同時故障を考慮した2段階直列構成システムの解析

児玉，正憲

https://doi.org/10.15017/4475393

出版情報：經濟學研究. 49 (3), pp.15-38, 1984-04-30. 九州大学経済学会

同時故障を考慮した2段直列構成システムの解析

児　玉　正　憲

1. はしがき

「電子交換システム，情報処理システム，電子計算機システム，航空輸送システム，ロケットシステム，などのように大規模で，またシステムに課せられた使命が質的に高度化してくると，その内部のどれかの故障でシステムが停止する機会が増加し，また故障による機能停止に伴う損害が増大するから，**信頼性**が特に重視されることになる。

システムを高信頼度にするためには，システムを構成している要素の信頼度を高めることは勿論であるが，これにはおのずから限界がある。

このための一つの方法として，**冗長法**が考えられる。冗長法は機能的に不必要な余分な構成要素を付け加え，構成要素の故障がただちにシステムの故障となる機会を少なくすることにより，システムの信頼性を向上させようとするものである。

冗長法を与えたシステムで保全を伴う場合はさらに信頼性は向上する。このようなシステムの信頼性を量的に評価することは重要であるが，この場合信頼性の評価は困難となり一般的条件のもとでは未解決なものが多い。

本論文で取扱うシステムはサブシステム S_0 とサブシステム S_1 が直列に連結されている**2段直列構成システム**で S_0 は N 個の同一なユニット（S_0 のサブシステム）から成る **K-out-of-N システム**（$K=1$ のとき並列システム $K=N$ のとき直列システム），S_1 は相異る M 個のユニット（S_1 のサブシステム）から成る直列システムである。作動ユニットのすべてが故障する**同時故障**が存在しない場合については種々の検討がなされている。例えば，S_0 が並列システムの場合については，Kulshrestha〔1〕,〔2〕はシステム故障が生じたときだけ保全を行う場合の定常アベイラビリティを求めている。中道（他）〔3〕は S_0 の故障したユニットの**逐次保全**を行い，サブシステム S_1 に優先権を与えて，**割込継続形** (Preemptive resume) の場合について解析している。拙稿〔4〕は同様に**割込反復形** (Preemptive repeat) の場合を解析し，行列形でなく，具体的な信頼性の評価を与えている。本論文は同時故障が存在する場合を解析し，過去の研究を特殊な場合として含む一般的な研究で本論文から得られる諸結果はシステムの信頼性・保全性設計に利用でき，さらにシステムの最適設計の基礎資料として価値を有するものである。

2. モデルの定義と記号

2段直列構成になっているサブシステム S_0 と S_1 を1人で保守する。

サブシステム S_0: 同一のユニットから成る K-out-of-N: G システム（K個以上作動していればシステムの機能を果す冗長システム），サブシステム S_1: 異なる M 個のユニットからなる直列システム（すべてのユニットが作動しているときシステムの機能を果す冗長のないシステム）。保全されたユニットは保全の後新品と同様になり，ユニットの故障時間は指数分布に従い，保全時間は一般分布に従う $M/G/1$ 型モデルである。システムが停止（**システム故障**）しているとき故障していないユニットの故障率は0であり，ユニットの故障は直ちに発見されるものとする。

システム停止は，

(1) サブシステム S_0 において $N-K+1$ 個のユニットが故障したとき，

(2) サブシステム S_1 において任意のユニット（1個）が故障したとき，

(3) 作動中のすべてのユニットの同時故障が起ったとき，

のいずれか一方が起るとき生じるものとする。

ユニットの故障はただ1回のショックによって故障するものとする。このショックは**ポアソン過程**で起るものとし，互いに独立なポアソン過程 $z_1(t;\ \lambda_0), \cdots, z_N(t;\ \lambda_0),\ z_1(t;\ \lambda_1) \cdots, z_M(t;\ \lambda_M)$ および $z(t;\ \lambda^*)$ はそれぞれ S_0 内の1番目のユニット，…，S_0 内の N 番目のユニット，S_1 内の1番目のユニット，…，S_1 内の M 番目のユニットおよび作動しているすべてのユニットに対するショック過程を表す。($z(t;\ \lambda)$ によってパラメータ λ のポアソン過程を表す）システム停止のときユニット故障はしないという仮定があるためショック過程は**中断されたポアソン過程** (Interrupted Poisson Process) と見做される。

(A) システム停止のときのみ保全を行う場合

この場合代表的な3つのモデルを考察する。

モデル1：サブシステム S_0 の停止によってシステム停止となった時は S_0 中の故障ユニット $N-K+1$ 個を保全し，保全完了後システムを動作させる。S_1 の j 番目 ($1 \leq j \leq M$) のユニットの故障によるシステム停止の場合はそのユニットのみ保全する（S_0 中に故障ユニットが存在してもこの時点ではその保全を行わない)。

モデル2：モデル1と異る点は S_0 の停止によるシステム停止の場合，故障ユニット $N-K+1$ 個全部の保全をするのではなく1個の保全が完了したら直ちにシステムを動作させ保全は次のシステム停止まで中止する。

モデル3：モデル1と異る点は S_1 の停止によるシステム停止の場合，S_1 中の故障ユニットとそのとき故障中の S_0 のユニット全部を保全する。以上3つのモデルで同時故障が存在する場合は児玉（他）〔5〕が解析している。

(B) 逐次保全を行う場合

これはユニットが故障する時，保全待（1人で保守するための保全待ちの可能性が生じる）がなければ直ちに保全を行う場合である。

モデル4：サブシステム S_0 のユニットが故障した時，逐次保全を行う。サブシステム S_0 の停止でシステムが停止した時，保全を終えたユニットは直ちに動作させシステムが再び動作するよう

にする。サブシステム S_1 の停止でシステムが停止した時，サブシステム S_0 の保全中のユニットの保全を中断して先にサブシステム S_1 の故障したユニットの保全を行い，保全の完了後サブシステム S_0 のユニットの保全を続行する（割込継続形保全）

