ L^*(z; x, \phi) + \alpha \int_0^\infty f^*(z-b) \phi(b) db \right\}$$

ここに $L^*(z; x, \phi)$ は (1.20) 式および (1.21) 式で与えられる。

このとき次の定理をうる。

定理 6 (1.19) 式の $\phi(b)$ を (1.10) 式で定義される $s(b)$ でおきかえると、

$$\begin{aligned} f(x) &= \min_{z \geq x} \left\{ L(z; x, s) + \alpha \int_0^\infty f(z-b) \phi(b) db \right\} \\ &= \min_{z \geq x} \left\{ L^*(z; x, \phi) + \alpha \int_0^\infty f^*(z-b) \phi(b) db \right\} = f^*(x) \end{aligned}$$

が成立する。

証明 定理 5 より $f_n(x) = f_n^*(x)$ ($n \geq 1$), 一般論¹¹⁾ より $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = f^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^*(x)$ が云えることより明らかである。

[証終]

2. 一般費用関数をもつ動的在庫モデル

このときの $f_n(x)$, $f_n^*(x)$, $f(x)$, $f^*(x)$ は次のようになる。

(1) 過剰需要が後期需要として取扱われない場合

(i) 有限期間在庫モデル

(a) 単純な特定在庫モデル

$$f_n(x) = \min_{z \geq x} \left\{ L(z; x, \phi) + \alpha \left[f_n(0) \int_z^\infty \phi(b) db + \int_0^z f_{n-1}(z-b) \phi(b) db \right] \right\}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

ただし $f_0 = 0$,

$$L(z; x, \phi) = c(z-x) + \int_0^z h(z-b) \phi(b) db + \int_z^\infty p(b-z) \phi(b) db \quad (2.2)$$

(b) 需要形態の一般的在庫モデル

$$f_n^*(x) = \min_{z \geq x} \left\{ L^*(z; x, \phi) + \alpha \left[f_{n-1}^*(0) \int_z^\infty \phi(b) db + \int_0^z f_{n-1}^*(z-b) \phi(b) db \right] \right\}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

ただし $f_0^* = 0$,

$$\begin{aligned} L^*(z; x, \phi) &= c(z-x) + \int_0^z h(z-bG(1)) \phi(b) db + \int_z^\infty h(zg^{-1}(z/b) - bG(g^{-1}(z/b))) \phi(b) db \\ &\quad + \int_z^\infty p(b(G(1) - G(g^{-1}(z/b))) - z(1 - g^{-1}(z/b))) \phi(b) db \end{aligned} \quad (2.4)$$

(ii) 無限期間在庫モデル

(a) 単純な特定在庫モデル

11) Bellman, R. [3]

$$f(x) = \min_{z \geq x} \left\{ L(z; x, \phi) + \alpha \left[f(0) \int_z^\infty \phi(b) db + \int_0^z f(z-b) \phi(b) db \right] \right\} \quad (2.5)$$

ここに $L(z; x, \phi)$ は (2.2) 式と同じである。

(b) 需要形態の一般的在庫モデル

$$f^*(x) = \min_{z \geq x} \left\{ L^*(z; x, \phi) + \alpha \left[f^*(0) \int_z^\infty \phi(b) db + \int_0^z f^*(z-b) \phi(b) db \right] \right\} \quad (2.6)$$

ここに $L^*(z; x, \phi)$ は (2.4) 式と同じである。

(2) 過剰需要が後期需要として取扱われる場合

(i) 有限期間在庫モデル

(a) 単純な特定在庫モデル

$$f_n(x) = \min_{z \geq x} \left\{ L(z; x, \phi) + \alpha \int_0^\infty f_{n-1}(z-b) \phi(b) db \right\} \quad (2.7)$$

ここに $L(z; x, \phi)$ は (2.2) 式と同じである。また $f_0=0$ 。

(b) 需要形態の一般的在庫モデル

$$f_n^*(x) = \min_{z \geq x} \left\{ L^*(z; x, \phi) + \alpha \int_0^\infty f_{n-1}^*(z-b) \phi(b) db \right\} \quad (2.8)$$

