

安定行列と価格 : Leontief-Sraffa体系における価格の収束性

永田, 聖二

<https://doi.org/10.15017/4491670>

出版情報 : 経済学研究. 52 (6), pp.63-84, 1987-08-10. 九州大学経済学会
バージョン :
権利関係 :



安定行列と価格

—Leontief-Sraffa 体系における価格の収束性—

永 田 聖 二

目 次

はじめに

§1. 数学的準備

(1) 安定な行列

(2) *Primitive* な行列

§2. Leontief-Sraffa 体系

(1) 産出量体系

(2) 価格体系

(3) 価値体系

(4) 双対性

§3. 乗数過程と価格形成

(1) 乗数過程

(2) 価格形成

(3) 動学的双対問題

おわりに

は じ め に

Ricardo によれば、

「商品にたいする需要がどのように大きくても、その価格は結局は売手の競争によって規制されるであろう、——それはその自然価格にまたはその近くに、落ちつくであろう。

…価格の大規制者は生産費である…。」¹⁾

本稿の目的は、「安定な行列」の性質から、

Leontief-Sraffa 体系を利用して、この命題を証明することにある。 $\tilde{A}$ を賃金財消費部分もふくめた「安定な」増補投入行列とすると、まず、産出量体系においては、任意に与えられた最終需要ベクトル $f \geq 0$ にたいして、乗数効果の波及過程

$$x(t) = \tilde{A}x(t-1) + f; x(0) = 0$$

が進行する。ただし、ベクトル $x(t)$ は、波及過程の第 t 段階における産出量をあらわす。それに応じて、価格は、

$$p(t) = (1+r(t-1))p(t-1)\tilde{A};$$
$$r(t-1) = \frac{p(t-1)(I - \tilde{A})x(t-1)}{p(t-1)\tilde{A}x(t-1)}$$

という修正プロセスを経て改訂されるとする。ただし、 $p(t)$ 、 $r(t)$ は、それぞれ、波及過程の第 t 段階における、価格ならびに平均利潤率を示す。すなわち、乗数効果の波及過程の各段階において、競争の結果、全産業に同一の平均利潤率が成立するように価格が形成され则认为る。ふたたび、Ricardo を引用すれば、

「誰でも、資本を自分の好むところに使用することが自由であるかぎり、当然その資本のためにもっとも有利な用途を探し求めるであろう。…すべての資本使用者側のこの不断の願望は、彼らすべての利潤率を均等化しようとする、…、強い傾向をもっている。」²⁾

このとき、初期価格ベクトル $p(1) \geq 0$ がどのよ

1) Ricardo [10] 訳書50-51ページ。

2) Ricardo [9] 訳書104-105ページ。

うに与えられようとも、価格 $p(t)$ は、 $\tilde{A}$ の正固有ベクトル

$$p = (1+r)p\tilde{A}$$

に、相対価格として、収束することが示される。この、*Sraffa* 体系の解でもある、極限価格ベクトル $p > 0$ が、*Ricardo* のいう「自然価格」であると解釈できよう。

§1. 数学的準備¹⁾

[1] 安定な行列

定義1. 分解不能行列 $A \geq 0$ は²⁾、任意のベクトル $p \geq 0$ にたいして、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p \left(\frac{A}{\lambda(A)} \right)^t \quad (1.1)$$

が存在するとき、「安定な行列」という。ただし、 $\lambda(A)$ は行列 A の *Frobenius* 根である³⁾。

補助定理1. 分解不能な非負行列 A にたいして、つぎの条件 (i), (ii) は同値である。

(i) A は安定である。

(ii) $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{A}{\lambda(A)} \right)^t$ が存在する。

[証明] (ii) $\Rightarrow$ (i) は明らか。(i) がみたされれば、とくに、標準的 (行) 基底 $e_j = [\delta_{1j}, \delta_{2j}, \dots, \delta_{nj}] (j=1, 2, \dots, n)$ にたいして (1.1) が成立。(証了)

1) この節の結果は、おもに、二階堂 [6]、*Nikaido* [7]、ならびに、*Gale* [1] による。

2) n 次正方行列 $A = [a_{ij}] \geq 0$ は、番号の集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ の空でない真部分集合 J が存在し、条件 $(\forall (i, j) \in J^c \times J)(a_{ij} = 0)$ をみたすとき、分解可能であるとよばれる。すなわち、分解可能行列 A は、適当な置換行列 P を用いて、

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}; A_{11}, A_{22} \text{ は正方行列}$$

のかたちに変換できる。 n 次正方行列 $A \geq 0$ は、分解可能でないとき、分解不能であるという。

3) A の分解不能性により $\lambda(A) > 0$ 。したがって、(1.1) は意味をもつ。二階堂 [6] 86ページ参照。

定義2. 非負正方行列 $A = [a_{ij}]$ は、行和がすべて1に等しいとき、すなわち、

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.2)$$

が成り立つとき、「確率行列」という。条件 (1.2) を行列表示すれば、

$$A1 = 1 \quad (1.2')$$

となる。ただし、 1 はすべての成分が1である n 次列ベクトルをあらわす。また、成分和が1に等しい非負ベクトル

$$\begin{aligned} p &= [p_1, p_2, \dots, p_n] \geq 0; \\ p1 &= 1 \end{aligned} \quad (1.3)$$

を「確率ベクトル」とよぶ。

(1.2') 式から、確率行列 A は固有値1をもつことがわかるが、じつは、これが A の *Frobenius* 根 $\lambda(A)$ である。

補助定理2. 確率行列 A の *Frobenius* 根は、 $\lambda(A) = 1$ 。

[証明] $\lambda(A)$ に属する非負固有行ベクトル $p \geq 0$ を考えれば⁴⁾、

$$\lambda(A)p = pA.$$

両辺に右から 1 をかければ、(1.2') から、

$$\lambda(A)p1 = pA1 = p1.$$

$p1 > 0$ だから、けっきょく、

$$\lambda(A) = 1$$

を得る。(証了)

確率行列 A の成分 $a_{ij} \geq 0$ を、ある時点で状態 i がおこったとき、つぎの時点で状態 j がおこる条件付確率とみなせば、条件 (1.2) は、つぎの時点でいずれかの状態 j が、かならず、おこることを意味する。そして、時点 t における確率分布 $p(t)$ が与えられれば、時点 $t+1$ にお

4) $A \geq 0$ だから、*Frobenius* の定理により、 $\lambda(A)$ に属する非負固有ベクトル $p \geq 0$ が存在する。二階堂 [6] 74ページ参照。

ける確率分布は

$$\mathbf{p}(t+1) = \mathbf{p}(t)\mathbf{A} \quad (1.4)$$

となることがわかる。 $\mathbf{p}(t)$ は確率ベクトルだから、

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t+1) &\geq 0, \\ \mathbf{p}(t+1)\mathbf{1} &= \mathbf{p}(t)\mathbf{A}\mathbf{1} = \mathbf{p}(t)\mathbf{1} = 1. \end{aligned}$$

すなわち、 $\mathbf{p}(t+1)$ も確率ベクトルである。そうすると、初期確率 $\mathbf{p}(1)$ が与えられたとき、時点 t の確率分布は、(1.4)から、

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(1)\mathbf{A}^{t-1}$$

となるので、 $\mathbf{A}$ が安定な場合には、 $\lambda(\mathbf{A})=1$ を考慮すれば、極限確率分布

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}$$

が存在することがわかる。このとき、(1.4)において両辺の極限をとれば、

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{p}\mathbf{A}, \\ \mathbf{p} &\geq 0, \\ \mathbf{p}\mathbf{1} &= 1 \end{aligned}$$

を得る。すなわち、極限確率分布 $\mathbf{p}$ は、 $\lambda(\mathbf{A})=1$ に属する非負固有ベクトルであるが、 $\mathbf{A}$ の分解不能性により、じつは、

$$\mathbf{p} > 0.$$

さらに、 $\lambda(\mathbf{A})=1$ に属する任意の固有ベクトル $\mathbf{s}$ にたいして、

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{s}, \quad (\alpha \neq 0)$$

をみたす $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在する⁵⁾。したがって、 $\mathbf{s}$ が確率ベクトルであれば

$$\mathbf{s}\mathbf{1} = 1$$

を満足するので、上式の両辺に $\mathbf{1}$ をかけて、

$$1 = \mathbf{p}\mathbf{1} = \alpha \mathbf{s}\mathbf{1} = \alpha.$$

こうして、極限確率分布 $\mathbf{p}$ は、初期確率 $\mathbf{p}(1)$ がどのような値をとろうとも、一意であることがわかる。以上をまとめて、定理1を得る。

定理1. 確率行列 $\mathbf{A}$ が安定であれば、(1.4)

をみたす極限確率分布

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}$$

が存在する。極限確率分布 $\mathbf{p}$ は、 $\lambda(\mathbf{A})=1$ に属する正固有ベクトルであり、初期確率 $\mathbf{p}(1)$ がどのように与えられようとも、一意である。

補助定理3. 分解不能行列 $\mathbf{A} \geq 0$ を、 $\lambda(\mathbf{A})$ に属する正の列固有ベクトルの第 i 成分を第 i 対角成分とする対角行列 $\mathbf{Q}$ によって変換すれば、

$$\mathbf{Q}^{-1} \frac{\mathbf{A}}{\lambda(\mathbf{A})} \mathbf{Q} \quad (1.5)$$

は確率行列になる。

[証明] $\lambda(\mathbf{A})$ に属する列固有ベクトルを $\mathbf{q} = [q_i] > 0$ とすれば、

$$\mathbf{A}\mathbf{q} = \lambda(\mathbf{A})\mathbf{q}$$

であるが、

$$\mathbf{q} = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{e}^i; \quad \mathbf{e}^i \text{ は標準的 (列) 基底}$$

だから、上式に代入して、

$$\begin{aligned} \mathbf{A}[q_1 \mathbf{e}^1, \dots, q_n \mathbf{e}^n] \mathbf{1} &= \lambda(\mathbf{A}) \\ &\times [q_1 \mathbf{e}^1, \dots, q_n \mathbf{e}^n] \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

そこで、

$$\mathbf{Q} = [q_1 \mathbf{e}^1, \dots, q_n \mathbf{e}^n] = \begin{bmatrix} q_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q_n \end{bmatrix}$$

とおけば、 $\mathbf{q} > 0$ より、

$$|\mathbf{Q}| = q_1 q_2 \cdots q_n > 0.$$

したがって、逆行列 $\mathbf{Q}^{-1}$ が存在する。同様に、 $\mathbf{Q}$ の任意の主座小行列式も正であるから、 $\mathbf{Q}^{-1} \geq 0$ がわかる⁶⁾。じつさい、

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/q_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/q_n \end{bmatrix} \geq 0.$$

(1.6)の両辺に左から $\mathbf{Q}^{-1}$ をかけて、 $\lambda(\mathbf{A}) > 0$ で割れば、

6) すなわち、行列 $\mathbf{Q}$ に関して、*Hawkins-Simon*の条件が成り立つので、逆行列 $\mathbf{Q}^{-1} \geq 0$ が存在する。二階堂 [6] 66-69ページ参照。

