種々の需要形態に関する確率的在庫モデル

児玉, 正憲

https://doi.org/10.15017/4479069

出版情報：經濟學研究. 51 (5), pp.35-44, 1986-06-10. 九州大学経済学会
バージョン：
権利関係：

種々の需要形態に関する確率的在庫モデル

児　玉　正　憲

製品や材料などに関する在庫管理問題は発注あるいは生産関連費用と，材料あるいは製品の在庫のための諸費用，ならびに在庫不足によって生じる諸損失をいかに均衡させるか，あるいはそれらの総コストをいかに最小にするかの問題に帰着する。このとき，さらに問題となるのは，それらに含まれる諸変数のすべてが確定的ではなく，そのいくつかが確率的に変化することである。

かつては上記諸変数とその変化を含む諸種の決定がそれに関与する担当者の経験と直感に左右されていた。しかし現在では現場のデータの整備，情報処理技術やＯＲ技法の発展によって多くのモデルが研究・作成され，状況に応じてその１つを選択活用することが可能となってきた。

本小論では発注点と発注量を同時に決める購入・販売在庫モデルに関し，多くの需要形態を含む統合モデルについて考察し多くのモデルがもっと単純な特定モデルに変換できること，したがってその最適解を求めることで他の複雑な需要形態のモデルの解析を行なうことなしにその最適解に達しうることを示す。

1.　単純な特定モデル

単純な特定モデルの代表として，発注量は発注間隔の期首に即時的にみたされ，需要はすべて期首に即時に払いだされる場合の購入・販売在庫モデルを取りあげる。確率的に変化するのは需要量だけである。この場合決定する変数は発注水準（したがって各期一定の期首在庫量）および発注間隔（各期一定）である。まず，

B：発注間隔 t の間の需要量を表わす確率変数

$\phi(b, t)$：B が連続的確率変数の場合は確率密度関数，$P(B\leqq x)=\int_0^x \phi(b,t)db$，$B$ が離散的確率変数の場合は確率関数，$P(B=x)=\phi(x, t)$，b は B の実現値。

x：前期からの繰越し在庫量

y：発注量（仮定によって期首に入荷）

z：期首在庫量

とおく。仮定によって

$z=x+y$

ここでは発注間隔 t は離散的で，ある単位の間隔（例えば１時間，１日，１週間，……）の t 倍を表わすものとする。したがってとりうる値は1，2，3，……とする。$t=1$ の場合の $\phi(b, t)$ を $\phi(b)$ で表わす，すなわち $\phi(b)=\phi(b,1)$。ここでは，各単位の時間間隔の需要量は互いに独立で，同じ密度関数 $\phi(b)$ をもつものと仮定しよう。このとき $\phi(b, 1)$，$\phi(b, 2)$，……$\phi(b, t)$ の間につぎの関係が成り立つ。

$$\phi(b,t)=\int_0^b \phi(b-x,t-1)\phi(x,1)dx \qquad (1.1)$$

これを $\phi(b, t\text{-}1)$ と $\phi(b, 1)$ の合成積（convolution）といい

$$\phi(b,t)=\phi(b,t-1)*\phi(b,1) \qquad (1.2)$$

で表わす。

B が離散的確率変数の場合は

$$\phi(b,t)=\sum_{x=0}^{b}\phi(b-x,t-1)\phi(x,1) \qquad (1.3)$$

となる。

以下，需要量 B が連続的と仮定できる場合とそうでない場合に分けて考察する。解析に当って最初は発注間隔 t は任意に与えられているものとする。

1.1. 需要量が連続的な場合

需要量 B は仮定によって確定的でない。このため在庫量 z が B の実現値 b より大かどうかは確率的であり，その大小に応じて在庫状態は図1に示すように正か負のいずれかになる。

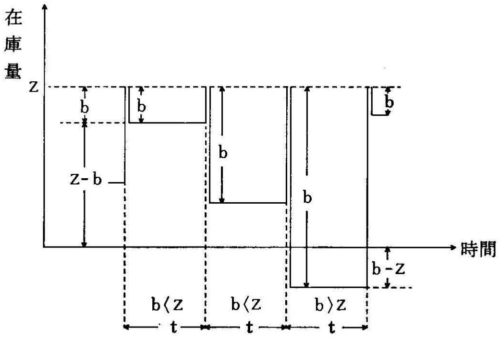

図1　突発需要在庫モデルの在庫状態

需要量が b のときの在庫量および在庫不足量をそれぞれ $I_1(b)$, $I_2(b)$ で表わすと，図1よりつぎのようになる。

$$I_1(b)=\begin{cases} z-b & b<z \text{ の場合} \\ 0 & b\geqq z \text{ の場合}\end{cases} \qquad (1.4)$$

$$I_2(b)=\begin{cases} 0 & b<z \text{ の場合} \\ b-z & b\geqq z \text{ の場合}\end{cases} \qquad (1.5)$$

ところが需要量 B は確率変数であるので期待在庫量 I_1, 期待在庫不足量 I_2 はつぎのようになる。

$$I_1=E(I_1(B))=\int_0^\infty I_1(b)\phi(b,t)db$$
$$=\int_0^z (z-b)\phi(b,t)db \qquad (1.6)$$

$$I_2=E(I_2(B))=\int_0^\infty I_2(b)\phi(b,t)db$$
$$=\int_z^\infty (b-z)\phi(b,t)db \qquad (1.7)$$

また，諸コストを

h：在庫維持コスト（単位時間，単位当り）

p：品切れコスト（単位時間，単位当り）

c：発注経費（1回当り）

とすると，期待総費用を E $\{C(z,B)\}$ とすればそれは

$$E\{C(z,B)\}=hI_1+pI_2+\frac{c}{t}$$
$$=h\int_0^z (z-b)\phi(b,t)db+$$
$$p\int_z^\infty (b-z)\phi(b,t)db+\frac{c}{t} \qquad (1.8)$$