ここに $L^*(z; x, \phi)$ は (2.4) 式と同じである。また、 $f_0^*=0$ 。

(ii) 無限期間在庫モデル

(a) 単純な在庫モデル

$$f(x) = \min_{z \geq x} \left\{ L(z; x, \phi) + \alpha \int_0^\infty f(z-b) \phi(b) db \right\} \quad (2.9)$$

ここに $L(z; x, \phi)$ は (2.2) 式と同じである。

(b) 需要形態の一般的在庫モデル

$$f^*(x) = \min_{z \geq x} \left\{ L^*(z; x, \phi) + \alpha \int_0^\infty f^*(z-b) \phi(b) db \right\} \quad (2.10)$$

ここに $L^*(z; x, \phi)$ は (2.4) 式と同じである。

2.1. 同値問題

ここで同値問題を議論するためには、まず第1期における期待費用 (2.2) 式および (2.4) 式において

$$L(z; x, s) = L^*(z; x, \phi) \quad (2.11)$$

となるような適当な確率密度関数 $s(b)$ を決定できるかという問題を議論する必要がある。もし、このような $s(b)$ が存在すれば第1節の議論が成立することは証明の過程より明らかである。一般的に云って、第1節のように簡単に $s(b)$ を決定することができない。これを調べるために過剰需要が後期需要として扱われる場合について、(2.11)式の両辺の z に関する第1次導関数および第2次導関数を求めると、次のようになる¹²⁾。

$$L'(z; x, s) = c'(z-x) + \int_0^z h'(z-b)s(b)db - \int_z^\infty p'(b-z)s(b)db \quad (2.12)$$

$$L''(z; x, s) = c''(z-x) + \int_0^z h''(z-b)s(b)db + \int_z^\infty p''(b-z)s(b)db + (h'(0) + p'(0))s(z) \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} L^{*'}(z; x, \phi) &= c'(z-x) + \int_0^z h'(z-bG(1))\phi(b)db \\ &\quad + \int_z^\infty h'(zg^{-1}(z/b) - bG(g^{-1}(z/b)))g^{-1}(z/b)\phi(b)db \\ &\quad + \int_z^\infty p'(b(G(1) - G(g^{-1}(z/b))) - z(1 - g^{-1}(z/b)))(-1 + g^{-1}(z/b))\phi(b)db \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} L^{*''}(z; x, \phi) &= c''(z-x) + \int_0^z h''(z-bG(1))\phi(b)db \\ &\quad + \int_z^\infty \left\{ h''(zg^{-1}(z/b) - bG(g^{-1}(z/b)))(g^{-1}(z/b))^2 \right. \\ &\quad \left. + h'(zg^{-1}(z/b) - bG(g^{-1}(z/b)))\frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z} \right\} \phi(b)db + \int_z^\infty \left\{ p''(b(G(1) - G(g^{-1}(z/b))) \right. \\ &\quad \left. - z(1 - g^{-1}(z/b)))(-1 + g^{-1}(z/b))^2 \right. \\ &\quad \left. + p'(b(G(1) - G(g^{-1}(z/b))) - z(1 - g^{-1}(z/b)))\frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z} \right\} \phi(b)db \end{aligned} \quad (2.15)$$

ここで, $h(z) = h \cdot z$, $p(z) = p \cdot z$ とすると,

$$L''(z; x, s) = c''(z-x) + (h+p)s(z) \quad (2.16)$$

$$L^{*''}(z; x, \phi) = c''(z-x) + (h+p) \int_z^\infty \frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z} \phi(b)db \quad (2.17)$$

となり, $s(z)$ を (1.10) 式で定義すると, $s(z)$ が確率密度関数となり (2.11) 式をみたすことを示すことができた。

$h(z)$, $p(z)$ が 2 次の凸関数で $h(0)=p(0)=0$ をみたす

$$h(z) = \begin{cases} h_1 z^2 + h_2 z, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases} \quad h_1 > 0, \quad h_2 > 0 \quad (2.18)$$

$$p(z) = \begin{cases} p_1 z^2 + p_2 z, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases} \quad p_1 > 0, \quad p_2 > 0 \quad (2.19)$$