5) 二階堂 [6] 86ページ参照。

$$Q^{-1} \frac{A}{\lambda(A)} Q \mathbf{1} = \mathbf{1}.$$

すなわち、行列

$$Q^{-1} \frac{A}{\lambda(A)} Q \geq 0$$

は条件 (1.2') をみたす。 (証了)

補助定理 4. 分解不能行列 $A \geq 0$ は、確率行列 (1.5) が安定のとき、かつ、そのときにかぎり、安定。

〔証明〕 (1.5) が安定ならば、補助定理 1 により、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(Q^{-1} \frac{A}{\lambda(A)} Q \right)^t = B$$

が存在する。一方、

$$\left(Q^{-1} \frac{A}{\lambda(A)} Q \right)^t = Q^{-1} \left(\frac{A}{\lambda(A)} \right)^t Q$$

が成り立つので、両辺に左右から、それぞれ、

Q, Q^{-1} をかけたうえで極限をとれば、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{A}{\lambda(A)} \right)^t &= Q \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \left(Q^{-1} \frac{A}{\lambda(A)} Q \right)^t \right) Q^{-1} \\ &= QBQ^{-1}. \end{aligned}$$

したがって、ふたたび、補助定理 1 により A は安定。逆に、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{A}{\lambda(A)} \right)^t = C$$

が存在すれば、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(Q^{-1} \frac{A}{\lambda(A)} Q \right)^t = Q^{-1} C Q. \quad (\text{証了})$$

補助定理 5. 安定な確率行列 (1.5) の Frobenius 根=1に属する正固有確率ベクトルを $\mathbf{b}$ とすれば、(1.5) の極限行列 B は、

$$B = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}.$$

〔証明〕 定理 1 において、初期確率ベクトルを標準基底 $\mathbf{e}_j (j=1, 2, \dots, n)$ にとれば、極限の一意性から、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}_j \left(Q^{-1} \frac{A}{\lambda(A)} Q \right)^t &= \mathbf{b}. \\ (j=1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

これにより結論を得る。 (証了)

定理 2. $A \geq 0$ を安定な行列とするとき、

(i) $\left(\frac{A}{\lambda(A)} \right)^t$ の極限行列の各行は、 $\lambda(A)$ に属する A の正固有ベクトル。

(ii) 任意のベクトル $\mathbf{p} \geq 0$ にたいして、

$\mathbf{p} \left(\frac{A}{\lambda(A)} \right)^t$ は $\lambda(A)$ に属する A の正固有ベクトルに収束。

〔証明〕 補助定理 4, 5 により、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{A}{\lambda(A)} \right)^t = QBQ^{-1} = \begin{bmatrix} q_1 \mathbf{b} Q^{-1} \\ \vdots \\ q_n \mathbf{b} Q^{-1} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

であるが、 $\mathbf{b}$ の定義から、

$$\mathbf{b} Q^{-1} \frac{A}{\lambda(A)} Q = \mathbf{b},$$

したがって、

$$\mathbf{b} Q^{-1} A = \lambda(A) \mathbf{b} Q^{-1}.$$

すなわち、 $\mathbf{b} Q^{-1} > 0$ は、 $\lambda(A)$ に属する A の正固有ベクトル。 $q_i > 0 (i=1, 2, \dots, n)$ とあわせて、(i) を得る。つぎに、(1.7) により、任意のベクトル $\mathbf{p} \geq 0$ にたいして、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p} \left(\frac{A}{\lambda(A)} \right)^t = \mathbf{a} \mathbf{b} Q^{-1}.$$

ここで、

$$\alpha = \mathbf{p} \mathbf{q} > 0.$$

したがって、(ii) を得る。 (証了)

補助定理 6. 確率行列 A が安定ならば、その適当なべき

$$A^{\nu} > 0.$$

〔証明〕 定理 1 によれば、 A の安定性から、任意の確率ベクトル $\mathbf{s}$ にたいし、 $\mathbf{s} A^{\nu}$ は極限確率分布 $\mathbf{p} > 0$ に収束。したがって、とくに、標準基底 $\mathbf{e}_j (j=1, 2, \dots, n)$ をえらべば、

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} A^\nu = \begin{bmatrix} p \\ \vdots \\ p \end{bmatrix} > 0.$$

すなわち、 $A^\nu = [a_{ij}^{(\nu)}]$ とおけば、

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_{ij}^{(\nu)} = p_j > 0$$

だから、

$$(p_j > 0)(\exists \nu_{ij} \in N)(\forall \nu \geq \nu_{ij}) \\ (p_j - a_{ij}^{(\nu)} \leq |p_j - a_{ij}^{(\nu)}| < p_j).$$

つまり、

$$(\exists \nu_{ij} \in N)(\forall \nu \geq \nu_{ij})(a_{ij}^{(\nu)} > 0).$$

そこで、

$$\nu_0 = \max_{i,j} \{\nu_{ij}\}$$

とすれば、

$$(\exists \nu_0 \in N)(\forall \nu \geq \nu_0)(a_{ij}^{(\nu)} > 0). \quad (\text{証了})$$

定義 3. $p = [p_1, p_2, \dots, p_n] \in R^n$ のノルム $\|p\|$ を

$$\|p\| = \sum_{j=1}^n |p_j| \quad (1.8)$$

によって定める⁷⁾。

定義 4. A を分解不能な確率行列、 $p > 0$ をその固有確率ベクトルとする。このとき、ある数 $\gamma \in (0, 1)$ が存在し、任意の確率ベクトル s にたいして、

$$\|sA - p\| \leq \gamma \|s - p\| \quad (1.9)$$

が成り立つとき、 A を「収縮行列」という。

補助定理 7. 収縮行列 A は安定。

(証明) 任意の確率ベクトル s にたいし、

$$\|sA^\nu - p\| \leq \gamma^\nu \|s - p\|$$

が成立する。じっさい、 $\nu=1$ のときは定義から明らか。 $\nu-1$ のときに成り立つと仮定して、 $s_{\nu-1} = sA^{\nu-1}$ とおけば、 $s_{\nu-1}$ も確率ベクトルになるので、

$$\begin{aligned} \|sA^\nu - p\| &= \|s_{\nu-1}A - p\| \\ &\leq \gamma \|s_{\nu-1} - p\| \\ &= \gamma \|sA^{\nu-1} - p\| \\ &\leq \gamma^\nu \|s - p\|. \end{aligned}$$

$0 < \gamma < 1$ だから、 $\gamma^\nu \rightarrow 0 (\nu \rightarrow \infty)$ 。したがって、 A は安定⁸⁾。 (証了)

補助定理 8. 分解不能な確率行列 A が正の列をもつならば、 A は収縮行列である。

(証明) A の第 k 列 a_k が正とする。

$$\alpha = \min_i a_{ik}$$

とおいたとき、

$$\gamma = 1 - \alpha$$

が (1.9) をみたす収縮定数である。じっさい、

$$a_k > 0, \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 \text{ より、}$$

$$0 < \gamma < 1^9).$$

ここで、固有確率ベクトルを p とおくと、任意の確率ベクトル s にたいし、

$$z = s - p$$

とする。 p, s は、ともに、確率ベクトルだから、

$$z1 = 0.$$

そこで、

8) 任意のベクトル $s \geq 0$ は、成分和 $s1 > 0$ で割ることにより、確率ベクトル $s/s1$ に変換することができる。したがって、 A が収縮行列のときには、

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} sA^\nu = s1 \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{s}{s1} A^\nu = s1p$$

が存在する。

9) $a_k > 0$ より

$$\gamma < 1$$

は自明。また、かりに、

$$\alpha = \min_i a_{ik} = 1$$

とすれば、 $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$ から、

$$a_k = 1$$

となるので、

$$a_l = 0 \quad (l \neq k)$$

であるが、これは、 A の分解不能性に矛盾。したがって、

$$0 < \gamma.$$

7) このノルムは、通常利用されるノルム

$$\|p\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n p_j^2}$$

と同等の役割を果たす。二階堂 [5] 76ページ参照。

$$z^+ = [z_i^+]; z_i^+ = \max \{z_i, 0\}, \\ z^- = [z_i^-]; z_i^- = \min \{z_i, 0\}$$

とすれば,

$$z = z^+ + z^-, z^+ \geq 0, z^- \leq 0$$

であるから,

$$z^+ 1 = -z^- 1, \\ z^+ 1 - z^- 1 = \|z\|.$$

したがって,

$$-z^- 1 = \frac{\|z\|}{2}.$$

以下の議論において,

$$za_k \geq 0$$

と仮定してもよい。そうでなければ, z を $-z$ に置き換えた議論を考えればよいからである。このとき, 任意のベクトル x にたいし, $|x| = [|x_i|]$ と定義すれば,

$$\begin{aligned} \|sA - p\| &= \|zA\| \\ &= |zA|1 \\ &= \sum_{j+k} |za_j| + za_k \\ &\leq \sum_{j+k} |z|a_j + za_k \\ &= |z|A1 + za_k - |z|a_k \\ &= |z|1 + za_k - |z|a_k \\ &= \|z\| + za_k - z^+ a_k + z^- a_k \\ &= \|z\| + 2z^- a_k \\ &\leq \|z\| + 2\alpha z^- 1 \\ &= \|z\| - \alpha \|z\| \\ &= \gamma \|s - p\|. \end{aligned}$$

したがって, 条件 (1.9) を満足する。(証了)

補助定理 7, 8 から, ただちに,

系 1. 分解不能な確率行列 A が正の列をもてば, A は安定。

補助定理 9. 分解不能な確率行列 A のあるべき A^m が安定ならば, A は安定。

[証明] 一般に, A のべき A^r は確率行列であるから¹⁰⁾, 任意のベクトル b にたいして,

$$\|bA^r\| = |bA^r|1 \leq |bA^r|1 = |b|1 = \|b\|$$

が成り立つことに注意する。いま, A^m が安定とすれば,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \nu_1 \in N)(\forall \nu \geq \nu_1) \\ (\|sA^{m\nu} - p\| < \varepsilon)$$

が任意の確率ベクトル s について成り立つ。そこで,

$$\nu_0 = m\nu_1$$

とおけば, $\forall \nu \geq \nu_0$ にたいし,

$$\nu = m\nu_1 + r; r \geq 0$$

と書けるので,

$$\begin{aligned} \|sA^\nu - p\| &= \|sA^{m\nu_1+r} - p\| \\ &= \|(sA^{m\nu_1} - p)A^r\| \\ &\leq \|sA^{m\nu_1} - p\| \end{aligned}$$

となるが, $m\nu_1 \geq \nu_1$ であることに注意すれば, けっきょく,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \nu_0 \in N)(\forall \nu \geq \nu_0) \\ (\|sA^\nu - p\| < \varepsilon). \quad (\text{証了})$$