E $\{C(z, B)\}$ を最小にするzの値は (1.8) 式の z に関する第1次微分を0とおくことによって求めることができる。結果を整理すれば，つぎのようになる。

$$\int_0^{z_0}\phi(b,t)db=\frac{p}{p+h}\equiv q \qquad (1.9)$$

q は臨界比といわれる。なお z_0 は z の最適値の意味である。

したがって，最適発注政策は繰越し在庫量 x が与えられたとき，$B\leqq z_0$ となる確率が q となるような z_0 に関し

$$\left.\begin{matrix} z_0>x \\ z_0\leqq x\end{matrix}\right\}\text{ならば発注量}=\begin{cases} z_0-x \\ 0\end{cases} \qquad (1.10)$$

となる。z_0 の値が E $\{C(z, B)\}$ を最小にする最適値を与える事は $\dfrac{d^2E\{C(z,B)\}}{dz^2}=(h+p)\phi(z,t)\geqq 0$ より明らかである。

1.2. 需要量が離散的な場合

需要量が離散的であるから期待総コスト $E\{C(z, B)\}$ はさきの (1.8) 式に代って

$$E\{C(z,B)\}=h\sum_{b=0}^{\infty}I_1(b)\phi(b,t)+p\sum_{b=0}^{\infty}I_2(b)\phi(b,t)+\frac{c}{t}$$

$$=h\sum_{b=0}^{z}(z-b)\phi(b,t)+p\sum_{b=z+1}^{\infty}(b-z)\cdot\phi(b,t)+\frac{c}{t} \qquad (1.11)$$

と表わされる。このときの期待総コスト最小化の条件は

$$E\{C(z,B)\}\leqq E\{C(z-1,B)\} \qquad (1.12)$$

$$E\{C(z,B)\}\leqq E\{C(z+1,B)\} \qquad (1.13)$$

であり，問題はこれをみたす z を求めることに帰着する。

ところが (1.11) 式から容易に

$$E\{C(z-1,B)\}-E\{C(z,B)\}=p-(h+p)\cdot P\{B\leqq z-1\} \qquad (1.14)$$

を求めることができる。したがって (1.12) 式の条件は

$$P\{B\leqq z-1\}\leqq\frac{p}{p+h}\equiv q \qquad (1.15)$$

と書き代えてよい。全く同じようにして (1.13) 式の条件は

$$P\{B\leqq z\}=\frac{p}{p+h}\equiv q \qquad (1.16)$$

と書くことができる。したがって z の最適値 z_0 は

$$P\{B\leqq z_0-1\}\leqq\frac{p}{p+h}\leqq P\{B\leqq z_0\} \qquad (1.17)$$

をみたさなければならない。(1.17) をみたす z_0 が $E\{C(z, B)\}$ を最小にする最適値を与えることは $\{E\,C(z, B)\}$ の二次差分 $E\{C(z, B)\}-2E\{C(z-1, B)\}+E\{C(z-2, B)\}\geqq 0$ より明らかである。

1.1および1.2節の議論で t は任意に与えられているものとした。最適発注間隔 t_0 を求めることを考えよう。

(1.9) 式および (1.14) 式をみたす z_0 は任意に与えられた t の関数 $z_0(t)$ である。

この $z_0(t)$ を (1.8) 式および (1.11) 式に代入した値を $C_0(t)$ で表わすと最適発注間隔 t_0 は $C_0(t)$ を最小にする t の値として求まる。したがって最適発注間隔および最適発注水準は t_0 および $z_0(t_0)$ として与えられる。ここの議論は2節で詳細に述べる。

2. 需要形態の一般的モデル

1節における需要形態は突発需要で，それが期首に発生する例になっている。また期を通じて一様に発生する場合もよくみる例である。そこでこれらを特殊な場合として含む一般的かつ総合的需要形態を表わすモデルとして

$$Q(T)=z-g(b,T/t) \qquad (2.1)$$

を用いることにする。ここに

$Q(T)$：時点 $T(\leqq t)$ における在庫量（ただし T は発注時点からはかるものとする）

z：期首在庫量

t：発注間隔

B：期間 t における需要量を表わす確率変数，B の実現値を b で表わす。

$g(b, x)$：$g(b, 0)=0$，$g(0, x)=0$，$g(b, 1)=b$，$\frac{\partial g}{\partial x}>0$，$\frac{\partial g}{\partial b}>0$ なる b, x の関数 $(0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq b<\infty)$

そこでわれわれの目的は $g(b, x)$ を需要形態を表わす統一モデルとして使用し，そのときの最適化条件を求め，1のモデルとの同値問題について考察することにある。もちろん，この点を除き他の仮定や記号は1の場合と全く同じとする。以下，需要量が連続的な場合と離散的な

場合に分けて考察しよう。

2.1. 需要量が連続的な場合

需要量 B が連続的であるから，在庫の状態は図2に示される。需要量が b のときの期（発注間隔当りの）平均在庫量 ($I_1(b)$)，期平均在庫不足量 ($I_2(b)$) を求めよう。T 時点の在庫量は (2.1) 式で表わされるから，$b \leqq z$, $b > z$ の各々の場合について（図2参照），$I_1(b)$, $I_2(b)$ はそれぞれ以下のようになる。

i　$b \leqq z$ の場合

$$I_1(b) = \frac{1}{t}\int_0^t [z - g(b, T/t)]dT = \frac{1}{t}[zt - t\int_0^1 g(b, y)dy] = z - G(b, 1) \quad (2.2)$$