の場合に, 具体的な確率密度関数 $s(z)$ を求めてみよう。このとき,

$$L'(z; x, s) = c'(z-x) + \int_0^z [2h_1 \cdot (z-b) + h_2]s(b)db - \int_z^\infty [2p_1 \cdot (b-z) + p_2]s(b)db \quad (2.20)$$

$$L''(z; x, s) = c''(z-x) + 2p_1 + 2(h_1 - p_1) \int_0^z s(b)db + (h_2 + p_2)s(z) \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} L^{*'}(z; x, \phi) &= c'(z-x) + \int_0^z [2h_1 \cdot (z-bG(1)) + h_2]\phi(b)db \\ &\quad + \int_z^\infty [2h_1 \cdot (zg^{-1}(z/b) - bG(g^{-1}(z/b))) + h_2]g^{-1}(z/b)\phi(b)db \\ &\quad + \int_z^\infty [2p_1 \cdot (b(G(1) - G(g^{-1}(z/b))) - z(1 - g^{-1}(z/b))) + p_2](-1 + g^{-1}(z/b))\phi(b)db \\ L^{*''}(z; x, \phi) &= c''(z-x) + 2p_1 + 2(h_1 - p_1) \int_0^z \phi(b)db + 2(h_1 + p_1) \int_z^\infty (g^{-1}(z/b))^2 \phi(b)db \\ &\quad - 4p_1 \int_z^\infty g^{-1}(z/b)\phi(b)db \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2(h_1 + p_1) \int_z^\infty [zg^{-1}(z/b) - bG(g^{-1}(z/b))] \frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z} \phi(b) db \\
 & + 2p_1 \int_z^\infty [bG(1) - z] \frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z} \phi(b) db + (h_2 + p_2) \int_z^\infty \frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z} \phi(b) db \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

となる。よって $L''(z; x, s) = L^{*''}(z; x, \phi)$ より

$$\begin{aligned}
 & 2(h_1 - p_1) \int_0^z s(b) db + (h_2 + p_2) s(z) \\
 & = 2(h_1 - p_1) \int_0^z \phi(b) db + 2(h_1 + p_1) \int_z^\infty (g^{-1}(z/b))^2 \phi(b) db - 4p_1 \int_z^\infty g^{-1}(z/b) \phi(b) db \\
 & + 2(h_1 + p_1) \int_z^\infty [zg^{-1}(z/b) - bG(g^{-1}(z/b))] \frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z} \phi(b) db \\
 & + 2p_1 \int_z^\infty [bG(1) - z] \frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z} \phi(b) db + (h_2 + p_2) \int_z^\infty \frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z} \phi(b) db \quad (2.23)
 \end{aligned}$$

ここで

$$h_1 = p_1 \equiv h \quad (2.24)$$

と仮定すると、

$$\begin{aligned}
 s(z) = \frac{1}{h_2 + p_2} & \left\{ 4h \int_z^\infty [(g^{-1}(z/b))^2 - g^{-1}(z/b)] \phi(b) db \right. \\
 & + 4h \int_z^\infty [zg^{-1}(z/b) - bG(g^{-1}(z/b))] \frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z} \phi(b) db \\
 & \left. + 2h \int_z^\infty [bG(1) - z] \frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z} \phi(b) db + (h_2 + p_2) \int_z^\infty \frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z} \phi(b) db \right\} \quad (2.25)
 \end{aligned}$$

となる。 $g^{-1}(z/b) \leq g^{-1}(z/b)$ ($\because 0 \leq g^{-1}(z/b) \leq 1, b \geq z$) より無条件に $s(z) \geq 0$ でない。 $s(z) \geq 0$ は ϕ と g に依存する。 $s(z) \geq 0$ となる ϕ と g を選んだと仮定しよう。このとき、

$$\begin{aligned}
 \int_0^b g^{-1}(z/b) dz & = [zg^{-1}(z/b)]_0^b - \int_0^b z \frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z} dz = b - \int_0^b b \frac{\partial G(g^{-1}(z/b))}{\partial z} dz \\
 & = b - b[G(g^{-1}(z/b))]_0^b = b(1 - G(1)) \quad (2.26)
 \end{aligned}$$