系 1 と補助定理 9 とをあわせて,

系 2. 分解不能な確率行列 A のあるべきが正の列をもてば, A は安定。

補助定理 3 によれば, 一般の分解不能行列 $A = [a_{ij}] \geq 0$ に, 変換

$$q_i^{-1} \frac{a_{ij}}{\lambda(A)} q_j$$

をほどこすことにより, 行列 (1.5) を確率行列とすることができる。そうすると, $q > 0$, $\lambda(A) > 0$ であるから, 同一指数のべきを比較すれば,

10) 確率行列どうしの積は確率行列である。じっさい,

$$A1 = 1, A \geq 0; B1 = 1, B \geq 0$$

にたいして,

$$AB1 = A1 = 1, AB \geq 0.$$

この結果から, A が確率行列のときには, A^m も確率行列となることがわかる。なお, 分解可能行列のべきは分解可能である。じっさい,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

にたいして,

$$P^{-1}A^2P = P^{-1}APP^{-1}AP = \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix}.$$

同様に, 分解不能行列のべきも分解不能であることがわかる。

両行列の正の要素の配列状態は、たがいに、等しいことがわかる。その結果、補助定理 6 ならびに系 1, 系 2 は、一般の分解不能行列にたいしても成り立つ。したがって、

定理 3. 分解不能行列 $A \geq 0$ にたいして、 A の適当なべき A^m が正の列をもつとき、かつ、そのときにかぎり、 A は安定。

[2] Primitive な行列

定義 5. $A \geq 0$ を n 次分解不能行列とする。番号の集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ の分割 $G_1, G_2, \dots, G_s (s \geq 2)$ で、条件

$$\bigcup_{k=1}^s G_k = \{1, 2, \dots, n\}, \quad (1.10)$$

$$\left. \begin{aligned} G_k &\neq \phi (k=1, 2, \dots, s), \\ G_k \cap G_l &= \phi (k \neq l), \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

$$(i, j) \in G_{k+1} \times G_k \Rightarrow a_{ij} = 0, \quad (1.12)$$

をみたすものが存在するとき、 A は *imprimitive* であるという。ただし、(1.12) において、 $G_{s+1} = G_1$ とする¹¹⁾。なお、(1.12) は

$$j \in G_k, a_{ij} > 0 \Rightarrow i \in G_{k+1} \quad (1.12')$$

と言い換えることができることに注意しておく。

定義 6. *imprimitive* でない分解不能行列 $A \geq 0$ を *primitive* であるという。

定義から、ただちに、定理 4 を得る。

定理 4. 分解不能行列 $A \geq 0$ は、正の対角要素が存在すれば、*primitive*。

11) したがって、*imprimitive* な行列 A は、適当な置換行列 P を用いて、

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} & & & & A_{1s} \\ & A_{21} & & & \\ & & A_{32} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_{ss-1} \end{bmatrix}$$

のかたちに変換できる。

[証明] (1.12') から自明。 (証了)

補助定理 10. 非負行列 $A = [a_{ij}]$ にたいし、 $A^\nu = [a_{ij}^{(\nu)}]$ とおくと、

$$a_{ij}^{(\mu+\nu)} = \sum_{l=1}^n a_{il}^{(\mu)} a_{lj}^{(\nu)} \geq a_{il}^{(\mu)} a_{lj}^{(\nu)}.$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, n; \mu, \nu = 1, 2, \dots)$$

[証明] $A^{\mu+\nu} = A^\mu A^\nu$, $A^\mu \geq 0$, $A^\nu \geq 0$ より自明。 (証了)

補助定理 11. *imprimitive* な行列 $A \geq 0$ にたいし、任意の自然数 ν を分割の個数 s で割ったときの剰余を $r(\nu)$ であらわせば、

$$(i) \quad a_{ij}^{(\nu)} > 0, j \in G_k \Rightarrow i \in G_{r(k+\nu)},^{12)}$$

$$(ii) \quad \nu \text{ が } s \text{ で割り切れなければ,}$$

$$(\forall (i, j) \in G_k \times G_k) (a_{ij}^{(\nu)} = 0),$$

とくに、任意の i について

$$a_{ii}^{(\nu)} = 0,$$

$$(iii) \quad \nu \text{ が } s \text{ で割り切れれば,}$$

$$(\forall (i, j) \in G_k \times G_k) (a_{ij}^{(\nu)} = 0),$$

が $k=1, 2, \dots, s$ に関して成立。

[証明] (i) $\nu=1$ のときには、(1.12') から自明。 $\nu-1$ のとき、任意の k について、成立と仮定。 ν のとき、 $a_{ij}^{(\nu)} > 0$ とすれば、補助定理 10 により、

$$a_{ij}^{(\nu)} = \sum_{l=1}^n a_{il}^{(\nu-1)} a_{lj} > 0$$

だから、ある l に関しては、

$$a_{il}^{(\nu-1)} > 0, a_{lj} > 0.$$

さらに、 $j \in G_k$ であれば、 A が *imprimitive* であることから、 $a_{ij} > 0$ とあわせて、

$$l \in G_{k+10}$$

したがって、 $a_{il}^{(\nu-1)} > 0$ を考慮すれば、帰納法の仮定により、

$$i \in G_{r(k+\nu)0}$$

$$(ii) \quad \text{条件}$$

12) $r(k+\nu)=0$ のときには、 $G_{r(k+\nu)} = G_s$ とする。

$$(i, j) \in G_k \times G_k \Rightarrow a_{ij}^{(\nu)} = 0$$

は、同値な条件

$$j \in G_k, a_{ij}^{(\nu)} > 0 \Rightarrow i \in G_k^c$$

に言い換えることができることに注意する。 ν

は s で割り切れないので、

$$r(k+\nu) \neq r(k)_0.$$

そこで、 $j \in G_k, a_{ij}^{(\nu)} > 0$ とすれば、(i) により、

$$i \in G_{r(k+\nu)} \neq G_{r(k)} = G_k$$

となるので、分割の条件 (1.11) に注意すれば、

$$i \in G_{k_0}.$$

(iii) ν は s で割り切れるので、

$$r(k+\nu) = r(k)_0.$$

したがって、

$$j \in G_k, a_{ij}^{(\nu)} > 0 \Rightarrow i \in G_{r(k+\nu)}$$

$$= G_{r(k)} = G_{k_0}.$$

(証了)

補助定理12. 最大公約数が1である自然数

$n_1, n_2, \dots, n_m$ にたいし、

$$(\exists (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m) \in Z^m) (\sum_{i=1}^m \gamma_i n_i = 1)_0.$$

すなわち、 $n_1, n_2, \dots, n_m$ の、整数による、1次結合で、値が1に等しいものが存在する。

[証明] $\sum_{i=1}^m \beta_i n_i, (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) \in Z^m$ のかた

ちであらわせる、あらゆる正数の集合を考える¹³⁾。

この集合の元で最小のものを

$$g = \sum_{i=1}^m \gamma_i n_i$$

とおけば¹⁴⁾、各 n_i は g で割り切れることが示され、 $g=1$ となる¹⁵⁾。じっさい、かりに

$$n_i = ug + v, 0 < v < g$$

とすれば、

13) n_1 はこの集合の元だから、この集合は空ではない。

14) いま考察の対象となっている集合は、自然数の空でない部分集合であるから、最小元が存在する。杉浦 [17] 11ページ参照。

15) 条件より、 $n_1, n_2, \dots, n_m$ の最大公約数は1。

$$v = n_i - ug$$

$$= (1 - u\gamma_i)n_i + \sum_{j \neq i} (-u\gamma_j)n_j$$

となり、いま考えている集合の元になるが、これは g の最小性に矛盾。この議論は各 i について成り立つので、すべての n_i は g で割り切れる。(証了)

補助定理13. 最大公約数が1である自然数

$n_1, n_2, \dots, n_m$ にたいし、

$$(\exists \nu_0 \in N) (\forall \nu \geq \nu_0)$$

$$(\exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in (N \cup \{0\})^m)$$

$$(\nu = \sum_{i=1}^m \alpha_i n_i)_0.$$

すなわち、 ν_0 より大きい自然数 ν は、 $n_1, n_2, \dots, n_m$ の、非負の整数による、1次結合としてあらわすことができる。

[証明] 補助定理12の γ_i を用いて、

$$d = \sum_{i=1}^m |\gamma_i| n_i,$$

$$\nu_0 = d^2$$

とおけばよい。じっさい、 $\nu \geq \nu_0 = d^2$ ならば、

$$\nu = qd + r, 0 \leq r < d$$

とあらわしたときに

$$q \geq d$$

となる¹⁶⁾。そこで、

$$r = \nu - qd = r \sum_{i=1}^m \gamma_i n_i$$

なることに注意すれば、

$$\nu = qd + r = \sum_{i=1}^m (q|\gamma_i| + r\gamma_i)n_i.$$

さらに、 $q \geq d > r$ 、かつ、 $|\gamma_i| \geq \gamma_i$ だから、

16) $\nu \geq \nu_0$ のとき、

$$qd + r \geq d^2$$

だから、

$$(q-d)(d-r) \geq r\{d-(q-1)\}.$$

ここで、かりに、

$$q < d$$

とすれば、

$$q-1 \leq d$$

だから

$$0 > (q-d)(d-r) \geq r\{d-(q-1)\} \geq 0$$

となり矛盾。

$$q|\gamma_i| + r\gamma_i \geq r(|\gamma_i| + \gamma_i) \geq 0. \quad (\text{証了})$$

定義 7. $A \geq 0$ にたいし, $k_0 = i$ から $k_\nu = j$ へ連なる連鎖

$$\{k_0, k_1, \dots, k_\nu\}$$

で, その任意の 2 つの連続する部門 k_s と k_{s+1} とが直接的に連結しているようなもの, すなわち,

$$a_{k_s k_{s+1}} > 0$$

であるようなものが存在するとき, 第 i 部門は第 j 部門に連結しているという。

補助定理 14. $A \geq 0$ は, 任意の部門 i が任意の部門 j に連結しているとき, かつ, そのときにかぎり, 分解不能。

〔証明〕 A は分解不能であるとする。任意に選んだ部門 j_0 にたいし, 集合 J_0 を, j_0 に連結しているような部門全体がなす集合と定める。このとき, A の分解不能性により, $i \neq j_0$ かつ $a_{ij_0} > 0$ となる部門 i が存在するので¹⁷⁾, $J_0 \neq \phi$ 。任意の $j \in J_0$ にたいして, 定義から, j_0 に連結する連鎖 $\{j, \dots, j_0\}$ が存在する。ここで, かりに, $a_{ij} > 0$ であるような $i \in J_0^c$ が存在するとすれば, この i は, 連鎖 $\{i, j, \dots, j_0\}$ により, j_0 に連結し, $i \in J_0$ となるので矛盾。したがって,

$$(\forall (i, j) \in J_0^c \times J_0)(a_{ij} = 0).$$

そうすると, A の分解不能性から, $J_0 = \phi$ か, あるいは, $J_0 = \{1, 2, \dots, n\}$ かでなければならないが, さきに示したように $J_0 \neq \phi$ なので, けっきょく, $J_0 = \{1, 2, \dots, n\}$ 。すなわち, 部門 j_0 は, 任意の部門にたいして連結。