（∵変数変換：$y = T/t$）

ここに

$$G(b, x) \equiv \int_0^x g(b, y)dy \quad (2.3)$$

$$I_2(b) = 0 \quad (2.4)$$

ii　$b > z \geqq 0$ の場合

$$I_1(b) = \frac{1}{t}\int_0^{t_1} [z - g(b, T/t)]dT = \frac{1}{t}[zt_1 - t\int_0^{t_1/t} g(b, y)dy] = z\left(\frac{t_1}{t}\right) - G(b, t_1/t) \quad (2.5)$$

ところが図2から t_1 時点では

$$Q(t_1) = z - g(b, t_1/t) = 0 \quad (2.6)$$

が成り立つ。$g(b, y)$ は y の単調増加関数であるから (2.6) 式を t_1/t について解いて

$$t_1/t = g^{-1}(b, z) \quad (2.7)$$

とおく。(2.7) 式を (2.5) 式に代入して

$$I_2(b) = zg^{-1}(b, z) - G(b, g^{-1}(b, z)) \quad (2.8)$$

また，$I_2(b)$ についても (2.7) 式を用いて

$$\begin{aligned} I_2(b) &= \frac{1}{t}\int_{t_1}^t [g^{-1}(b, T/t) - z]dT \\ &= \int_{t_1/t}^1 [g(b, y) - z]dy \\ &= [G(b, 1) - G(b, t_1/t)] - z(1 - t_1/t) \\ &= G(b, 1) - G(b, g^{-1}(b, z)) - z(1 - g^{-1}(b, z)) \end{aligned} \quad (2.9)$$

以上まとめると

$$I_1(b) = \begin{cases} z - G(b, 1) & b \leqq z \text{ の場合} \\ zg^{-1}(b, z) - G(b, g^{-1}(b, z)) & b > z \geqq 0 \text{ の場合} \end{cases} \quad (2.10)$$

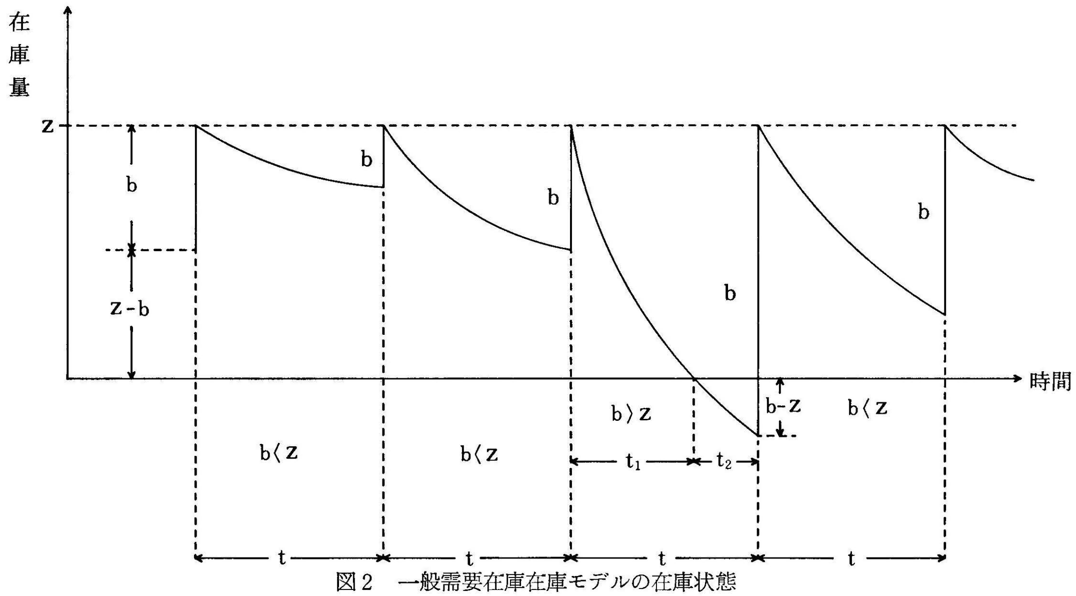

図2　一般需要在庫在庫モデルの在庫状態

$$I_2(b)=\begin{cases}0 & b\leqq z \text{ の場合}\\ G(b,1)-G(b,g^{-1}(b,z))-z(1-g^{-1}(b,z)) & b>z\geqq 0 \text{ の場合}\end{cases} \tag{2.11}$$

ところが需要量 B は確率変数であるので期待期平均在庫量 I_1, 期待期平均在庫不足量 I_2 はつぎのようになる。

$$I_1=\int_0^\infty I_1(b)\phi(b,t)db$$
$$=\int_0^z[z-G(b,1)]\phi(b,t)db+\int_0^\infty[zg^{-1}(b,z)-G(b,g^{-1}(b,z))]\phi(b,t)db \tag{2.12}$$

$$I_2=\int_0^\infty I_2(b)\phi(b,t)db$$
$$=\int_0^\infty[G(b,1)-G(b,g^{-1}(b,z))-z(1-g^{-1}(b,z))]\phi(b,t)db \tag{2.13}$$

したがってこのモデルの期待総コスト $E\ \{C(z,B,t)\}$ は,

$$E\{C(z,B,t)\}=hI_1+pI_2+\frac{c}{t}$$
$$=h\left\{\int_0^z[z-G(b,1)]\phi(b,t)db+\int_z^\infty[zg^{-1}(b,z)-G(b,g^{-1}(b,z))]\phi(b,t)db\right\}+p\int_z^\infty[G(b,1)-G(b,g^{-1}(b,z))-z(1-g^{-1}(b,z))]\cdot\phi(b,t)dt+\frac{c}{t}$$
$$=h\int_0^z[z-G(b,1)]\phi(b,t)db-p\int_0^\infty[z-G(b,1)]\phi(b,t)db+(h+p)\int_0^\infty[zg^{-1}(b,z)-G(b,g^{-1}(b,z))]\phi(b,t)db+\frac{c}{t} \tag{2.14}$$