この場合同時故障によってシステム停止となるとき，次の3つの場合が考えられる。

（i）現在保全中の S_0 内のユニット（仮定により S_1 の停止によるシステム故障のとき同時故障が起ってもユニットは故障しない）の保全を中断し S_1 内のすべて（M 個）および S_0 内の m 個 $(1\leqq m\leqq N-1)$ のユニットの保全が完了するまで保全を続行し，完了後システムを作動させその後

（a） 中断したユニットの保全を最初からやり直す（反復形保全，**モデル 4-1**）

（b） 中断したユニットの作全を続行する（継続形保全，**モデル 4-2**）

（a）の場合，$m=N$ の場合として S_1 内の M 個および S_0 使の $N-1$ 個の保全が完了するとただちに中断したユニットの保全を行い完了後システムを作動させるものとすればシステムに関する仮定より同時故障後 S_1 内の M 個および S_0 内の m 個 $(1\leqq m\leqq N)$ のユニットの保全が完了するまで保全を実行し，完了後システムを作動させもし S_0 内に故障ユニットがあれば保全を行うモデルと同値である。

（ii） 現在保全中の S_0 内のユニットの保全完了後 S_1 のすべて（M 個）および S_0 の m 個 $(0\leqq m\leqq N-1)$ のユニットの保全が完了するまで保全を実行し，保全完了後システムを作動させることを意味する（**モデル 4-3**）。

モデル 5：モデル4と異る点は割込反復形の保全を行うことである（同時故障が起らない場合）。即ちサブシステム S_1 の停止でシステムが停止した時，サブシステム S_0 の保全中のユニットの保全を中断して先にサブシステム S_1 の故障したユニットの保全を行い保全の完了後サブシステム S_0 のユニットの保全を最初からやり直す。

同時故障が起るとモデル4におけると同様に3つの場合が考えられ，それぞれ**モデル 5-1**，**モデル 5-2** および**モデル 5-3** とする。

モデル 6：モデル4と異る点は**故障生起順形の保全**を行うことである（同時故障が起らない場合）。即ち，サブシステム S_1 の停止でシステムが停止した時，サブシステム S_0 の保全中のユニットの保全の後，サブシステム S_1 の故障したユニットの保全を行う。

同時故障が起るとモデル4におけると同様に3つの場合が考えられ，それぞれ**モデル 6-1**，**モデル 6-2** および **モデル 6-3** とする。

モデル 4-4 は拙稿〔6〕で解析されている。本論文は**モデル 5-1** の解析である。

システムは任意の時刻において次の状態のどれか1つの状態にある。

E_N：サブシステム S_0 と S_1 のすべてのユニットが動作していてシステムが動作している状態

E_i：サブシステム S_0 の i 個のユニット，サブシステム S_1 のすべてのユニットが動作していてシステムが動作している状態，$K\leqq i\leqq N-1$

F_{K-1}：サブシステム S_0 の $N-K+1$ 個のユニットの故障でシステムが停止しており，故障した

ユニットの保全を行っている状態,

F_{ij}: サブシステム S_0 の i 個のユニットが動作していてサブシステム S_1 の j 番目のユニットの故障でシステムが停止しており，その故障ユニットの保全を行っている状態

F_0: 同時故障によって S_0 および S_1 のすべてのユニットが故障しシステムが故障しており，保全を行っている状態

以上，$E.$ はシステムが動作の状態，$F.$ はシステムの保全を行っている状態を表している。

次にシステム解析を行う上で必要な関数，記号等を列記する。$\lambda=\sum_{j=1}^{M}\lambda_j$;

$f_0(t)$: S_0 の各ユニットの保全時間の確率密度関数，$f_0(t)=\mu_0(t)\exp\left[-\int_0^t \mu_0(x)dx\right]$,

$f_j(t)$: S_1 の j 番目のユニットの保全時間の確関率密度数，$f_j(t)=\mu_j(t)\exp\left[-\int_0^t \mu_j(x)dx\right]$,

$K\leqq j\leqq M$, $f(t)=\sum_{j=1}^{M}\lambda_j f_j(t)/\lambda$;

$g^*_{i+M}(t)$: 同時故障によってシステムが停止しているとき，S_1 のすべてのユニット（M 個）と S_0 の i 個のユニットを保全する保全時間の確率密度関数,

$g^*_{i+M}(t)=\mu^*_{i+M}(t)\exp\left[-\int_0^t \mu^*_{i+M}(x)dx\right]$;

K_0, K_j, K^*_{i+M}: それぞれ $f_0(t)$, $f_j(t)$ および $g^*_{i+M}(t)$ の1次の積率（平均保全時間）;

δ_{ij}; クロネッカーのデルタ，$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$;

$P_i(t,x)dx$: 時点 t でシステムが動作中でかつ S_0 の i 個（$K\leqq i\leqq N-1$）のユニットが動作していて，保全中の保全経過時間が $(x, x+dx)$ にある確率;

$P_i(t)$: 時点 t でシステムが作動中で，S_0 の i 個のユニットが動作している確率,

$P_i(t)=\int_0^t P_i(t,x)dx$;

$P_{K-1}(t,x)dx$: 時点 t で S_0 の停止でシステムが停止していてその保全経過時間が $(x, x+dx)$ にある確率;

$P_{K-1}(t)$: 時点 t で S_0 の停止でシステムが停止している確率，$P_{K-1}(t)=\int_0^t P_{K-1}(t,x)dx$;

$P_{ij}(t,x)dx$: 時点 t で S_1 の i 番目のユニットの故障でシステムが停止していて，その保全経過時間が $(x, x+dx)$ にあり，S_0 の i 個のユニットが作動している確率,

$K\leqq i\leqq N$,　$1\leqq i\leqq M$;

$P_{ij}(t)$: 時点 t で S_1 の i 番目のユニットの故障でシステムが停止していて，S_0 の i 個のユニットが動作している確率，$P_{ij}(t)=\int_0^t P_{ij}(t,x)dx$;

$Q(t,x)dx$: 時点 t で同時故障によってシステムが停止しており，保全経過時間が $(x, x+dx)$ にある確率;