逆に, 任意の部門は任意の部門にたいして連結であるとする。集合 J を, 条件

$$(\forall (i, j) \in J^c \times J)(a_{ij} = 0)$$

をみたす空でない集合と定める。このとき, $J = \{1, 2, \dots, n\}$ となることを示せばよい。かりに, $i \in J^c$ である部門 i が存在するとすれば, $j \in J$ をとるとき, i が j に連結するような連鎖 $\{i, \dots, k_s, k_{s+1}, \dots, j\}$ が, 仮定された連結性から, 存在することがわかる。このとき, $i \in J^c$, $j \in J$ であるから, この連鎖のなかには, $k_s \in J^c$, $k_{s+1} \in J$ となるような連結する部門 k_s, k_{s+1} が存在する。すなわち,

$$(\exists (k_s, k_{s+1}) \in J^c \times J)(a_{k_s k_{s+1}} > 0)$$

となるが, これは J の定義に矛盾。したがって, $J^c = \phi$ であるから, けっきょく, $J = \{1, 2, \dots, n\}$ 。 (証了)

補助定理 15. $A^\nu = [a_{ij}^{(\nu)}]$ とおく。 $A \geq 0$ の分解不能性は, つぎの条件と同値。

$$(\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2)(\exists \nu \in N)$$

$$(a_{ij}^{(\nu)} > 0).$$

〔証明〕 一般に,

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(\nu)} &= \sum_{k_1} \sum_{k_2} \cdots \sum_{k_{\nu-1}} a_{ik_1} a_{k_1 k_2} \cdots a_{k_{\nu-1} j} \\ &\geq a_{ik_1} a_{k_1 k_2} \cdots a_{k_{\nu-1} j} \end{aligned}$$

なので,

$$(\exists (k_1, k_2, \dots, k_{\nu-1}))$$

$$(a_{ik_1} a_{k_1 k_2} \cdots a_{k_{\nu-1} j} > 0) \Leftrightarrow a_{ij}^{(\nu)} > 0.$$

すなわち, 条件 $a_{ij}^{(\nu)} > 0$ は, 部門 i が部門 j に連結していることに同値であるから, 補助定理 14 により, 結論を得る。 (証了)

いま, 分解不能行列 A にたいして, 自然数の集合

$$M_1 = \{\nu | a_{ij}^{(\nu)} > 0\}$$

を定める。 A の分解不能性から, 補助定理 15 により, $M_1 \neq \phi$ 。このとき, M_1 の元の最大公約数を g とする。

補助定理 16. 分解不能行列 $A \geq 0$ は, 集合 M_1

17) もし, そうでなければ,

$$(\forall (i, j) \in \{j_0\}^c \times \{j_0\})(a_{ij} = 0)$$

となり, 分解不能性に矛盾。

の元の最大公約数 g が 1 のとき、かつ、そのときにかぎり、安定。

〔証明〕 A が安定ならば、補助定理 6 により、

$$(\exists \nu_0 \in N)(\forall \nu \geq \nu_0)(A^\nu > 0)^{18)}.$$

そうすると、 ν_0 より大きな任意の自然数 ν は集合 M_1 の元となる。 g は、これらの ν の約数でなければならないので、 $g=1$ 。

逆に、 $g=1$ とする。このとき、 M_1 の有限個の元 $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$ で、それらの最大公約数が 1 に等しいものが存在する。これらの元を利用すれば、補助定理 13 により、ある自然数 ν_0 より大きな任意の自然数 ν にたいして、

$$\nu = \sum_{i=1}^m a_i \nu_i, \quad (a_i \text{ は非負整数})$$

と書ける。 $\nu_i \in M_1$ だから、 $a_i^{(\nu_i)} > 0$ 、したがって、補助定理 10 により、

$$a_{11}^{(\nu)} \geq (a_{11}^{(\nu_1)})^{a_1} (a_{11}^{(\nu_2)})^{a_2} \dots (a_{11}^{(\nu_m)})^{a_m} > 0$$

であるから、

$$(\forall \nu \geq \nu_0)(a_{11}^{(\nu)} > 0).$$

すなわち、 ν_0 より大きな任意の自然数 ν にたいして、 $\nu \in M_1$ 。また、 A の分解不能性から、補助定理 15 により、

$$(\exists \mu_i \in N)(a_{11}^{(\mu_i)} > 0).$$

以上のことから、 $i=1, 2, \dots, n$ にたいして、

$$(\forall \nu \geq \nu_0 + \max \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}) \\ (a_{11}^{(\nu)} > 0)$$

が成り立つ。じっさい、任意の i にたいして、

$$\nu = \nu_0 + \lambda_i + \mu_i, \quad \lambda_i \geq 0$$

とおけるので、

$$a_{11}^{(\nu)} \geq a_{11}^{(\mu_i)} a_{11}^{(\nu_0 + \lambda_i)} > 0.$$

したがって、 A^ν の第 1 列の成分はすべて正になるので、定理 3 により、 A は安定。(証了)

補助定理 17. 分解不能行列 $A \geq 0$ は、集合 M_1 の元の最大公約数 $g > 1$ のとき、かつ、そのときにかぎり、*imprimitive*。

〔証明〕 A を *imprimitive* とする。このとき、条件 (1.10)-(1.12) をみたす分割 $G_1, G_2, \dots, G_s (s \geq 2)$ が存在し、補助定理 11. (ii) の対偶から、

$$a_{11}^{(\nu)} > 0 \Rightarrow s \text{ は } \nu \text{ の約数}$$

となる。すなわち、 $s \geq 2$ は $\nu \in M_1$ の公約数であるから、 g の最大性により、

$$g \geq 2.$$

逆に、 $g > 1$ とする。このとき、任意の自然数 ν を

$$\nu = mg + r, \quad 0 \leq r < g$$

のかたちであらわしたときの剰余 r を $r(\nu)$ とおく。そこで、

$$k(\nu) = r(\nu) + 1, \quad 1 \leq k(\nu) \leq g$$

とおいたうえで、集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ の g 個の部分集合 G_k を、つぎのように定める。

$$G_k = \{i | (\exists \nu \in N)(a_{11}^{(\nu)} > 0, k(\nu) = k)\}. \\ (k = 1, 2, \dots, g)$$

この分割が、条件 (1.10), (1.11), ならびに、(1.12') をみたすことを示せばよい。まず、

$$G_l \cap G_k = \phi \quad (l \neq k)$$

である。なぜなら、かりに、 $i \in G_l \cap G_k$ とすれば、

$$(\exists \mu \in N)(a_{11}^{(\mu)} > 0, k(\mu) = l),$$

かつ、

$$(\exists \nu \in N)(a_{11}^{(\nu)} > 0, k(\nu) = k).$$

一方、 A の分解不能性から、補助定理 15 により、

$$(\exists \omega \in N)(a_{11}^{(\omega)} > 0)$$

となるので、あわせて、補助定理 10 を考慮すれば、

$$a_{11}^{(\mu+\omega)} \geq a_{11}^{(\omega)} a_{11}^{(\mu)} > 0,$$

また、

18) 分解不能行列は各行 (列) に少なくとも 1 つ正の成分をもつので、正行列をかければ、かならず、それらの積も正行列になる。

$$a_{11}^{(\nu+\omega)} \geq a_{11}^{(\omega)} a_{11}^{(\nu)} > 0.$$

したがって、 $\mu+\omega, \nu+\omega \in M_1$ となるので、定義により、 g は $\mu+\omega, \nu+\omega$ の約数。そうすると、 $\mu-\nu=(\mu+\omega)-(\nu+\omega)$ は g で割り切れるので、 $r(\mu)=r(\nu)$ となるが、これは、 $k(\mu)=l \neq k=k(\nu)$ に矛盾。つぎに、

$$\bigcup_{k=1}^g G_k = \{1, 2, \dots, n\}$$

を示す。じつさい、任意の i にたいし、 A の分解不能性により、

$$(\exists \nu \in N)(a_{11}^{(\nu)} > 0)$$

が成り立つので、

$$i \in G_{k(\nu)}$$

すなわち、 i はいずれかの G_k の元である。こんどは、条件 (1.12') の成立を示す。 $j \in G_k, a_{ij} > 0$ とする。さきに示したように、 A の分解不能性から、

$$(\exists \nu \in N)(\exists k \in \{1, 2, \dots, n\}) \\ (a_{j1}^{(\nu)} > 0, k(\nu) = k) \quad (1.13)$$

が成り立つので、あわせて、

$$a_{11}^{(\nu+1)} \geq a_{ij} a_{j1}^{(\nu)} > 0, k(\nu+1) = k+1$$

を得る。したがって、

$$i \in G_{k+1}.$$

さいごに、

$$G_k \neq \phi \quad (k = 1, 2, \dots, g)$$

を示そう。 A の分解不能性から、 $j=1$ の場合に

$$(1.13) \text{ が成り立つので、}$$

$$(\exists l \in \{1, 2, \dots, n\})(1 \in G_l).$$

すなわち、

$$G_l \neq \phi$$

である。このとき、かりに、 $G_{l+1} = \phi$ とすれば、任意の i にたいし、 $i \in G_{l+1}$ であるから、すでに成立が示された条件 (1.12) から、任意の $j \in G_l$ にたいして、 $a_{ij} = 0$ 。したがって、とくに、

$$(\forall (i, j) \in G_l^c \times G_l)(a_{ij} = 0).$$

これは、 A の分解不能性に矛盾。したがって、

$$G_{l+1} \neq \phi.$$

この議論を有限回くり返せば、すべての k について $G_k \neq \phi$ が成り立つ。 (証了)

以上の結果を総合して、定理 5 を得る。

定理 5. 分解不能行列 $A \geq 0$ は、 A が *primitive* であるとき、かつ、そのときにかぎり、安定。

[証明] 補助定理 16 と補助定理 17 の対偶とから自明。 (証了)