任意に与えられ発注間隔 t^* に対応する最適在庫水準 $z_0(t^*)$ は (2.14) 式で $t=t^*$ とおいて得られる $E\ \{C(z,B,t^*)\}$ を最小にする $z(t^*)$ によってえられる。これは上式を z で微分して0とおくことによって求められる。

それは,

$$h\left\{\int_0^z\phi(b,t^*)db+[z-G(z,1)]\phi(z,t^*)\right\}-p\left\{\int_z^\infty\phi(b,t^*)db-[z-G(z,1)]\phi(z,t^*)\right\}+(h+p)\left\{\int_z^\infty[g^{-1}(b,z)+z\frac{\partial}{\partial z}g^{-1}(b,z)-\frac{\partial G(b,g^{-1}(b,z))}{\partial z}]\phi(b,t)db-[zg^{-1}(z,z)-G(z,g^{-1}(z,z))]\phi(z,t^*)\right\}=0$$

ここで関係式

$$g^{-1}(z,z)=1$$
$$\frac{\partial G(b,g^{-1}(b,z))}{\partial z}=g(b,g^{-1}(b,z))\frac{\partial g^{-1}(b,z)}{\partial z}$$
$$z=g(b,g^{-1}(b,z))$$

を用いて上式を整理し, $z=z_0(t^*)$ とおくと

$$\int_0^{z_0(t^*)}\phi(b,t^*)db+\int_{z_0(t^*)}^\infty g^{-1}(b,z_0(t^*))\cdot\phi(b,t^*)db=\frac{p}{p+h}\equiv q \tag{2.15}$$

がえられる。ここに $z_0(t^*)$ は与えられた t^* に対して (2.15) 式をみたす $z_0(t^*)$ の値が $E\ \{C(z,\ B,\ t^*)\}$ を最小にする $z(t^*)$ の最適値を意味する。この事は $\frac{\partial g(b,x)}{\partial x}>0$ であるから

$$\frac{\partial g^{-1}(b,z)}{\partial z}>0$$
$$\frac{d^2E\{C(z,B,t^*)\}}{dz^2}=(h+p)\int_z^\infty\frac{\partial g^{-1}(b,z)}{\partial z}\cdot\phi(b,t^*)db\geqq 0$$

となることから明らかである。$z_0(t^*)$ を (2.14) 式に代入した値は t^* に対する最小費用 $E\ \{C(z_0(t^*),\ B,\ t^*)\}$ である。これを $C_0(t^*)$ とおくと最適発注間隔 t_0 は $C_0(t^*)$ を最小にする t^* の値である。(2.14) 式は論文〔2〕の方法[1] により同値なつぎの式に書き換えられる。

$$E\{C(z,B,t)\}=h\int_0^z(z-b)r(b,t)db+p\int_z^\infty(b-z)r(b,t)db+\frac{c}{t} \tag{2.16}$$

ここに

$$r(z,t)=\int_z^\infty\frac{\partial g^{-1}(b,z)}{\partial z}\phi(b,t)db \tag{2.17}$$

であり, $r(z,\ t)$ は確率密度関数である。

1) 児玉正憲・北原貞輔〔2〕, pp. 57〜59.

(2.17) 式は (**2**.16) 式の z に関する2次微分と (2.14) 式の z に関する2次微分を等しいとおいてえられる。同値関係および (2.17) 式が確率密度関数であることは直接的計算により証明される。

したがって任意に与えられた t^* に対応する最適在庫水準 $z_0(t^*)$ は (2.16) 式で $t=t^*$ とおいてえられる $E\{C(z, B, t^*)\}$ を最小にする $z(t^*)$ によってえられる。それは (1.9) 式を導いたと同様な計算により

$$\int_0^{z_0(t^*)} r(b,t)\,db = q \tag{2.18}$$

をみたす $z_0(t^*)$ としてえられる。

$z_0(t^*)$ を (2.16) 式に代入した値は t^* に対する最小費用であり，これを $C_0(t^*)$ とかくと，

$$\begin{aligned}
C_0(t^*) &= h\int_0^{z_0(t^*)} [z_0(t^*)-q]\,r(b,t^*)\,db \\
&\quad + p\int_{z_0(t^*)}^{\infty} [b-z_0(t^*)]\,r(b,t^*)\,db + \frac{c}{t^*} \\
&= h\Big\{[(z_0(t^*)-b)R(b-t^*)]_0^{z_0(t^*)} \\
&\quad + \int_0^{z_0(t^*)} R(b,t^*)\,db\Big\} + p\Big\{\mu_{t^*} - [b \\
&\quad \cdot R(b,t^*)]_0^{z_0(t^*)} + \int_0^{z_0(t^*)} R(b,t^*)\,db \\
&\quad - z_0(t^*)(1-R(z_0(t^*),t^*))\Big\} + \frac{c}{t^*} \\
&= p[\mu_{t^*} - z_0(t^*)] + (h+p) \\
&\quad \cdot \int_0^{z_0(t^*)} R(b,t^*)\,db + \frac{c}{t^*}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

ここに

$$\mu_{t^*} = \int_0^{\infty} b\,r(b,t^*)\,db$$

$$R(z_0(t^*), t^*) = \int_0^{z_0(t^*)} r(b,t^*)\,db$$

さらに，μ_{t*} を $\phi(b,\ t^*)$ を用いて表現すると

$$\begin{aligned}
\mu_{t^*} &= \int_0^{\infty} b\,r(b,t^*)\,db \\
&= \int_0^{\infty} b\left[\int_b^{\infty} \frac{\partial g^{-1}(x,b)}{\partial b}\phi(x,t)\,dx\right]db \\
&= \int_0^{\infty} \phi(x,t^*)\left[\int_0^{x} \frac{b\,\partial g^{-1}(x,b)}{\partial b}\cdot db\right]dx \\
&= \int_0^{\infty} \phi(x,t^*)\,[G(x,g^{-1}(x,b))]_0^{x}\,dx \\
&= \int_0^{\infty} G(x,1)\,\phi(x,t^*)\,dx \\
&= \int_0^{\infty} g(x,\theta)\,\phi(x,t^*)\,dx \qquad (0<\theta<1)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