$Q_0(t)$: 時点 t で同時故障によってシステムが停止している確率，$Q_0(t)=\int_0^t Q_0(t,x)dx$;

$P_A(t)$: 時点 t でシステムが作動している確率;

$R(t)$: システムが $[0, t]$ 間停止しない確率;

MTSF: 最初のシステム停止までの平均時間;

$\overline{M}(s)$: $M(t)$ のラプラス変換, $\overline{M}(s)=\int_0^\infty e^{-st}M(t)dt$;

3. 信頼度関数と平均寿命

このモデルの状態推移図は図1に示される。システムの特性より次の**差分・微分・積分方程式**を得る。

(i) $\boldsymbol{1 \leqq K \leqq m \leqq N-1}$

$$[d/dt+N\lambda_0+\lambda+\lambda^*]\,P_N(t)=\int_9^t \mu_0(x)P_{N-1}(t,x)\,dx+\sum_{j=1}^{M}\int_0^t \mu_j(x)P_{Nj}(t,x)dx\ , \tag{3.1}$$

$$[\partial/\partial t+\partial/\partial x+i\lambda_0+\lambda+\lambda^*+\mu_0(x)]\,P_i(t,x)=(1-\delta_{i,N-1})(i+1)\lambda_0P_{i+1}(t,x)\ ,$$
$$K\leqq i\leqq N-1\ , \tag{3.2}$$

$$[\partial/\partial t+\partial/\partial x+\mu_0(x)]\,P_{K-1}(t,x)=K\lambda_0P_K(t,x)\ , \tag{3.3}$$

$$[\partial/\partial t+\partial/\partial x+\mu_j(x)]\,P_{ij}(t,x)=0\ ,\quad K\leqq i\leqq N, 1\leqq i\leqq M\ , \tag{3.4}$$

$$[\partial/\partial t+\partial/\partial x+\mu^*_{m+M}(x)]\,Q_0(t,x)=0\ , \tag{3.5}$$

$$P_i(t,0)=\delta_{i,N-1}N\lambda_0P_N(t)+\int_0^t \mu_0(x)P_{i-1}(t,x)\,dx+\sum_{j=1}^{M}\int_0^t \mu_j(x)P_{ij}(t,x)dx$$
$$+\delta_{i,m}\int_0^t \mu^*_{m+M}(x)Q_0(t,x)dx\ ,\quad K\leqq i\leqq N-1\ , \tag{3.6}$$

$$P_{K-1}(t,0)=0\ , \tag{3.7}$$

$$P_{Nj}(t,0)=\lambda_jP_N(t)\ ,\quad 1\leqq j\leqq M\ , \tag{3.8}$$

$$P_{ij}(t,0)=\lambda_j\int_0^t P_i(t,x)dx\ ,\quad K\leqq i\leqq N-1, 1\leqq j\leqq M\ , \tag{3.9}$$

$$Q_0(t,0)=\lambda^*\sum_{i=K}^{N}P_i(t)$$
$$=\lambda^*P_N(t)+\lambda^*\sum_{i=K}^{N-1}\int_0^t P_i(t,x)dx \tag{3.10}$$

$$P_N(0)=1 \tag{3.11}$$

(3.1)〜(3.10) は同様な方法で求められるので (3.1) 式の導出方法を略述する。Δt を十分小さい時間とし, 時点 $t+\Delta t$ で状態 E_N は次の4つの場合に生ずる。

1) 時点 t で状態 E_N で Δt 内に S_0 および S_1 内のいづれのユニットも故障しない, また, 同時故障も起らない。この事象の起る確率は

$$P_N(t)\{1-(N\lambda_0+\lambda+\lambda^*)\Delta t+0(\Delta t)\}$$

である。$1-(N\lambda_0+\lambda+\lambda^*)\Delta t+0(\Delta t)$ は Δt 内に状態が変化しない確率を表す。$(N\lambda_0+\lambda+\lambda^*)\Delta t+$