§2. Leontief-Sraffa 体系

(1) 産出量体系

投入係数行列 A 、労働投入係数 (行) ベクトル a_0 、必要消費 (列) ベクトル c を、それぞれ、つぎのように定義する。

$$A = [a_{ij}] \geq 0;$$

a_{ij} = 商品 j を 1 単位生産するために必要な商品 i の数量。

$$a_0 = [a_{0j}] \geq 0;$$

a_{0j} = 商品 j を 1 単位生産するために必要な労働。

$$c = [c_j] \geq 0;$$

c_j = 労働力を 1 単位再生産するために必要な商品 j の数量。

このとき、商品 j を 1 単位生産するためには、商品 i が、生産手段として a_{ij} 単位、労働者のための消費財のかたちで $c_i a_{0j}$ 単位、あわせて、

$$a_{ij} + c_i a_{0j}$$

だけ必要になる。そこで、増補投入行列 $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]$ をつぎのように定める。

$$\tilde{A} = A + c a_0 \geq 0.$$

行列 $\tilde{A}$ に関して、つぎのような仮定をおく。

仮定 1. $\tilde{A}$ は分解不能。

仮定 2. $\tilde{A}$ は半生産的。

仮定 3. $\tilde{A}$ は正の対角成分を、少なくとも 1 つ、もつ。

これらの仮定の経済的意味を述べよう。仮定 1 は、補助定理 14 によれば、任意の部門 i が任意の部門 j に連結していること、すなわち、体系内のすべての産業が、直接的にであれ間接的にであれ、自部門も含む他のすべての産業の生産物の投入を必要とすること、したがって、*Sraffa* の言葉を借りれば、すべての生産物が「基礎的な生産物」であることを意味する¹⁾。つぎに、産出量 (列) ベクトル x を、

$$x = [x_i] \geq 0; \\ x_i = \text{商品 } i \text{ の産出量}$$

とするとき、仮定 2 は、条件

$$x \geq \tilde{A}x$$

をみたすベクトル $x \geq 0$ が存在すること、すなわち、すべての産業でその生産のために必要な生産物を補填したうえで、少なくとも 1 つの産業では補填部分を上回るような非負の産出量水準 x が存在することを意味する。あるいは、剰余生産物 (列) ベクトル f を

$$f = (I - \tilde{A})x$$

と定めれば、仮定 2 は、すべての産業で非負かつ少なくとも 1 つの産業で正の剰余生産物を生み出すような、非負の、産出量ベクトルの存在と言い換えることができる。さいごに、仮定 3 は、ある部門 i に関して、

$$\tilde{a}_{ii} = a_{ii} + c_i a_{0i} > 0$$

であること、したがって、部門 i は自己の生産物を生産手段として直接投入するか、あるいは、

部門 i で雇用される労働者が自部門の生産物を消費すること²⁾、を意味する。経済に賃金財生産部門が存在することを考慮すれば、後者の条件が自動的にみたされることは自明である。

これらの仮定がみたされれば、*Frobenius* の定理から³⁾、逆行列

$$(I - \tilde{A})^{-1} > 0$$

の存在がいえる。そして、任意の剰余生産物ベクトル $f \geq 0$ が与えられたとき、 f にちょうど等しい剰余生産物を生み出すような、非負の、産出量水準 x が、

$$x = (I - \tilde{A})^{-1}f$$

により、一意に、定まる。このとき、逆行列 $(I - \tilde{A})^{-1}$ の級数展開式を考えれば、

$$x = f + \tilde{A}f + \tilde{A}^2f + \tilde{A}^3f + \dots \quad (2.1)$$

すなわち、求められる産出量 x は、剰余生産物 f 自身、 f の生産のために直接に必要となる生産手段プラス必要消費 $\tilde{A}f$ 、 $\tilde{A}f$ の生産のために直接に必要となるそれら $\tilde{A}^2f$ 、等々、の総和のかたちであらわせる。このように、 x は、 f の生産のために直接・間接に必要となる生産手段プラス必要消費と、 f 自身との合計である。

(2) 価 格 体 系

視点を変えて、こんどは、価格の側面から、再生産過程をみてみよう。価格 (行) ベクトル p 、賃金率 w 、利潤率 r を、それぞれ、つぎのように定義する。

2) 厳密に言えば、ある部門 i においては、生産のために労働投入が不可欠であり、かつ、労働者は部門 i の生産物を消費すること。なお、このとき、 $\tilde{A}$ と A とが等しくなる可能性は排除されるので、 $\tilde{A} \geq A$ 。

3) *Frobenius* の定理については、二階堂 [6] 参照。なお、静学体系に関しては、また、動学体系についても産出量体系に関しては、仮定 3 は不要である。

1) *Sraffa* [16] 訳書 10-12 ページ参照。

$$\mathbf{p} = [p_i] \geq 0;$$

p_i = 商品 i の価格。

w = 労働力 1 単位あたりに支払われる賃金。

r = 生産物 1 単位あたりに投下された生産費にたいする収益率。

商品 j を 1 単位生産するためには、各 i について a_{ij} 単位の生産手段と、 a_{0j} 単位の労働とが必要である。そのためには、総計、

$$\sum_{i=1}^n p_i a_{ij} + w a_{0j}$$

に等しい額の生産費がかかる。このとき、産業 j の利潤は、生産物 1 単位あたり、

$$p_j - \left(\sum_{i=1}^n p_i a_{ij} + w a_{0j} \right)$$

となるが、競争の結果、生産費あたり全産業で同一の利潤率 r が成立するとすれば、上式は、

$$r \left(\sum_{i=1}^n p_i a_{ij} + w a_{0j} \right)$$

と値が等しいので、けっきょく、

$$\mathbf{p} = (1+r)(\mathbf{p}\mathbf{A} + w\mathbf{a}_0)$$

を得る。さらに、賃金率 w は、必要消費 $\mathbf{c}$ を購入するのにちょうど等しい金額だけ支払われると仮定すれば、

$$w = \mathbf{p}\mathbf{c}.$$

これを上式に代入して、

$$\mathbf{p} = (1+r)\mathbf{p}\tilde{\mathbf{A}}.$$

$\mu = (1+r)^{-1}$ とおけば、上式は、

$$\mu\mathbf{p} = \mathbf{p}\tilde{\mathbf{A}}; \mathbf{p} \geq 0, \mu \geq 0$$

なる非負固有値問題とみなすことができる。 $\tilde{\mathbf{A}}$ の分解不能性により、この非負固有値問題は、

$$\mu = \lambda(\tilde{\mathbf{A}}) > 0; \lambda(\tilde{\mathbf{A}}) \text{ は } \tilde{\mathbf{A}} \text{ の Frobenius}$$

根

以外に解をもたず、しかも、 $\lambda(\tilde{\mathbf{A}})$ に属する正固有ベクトルが存在し、任意の実固有ベクトルは定数倍を除いて一意であることがわかる⁴⁾。し

たがって、相対価格は一意に定まる。また、仮定 2 から、ふたたび *Frobenius* の定理を利用して、

$$0 < \lambda(\tilde{\mathbf{A}}) < 1$$

であることがわかるので、

$$r = \frac{1}{\lambda(\tilde{\mathbf{A}})} - 1$$

とあわせて、

$$r > 0.$$

ところで、価格方程式は

$$\mathbf{p} = \mathbf{p} \frac{\tilde{\mathbf{A}}}{\lambda(\tilde{\mathbf{A}})}$$

と書き換えることができる。ここで、 $\mathbf{p}$ を $\lambda(\tilde{\mathbf{A}})$ に属する正固有ベクトルではなく、任意の半正ベクトル $\mathbf{p}(1) \geq 0$ で置き換えてみよう。そうすると、価格 $\mathbf{p}(1)$ で評価された、必要消費を含む、生産手段の生産費に $1+r$ を乗じた価格 $\mathbf{p}(2)$ は

$$\mathbf{p}(2) = \mathbf{p}(1) \frac{\tilde{\mathbf{A}}}{\lambda(\tilde{\mathbf{A}})},$$

$\mathbf{p}(2)$ で評価された生産手段の生産費に $1+r$ を乗じた価格 $\mathbf{p}(3)$ は

$$\mathbf{p}(3) = \mathbf{p}(2) \frac{\tilde{\mathbf{A}}}{\lambda(\tilde{\mathbf{A}})} = \mathbf{p}(1) \left(\frac{\tilde{\mathbf{A}}}{\lambda(\tilde{\mathbf{A}})} \right)^2,$$

等々、となり、一般に、

$$\mathbf{p}(\nu) = \mathbf{p}(1) \left(\frac{\tilde{\mathbf{A}}}{\lambda(\tilde{\mathbf{A}})} \right)^{\nu-1} \quad (2.2)$$

のかたちであらわせる。このとき、仮定 3 から、定理 4 を適用して、 $\tilde{\mathbf{A}}$ は *primitive*、したがって、定理 5 により、 $\tilde{\mathbf{A}}$ は安定であることがわかるので、

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathbf{p}(\nu) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathbf{p}(1) \left(\frac{\tilde{\mathbf{A}}}{\lambda(\tilde{\mathbf{A}})} \right)^{\nu-1}$$

が存在し、しかも、定理 2 から、この極限は固有価格ベクトル $\mathbf{p}$ のスカラー一倍であることがわかる。したがって、初期価格ベクトル $\mathbf{p}(1) \geq 0$ がどのように与えられようとも、反復過程

4) 二階堂 [5] 136 ページ参照。

(2.2)をたどることにより、 $p(1)$ は、究極的には、生産費に規制された価格 $p > 0$ に、相対価格として、一致することになる。あるいは、ニューメレールとして、賃金単位

$$\frac{p}{w} = \frac{p}{pc}$$

をえらば、 $p(v)/w(v)$ は、極限において、 p/w に一致すると言い換えることができる。

〔3〕 価 値 体 系

上述の価格体系は、 p/w が、商品1単位で購入することのできる労働量であることから、再生産過程を支配労働の観点から位置づけたものとみなすことができる。再生産過程は、さらに、投下労働の側面からも特徴づけられよう。そのために、価値（行）ベクトル v を導入する。

$$v = [v_j];$$

v_j = 商品 j を1単位生産するために必要とされる、直接労働投入量、プラス、生産手段に投下された間接労働投入量。

商品 j を1単位生産するためには、生産手段として、各商品 i につき a_{ij} 単位が必要となり、商品 i には1単位あたり v_i に等しい価値が含まれている。一方、このとき必要とされる直接労働投入量は a_{0j} だから、けっきょく、商品 j は、1単位あたり、

$$v_j = \sum_{i=1}^n v_i a_{ij} + a_{0j}$$

に相当する価値をもつことになる。あるいは、行列表示すれば、

$$v = vA + a_0$$

である。ここで、

$$\tilde{A} \geq A \geq 0$$

に注意すれば、Frobenius の定理により、

$$\lambda(\tilde{A}) \geq \lambda(A).$$

一方、仮定2がみたされれば、

$$0 < \lambda(\tilde{A}) < 1$$

であるから、けっきょく、

$$0 \leq \lambda(A) < 1$$

となり、行列 $I - A$ は非負逆転可能。したがって、非負の価値ベクトル

$$v = a_0(I - A)^{-1} \geq 0^{(5)}$$

が、一意に、存在する。この式を級数展開して、

$$v = a_0 + a_0 A + a_0 A^2 + a_0 A^3 + \dots$$

を得る。 a_0 は商品1単位を生産するために直接投下される労働量、 $a_0 A$ はそのために必要な生産手段を生産するために直接投下される労働量、 $a_0 A^2$ は生産手段の生産手段を生産するために直接投下される労働量、等々、であるから、それらの総和である価値ベクトル v は、商品1単位のなかに直接・間接に含まれる投下労働量をあらわす。じっさい、

$$v_i = a_0(I - A)^{-1} e^i;$$

$e^i : R^n$ の標準的 (列) 基底

であるから、商品 i の価値は、当該商品1単位を純生産するような「小体系」の粗生産物 $(I - A)^{-1} e^i$ に投下された労働量をあらわす⁶⁾。

〔4〕 双 対 性

ところで、分解不能な非負行列 $\tilde{A}$ に関して、Frobenius の定理から、つぎに示す3つの条件は同値である。

- (I) $(\exists f \geq 0)(\exists x \geq 0)((I - \tilde{A})x = f)$ 。
- (II) $(\exists f > 0)(\exists x \geq 0)((I - \tilde{A})x = f)$ 。
- (III) $0 < \lambda(\tilde{A}) < 1$ 。