一方，$0<g(x,\ \theta)<x,\ 0<\theta<1$ であるから

$$g(x,\theta) = k(\theta)x, \qquad (0<k(\theta)<1)$$

とおける。ここに $k(\theta)$ は関数 g によってきまる θ に依存する x に無関係なものである。

α を単位時間当りの需要の平均率とすると

$$\int_0^{\infty} x\phi(x,t^*)\,dx = \alpha t^*$$

となるから (2.20) 式は

$$\mu_{t^*} = k(\theta)\alpha t^* \tag{2.21}$$

となる。したがって (2.19) 式はつぎのように変形できる。

$$\begin{aligned}
C_0(t^*) &= p[k(\theta)\alpha t^* - z_0(t^*)] \\
&\quad + (h+p)\int_0^{z_0(t^*)} R(b,t^*)\,db + \frac{c}{t^*}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

$C_0(t^*)$ が t^* の凸関数であれば $C_0(t^*)$ を最小にする t^* の値は

$$C_0(t^*) \leqq C_0(t^*\pm 1)$$

をみたす t^* を求めること帰着する。$C_0(t^*)$ が t^* の凸関数であるための十分条件を求めよう。

(**2**.22) 式よりつぎの定理が成り立つ

〔**定理　1**.〕 $z_0(t^*)$ が t^* の凹関数で $\int_0^{z_0(t^*)} R(x,t^*)\,dx$ が t^* の凸関数であれば $C_0(t^*)$ は t^* の凸関数となる。

証明　$pk(\theta)\alpha t^* + c/t^*$ は t^* の凸関数であるから，仮定と (2.22) 式より $C_0(t^*)$ は凸関数となる。

2.2.　需要量が離散的な場合

この場合 (2.14) 式に対応する式はつぎのようになる。

$$E\{C(z,B,t)\}=h\sum_{b=0}^{z}I_1(b)\phi(b,t)+p\sum_{b=z+1}^{\infty}I_2(b)\phi(b,t)+\frac{c}{t}$$
$$=h\sum_{b=0}^{z}[z-G(b,1)]\phi(b,t)-p\sum_{b=z+1}^{\infty}[z-G(b,1)]\phi(b,t)+(h+p)\sum_{b=z+1}^{\infty}[zg^{-1}(b,z)-G(b,g^{-1}(b,z))]\phi(b,t)+\frac{c}{t} \tag{2.24}$$

ここで1回当りの発注経費は発注間隔 t ごとに常にかかるものと仮定している。そうでなければ最後の項 c/t は $(1-\phi(0,\ t)\ c/t$ となる。(2.24) 式で z の代りに $z+1$ とおき，変形すると

$$E\{C(z+1,B,t)\}=h\sum_{b=0}^{z}[z-G(b,1)]\phi(b,t)-p\sum_{b=z+1}^{\infty}[z-G(b,1)]\phi(b,t)+h\sum_{b=0}^{z}\phi(b,t)-p\left[1-\sum_{b=0}^{z}\phi(b,t)\right]+(h+p)\left\{\sum_{b=z+1}^{\infty}[(z+1)\cdot g^{-1}(b,z+1)-G(b,g^{-1}(b,z+1))]\cdot\phi(b,t)\right\} \tag{2.25}$$

したがって

$$E\{C(z+1,B,t)\}-E\{C(z,B,t)\}=(h+p)\cdot\left\{\sum_{b=0}^{z}\phi(b,t)+\sum_{b=z+1}^{\infty}[(z+1)g^{-1}(b,z+1)-G(b,g^{-1}(b,z+1))]-[zg^{-1}(b,z)-G(b,g^{-1}(b,z))]\phi(b,t)\right\}-p \tag{2.26}$$

条件 $E\ \{C(z+1,\ B,\ t)\}\ -E\ \{C(z,\ B,\ t)\}\ \geqq 0$ をみたすためには (2.26) 式から

$$\frac{p}{h+p}\leqq\sum_{b=0}^{z}\phi(b,t)+\sum_{b=z+1}^{\infty}\{[(z+1)g^{-1}(b,z+1)-G(b,g^{-1}(b,z+1))]-[zg^{-1}(b,z)-G(b,g^{-1}(b,z))]\}\phi(b,t) \tag{2.27}$$

全く同様にして，$E\ \{C(z-1,\ B,\ t)\}\ -E\ \{C(z,\ B,\ t)\}\ \geqq 0$ をみたすためには

$$\sum_{b=0}^{z-1}\phi(b,t)+\sum_{b=z}^{\infty}\{[zg^{-1}(b,z)-G(b,g^{-1}(b,z))]-[(z-1)g^{-1}(b,z-1)-G(b,g^{-1}(b,z-1))]\}\phi(b,t)\leqq\frac{p}{p+h} \tag{2.28}$$

そこで

$$M(z)=\sum_{b=0}^{z}\phi(b,t)+\sum_{b=z+1}^{\infty}\{[(z+1)g^{-1}(b,z+1)-G(b,g^{-1}(b,z+1))]-[zg^{-1}(b,z)-G(b,g^{-1}(b,z))]\}\phi(b,t) \tag{2.29}$$