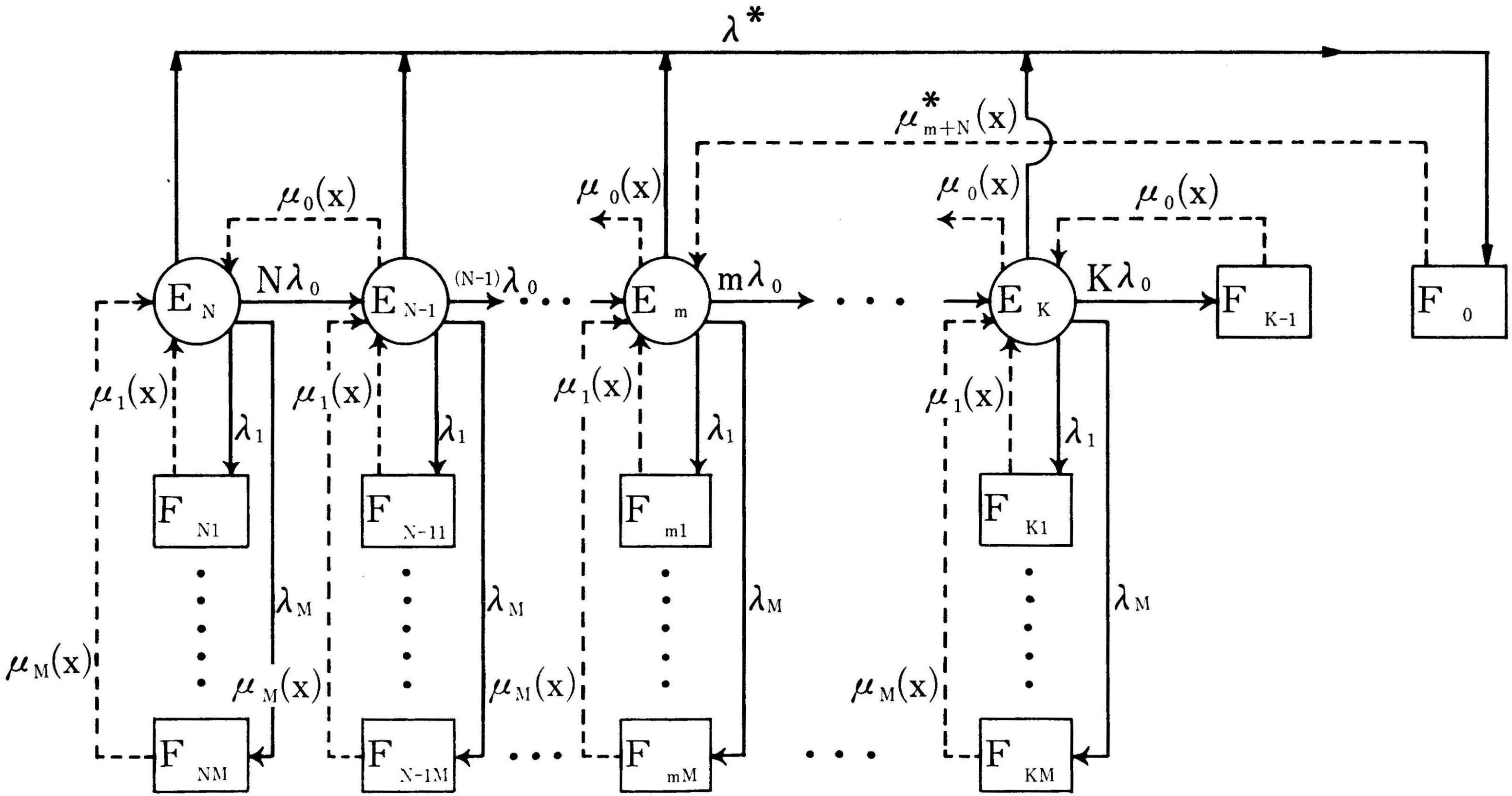

図1　モデルの状態推移図

$0(\Delta t)$ は Δt 間に S_0 内の1個のユニット または S_1 内の1個のユニット または 同時故障の起る確率を表す。$0(\Delta t)$ は $\lim_{\Delta t\to 0} 0(\Delta t)/\Delta t \to 0$ つまり Δt より高位の無限小を表す。

2) 時点 t で状態 E_{N-1} で保全中のユニットの経過時間が x で $(x, x+\Delta t)$ 間に保全中のユニットの保全が終り，$(x, x+\Delta t)$ 間に故障が起らない。この事象の起る確率は

$$\int_0^t (\mu_0(x)\Delta t + 0(\Delta t))P_{N-1}(t, x)dx\{1-((N-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*)\Delta t+0(\Delta t)\}$$

ここで $\mu_0(x)\Delta t+0(\Delta t)$ は S_0 内のユニットの保全経過時間が x であるという条件のもとで，その保全が $(x, x+\Delta t)$ 間に終る確率を表す。$((N-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*)\Delta t+0(\Delta t)$ は Δt 間に作動中のユニットが故障する（同時故障または S_0 内の1個または S_1 内の1個が故障する）確率を表す。

3) 時点 t で状態 $F_{N1}, \cdots, F_{NM}$ のいずれかにあり保全中のユニットの保全経過時間が x で $(x, x+\Delta t)$ 間に保全中のユニットの保全が終る。この事象の起る確率は

$$\sum_{j=1}^{M}\int_0^t [\mu_j(x)\Delta t+0(\Delta t)]P_{Nj}(t, x)dx$$

である。

4) $(t, t+\Delta t)$ 間に2回以上の状態推移が起り $t+\Delta t$ でシステムの状態は E_N である。この事象の起る確率は故障分布，保全分布の仮定から $0(\Delta t)$ である。

以上4つの場合は排反的であり，どれかが必ず起るから全確率の定理より次式を得る。

$$\begin{aligned}
P_N(t+\Delta t) &= P_N(t)\{1-(N\lambda_0+\lambda+\lambda^*)\Delta t+0(\Delta t)\}\\
&\quad+\int_0^t [\mu_0(x)\Delta t+0(\Delta t)]P_{N-1}(t, x)\{1-[(N-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*]\Delta t+0(\Delta t)\}\\
&\quad+\sum_{j=1}^{M}\int_0^t [\mu_j(x)\Delta t+0(\Delta t)]P_{Nj}(t, x)dx+0(\Delta t)\\
&= P_N(t)\{1-(N\lambda_0+\lambda+\lambda^*)\Delta t\}+\Delta t\int_0^t \mu_0(x)P_{N-1}(t, x)dx\\
&\quad+\Delta t\sum_{j=1}^{M}\int_0^t \mu_j(x)P_{Nj}(t, x)dx+0(\Delta t)
\end{aligned}$$

右辺の項中 $P_N(t)$ を左辺に移し，両辺を Δt で除した後，$\Delta t\to 0$ とすれば $0(\Delta t)/\Delta t\to 0$ $(\Delta t\to 0)$ であるから (3.1) を得る。以下同様である。境界条件を求めるために次の確率関数を定義する。

$$T_i(t) = \int_0^{\Delta t} P_i(t, x)dx$$

これは時点 t で状態が E_i で，保全中の経過時間が $(0, \Delta t)$ 間にある確率を表す。このとき

$$\begin{aligned}
T_i(t+\Delta t) &= \int_0^{\Delta t} P_i(t+\Delta t, x)dx = \delta_{i,N-1}[N\lambda_0\Delta t+0(\Delta t)]P_N(t)\\
&\quad+\int_0^t [\mu_0(x)\Delta t+0(\Delta t)]\{1-[(i-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*]\Delta t+0(\Delta t)\}P_{i-1}(t, x)dx\\
&\quad+\sum_{j=1}^{M}\int_0^t [\mu_j(x)\Delta t+0(\Delta t)]P_{ij}(t, x)dx
\end{aligned}$$

$$+\delta_{i,m}\int_0^t [\mu^*_{m+M}(x)\Delta t+0(\Delta t)]\,Q_0(t,x)dx+0(\Delta t)$$

$$=\delta_{i,N-1}N\lambda_0\Delta tP_N(t)+\Delta t\int_0^t \mu_0(x)P_{i-1}(t,x)dx+\Delta t\sum_{j=1}^{M}\int_0^t \mu_j(x)P_{i,j}(t,x)dx$$

$$+\Delta t\delta_{i,m}\int_0^t \mu^*_{m+M}(x)Q_0(t,x)dx+0(\Delta t) \qquad \text{(a)}$$