条件 (I) は、 $\tilde{A}$ が半生産的であるという仮定1にほかならない。条件 (II) は、 $\tilde{A}$ が生産的

5) かりに、 $v=0$ とすれば、

$$v = vA + a_0; \quad a_0 \geq 0$$

に矛盾。

6) 「小体系」については、Sraffa [16] 訳書146-147ページ参照。

であることを意味するが、これと同値な条件
(Ⅲ) から、さきに示したように、半正の価値
ベクトル $v \geq 0$ が存在することとあわせて、搾
取率 ω が正、すなわち、

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{vf}{vca_0x} \\ &= \frac{\text{資本家が入手する剰余生産物の価値}}{\text{労働者が受け取る生活資料の価値}} \\ &> 0\end{aligned}$$

であることに言い換えることができる⁷⁾。条件
(Ⅲ) は、さきに述べたように、利潤率 r が正
であるという条件に言い換えられる。したがっ
て、「マルクスの基本定理」

$$\text{搾取率 } \omega > 0 \Leftrightarrow \text{利潤率 } r > 0$$

がいえる⁸⁾。さらに、正の利潤率をもたす非負
の価格体系の解が存在すれば、(半)正の剰余生
産物を生み出し得る非負の産出量体系の解が存
在する、そして、この逆もまた成立する。すな
わち、価格体系

$$p = (1+r)p\tilde{A}, \quad p \geq 0, \quad r > 0$$

と、産出量体系

$$x = \tilde{A}x + f, \quad x \geq 0, \quad f \geq 0$$

との間には、いずれか一方が解をもてば、残り
の方も、かならず、解をもつといった意味で、
双対性が成り立つ。しかも、

$$pf = p(I-\tilde{A})x = rp\tilde{A}x,$$

すなわち、

$$\text{剰余生産物価額} = \text{利潤},$$

したがって、 $w = pc$ であることを考慮すれば、

$$pca_0x + pf = wa_0x + rp\tilde{A}x,$$

すなわち、

$$\text{必要消費価額} + \text{剰余生産物価額} = \text{賃金} + \text{利潤},$$

言い換えれば、

$$\text{生産国民所得} = \text{分配国民所得}$$

が成り立つ。なお、このとき、さきに示したよ
うに、価値体系

$$v = vA + a_0, \quad v \geq 0, \quad a_0 \geq 0$$

をみたす価値ベクトル v が存在して、

$$vca_0x + vf = v(I-A)x = a_0x,$$

すなわち、

7) 方程式体系

$$\tilde{v} = \tilde{v}\tilde{A} + a_0$$

をみたすベクトル $\tilde{v}$ を考えれば、 $\tilde{A}$ の分解不能性
により、 $\tilde{v} > 0$ 。上式は、

$$\tilde{v}(I-\tilde{A}) = (1+\tilde{v}c)a_0$$

と書き換えられるので、両辺に右から $(I-\tilde{A})^{-1}$ を
かけて、

$$\tilde{v} = (1+\tilde{v}c)v$$

を得る。したがって、一般に、

$$v = \frac{\tilde{v}}{1+\tilde{v}c} > 0$$

であるから、じつは、 $f \geq 0$ であっても

$$vf > 0$$

がいえる。同様に、 $c \geq 0$ から、

$$vc > 0$$

も示されるので、搾取率 ω の定義式にあらわれる分
母は意味をもつ。ベクトル $\tilde{v}$ は、生産手段の補填と
いう物的再生産の条件だけでなく、必要消費部分の
補填をあらわす労働力再生産の条件をも考慮した、
投下労働タームによる、生産物の評価方法と考えら
れるので、ベクトル $\tilde{v}$ を純価値ベクトルとよぼう。
この純価値体系は、定義から明らかに、産出量体系
と双対の関係にある。

8) $\omega > 0 \Rightarrow r > 0$ を示そう。まず、

$$\omega = \frac{vf}{vca_0x}$$

が定義されるわけだから、産出量体系

$$\tilde{A}x + f = x, \quad x \geq 0, \quad f \geq 0,$$

ならびに、価値体系

$$v\tilde{A} + a_0 = v, \quad v \geq 0, \quad a_0 \geq 0$$

の解 x, f 、ならびに、 v が存在する。一方、定義に
より、

$$\omega vca_0x = vf = v(I-A)x - vca_0x = (1 - vc)a_0x,$$

したがって、

$$(1 - (1+\omega)vc)a_0x = 0$$

である。ここで、かりに、 $a_0x = 0$ とすれば、 ω が定
義できなくなり矛盾。したがって、 $a_0x > 0$ 。同様
に、 $vc > 0$ 。そこで、上式を a_0x で割れば、

$$1 - vc = \omega vc$$

を得るので、

$$\omega > 0 \Leftrightarrow 1 - vc > 0.$$

そうすると、価値方程式から、 $\omega > 0$ ならば、

$$v(I-\tilde{A}) = (1-vc)a_0 \geq 0.$$

すなわち、行列 $I-\tilde{A}$ は非負逆転可能。したがっ
て、 $r > 0$ 。なお、上式から、 $\omega > 0$ のとき、すなわ
ち、 $1-vc > 0$ のとき、言い換えれば、 $I-\tilde{A}$ が非負
逆転可能なきときには、純価値ベクトル $\tilde{v} = a_0(I-\tilde{A})^{-1}$ は、価値ベクトル v を用いて、

$$\tilde{v} = \frac{v}{1-vc}$$

のかたちであらわせる。

必要消費価値+剰余生産物価値=投下労働量,
あるいは,

$$vAx + vca_0x + vf = vAx + a_0x,$$

すなわち, $v(I-A)x = a_0x$ に注意すれば,

生産手段の価値+必要消費価値+剰余生産物価値=生産手段に体化された「死んだ」労働+純生産物に体化された「生きた」労働

が成り立つ。

§3. 乗数過程と価格形成

[1] 乗数過程

前節では, 逆行列 $(I-\tilde{A})^{-1}$ の級数展開式を利用すれば, 最終需要 $f \geq 0$ が与えられたとき, 産出量 x は,

$$x = f + \tilde{A}f + \tilde{A}^2f + \tilde{A}^3f + \dots$$

のかたちであらわせることを示した。こんどは, 上式の各項を, 乗数効果の波及過程としてとらえ直してみよう。すなわち, はじめに, 最終需要 $f \geq 0$ が与えられたとき, 第1段階として, f 自身が生産されなければならない。つぎに, f を生産するためには, 生産手段として Af , 労働者の生活資料のかたちで ca_0f , あわせて $\tilde{A}f$ に相当する追加的な生産物が必要である。これが波及過程の第2段階である。さらに, 波及過程の第3段階においては, 第2段階における生産物 $\tilde{A}f$ を生産するために, 生産手段と必要消費が, あわせて, $\tilde{A}^2f$ 必要である。等々。このプロセスを順次たどれば, 第 t 段階における産出量 $x(t)$ は, この段階までの波及効果をすべてたしあわせたものになるので,

$$x(t) = \sum_{\nu=0}^{t-1} \tilde{A}^\nu f; A^0 = I$$

$$(t = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.1)$$

である。この式は, 差分方程式のかたちで,

$$x(t) = \tilde{A}x(t-1) + f; x(0) = 0 \quad (3.1')$$

と書き換えることができる。じっさい, (3.1) を代入すれば (3.1') をみたす¹⁾。逆に, 後者において代入をくり返すことにより前者が導かれる。波及効果 (3.1) は, $t \rightarrow \infty$ ならしめれば, 極限において,

$$x = (I - \tilde{A})^{-1}f > 0$$

に収束する。このことは, 仮定1ならびに仮定2を考慮すれば, Frobenius の定理から, ただちに従う。すなわち, 乗数過程 (3.1) は, 静学体系における解の存在条件がみたされれば, 収束し, しかも, 極限において, 静学体系の解 x と一致する。

同様に, 波及過程の段階 t における雇用量

$$L(t) = \sum_{\nu=0}^{t-1} a_0 \tilde{A}^\nu f,$$

あるいは,

$$L(t) = a_0 x(t)$$

を考えることができ, この値は, 極限において, 静学体系における雇用量

$$L = a_0 x$$

に一致することがわかる。なお,

$$\begin{aligned} L &= a_0 (I - \tilde{A})^{-1} f \\ &= \sum_{i=1}^n f_i a_0 (I - \tilde{A})^{-1} e^i \\ &= \sum_{i=1}^n f_i \sum_{\nu=0}^{\infty} a_0 \tilde{A}^\nu e^i \end{aligned}$$

1) じっさい

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{\nu=0}^{t-1} \tilde{A}^\nu f \\ &= \sum_{\nu=1}^{t-1} \tilde{A}^\nu f + f \\ &= \sum_{\nu=0}^{t-2} \tilde{A}^{\nu+1} f + f \\ &= \tilde{A} \sum_{\nu=0}^{t-2} \tilde{A}^\nu f + f \\ &= \tilde{A} x(t-1) + f. \end{aligned}$$

2) Sraffa 自身の語法に忠実にしたがえば, n 個の「小体系」の和。

であるから、雇用量 L は、 n 個の「小体系」における雇用の波及効果の極限値の非負 1 次結合²⁾のかたちでもあらわすことができる³⁾。

〔2〕 価 格 形 成

前節においては、任意の初期ベクトル $\mathbf{p}(1) \geq \mathbf{0}$ が与えられたときに、反復過程 (2.2) において $\nu \rightarrow \infty$ ならしめれば、 $\mathbf{p}(\nu)$ は、極限において、価格体系の解 $\mathbf{p}$ に、相対価格として、一致することが示された。しかしながら、反復過程 (2.2) において、斉一利潤率 r が天下りの与えられているのは非現実的であり、また、Frobenius ベクトル $\mathbf{p}$ を求めるために Frobenius 根 $\lambda(\tilde{\mathbf{A}})$ に規定される r を前もって知っておく必要があるのは、解 $\mathbf{p}$ を求めるために解 r を利用することになり、首尾一貫しない。そこで、こんどは、乗数過程との関連に注目して、反復過程 (2.2) を改訂したうえで、価格形成プロセスを考えてみよう。

いま、乗数効果の波及過程の第 $t-1$ 段階において、価格 $\mathbf{p}(t-1)$ が与えられたとする。このとき、第 j 産業の利潤 $\pi_j(t-1)$ は、

$$\begin{aligned}\pi_j(t-1) &= p_j(t-1)x_j(t-1) - \sum_{i=1}^n p_i(t-1)\tilde{a}_{ij}x_j(t-1) \\ &= x_j(t-1)\mathbf{p}(t-1)(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})\mathbf{e}^j\end{aligned}$$