とおくと，(2.27) 式と (2.28) 式から任意に与えられた発注間隔 t^* に対応するコストを最小にする z の値，つまり最適在庫水準 $z_0(t^*)$ は

$$M(z_0(t^*-1))\leqq\frac{p}{p+h}\leqq M(z_0(t^*)) \tag{2.30}$$

をみたさなければならない。$z_0(t^*)$ が最小値を与えることは (2.26) 式が $z_0(t^*)$ の増加関数であることから示される。

論文〔2〕の離散的な場合の議論[2)] を援用すると同値なつぎの式に書き換えられる。

$$E\{C(z,B,t)\}=h\sum_{b=0}^{z}(z-b)r(b,t)+p\sum_{b=z+1}^{\infty}(b-z)r(b,t)+\frac{c}{t} \tag{2.31}$$

ここに

$$r(z,t)=\phi(0,t)+\sum_{b=1}^{\infty}[g^{-1}(b,1)-G(b,g^{-1}(b,1))]\phi(b,t),\quad z=0 \tag{2.32}$$

$$r(z,t)=\{1-z+G(z,1)+[(z-1)g^{-1}(z,z-1)-G(z,g^{-1}(z,z-1))]\}\phi(z,t)+\sum_{b=z+1}^{\infty}\phi(b,t)\{[(z+1)g^{-1}(b,z+1)-G(b,g^{-1}(b,z+1))]-2[zg^{-1}(b,z)-G(b,g^{-1}(b,z))]+[(z-1)g^{-1}(b,z-1)-G(b,g^{-1}(b,z-1))]\},\quad z=1,2,\cdots \tag{2.33}$$

であり，$r(z,\ t)$ は確率関数である。(2.31) 式は (2.24) 式の z に関する2次差分と (2.31)

---
2) 児玉正憲・北原貞輔〔2〕pp. 59〜64.

式の z に関する2次差分を等しいとおいてえられる。同値関数および $r(z,t)$ が確率関数であることは直接的計算によって確められる。

任意に与えられた発注間隔 t^* に対する最適在庫水準 $z_0(t^*)$ は (2.31) 式が凸関数であることから

$$R(z_0(t^*)-1,t^*)\leq\frac{p}{h+p}\equiv q\leq R(z_0(t^*),t^*) \tag{2.34}$$

をみたす $z_0(t^*)$ を求めることによってえられる。ここに $R(z,t^*)$ は需要量の分布関数である。(2.34) 式をみたす $z_0(t^*)$ を，(2.31) 式に代入した値は t^* に対する最小費用であり，これを $C_0(t^*)$ とかくと

$$\begin{aligned}
C_0(t^*)&=h\sum_{b=0}^{z_0(t^*)}[z_0(t^*)-b]r(b,t^*)+\\
&\qquad p\sum_{b=z_0(t^*)+1}^{\infty}[b-z_0(t^*)]r(b,t^*)+\frac{c}{t^*}\\
&=h\left\{z_0(t^*)R(z_0(t^*),t^*)-\sum_{b=0}^{z_0(t^*)}br(b,t)\right\}\\
&\quad+p\left\{\mu_r-\sum_{b=0}^{z_0(t^*)}br(b,t^*)-z_0(t^*)\right.\\
&\quad\left.\cdot\left(1-\sum_{b=0}^{z_0(t^*)}r(b,t^*)\right)\right\}+\frac{c}{t_*}\\
&=p[\mu_r-z_0(t^*)]+(h+p)[z_0(t^*)\\
&\quad\cdot R(z_0(t^*),t^*)-\sum_{b=0}^{z_0(t^*)}br(b,t^*)]+\frac{c}{t^*}\\
&=p[\mu_r-z_0(t^*)]+(h+p)\sum_{b=0}^{z_0(t^*)-1}R(b,t^*)\\
&\quad+\frac{c}{t^*}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}
\Bigg((\because)\ \sum_{b=0}^{z_0(t^*)-1}&R(b,t^*)=R(z_0(t^*)-1,t^*)\\
&+R(z_0(t^*)-2,t^*)+\cdots+R(1,t^*)\\
&+R(0,t^*)\\
&=[R(z_0(t^*),t^*)-r(z_0(t^*),t^*)]\\
&\quad+[R(z_0(t^*),t^*)-r(z_0(t^*),t^*)\\
&\quad-r(z_0(t^*)-1,t^*)]+\cdots\cdots\\
&\quad\cdots+[R(z_0(t^*),t^*)-r(z_0(t^*),t^*)\\
&\quad-\cdots\cdots-r(2,t^*)-r(1,t^*)]\\
&=z_0(t^*)R(z_0(t^*),t^*)-\sum_{b=0}^{z_0(t^*)-1}br(b,t)\Bigg)
\end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned}
\mu_r&=\sum_{b=0}^{\infty}br(b,t^*)=\sum_{y=0}^{\infty}\phi(y,t^*)[G(y,1)\\
&\qquad\qquad-G(y,0)]\\
&=\sum_{y=1}^{\infty}G(y,1)\phi(y,t^*)=\sum_{y=0}^{\infty}G(y,1)\phi(y,t^*)^{3)}\\
&=\sum_{y=0}^{\infty}g(y,\theta)\phi(y,t^*)\quad(0<\theta<1)
\end{aligned} \tag{2.36}$$

となり，連続形の場合と同様な議論から

$$\mu_r=k'(\theta)\alpha' t^* \tag{2.37}$$

となる。連続形の場合の $k(\theta)$, α に対応して $k(\theta)'$, α' としている。したがって (2.35) 式はつぎのように変形できる。

$$\begin{aligned}
C_0(t^*)&=p[k(\theta)'\alpha' t^*-z_0(t^*)]+(h+p)\\
&\quad\cdot\sum_{b=0}^{z_0(t^*)-1}R(b,t^*)+\frac{c}{t^*}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