および、

$$g^{-1}(1) = 1, \quad g^{-1}(0) = 0, \quad G(0) = 1 \quad (2.27)$$

を用いると、

$$\begin{aligned}
 s(z) & = \frac{1}{h_2 + p_2} \left\{ 4h \int_0^\infty \phi(b) db \int_0^b [(g^{-1}(z/b))^2 - g^{-1}(z/b) \right. \\
 & \quad \left. + (zg^{-1}(z/b) - bG(g^{-1}(z/b))) \frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z}] dz \right. \\
 & \quad \left. + 2h \int_0^\infty \phi(b) db \int_0^b [bG(1) - z] \frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z} dz + (h_2 + p_2) \int_0^\infty \phi(b) db \int_0^b \frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z} dz \right\} \\
 & = \frac{1}{h_2 + p_2} \left\{ 4h \int_0^\infty \phi(b) db \left\{ \int_0^b (g^{-1}(z/b))^2 dz - \int_0^b g^{-1}(z/b) db \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + [(zg^{-1}(z/b) - bG(g^{-1}(z/b)))g^{-1}(z/b)]_0^b - \int_0^b (g^{-1}(z/b))^2 dz \right\} \right. \\
 & \quad \left. + 2h \int_0^\infty \phi(b) db \left\{ [(bG(1) - z)g^{-1}(z/b)]_0^b + \int_0^b g^{-1}(z/b) dz \right\} \right. \\
 & \quad \left. + (h_2 + p_2) \int_0^\infty \phi(b) db [g^{-1}(z/b)]_0^b \right\} = 1 \quad (2.28)
 \end{aligned}$$

となる。1次および2次の積率を求めるために次の定積分の値および関係式を求めておく。(2.26)式

を $K(b)$ とおく。 $zg^{-1}(z/b) - bG(g^{-1}(z/b)) = K(z)$ に注意すると、

$$\begin{aligned}
 \int_0^b K(z) g^{-1}(z/b) dz &= [K(z)^2]_0^b - \int_0^b K(z) g^{-1}(z/b) dz = \frac{1}{2} b^2 (1 - G(1))^2 \\
 \int_0^b z K(z) \frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z} dz &= [z K(z) g^{-1}(z/b)]_0^b - \int_0^b K(z) g^{-1}(z/b) dz - \int_0^b z g^{-1}(z/b)^2 dz \\
 &= \frac{1}{2} b^2 (1 - G(1))^2 - \int_0^b z g^{-1}(z/b)^2 dz \\
 \int_0^b z [bG(1) - z] \frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z} dz &= [z (bG(1) - z) g^{-1}(z/b)]_0^b - bG(1) \int_0^b g^{-1}(z/b) dz \\
 &\quad + 2 \int_0^b z g^{-1}(z/b) dz \\
 &= b^2 (G(1)^2 - 1) + 2 \int_0^b z g^{-1}(z/b) dz \\
 \int_0^b z \frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z} dz &= [z g^{-1}(z/b)]_0^b - \int_0^b g^{-1}(z/b) dz = bG(1) \\
 \int_0^b z^2 K(z) \frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z} dz &= b^3 (1 - G(1)) - 2 \int_0^b z K(z) g^{-1}(z/b) dz - \int_0^b z^2 g^{-1}(z/b)^2 dz \\
 \int_0^b z^2 g^{-1}(z/b) dz &= b^3 (1 - G(1)) - 2 \int_0^b z K(z) dz \\
 \int_0^b z g^{-1}(z/b) dz &= b^2 (1 - G(1)) - \int_0^b K(z) dz \\
 \int_0^b z K(z) g^{-1}(z/b) dz &= \frac{1}{2} b^3 (1 - G(1))^2 - \frac{1}{2} \int_0^b K(z)^2 dz \\
 \int_0^b z^2 \frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z} dz &= b^2 (2G(1) - 1) + 2 \int_0^b K(z) dz
 \end{aligned}$$