式の右辺の第2項の被積分項は時点 t で状態が E_{i-1} で保全中の経過時間が x であるという条件のもとで $(x, x+\Delta t)$ 間に保全が完了し，かつこの間に故障が起らない確率を表し，その結果，状態は E_i となり時点 $t+\Delta t$ では新しくはじまったユニットの保全経過時間が $(0, \Delta t)$ 間にあることになる。x について 0 から t まで積分すると時点 t で E_{i-1} で $t+\Delta t$ で E_i かつ新しい保全のはじまったユニットの経過時間が $(0, \Delta t)$ 間にある確率となる。同様に第3項は時点 t で $F_{ij}(1\leqq j\leqq M)$ で Δt 内に保全が完了し，$t+\Delta t$ で状態 E_i で新しく保全のはじまったユニットの経過時間が $(0, \Delta t)$ 間にある確率を表す。第4項 $(i=m)$ は時点 t で F_0 で Δt 内に保全が完了し $t+\Delta t$ で状態は E_i で，新しく保全のはじまったユニット（$(m+N)$ 個のユニットを1つのユニットと考える）の保全経過時間が $(0, \Delta t)$ 間にある確率を表わす。第1項 $(i=N-1)$ は時点 t で状態は E_N で Δt 内に S_0 内のユニットの1つが故障して時点 $t+\Delta t$ では状態 E_{N-1} となり，新しく保全のはじまったユニットの保全経過時間が $(0, \Delta t)$ 間にある確率を表す。

$T_i(t+\Delta t)$ をテーラー展開すると

$$T_i(t+\Delta t)=T_i(t)+T_i'(t)\Delta t+0(\Delta t)$$

$$=P_i(t,\theta)\Delta t+P_i'(t,\theta)\Delta t^2+0(\Delta t)\ , \qquad 0<\theta<\Delta t \qquad \text{(b)}$$

（a），（b）式の右辺を Δt で除した後，$\Delta t\to 0$ とすると

$$P_i(t,0)=\delta_{i,N-1}N\lambda_0P_N(t)+\int_0^t \mu_0(x)P_{i-1}(t,x)dx+\sum_{j=1}^{M}\int_0^t \mu_j(x)P_{ij}(t,x)dx$$

$$+\delta_{i,m}\int_0^t \mu^*_{m+M}(x)Q_0(t,x)dx$$

を得る。(3.7)～(3.10) も同様にして得られる。

初期条件 (3.11) のもとで (3.1)～(3.10) のラプラス変換をとると (3.12)～(3.20) を得る。

$$[s+N\lambda_0+\lambda+\lambda^*]\,\bar{P}_N(s)=\int_0^\infty \mu_0(x)\bar{P}_{N-1}(s,x)dx+\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty \mu_j(x)\bar{P}_{Nj}(s,x)dx+1\ , \qquad (3.12)$$

$$[s+\partial/\partial x+i\lambda_0+\lambda+\lambda^*+\mu_0(x)]\,\bar{P}_i(s,x)=(1-\delta_{i,N-1})(i+1)\lambda_0\bar{P}_{i+1}(s,x)\ , \quad K\leqq i\leqq N-1\ , \qquad (3.13)$$

$$[s+\partial/\partial x+\mu_0(x)]\,\bar{P}_{K-1}(s,x)=K\lambda_0\bar{P}_K(s,x)\ , \qquad (3.14)$$

$$[s+\partial/\partial x+\mu_j(x)]\,\bar{P}_{ij}(s,x)=0\ , \quad K\leqq i\leqq N,\quad 1\leqq j\leqq M\ , \qquad (3.15)$$

$$[s+\partial/\partial x+\mu^*_{m+M}(x)]\,\bar{Q}_0(s,x)=0\ , \qquad (3.16)$$

$$\bar{P}_i(s,0)=\delta_{i,N-1}N\lambda_0\bar{P}_N(s)+\int_0^\infty \mu_0(x)\bar{P}_{i-1}(s,x)dx+\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty \mu_j(x)\bar{P}_{ij}(s,x)dx$$

$$+\delta_{i,m}\int_0^\infty \mu^*_{m+M}(x)\bar{Q}_0(s,x)dx\ ,\quad K\leqq i\leqq N-1\ , \tag{3.17}$$

$$P_{K-1}(s,0)=0\ , \tag{3.18}$$

$$P_{ij}(s,0)=\lambda_j\bar{P}_i(s)\ ,\quad K\leqq i\leqq N,\quad 1\leqq j\leqq M\ , \tag{3.19}$$

$$\bar{Q}_0(s,0)=\lambda^*\sum_{i=K}^{N}\bar{P}_i(s)\ , \tag{3.20}$$

(3.15), (3.16), (3.19), (3.20) および (3.12) から (3.21)～(3.25) を得る。

$$\bar{P}_{ij}(s,x)=\lambda_j\bar{P}_i(s)\exp\left[-sx-\int_0^x\mu_j(y)dy\right]\ ,\quad K\leqq i\leqq N,\ 1\leqq j\leqq M\ , \tag{3.21}$$

$$\bar{P}_{ij}(s)=\int_0^\infty \bar{P}_{ij}(s,x)dx=\lambda_j\bar{P}_i(s)[1-\bar{f}_j(s)]/s\ ,\quad K\leqq i\leqq N,\ 1\leqq j\leqq M\ , \tag{3.22}$$

$$\bar{Q}_0(s,x)=\lambda^*\sum_{i=K}^{N}\bar{P}_i(s)\exp\left[-sx-\int_0^x\mu^*_{m+M}(y)dy\right]\ , \tag{3.23}$$

$$\bar{Q}_0(s)=\int_0^\infty Q_0(s,x)dx=\lambda^*\sum_{i=K}^{N}\bar{P}_i(s)[1-\bar{g}^*_{m+M}(s)]/s\ , \tag{3.24}$$

$$\alpha(s,N,\lambda^*)\bar{P}_N(s)=\int_0^\infty\mu_0(x)\bar{P}_{N-1}(s,x)dx+1\ , \tag{3.25}$$