このことより離散形の場合も〔**定理 I**〕が成立することがわかる。$C_0(t^*)$ が t^* の凸関数ならば $C_0(t^*)$ を最小にする t^* は

$$C_0(t^*)\leq C_0(t^*\pm1) \tag{2.39}$$

をみたす t^* を求めることに帰着する。

つぎに需要変数が連続の場合の期待総コストを最小にする $z_0(t^*)$ の若干の性質を述べておこう。期待総コストを最小にする $z_0(t^*)$ は

$$\int_0^{z_0(t^*)}r(b,t^*)db=\int_0^{z_0(t^*)}\left(\int_b^{\infty}\frac{\partial g^{-1}(y,b)}{\partial b}\phi(y,t^*)dy\right)db=q \tag{2.40}$$

をみたす $z_0(t^*)$ によって与えられるが (2.40) 式の $r(b,t^*)$ は $\phi(y,t^*)$ と $g^{-1}(y,b)$ に依存する。そこで $\phi(y,t^*)$ を固定して $g^{-1}(y,b)$ について二種類の $g_1^{-1}(y,b)$ $g_2^{-1}(y,b)$ を考えることにする。このとき

〔**定理 2.**〕 $g_i^{-1}(y,b)$ $(i=1,2)$ に対応する最適値，すなわち (2.40) 式をみたす解を $z_0^i(t^*)$ $(i=1,2)$ とすると

$$g_1^{-1}(y,b)\geq g_2^{-1}(y,b)\Rightarrow z_0^1(t^*)\leq z_0^2(t^*)$$

3) 児玉正憲・北原貞輔〔2〕pp. 64.

が成り立つ

証明

$$r_i(b,t^*)=\int_b^\infty \frac{\partial g_i^{-1}(y,b)}{\partial b}\phi(y,t^*)dy \quad (i=1,2)$$

とおくと

$$\int_0^x [r_1(b,t^*)-r_2(b,t^*)]db=\int_0^x\left\{\int_b^\infty \frac{\partial g_1^{-1}(y,b)}{\partial b}\cdot\phi(y,t^*)dy-\int_b^\infty \frac{\partial g_2^{-1}(y,b)}{\partial b}\phi(y,b)dy\right\}db$$
$$=\int_0^x \phi(y,t^*)\left[\int_0^y\left(\frac{\partial g_1^{-1}(y,b)}{\partial b}-\frac{\partial g_2^{-1}(y,b)}{\partial b}\right)db\right]dy+\int_0^\infty\phi(y,t^*)\left[\int_0^x\left(\frac{\partial g_1^{-1}(y,b)}{\partial b}-\frac{\partial g_2^{-1}(y,b)}{\partial b}\right)db\right]dy$$
$$=\int_0^x\phi(y,t^*)[g_1^{-1}(y,y)-g_2^{-1}(y,y)]dy+\int_x^\infty\phi(y,x^*)[g_1^{-1}(y,x)-g_2^{-1}(y,x)]dy$$
$$(\because g_i^{-1}(y,y)=1, g_i^{-1}(y,0)=0$$
$$=\int_x^\infty \phi(y,t^*)[g_1^{-1}(y,x)-g_2^{-1}(y,x)]dy\geqq 0$$
$$(\forall x\geqq 0,\ \forall t^*)$$

ゆえに $\int_0^x r_1(b,t^*)db\geqq\int_0^x r_2(b,t^*)db$

$\int_0^x r_i(b,t^*)db$ は x の連続増加関数であり，$z_0^i(t^*)$ は (2.40) 式をみたす解であるから，$z_0^1(t^*)\leqq z_0^2(t^*)$ が成り立つ。

$g_i(y,z)$ は単調増加関数であるから，

$z=g_i^{-1}(y,b)$ とおくと

$$g_1^{-1}(y,b)\geqq g_2^{-1}(y,b)\Longleftrightarrow g_1(y,z)\leqq g_2(y,z)$$

が成り立つので，定理1の条件は

$$g_1(y,z)\leqq g_2(y,z)\Longrightarrow z_0^1(t^*)\leqq z_0^2(t^*)$$

におきかえることもできる。

ついで $g^{-1}(y,b)$ を固定して $\phi(y,t^*)$ について2種類の $\phi_1(y,t^*)$, $\phi_2(y,t^*)$ を考えてみよう。このとき

〔**定理 3**.〕 $\phi_i(y,t^*)$ $(i=1,2)$ に対応する最適値，すなわち (2.40) をみなす解を $z_0^i(t^*)$ $(i=1,2)$ とするとき

$$\int_0^x\phi_1(y,t^*)dy\geqq\int_0^x\phi_2(y,t^*)dy$$
$$(\forall x\geqq 0,\ \forall t^*)\Rightarrow z_0^1(t^*)\leqq z_0^2(t^*)$$

証明

$$r_i(b,t^*)=\int_b^\infty\frac{\partial g^{-1}(y,b)}{\partial b}\phi_i(y,t^*)dy$$
$$(i=1,2)$$

とおく。$y\geqq x\geqq 0$ をみたす x, y に対して

$$0\leqq g^{-1}(y,z)\leqq 1\quad,\quad\frac{\partial g^{-1}(y,z)}{\partial y}<0$$

また

$$g^{-1}(y,y)=1,\quad\int_x^\infty\phi_1(y,t^*)dy\leqq\int_x^\infty\phi_2(y,t^*)dy$$