となる。上の定積分値および関係式を用いると、

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty z s(z) dz &= \frac{1}{h_2 + p_2} \left\{ 4h \int_0^\infty \phi(b) db \int_0^b z \left[(g^{-1}(z/b))^2 - g^{-1}(z/b) + K(z) \frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z} \right] dz \right. \\
 &\quad + 2h \int_0^\infty \phi(b) db \int_0^b z [bG(1) - z] \frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z} dz \\
 &\quad + (h_2 + p_2) \int_0^\infty \phi(b) db \int_0^b z \frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z} dz \\
 &= \frac{1}{h_2 + p_2} \left\{ 2h \int_0^\infty \phi(b) db \int_0^b \left[z (bG(1) - z) \frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z} - 2z g^{-1}(z/b) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2 \left(z K(z) \frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z} + z g^{-1}(z/b)^2 \right) \right] dz \right. \\
 &\quad \left. + (h_2 + p_2) G(1) \int_0^\infty b \phi(b) db \right\} \\
 &= G(1) \int_0^\infty b \phi(b) db
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty z^2 s(z) dz &= \frac{1}{h_2 + p_2} \left\{ 4h \int_0^\infty \phi(b) db \int_0^b z^2 \left[g^{-1}(z/b)^2 - g^{-1}(z/b) + K(z) \frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z} \right] dz \right. \\
 &\quad + 2h \int_0^\infty \phi(b) db \int_0^b z^2 [bG(1) - z] \frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z} dz \\
 &\quad \left. + (h_2 + p_2) \int_0^\infty \phi(b) db \int_0^b z^2 \frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z} dz \right\} \\
 &= \frac{1}{h_2 + p_2} \left\{ 2h \int_0^\infty \phi(b) db \left[2b^3 (1 - G(1)) - 4 \int_0^b z K(z) g^{-1}(z/b) dz \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2 \int_0^b z^2 g^{-1}(z/b) dz + b^3 (G(1) - 1) - 2bG(1) \int_0^b z g^{-1}(z/b) dz + 3 \int_0^b z^2 g^{-1} \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (z/b)dz \Big] + (h_2 + p_2) \int_0^\infty \phi(b)db \left[b^2(2G(1)-1) + 2 \int_0^b K(z)dz \right] \Big\} \\
 &= \frac{1}{h_2 + p_2} \left\{ 2h \int_0^\infty \phi(b)db \left[b^3(1-G(1)) + \int_0^b z^2 g^{-1}(z/b)dz - 2bG(1) \int_0^b z g^{-1}(z/b)dz \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - 4 \int_0^b zK(z)g^{-1}(z/b)dz \right] + (h_2 + p_2) \int_0^\infty \phi(b)db \left[b^2(2G(1)-1) + 2 \int_0^b K(z)dz \right] \right\} \\
 &= \frac{1}{h_2 + p_2} \left\{ 4h \int_0^\infty \phi(b)db \int_0^b [K(z) + bG(1) - z]K(z)dz \right. \\
 & \quad \left. + (h_2 + p_2) \int_0^\infty \phi(b)db \left[b^2(2G(1)-1) + 2 \int_0^b K(z)dz \right] \right\} \quad (2.30)
 \end{aligned}$$

次に, $s(z) \geq 0$ を調べるために,

$$g(x) = x \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (2.31)$$

つまり一様需要を仮定してみよう。このとき

$$\begin{aligned}
 G(1) &= \frac{1}{2}, \quad g^{-1}(z/b) = \frac{z}{b}, \quad \frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z} = \frac{1}{b}, \quad K(z) = zg^{-1}(z/b) - bG(g^{-1}(z/b)) = \frac{z^2}{2b}, \\
 [bG(1) - z] \frac{\partial g^{-1}(z/b)}{\partial z} &= \frac{1}{2} - \frac{z}{b}
 \end{aligned}$$

となり,

$$s(z) = \frac{1}{h_2 + p_2} \left\{ 4h \int_z^\infty \left(\frac{3z^2}{2b} - \frac{z}{b} \right) \phi(b)db + 2h \int_z^\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{b} \right) \phi(b)db + (h_2 + p_2) \int_z^\infty \frac{\phi(b)}{b} db \right\} \quad (2.32)$$

となる。

ここで,

$$\phi(b) = \begin{cases} \frac{b^2 e^{-b/\beta}}{2\beta^3}, & b \geq 0 \\ 0, & b < 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

と仮定すると

$$\begin{aligned}
 s(z) &= \frac{e^{-z/\beta}}{2(h_2 + p_2)\beta^2} \{ h(z^2 - 4\beta z + 2\beta^2) + (h_2 + p_2)(z + \beta) \} \\
 &= \frac{e^{-z/\beta}}{2(h_2 + p_2)\beta^2} \{ h[z + (h_2 + p_2 - 4\beta h)/2h]^2 + [-2\beta^2 h^2 + 3\beta h(h_2 + p_2) - (h_2 + p_2)^2/4]/h \} \quad (2.34)
 \end{aligned}$$