ここに

$$\alpha(s,i,\lambda^*)=s+i\lambda_0+\lambda(1-\bar{f}(s))+\lambda^*\ ,\quad K\leqq i\leqq N$$

(3.13) を解くために離散的変換 (3.26), (3.27) ([7]) を導入する。

$$U_i(s,x)=\sum_{n=i}^{N-1}\binom{n}{i}\bar{P}_n(s,x)\ ,\quad K\leqq i\leqq N-1\ , \tag{3.26}$$

$$\bar{P}_i(s,x)=\sum_{n=i}^{N-1}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}U_n(s,x)\ ,\quad K\leqq i\leqq N-1. \tag{3.27}$$

(3.13), (3.26) から (3.28) が得られ，それを解くと (3.29) (3.30) を得る。

$$[s+\partial/\partial x+i\lambda_0+\lambda+\lambda^*+\mu_0(x)]U_i(s,x)=0\ ,\quad K\leqq i\leqq N-1\ , \tag{3.28}$$

$$U_i(s,x)=U_i(s,0)\exp\left[-(s+i\lambda_0+\lambda+\lambda^*)x-\int_0^x\mu_0(y)dy\right]\ . \tag{3.29}$$

$$U_i(s)=\int_0^\infty U_i(s,x)dx=U_i(s,0)[1-\bar{f}_0(s+i\lambda_0+\lambda+\lambda^*)]/(s+i\lambda_0+\lambda+\lambda^*) \tag{3.30}$$

(3.27), (3.29), (3.14), (3.18) および (3.25) から (3.31)～(3.35) を得る。

$$P_i(s,x)=\sum_{n=1}^{N-1}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}U_n(s,0)\exp\left[-(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)x-\int_0^x\mu_0(y)dy\right]\ ,\quad K\leqq i\leqq N-1\ , \tag{3.31}$$

$$\bar{P}_i(s)=\int_0^\infty\bar{P}_i(s,x)dx=\sum_{n=i}^{N-1}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}U_n(s,0)[1-\bar{f}_0(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)]/(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*),\quad K\leqq i\leqq N-1\ , \tag{3.32}$$

$$\bar{P}_{K-1}(s, x) = \exp[-\int_0^x (s+\mu_0(y))dy]\left\{\int_0^x \exp[\int_0^x (s+\mu_0(y))dy]\, K\lambda_0\bar{P}_K(s, x) + \bar{P}_{K-1}(s, 0)\right\}$$

$$= \exp[-sx - \int_0^x \mu_0(y)dy]\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n}{K}K\lambda_0 U_n(s, 0)$$

$$\cdot\{1-\exp[-(n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)x]\}/(n\lambda_0+\lambda+\lambda^*) \ , \qquad (3.33)$$

$$\bar{P}_{K-1}(s) = \int_0^\infty \bar{P}_{K-1}(s, x)dx = K\lambda_0\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n}{K}[U_n(s, 0)/(n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)]\,[(1-\bar{f}_0(s))/s$$

$$-(1-\bar{f}_0(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda_*))/(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)] \ , \qquad (3.34)$$

$$\bar{P}_N(s) = [\bar{f}_0(s+(N-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*)U_{N-1}(s, 0)+1]/\alpha(s, N, \lambda^*) \ . \qquad (3.35)$$

次に $U_K(s, 0), U_{K+1}(s, 0), \cdots, U_{N-1}(s, 0)$ および $U_{N-1}(s, 0)$ を求めよう。(3.23), (3.34) および (3.28) から (3.36) を得る。(3.36) を整理すると (3.37) となる。

$$U_i(s, 0) = \sum_{n=i}^{N-1}\binom{n}{i}\bar{P}_n(s, 0) = \sum_{n=i}^{N-1}\binom{n}{i}\left\{\delta_{n, N-1}N\lambda_0\bar{P}_N(s) + \int_0^\infty \mu_0(x)\bar{P}_{n-1}(s, x)dx\right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty \mu_j(x)\bar{P}_{nj}(s, x)dx + \delta_{n, m}\int_0^\infty \mu^*_{m+M}(x)\bar{Q}_0(s, x)dx\right\}$$

$$= \binom{N-1}{i}N\lambda_0\bar{P}_N(s) + \int_0^\infty \mu_0(x)\sum_{k=i-1}^{N-2}\binom{k+1}{i}P_k(s, x)dx$$

$$+ \sum_{j=1}^{M}\sum_{n=i}^{N-1}\binom{n}{i}\lambda_j\bar{P}_n(s)\bar{f}_j(s) + \binom{m}{i}\int_0^\infty \mu^*_{m+M}(x)\bar{Q}_0(s, x)dx$$

$$= \binom{N}{i}(N-i)\lambda_0\{\bar{f}_0(s+(N-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*)U_{N-1}(s, 0)+1\}/\alpha(s, N, \lambda^*)$$

$$+ \int_0^\infty \mu_0(x)\sum_{k=i-1}^{N-1}\left[\binom{k}{i}+\binom{k}{i-1}\right]\bar{P}_k(s, x)dx - \binom{N}{i}\int_0^x \mu_0(x)\bar{P}_{N-1}(s, x)dx$$

$$+ \lambda\bar{f}(s)\sum_{n=i}^{N-1}\binom{n}{i}\bar{P}_n(s) + \binom{m}{i}\lambda^*\bar{g}^*_{m+M}(s)\sum_{i=K}^{N}\bar{P}_i(s)$$