となり、個別利潤率

$$\begin{aligned}r_j(t-1) &= \frac{\pi_j(t-1)}{x_j(t-1)\mathbf{p}(t-1)\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{e}^j} \\ &= \frac{\mathbf{p}(t-1)(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})\mathbf{e}^j}{\mathbf{p}(t-1)\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{e}^j}\end{aligned}$$

は、一般に、産業ごとに異なった値をとる。そこで、産業間の競争の結果、一方で、平均利潤率 $r(t-1)$ より低い利潤率をもつ産業の生産物

の価格は上がり、他方で、それより高い利潤率を生む産業の生産物価格は下がることにより、第 t 段階においては、価格 $\mathbf{p}(t-1)$ で評価して、すべての産業で同一の平均利潤率が成立するように価格 $\mathbf{p}(t)$ が定められるとする⁴⁾。すなわち、

$$\mathbf{p}(t) = (1 + r(t-1))\mathbf{p}(t-1)\tilde{\mathbf{A}}; \quad (3.2)$$

$$r(t-1) = \frac{\mathbf{p}(t-1)(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})\mathbf{x}(t-1)}{\mathbf{p}(t-1)\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}(t-1)}$$

とする⁵⁾。そうすると、

$$\begin{aligned}p_j(t) - p_j(t-1) &= (1 + r(t-1))\mathbf{p}(t-1)\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{e}^j - \mathbf{p}(t-1)\mathbf{e}^j \\ &= (1 + r(t-1))\mathbf{p}(t-1)\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{e}^j \\ &\quad - (1 + r_j(t-1))\mathbf{p}(t-1)\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{e}^j\end{aligned}$$

- 4) 「諸商品の市場価格が、ある期間にわたって、ひきつづきその自然価格をはるかに上まわるか、はるかに下まわることを妨げるものは、自分の資金をより不利な用途からより有利な用途へ転じようとする、各資本のもつ欲求である。この競争こそは、諸商品の生産に必要な労働にたいする賃金、および使用される資本をその本来の能率状態におくのに要する他のすべての経費を払った後に残る価値、すなわち利潤が、各事業において、使用された資本の価値に比例するように、諸商品の交換価値を調整するところのものである。」(Ricardo[9] 訳書107ページ)
- 5) (3.2) は、「置塩の転形手続き」と基本的には同一である。唯一異なるのは、(3.2) においては、産出量 $\mathbf{x}(t)$ が乗数過程の進行に応じて変わってゆくのにたいして、置塩の式

$$\mathbf{p}(t) = \frac{\mathbf{p}(t-1)\mathbf{x}}{\mathbf{p}(t-1)\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}}\mathbf{p}(t-1)\tilde{\mathbf{A}}$$

においては、分析の目的が、価値ベクトルの反復解として価格ベクトルを導出することにあつたので、産出量 $\mathbf{x}$ は不変とされている点である。置塩 [8] 212-216ページ、ならびに、Morishima and Catephores [2] p. 166 参照。なお、価値ベクトル $\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$ から出発すると、(3.2) は、たしかに、価格ベクトル $\mathbf{p} > \mathbf{0}$ に、相対価格として、収束するので、価値から価格への転形は可能である。しかし、塩沢が指摘したように、初期ベクトル $\mathbf{p}(1) \geq \mathbf{0}$ は、価値でなくとも、任意の半正ベクトルであってもよいわけであるから、出発点として価値ベクトルをとる必然性は、まったくない。塩沢 [13] 48-49ページ、ならびに、同 [14] 242-243ページ参照。とはいえ、価値ベクトル $\mathbf{v}$ 、ならびに、価格ベクトル $\mathbf{p}$ は、それぞれ、投入行列 $\mathbf{A}$ 、あるいは、増補投入行列 $\tilde{\mathbf{A}}$ に規定されているわけだから、両行列がもつ性質から、相互に、密接に、関連しあっているわけではあるが、

3) このように、「小体系」は、もとの体系の基底となる性質をもっている。

$$= (r(t-1) - r_j(t-1))p(t-1)\tilde{A}e^j$$

だから、

$$p_j(t) \geq p_j(t-1) \Leftrightarrow r(t-1) \geq r_j(t-1)$$

となり、たしかに、平均利潤率を下まわる利潤率しか生まない産業の商品価格は上がり、それより大きい利潤率を生み出す産業の商品価格は下がることになる。そこで、(3.2) を賃金単位表示に直せば、

$$p_w(t) = \frac{p(t)}{w(t)} = \frac{p(t)}{p(t)c} = \frac{p_w(t-1)\tilde{A}}{p_w(t-1)\tilde{A}c} \quad (3.2')$$

上式は、任意の初期値 $p_w(1) \geq 0$ から出発して、段階 t においては、値

$$p_w(t) = \frac{p_w(1)\tilde{A}^{t-1}}{p_w(1)\tilde{A}^{t-1}c}$$

をとる。分子・分母を $\lambda(\tilde{A})^{t-1}$ で割り、 $t \rightarrow \infty$ ならしめれば、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} p_w(t) &= \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} p_w(1) \left(\frac{\tilde{A}}{\lambda(\tilde{A})} \right)^{t-1}}{\left(\lim_{t \rightarrow \infty} p_w(1) \left(\frac{\tilde{A}}{\lambda(\tilde{A})} \right)^{t-1} \right) c} \\ &= \frac{p}{pc} \end{aligned}$$

が存在する。ただし、ベクトル p は $\lambda(\tilde{A})$ に属する正固有ベクトルであり、スカラー倍を除いて一意。したがって、 $p_w(t)$ の極限ベクトル p/pc は、賃金単位であらわした、価格体系の解 p_w に一致することがわかる。

それでは、平均利潤率 $r(t)$ は、極限において、価格体系の解 p をもたらす利潤率 r に一致するであろうか。ここでも答は肯定的である。じっさい、

$$\rho(t) = \frac{1}{1+r(t)} = \frac{p(t)\tilde{A}x(t)}{p(t)x(t)}$$

とおけば、(3.2) により、

$$\rho(t) = \frac{p(1)\tilde{A}^t x(t)}{p(1)\tilde{A}^{t-1} x(t)}$$

したがって、行列 A の安定性、ならびに、点列

$\{x(t)\}$ の収束性から、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) &= \lambda(\tilde{A}) \\ &\times \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} p(1) \left(\frac{\tilde{A}}{\lambda(\tilde{A})} \right)^t \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)}{\lim_{t \rightarrow \infty} p(1) \left(\frac{\tilde{A}}{\lambda(\tilde{A})} \right)^{t-1} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)} = \lambda(\tilde{A}). \end{aligned}$$

それゆえ、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho(t)} - 1 = \frac{1}{\lambda(\tilde{A})} - 1 = r,$$

すなわち、 $r(t)$ は、極限において、解 r に一致する⁶⁾。

このように、Leontief-Sraffa 体系においては、どれほどデタラメな価格 $p(1) \geq 0$ が初期値として与えられようとも、産業間の競争にもとづく、平均利潤率の形成をとまなう、価格修正プロセス (3.2) を、乗数過程の進行と歩調をあわせつつ、たどることにより、究極的には、価格体系の解 p ならびに r へと到達するわけである。すなわち、「生産費こそはすべての市場価格がそれをめぐって動く軸心」なのである⁷⁾。

[3] 動学的双対問題

前節では、(半)正の剰余生産物を生み出す産出量体系

$$x = \tilde{A}x + f, \quad x \geq 0, \quad f \geq 0$$

の存在と、正の斉一利潤率をとまなう価格体系

$$p = (1+r)p\tilde{A}, \quad p \geq 0, \quad r > 0$$

の存在とは同値であり、さらに、

$$pf = rp\tilde{A}x$$

が成り立つことが示された。そこで、そんでは、この静学的な命題が、動学的な文脈においても、依然として、成立することを示そう。

以下の議論を通じて、行列 $\tilde{A}$ は仮定 1, 3 を

6) この結果は、証明から明らかに、任意の収束列 $\{x(t)\}$ にたいして成り立つ。

7) Ricardo [10] 訳書31ページ。

みたすとする。したがって $\tilde{A}$ は安定な行列である。乗数過程

$$\mathbf{x}(t) = \tilde{A}\mathbf{x}(t-1) + \mathbf{f},$$

あるいは,

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{\nu=0}^{t-1} \tilde{A}^{\nu} \mathbf{f}$$

において、産出量ベクトル $\mathbf{x}(t)$ が収束するための必要十分条件は、Frobenius の定理から、

$$0 < \lambda(\tilde{A}) < 1$$

である。このとき、 $\mathbf{x}(t)$ は、 $t \rightarrow \infty$ ならしめれば、産出量体系の静学解 $\mathbf{x} > 0$ に収束する。一方、仮定された安定性から、価格形成過程

$$\mathbf{p}(t) = (1+r(t-1))\mathbf{p}(t-1)\tilde{A};$$

$$r(t-1) = \frac{\mathbf{p}(t-1)(I-\tilde{A})\mathbf{x}(t-1)}{\mathbf{p}(t-1)\tilde{A}\mathbf{x}(t-1)}$$

において、価格ベクトル $\mathbf{p}_w(t)$ は、価格体系の静学解 $\mathbf{p}_w > 0$ に収束する。しかしながら、さきに示したように、利潤率 $r(t)$ の静学解 r への収束のための十分条件は、乗数過程 $\mathbf{x}(t)$ の収束であり、さらに、解 r が正であるための必要十分条件は、

$$0 < \lambda(\tilde{A}) < 1$$

である。以上述べたことを総合すれば、乗数過程 $\mathbf{x}(t)$ が産出量体系の静学解 $\mathbf{x} > 0$ に収束するための必要十分条件と、価格形成過程 $\mathbf{p}(t)$ が価格体系の静学解 $\mathbf{p} > 0$ に収束し、かつ、そのときの平均利潤率 $r(t)$ が体系の静学解 $r > 0$ に収束するための必要十分条件とは、たがいに等しく、この条件は

$$0 < \lambda(\tilde{A}) < 1$$

のかたちに言い換えられる。しかも、この条件がみたされるとき、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}_w(t)\mathbf{f} = \mathbf{p}_w\mathbf{f} = r\mathbf{p}_w\tilde{A}\mathbf{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} r(t)\mathbf{p}_w(t)\tilde{A}\mathbf{x}(t)$$

が成り立つ。

おわりに

本稿においては、冒頭に引用した *Ricardo* の命題、端的に言えば、需要がいかなる水準に与えられようとも、価格は、競争的作用により、究極的には、「自然価格」に収束するであろうという命題が、「安定な行列」の性質から、じっさいに成立することを、Leontief-Sraffa 体系を利用して、証明した。証明の要点をくり返そう。*Ricardo* によれば、