となる。よって $-2\beta^2 h^2 + 3\beta h(h_2 + p_2) - (h_2 + p_2)^2/4 \geq 0$, すなわち

$$\frac{(h_2 + p_2)(3 - \sqrt{7})}{4h} \leq \beta \leq \frac{(h_2 + p_2)(3 + \sqrt{7})}{4h} \quad (2.35)$$

に対して, $s(z) \geq 0$ となる。つまり (2.18) 式, (2.19) 式, (2.31) 式および (2.33) 式を仮定すると, (2.35) 式が成立するとき (2.25) 式で定義される $s(z)$ は確率密度関数になることを示している。しかしながら,

$$\begin{aligned}
 L'(0; x, s) &= c'(-x) - 2p_1 \int_0^\infty bs(b)db - p_2 \\
 L^*(0; x, \phi) &= c'(-x) - 2p_1 \int_0^\infty G(1)b\phi(b)db - p_2 \\
 L(0; x, s) &= c(-x) + p_1 \int_0^\infty b^2 s(b)db + p_2 \int_0^\infty bs(b)db
 \end{aligned}$$

$$L^*(0; x, \phi) = c(-x) + p_1 \int_0^\infty G(1)^2 b^2 \phi(b) db + p_2 \int_0^\infty G(1) b \phi(b) db$$

であるから (2.25) 式で定義された $s(z)$ が確率密度関数である場合, (2.29) 式が成立するから $L'(z; x, s) = L^*(z; x, \phi)$ が成立するが, (2.30) 式より

$$\int_0^\infty b^2 s(b) db = \int_0^\infty G(1)^2 b^2 \phi(b) db \quad (2.36)$$

であるから, $L(z; x, s) = L^*(z; x, \phi)$ となる。すなわち $L(z; x, s) - L^*(z; x, \phi) = d$ (一定) となる。しかし $L(x; x, s)$ および $L^*(z; x, \phi)$ を最小にする z の値は同じである。 d の値は

$$\begin{aligned} d &= L(0; x, s) - L^*(0; x, \phi) \\ &= p_1 \left\{ \int_0^\infty b^2 s(b) db - G(1)^2 \int_0^\infty b^2 \phi(b) db \right\} \end{aligned} \quad (2.37)$$

で与えられる。(2.24) 式, (2.31) 式, (2.33) 式および (2.35) 式が成立する場合の d の値は

$$\begin{aligned} d &= h \left\{ \frac{2hG(1)(1-G(1))}{3(h_2+p_2)} \int_0^\infty b^3 \phi(b) db + G(1)(1-G(1)) \int_0^\infty b^2 \phi(b) db \right\} \\ &= \beta^2 h \left\{ \frac{10h\beta}{h_2+p_2} + 3 \right\} \end{aligned} \quad (2.38)$$

となる。

2.2. 凸費用関数

購入関数が線形で, 在庫維持費用関数および品切費用関数が凸関数の場合の最適政策を調べよう。

定理 7 $h(t)$ が狭義の凸関数かつ増加関数で, $p(t)$ が凸増加関数, $c < p'(0)$ ならば (2.3) 式, (2.6) 式, (2.8) 式および (2.10) 式の最適購入政策は, それぞれ (2.39) 式, (2.41) 式, (2.43) 式および (2.45) 式で与えられる。

(i)

$$\begin{aligned} z &= \bar{x}_n^*, \quad 0 \leq x \leq \bar{x}_n^* \\ z &= x, \quad \bar{x}_n^* \leq x \end{aligned} \quad (2.39)$$

ここに $\bar{x}_n^*$ は

$$\begin{aligned} c &+ \int_0^{\bar{x}_n^*} [h'(\bar{x}_n^* - bG(1)) + af_n^{*-1}(\bar{x}_n^* - b)] \phi(b) db \\ &+ \int_{\bar{x}_n^*}^\infty h'(\bar{x}_n^* g^{-1}(\bar{x}_n^*/b) - bG(g^{-1}(\bar{x}_n^*/b))) g^{-1}(\bar{x}_n^*/b) \phi(b) db \\ &+ \int_{\bar{x}_n^*}^\infty p'(b(G(1) - G(g^{-1}(\bar{x}_n^*/b))) - \bar{x}_n^*(1 - g^{-1}(\bar{x}_n^*/b))) (-1 + g^{-1}(\bar{x}_n^*/b)) \phi(b) db = 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