$$= \binom{N}{i}(N-i)\lambda_0\{\bar{f}_0(s+(N-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*)U_{N-1}(s, 0)+1\}/\alpha(s, N, \lambda^*)$$

$$+ \int_0^\infty \mu_0(x)U_{i-1}(s, x)\,dx + \int_0^\infty \mu_0(x)U_i(s, x)dx - \binom{N}{i}\int_0^\infty \mu_0(x)U_{N-1}(s, x)dx$$

$$+ \lambda f(s)\int_0^\infty \sum_{n=i}^{N-1}\binom{n}{i}\bar{P}_n(s, x)dx + \binom{m}{i}\lambda^*\bar{g}^*_{m+M}(s)\sum_{i=K}^{N}\bar{P}_i(s)$$

$$= \binom{N}{i}(N-i)\lambda_0\{\bar{f}_0(s+(N-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*)U_{N-1}(s, 0)+1\}/\alpha(s, N, \lambda^*)$$

$$+ \bar{f}_0(s+(i-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*)U_{i-1}(s, 0) + \bar{f}_0(s+i\lambda_0+\lambda+\lambda^*)U_i(s, 0)$$

$$-\binom{N}{i}\bar{f}_0(s+(N-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*)U_{N-1}(s, 0) + \lambda\bar{f}(s)\int_0^\infty U_i(s, x)dx$$

$$+\binom{m}{i}\lambda^*\bar{g}^*_{m+M}(s)\sum_{i=K}^{N}\bar{P}_i(s)$$

$$= \binom{N}{i}\{(N-i)\lambda_0 + [(N-i)\lambda_0 - \alpha(s, N, \lambda^*)]\,\bar{f}_0(s+(N-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*)U_{N-1}(s, 0)\}/$$

$$\alpha(s, N, \lambda^*) + \bar{f}_0(s+(i-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*)U_{i-1}(s, 0) + \bar{f}_0(s+i\lambda_0+\lambda+\lambda^*)U_i(s, 0)$$

$$+\lambda\bar{f}(s)[(1-\bar{f}_0(s+i\lambda_0+\lambda+\lambda^*))/(s+i\lambda_0+\lambda+\lambda^*)]\,U_i(s, 0)$$

$$+\binom{m}{i}\lambda^* g^*_{m+M}(s)\sum_{i=K}^{N}\bar{P}_i(s)\ , \tag{3.36}$$

$$\{1-\bar{f}_0(s+i\lambda_0+\lambda+\lambda^*) - \lambda\bar{f}(s)[(1-\bar{f}_0(s+i\lambda_0+\lambda+\lambda^*))/(s+i\lambda_0+\lambda+\lambda^*)]\}U_i(s, 0)$$

$$= f_0(s+(i-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*)U_{i-1}(s, 0) + \binom{m}{i}\lambda^*\bar{g}^*_{m+M}(s)\sum_{i=K}^{N}\bar{P}_i(s)$$

$$+\binom{N}{i}[(N-i)\lambda_0 - \alpha(s, i, \lambda^*)\bar{f}_0(s+(N-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*)U_{N-1}(s, 0)]/\alpha(s, N, \lambda^*)\ ,$$

$$K+1 \leqq i \leqq N-1\ . \tag{3.37}$$

(3. 38) で $V_i^{(1)}(s)$ を定義し，(3. 37) の両辺に $V_{i-1}^{(1)}(s)$ をかけて，$i=K+1, K+2, \cdots, i$ について加えると

$$V_i^{(1)}(s) = \begin{cases} \prod_{j=K+1}^{i}[1-\bar{f}_0(s+i\lambda_0+\lambda+\lambda^*) - \lambda\bar{f}(s)(1-\bar{f}_0(s+i\lambda_0+\lambda+\lambda^*))/(s+i\lambda_0+\lambda+\lambda^*)]\ , & K+1 \leqq i \leqq N-1\ , \\ 1\ , & i=K\ , \end{cases} \tag{3.38}$$

$$\bar{f}_0(s+i\lambda_0+\lambda+\lambda^*)V_i^{(1)}(s)U_i(s, 0) = \bar{f}_0(s+K\lambda_0+\lambda+\lambda^*)U_K(s, 0)$$

$$+\sum_{j=K+1}^{i}V_{j-1}^{(1)}(s)\left\{\binom{m}{i}\lambda^*\bar{g}^*_{m+M}(s)\sum_{j=K}^{N}\bar{P}_j(s) + \binom{N}{j}[(N-j)\lambda_0\right.$$

$$\left.-\alpha(s, j, \lambda^*)\bar{f}_0(s+(N-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*)U_{N-1}(s, 0)/\alpha(s, N, \lambda^*)\right\}\ , \tag{3.39}$$

となり，$i=N-1$ とおいて整理すると

$$\sum_{j=K+1}^{N}\binom{N}{j}[\alpha(s, j, \lambda^*)/\alpha(s, N, \lambda^*)]\,V_{j-1}^{(1)}(s)\bar{f}_0(s+(N-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*)U_{N-1}(s, 0)$$

$$= \bar{f}_0(s+K\lambda_0+\lambda+\lambda^*)\,U_K(s, 0) + \sum_{j=K+1}^{N-1}\binom{N}{j}(N-j)\lambda_0V_{j-1}^{(1)}(s)/\alpha(s, N, \lambda^*)$$

$$+\lambda^*\bar{g}^*_{m+M}(s)\sum_{j=K}^{N}\bar{P}_j(s)\sum_{j=K+1}^{N-1}\binom{m}{j}V_{j-1}(s) \tag{3.40}$$