「商品は、これを生産して市場へもたらすのに始めから終りまで投ぜられたすべての支出を、その価格で償うときに、自然価値にあるのである。」¹⁾

すなわち、*Ricardo* のいう「自然価格」ないし「自然価値」とは、商品の価格が、ちょうど、利潤部分を含めたその生産費に過不足なく等しい水準にあるときの価格、言い換えれば、方程式体系

$$\mathbf{p} = (1+r)\mathbf{p}\tilde{A}; \mathbf{p} \geq 0, r > 0$$

を満足するような非負ベクトル $\mathbf{p}$ を意味する。このようなベクトル $\mathbf{p}$ は、明らかに、行列 $\tilde{A}$ の Frobenius ベクトルであるが、 $\tilde{A}$ が分解不能のときには、正の利潤率をとまなう正価格解の存在条件は、

$$0 < \lambda(\tilde{A}) < 1$$

である。この条件は、産出量体系

$$\mathbf{x} = \tilde{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}, \mathbf{x} \geq 0, \mathbf{f} \geq 0$$

の解 $\mathbf{x} > 0$ の存在条件と同一であった。したがって、産出量体系が生産的でありさえすれば、「自然価格」の存在もいえる。そこで、つぎに問題となるのは、任意に与えられた、かならず

1) *Ricardo* [10] 訳書46ページ参照。

しも「自然価格」に一致しない、価格ベクトル $p(1) \geq 0$ が、産業間の競争の結果、利潤率の均等化傾向の進行とともに、逐次、改訂されてゆき、突極的には、「自然価格」 $p > 0$ に収束するか否かということである。この問いにたいする答えも肯定的であり、けっきょく、Ricardo の命題の妥当性が示される。というのも、行列 $\tilde{A}$ は、その構成要素として、賃金財生産部門を含むから、その対角要素に、少なくとも1つ、正のものをもつ。したがって、 $\tilde{A}$ は「安定な行列」であることがわかるから、価格 $p(t)$ が、乗数過程

$$x(t) = \tilde{A}x(t-1) + f; x(0) = 0$$

の進行に応じて、均等利潤率をもたらすように、

$$p(t) = (1+r(t-1))p(t-1)\tilde{A};$$

$$r(t-1) = \frac{p(t-1)(I-\tilde{A})x(t-1)}{p(t-1)\tilde{A}x(t-1)}$$

と改訂されてゆくときには、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_w(t) = p_w,$$

ならびに

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = r$$

が成立するからである。すなわち、賃金単位ではかれは、 $t \rightarrow \infty$ ならしめたとき、価格 $p_w(t)$ は「自然価格」 $p_w > 0$ に収束し、同時に、利潤率 $r(t)$ は、究極的には、静学解 $r > 0$ に一致する。また、上記の乗数過程の収束条件は、静学解の存在条件と、まったく、同じであるから、行列 $\tilde{A}$ が生産的かつ「安定」でありさえすれば、産出量体系ならびに価格体系の静学解、したがって、とくに、「自然価格」は存在し、しかも、このとき、乗数過程は収束する。そして、どのような価格 $p(1) \geq 0$ が初期ベクトルとして与えられようとも、乗数過程の進行に応じて、競争により、利潤率を均等化するように価格改訂がおこなわれてゆく結果、価格は、究極的には、「自然価格」に「落ちつく」ことになる。

以上のことから、行列 $\tilde{A}$ が分解不能なケースに関しては、つぎにあげる2つの条件

(i) $\tilde{A}$ は「安定」である、

(ii) $\tilde{A}$ は生産的である、

をみたすときに、「自然価格」の存在、ならびに、任意の価格ベクトルの「自然価格」への収束が示された。すでに検討したように、条件 (i), (ii) の成立は、経済学的にみて、自明であるのにたいして、 $\tilde{A}$ の分解不能性は、いっけん、厳しすぎるようにおもわれるかもしれない。しかしながら、たとえ、行列 $\tilde{A}$ が分解可能であって、

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}; \tilde{A}_{11} \text{ は分解不能}$$

のようなかたちをしていたとしても、条件

(iii) $\lambda(\tilde{A}_{11}) > \lambda(\tilde{A}_{22})$

がみたされるかぎり、分解不能行列 $\tilde{A}_{11}$ が条件

(i) ならびに (ii) を満足するときには、依然として、「自然価格」の存在、および、任意の価格ベクトルの「自然価格」への収束性は示されるのである。それゆえ、分解可能なケースも分解不能なそれに帰着する。ところで、行列 $\tilde{A}_{11}$ を構成する任意の産業の生産物は、行列 $\tilde{A}_{12}$ を通じて、行列 $\tilde{A}_{22}$ に属する産業への投入物となるのにたいして、後者に属するいかなる産業の生産物も、前者の産業には、投入財として、まったく、必要とされないので、Sraffa にならって²⁾、前者のグループに属する産業を「基礎的産業」、その生産物を「基礎的生産物」あるいは「基礎財」とよび、後者のそれらを、それぞれ、「非基礎的産業」、および、「非基礎的生産物」ないし「非基礎財」、と名づければ、条件 (iii) の経済的意味は、つぎのようになる。すなわち、「非

2) Sraffa [16] 訳書10-14ページ参照。

基礎的」グループが自グループ内において生み出さる自己利潤率が、「基礎的」グループのそれより大きいという条件である。もし、そうでなければ、わざわざ、全体の利潤率を引き下げようとするような、「非基礎的生産物」を生産する誘因は生じなかったであろうし、また、それは、経済にとって必要不可欠な生産物でもないわけだから、そもそも、存在しなかったであろう。条件 (iii) が満たされるときには、条件 (i), (ii) は、それぞれ、よりゆるい条件

(i') $\tilde{A}_{11}$ は「安定」である、

あるいは、

(ii') $\tilde{A}_{11}$ は生産的である、

という条件に置き換えることができる。したがって、分解不能な体系である「基礎財」体系の性質だけから、「非基礎的」グループも含めた、体系全体における解の存在条件、ならびに、任意の価格ベクトルの静学解—すなわち「自然価格」—への収束条件は規定されるわけである。それに応じて、利潤率も「基礎的」グループ内部において定まる。また「非基礎財」価格は「基礎財」価格に依存するのにたいして、後者は前者から独立であることも示される³⁾。じっさい、「基礎財」ならびに「非基礎財」価格ベクトルを、それぞれ、 p^I 、あるいは、 p^H であらわせば、行列 $\tilde{A}$ の構成から、ただちに、

$$p^I = (1+r)p^I \tilde{A}_{11},$$

$$p^H = (1+r)(p^I \tilde{A}_{12} + p^H \tilde{A}_{22})$$

が成り立つ。したがって、条件 (iii) が満たさ

れるときには、うえの1番目の式から明らかにように、「基礎財」価格 p^I は、「基礎財」体系のみから構成される行列 $\tilde{A}_{11}$ の *Frobenius* ベクトルであり、また、利潤率 r は、行列 $\tilde{A}_{11}$ の *Frobenius* 根 $\lambda(\tilde{A}_{11}) > 0$ を用いて、

$$r = \frac{1}{\lambda(\tilde{A}_{11})} - 1$$

のかたちにあらわすことができる。この式から、*Frobenius* の定理により、条件 (ii') が満たされるとき、かつ、そのときにかぎり、利潤率は正の値をとることがわかる。このように利潤率ならびに「基礎財」価格の決定は、もっぱら、「基礎財」体系内部でおこなわれ、いかなる「非基礎的生産物」も、その決定に、関与する余地はない。これにたいして、さきに示した2番目の式から、

$$p^H = (1+r)p^I \tilde{A}_{12}(I - (1+r)\tilde{A}_{22})^{-1}$$

を得るので、「非基礎財」価格は、「基礎財」価格に一方的に依存することがわかる。これらの推論の詳細に関しては別稿にゆずりたい⁴⁾。

参考文献

- [1] Gale, D., *The Theory of Linear Economic Models*, McGraw-Hill, 1960; 和田貞夫, 山谷恵俊訳『線型経済学』紀伊国屋書店, 1964年。
- [2] Morishima, M., and G. Catephores, *Value, Exploitation and Growth—Marx in the Light of Modern Economic Theory—*, McGraw-Hill, 1978; 高須賀義博, 池尾和人訳『価値・搾取・成長—現代の経済理論からみたマルクス—』創文社, 1980年。
- [3] Nagata, S., “Effective Demand and Prices—Variations on a Theme by Sraffa—”, 九州大学『経済論究』第62号, 1985年。
- [4] Nagata, S., “Role of Demand in Leontief-Sraffa System—Focusing Attention on the Duality between Quantity System and Value System

3) Sraffa を引用すれば、

「非基礎的生産物の価格はその生産手段の価格に依存するけれども、生産手段の価格は非基礎的生産物の価格に依存しない。ところが、基礎的生産物のばあいには、生産物の価格がその生産手段の価格に依存すると同じように、生産手段の価格も基礎的生産物の価格に依存する。」

(Sraffa [16] 訳書13ページ)

4) 永田聖二「Leontief-Sraffa 体系における非基礎的生産物—「自然価格」の存在とその収束性—」(草稿) 参照。

- 一”，九州大学『経済論究』第64号，1986年。
- [5] 二階堂副包『現代経済学の数学的方法—位相数学による分析入門—』岩波書店，1960年。
- [6] 二階堂副包『経済のための線型数学』培風館，1961年。
- [7] Nikaido, H., *Convex Structures and Economic Theory*, Academic Press, 1968.
- [8] 置塩信雄『マルクス経済学—価値と価格の理論—』筑摩書房，1977年。
- [9] Ricardo, D., *On the Principles of Political Economy and Taxation*, John Murray, 1817；堀経夫訳『経済学および課税の原理』（『リカード全集』第1巻）雄松堂，1972年。
- [10] Ricardo, D., *Notes on Malthus's Principles of Political Economy*, Cambridge U. P., 1951；鈴木鴻一郎訳『マルサス経済学原理評注』（『リカード全集』第2巻）雄松堂，1971年。
- [11] 塩沢由典「行列の反復と漸近収束」『BASIC 数学』1978年11月号。
- [12] 塩沢由典「安定行列二題」『BASIC 数学』1978年12月号。
- [13] 塩沢由典「転形手続きの数学的構造」『BASIC 数学』1979年1月号。
- [14] 塩沢由典『近代経済学の反省』日本経済新聞社，1983年。
- [15] Solow, R. M., “On the Structure of Linear Models”, *Econometrica*, 1952.
- [16] Sraffa, P., *Production of Commodities by Means of Commodities—Prelude to a Critique of Economic Theory—*, Cambridge U. P., 1960；菱山泉，山下博訳『商品による商品の生産—経済理論批判序説—』有斐閣，1962年。
- [17] 杉浦光夫『解析入門Ⅰ』東京大学出版会，1980年。

付記。本稿の作成にあたっては、「日本学術振興会」，ならびに，「文部省科学研究費補助金」（昭和62年度奨励研究（A））からの援助を受けた。ここに記して感謝する。