の唯一の根である。ただし, $f_0^{*'} = 0$

(ii)

$$\begin{aligned} z &= \bar{x}^*, \quad 0 \leq x \leq \bar{x}^* \\ z &= x, \quad \bar{x}^* \leq x \end{aligned} \quad (2.41)$$

ここに $\bar{x}^*$ は

$$c + \int_0^{\bar{x}^*} [h'(\bar{x}^* - bG(1)) - dc] \phi(b) db + \int_{\bar{x}^*}^\infty h'(\bar{x}^* g^{-1}(\bar{x}^*/b) - bG(g^{-1}(\bar{x}^*/b))) g^{-1}(\bar{x}^*/b) \phi(b) db$$

$$+ \int_{\bar{x}^*}^{\infty} p'(b(G(1)-G(g^{-1}(\bar{x}^*/b))) - \bar{x}^*(1-g^{-1}(\bar{x}^*/b)))(-1+g^{-1}(\bar{x}^*/b))\phi(b)db = 0 \quad (2.42)$$

の唯一の根である。

(iii)

$$\begin{aligned} z &= \bar{x}_n^*, \quad x \leq \bar{x}_n^* \\ z &= x, \quad \bar{x}_n^* \leq x \end{aligned} \quad (2.43)$$

ここに x_n^* は

$$\begin{aligned} c &+ \int_0^{\bar{x}_n^*} h'(\bar{x}_n^* - bG(1))\phi(b)db + \int_{\bar{x}_n^*}^{\infty} h'(\bar{x}_n^* g^{-1}(\bar{x}_n^*/b) - bG(g^{-1}(\bar{x}_n^*/b)))g^{-1}(\bar{x}_n^*/b)\phi(b)db \\ &+ \int_{\bar{x}_n^*}^{\infty} p'(b(G(1)-G(g^{-1}(\bar{x}_n^*/b))) - \bar{x}_n^*(1-g^{-1}(\bar{x}_n^*/b)))(-1+g^{-1}(\bar{x}_n^*/b))\phi(b)db \\ &+ \alpha \int_0^{\infty} f_{n-1}'(\bar{x}_n^* - b)\phi(b)db = 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

の唯一の根である。

(iv)

$$\begin{aligned} z &= \bar{x}^*, \quad x \leq \bar{x}^* \\ z &= x, \quad \bar{x}^* \leq x \end{aligned} \quad (2.45)$$

ここに, $\bar{x}^*$ は

$$\begin{aligned} c(1-\alpha) &+ \int_0^{\bar{x}^*} h'(\bar{x}^* - bG(1))\phi(b)db + \int_{\bar{x}^*}^{\infty} h'(\bar{x}^* g^{-1}(\bar{x}^*/b) - bG(g^{-1}(\bar{x}^*/b)))g^{-1}(\bar{x}^*/b)\phi(b)db \\ &+ \int_{\bar{x}^*}^{\infty} p'(b(G(1)-G(g^{-1}(\bar{x}^*/b))) - \bar{x}^*(1-g^{-1}(\bar{x}^*/b)))(-1+g^{-1}(\bar{x}^*/b))\phi(b)db = 0 \end{aligned} \quad (2.46)$$

の唯一の根である。

証明 (2.4) 式の第 2 項, 第 3 項および第 4 項の和を $H^*(z)$ とおくと, 仮定より $H^{**}(z) > 0$ となる。また $c + H^*(0) < 0$, $c(1-\alpha) + H^*(z) > 0$ ($z \rightarrow \infty$) が成立するから論文 [9] と同様にして証明される。

在庫維持費用関数および品切費用関数が一般の場合, $c < \int_0^{\infty} p'(bG(1))\phi(b)db$ のとき, $c + H^*(0) < 0$ となり $cz + H^*(z)$ は原点の近傍で減少の状態にあり, 論文 [9] の議論と同様にして, 例えば (1), (ii), (b) を例にとると, $cz + H^*(z) + \alpha \left\{ f^*(0) \int_z^{\infty} \phi(b)db + \int_0^z f^*(z-b)\phi(b)db \right\} (\equiv J^*(z))$ とおく) は原点の近傍で減少状態にある。もし $z_i > 0$ ($i=0, 1, \dots$) で $J^*(z)$ が極小値をとるならば, そのとき $J^*(z_i) = 0$, $J^{**}(z_i) > 0$ ($i=0, 1, \dots$) $J^*(0)$ は, $J^*(0) < 0$ であるから極小値でない。