であるから，以下が導かれる。

$$\int_0^x[r_1(b,t^*)-r_2(b,t^*)]db=\int_0^x\left[\int_b^\infty\frac{\partial g^{-1}(y,b)}{\partial b}\cdot\phi_1(y,t^*)dy-\int_b^\infty\frac{\partial g^{-1}(y,b)}{\partial b}\phi_2(y,t^*)dy\right]db$$
$$=\int_0^x(\phi_1(y,t^*)-\phi_2(y,t^*))\left[\int_0^y\frac{\partial g^{-1}(y,b)}{\partial b}db\right]dy+\int_x^\infty(\phi_1(y,t^*)-\phi_2(y,t^*))\cdot\left[\int_0^x\frac{\partial g^{-1}(y,b)}{\partial b}db\right]dy$$
$$=\int_0^x(\phi_1(y,t^*)-\phi_2(y,t^*))g^{-1}(y,y)dy+\int_x^\infty(\phi_1(y,t^*)-\phi_2(y,t^*))g^{-1}(y,x)dy$$
$$\geqq\int_0^x(\phi_1(y,t^*)-\phi_2(y,t^*))dy+\int_x^\infty(\phi_1(y,t^*)-\phi_2(y,t^*))dy=0$$

したがって，$z_0^1(t^*)\leqq z_0^2(t^*)$ が与えられる。

〔**定理 4**.〕 $\phi(y,t^*)$ に対応する最適値，すなわち (2.40) 式をみたす解を $z_0(t^*)$ とするとき，$z_0(t^*)$ は t^* の増加関数である。

証明　まず需要量の分布関数が t の単調減少関数であることを表すつぎの補題を示しておこう。

〔**補題 1**.〕 $\Phi(y,t)=\int_0^y\phi(x,t)dx$ とおくとき，$\Phi(y,t)\leqq\Phi(y,t-1)$

証明　$\phi(x,1)=\phi(x)$ とおくとき，

$$\Phi(y,t)=\int_0^y \phi(x,t)dx=\int_0^y\int_0^x \phi(x-z,t-1)$$
$$\cdot\phi(z,1)dzdx$$
$$=\int_0^y \phi(z,1)\left(\int_z^y \phi(x-z,t-1)dx\right)dz$$
$$=\int_0^y \Phi(y-z,t-1)\phi(z,1)dz$$

が成立するから

$$\Phi(y,t)-\Phi(y,t-1)=\int_0^y \Phi(y-z,t-1)$$
$$\cdot\phi(z,1)dz-\Phi(y,t-1)$$
$$\leqq\Phi(y,t-1)\int_0^y \phi(z,1)dz-\Phi(y,t-1)$$
$$=\Phi(y,t-1)\left[\int_0^y \phi(z)dz-1\right]$$
$$\leqq 0$$

〔**補題　2.**〕 $R(y,t)=\int_0^y r(x,t)dx$ とおくとき，$R(y,\ t)\leqq R(y,\ t-1)$。

証明　$\dfrac{\partial g^{-1}(z,y)}{\partial z}<0, \lim_{z\to\infty} g^{-1}(z,y)=0$　は明らかであるから〔**補題　1.**〕および**定理2**の証明の途中の式を援用してつぎの不等式をうる。

$$R(y,t)-R(y,t-1)=\int_0^y [\phi(z,t)-\phi(z,t$$
$$-1)]dz+\int_y^\infty [\phi(z,t)-\phi(z,t-1)]$$
$$g^{-1}(z,y)dz$$
$$=-\int_y^\infty [\Phi(z,t)-\Phi(z,t-1)]\frac{\partial g^{-1}(z,y)}{\partial z}dz$$
$$\leqq 0$$

〔**補題　1.**〕,〔**補題　2.**〕および (2.40) 式より

〔**定理　4.**〕 は明らかとなる。

注意　2節で $g(b,\ x)$ について $\dfrac{\partial g}{\partial b}>0,\ \dfrac{\partial g}{\partial x}>0$ と仮定したが $\dfrac{\partial g}{\partial b}\geqq 0,\ \dfrac{\partial g}{\partial x}\geqq 0$ の場合でも適当に修正すれば本論文の諸性質は成り立つ。その例として，需要が期首に集中してくる場合は1節で論じたが2節のモデルの特殊な場合と考えると，$g(b,\ x)=b$ となり $\dfrac{\partial g}{\partial b}>0,\ \dfrac{\partial g}{\partial x}=0$ となる。このときは $g^{-1}(b,\ z)=0$ とおけばよい。したがって $\dfrac{d^2E\{C(z,B,t\}}{dz^2}=(h+p)\phi(z,t)$, $r(z,t)=\phi(z,t)$ となる。需要が期末に集中してくる場合は $g(b,x)=0$ となるが，$g^{-1}(b,\ z)=1$ とおけばよい。$g(b,\ x)$ が x の非減少関数の場合は t_1/t は唯一つとしては定まらないが，このときは最小値を t_1/t として定義すればよい。返品のある在庫モデルでは $\dfrac{\partial g}{\partial b}\geqq 0,\ \dfrac{\partial g}{\partial x}\geqq 0$ が成立しないが，これらを統一的に取扱うことは今後の課題である。

むすび

発注点と発注量を同時に決める購入・販売在庫モデルが一般的需要形態の場合に定式化され，このモデルが簡単な同値な特定モデルに変換できることを示した。この考え方はより一般的なモデルに適用可能であると思われる。

参 考 文 献

〔1〕 北原貞輔・児玉正憲：「ORによる在庫管理システム」九州大学出版会，1982.
〔2〕 児玉正憲・北原貞輔：「種々の需要形態に関する統一的在庫モデルの研究」経済学研究，Vol. 47，No. 5・6，九州大学経済学会，1983.
〔3〕 Monks, J. G.: *Operations Management, Theory and Problems*, MeGraw-Hill, 1977.
〔4〕 Naddor, E: *Inventory System*, John Wiley, 1966.
〔5〕 Taha, H. A.: *Operations Research, An Introduction*, Macmillam, 1976.