いま, $J^*(z)$ は図 1 に示されるものとする。 z_0, z_1, z_2 は極小値である (図 1 参照)。

動的在庫モデルの最適政策 (II)

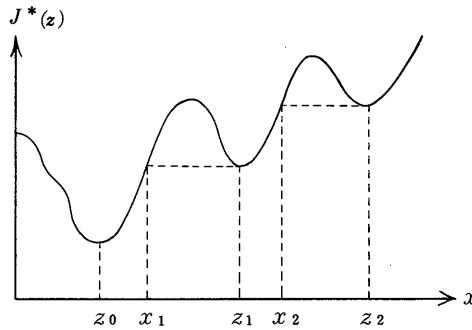


図 1

このとき最適政策はつぎのようになる。

- (i) $x < z_0$ ならば $z_0 - x$ だけ購入する
- (ii) $z_0 < x < x_1$ ならば 購入しない
- (iii) $x_1 < x < z_1$ ならば $z_1 - x$ だけ購入する
- (iv) $z_1 < x < x_2$ ならば 購入しない
- (v) $x_2 < x < z_2$ ならば $z_2 - x$ だけ購入する
- (vi) $z_2 < x$ ならば 購入しない

証明

- (i) $x < z_0$ ならば $J^*(z_0) < J^*(x)$
- (ii) $z_0 < x < x_1$ ならば $J^*(x) < J^*(z) \quad (x < z < x_1)$
- (iii) $x_1 < x < z_1$ ならば $J^*(z_1) < J^*(x)$
- (iv) $z_1 < x < x_2$ ならば $J^*(x) < J^*(z) \quad (x < z < x_2)$
- (v) $x_2 < x < z_2$ ならば $J^*(z_2) < J^*(x)$
- (vi) $z_2 < x$ ならば $J^*(x) < J^*(z) \quad (z_2 < z < \infty)$

となるからである

[証終]

3. む す び

需要が一般的な動的在庫モデルで、費用関数が線形の場合の同値問題および費用関数の一般化を論じた。配達遅れのある動的在庫モデルについては次稿に検討したい。

参 考 文 献

- [1] Arrow K. J., S. Karlin and H. Scharf: *Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production*, Stanford, Calif. Stanford Univ. Press, 1958.
- [2] —: *Studies in Applied Probability and Management Science*, Stanford Calif. Stanford Univ. Press, 1962.
- [3] Bellman, R: *Dynamic Programming*, Princeton, N. J., Princeton Univ. Press, 1957.
- [4] 北原貞輔・児玉正憲: 「OR による在庫管理システム」九州大学出版会, 1982.
- [5] 児玉正憲・北原貞輔: 「種々の需要形態に関する統一的在庫モデルの研究」経済学研究, Vol. 47, No. 5・6, 九州

大学経済学会, 1983.

- [6] 児玉正憲：「種々の需要形態に関する確率的在庫モデル」．経済学研究，Vol. 51，No. 5，九州大学経済学会，1986.
- [7] ———：「確率的在庫モデルの最適政策（Ⅰ）」経済学研究，Vol. 52，No. 1～4，九州大学経済学会，1986.
- [8] ———：「確率的在庫モデルの最適政策（Ⅱ）」経済学研究，Vol. 52，No. 5，九州大学経済学会，1986.
- [9] ———：「動的在庫モデルの最適政策（Ⅰ）連続編」経済学研究 Vol. 53，No. 4・5，九州大学経済学会，1987.
- [10] Monks, J. G. : *Operations Management, Theory and Problem*, McGraw-Hill, 1977.
- [11] Naddor, E. : *Inventory System*, John Wiley, 1966.
- [12] Scharf, H. E., D. M. Gilford, and M. W. Shelly : *Multistage Inventory Models and Techniques*, Stanford, Calif, Stanford Univ. Press, 1963.
- [13] Taha, H. A. : *Operations Research, An Introduction*, Macmillan, 1976.