従って

$$U_{N-1}(s, 0) = a_{N-1}^{(1)}(s)U_K(s, 0) + \lambda^*\bar{g}_{m+M}(s)\sum_{j=K}^{N}\bar{P}_j(s)b_{N-1}^{(1)}(s) + b_{N-1}^{(1)*}(s) \tag{3.41}$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}
a_{N-1}^{(1)}(s) &= \bar{f}_0(s+K\lambda_0+\lambda+\lambda^*)/[\bar{f}_0(s+(N-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*) \\
&\quad \cdot \sum_{j=K+1}^{N}\binom{N}{i}\alpha(s,i,\lambda^*)V_{j-1}^{(1)}(s)/\alpha(s,N,\lambda^*)] \ , \\
b_{N-1}^{(1)}(s) &= \sum_{j=K+1}^{N-1}\binom{m}{i}V_{j-1}(s)/[\bar{f}_0(s+(N-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*) \\
&\quad \cdot \sum_{j=K+1}^{N}\binom{N}{j}\alpha(s,j,\lambda^*)V_{j-1}^{(1)}(s)/\alpha(s,N,\lambda^*)] \ , \\
b_{N-1}^{(1)*}(s) &= \sum_{j=K+1}^{N-1}\binom{N}{j}(N-j)\lambda_0 V_{j-1}^{(1)}(s)/[\bar{f}_0(s+(N-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*) \\
&\quad \cdot \sum_{j=K+1}^{N}\binom{N}{j}\alpha(s,j,\lambda^*)V_{j-1}^{(1)}(s)] \ ,
\end{aligned}\right\} \tag{3·42}$$

(3.41) を (3.39) に代入して整理すると

$$U_i(s,0) = a_i^{(1)}(s)U_K(s,0)+\lambda^*\bar{g}_{m+M}^*(s)\sum_{j=K}^{N}\bar{P}_j(s)b_i^{(1)}(s)+b_i^{(1)*}(s) \ , \quad K+1 \leqq i \leqq N-1 \ , \tag{3.43}$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}
a_i^{(1)}(s) &= \bar{f}_0(s+K\lambda_0+\lambda+\lambda^*)C_{i+1,N}^{(1)}(s)/[\bar{f}_0(s+i\lambda_0+\lambda+\lambda^*)V_i^{(1)}(s)C_{K+1,N}^{(1)}(s)] \ , \\
b_i^{(1)}(s) &= [C_{K+1,N}^{(1)}(s)E_{K+1,i}^{(1),m}(s)-C_{K+1,i}^{(1)}(s)E_{K+1,N-1}^{(1),m}(s)]/ \\
&\qquad [\bar{f}_0(s+i\lambda_0+\lambda+\lambda^*)V_i^{(1)}(s)C_{K+1,N}^{(1)}(s)] \ , \\
b_i^{(1)}(s) &= [C_{K+1,N}^{(1)}(s)E_{K+1,i}^{(1)}(s)-C_{K+1,i}^{(1)}(s)E_{K+1,N-1}^{(1)}(s)]/ \\
&\qquad [\bar{f}_0(s+i\lambda_0+\lambda+\lambda^*)V_i^{(1)}(s)C_{K+1,N}^{(1)}(s)] \ , \\
c_{i,j}^{(1)}(s) &= \sum_{n=i}^{j}\binom{N}{n}\alpha(s,n,\lambda^*)V_{n-1}^{(1)}(s)/\alpha(s,N,\lambda^*) \ , \\
E_{i,j}^{(1)}(s) &= \sum_{n=i}^{j}\binom{N}{n}(N-n)\lambda_0 V_{n-1}^{(1)}(s)/\alpha(s,N,\lambda^*) \ , \quad E_{i,j}^{(1),m}(s) = \sum_{n=i}^{j}\binom{m}{n}V_{n-1}^{(1)}(s),
\end{aligned}\right\} \tag{3.44}$$

(3.43) が $i=N-1$ のとき成り立つことは容易に確められる。(3.32), (3.35) に (3.43) を代入し整理して $\sum_{j=K}^{N}\bar{P}_j(s)$ を求めると (3.45) を得る。

$$\sum_{j=K}^{N}\bar{P}_j(s) = k_1^{(1)}(s)U_K(s,0)+k_0^{(1)}(s) \tag{3.45}$$

ここに

$$\begin{aligned}
k_1^{(1)}(s) = \Big\{&1-\lambda^*\bar{g}_{m+M}^*(s)\bar{f}_0(s+(N-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*)b_{N-1}^{(1)}(s)/\alpha(s,N,\lambda^*) \\
&-\lambda^*\bar{g}_{m+M}^*(s)\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n-1}{K-1}(1-\bar{f}_0(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)) \\
&\cdot b_n^{(1)}(s)/(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)\Big\}^{-1}\Big\{\bar{f}_0(s+(N-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*)a_{N-1}^{(1)}(s)/
\end{aligned}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\alpha(s,N,\lambda^*)+\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n-1}{K-1}(1-\bar{f}_0(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*))\\
&\qquad\cdot a_n^{(1)}(s)/(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)\Big\}\\
k_0^{(1)\prime}(s)=&\Big\{1-\lambda^*\bar{g}^*_{m+M}(s)\bar{f}_0(s+(N-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*)b_{N-1}^{(1)}(s)/\alpha(s,N,\lambda^*)\\
&-\lambda^*\bar{g}^*_{m+M}(s)\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n-1}{K-1}(1-\bar{f}_0(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*))\\
&\cdot b_n^{(1)}(s)/(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)\Big\}^{-1}\Big\{[1+\bar{f}_0(s+(N-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*)b_{N-1}^{(1)*}(s)]/\\
&\alpha(s,N,\lambda^*)+\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n-1}{K-1}(1-\bar{f}_0(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*))\\
&\cdot b_n^{(1)*}(s)/(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)\Big\}
\end{aligned}
\right\}
\tag{3.46}
$$

(3.45) を (3.43) に代入して

$$U_i(s,0)=a_i^{(1)\prime}(s)U_K(s,0)+b_i^{(1)\prime}(s)\,,\quad K+1\leqq i\leqq N-1\,, \tag{3.47}$$

ここに

$$a_i^{(1)\prime}(s)=a_i^{(1)}(s)+\lambda^*\bar{g}^*_{m+M}(s)b_i^{(1)}(s)k_1^{(1)}(s),\ b_i^{(1)\prime}(s)=\lambda^*\bar{g}^*_{m+M}(s)b_i^{1)}(s)k_0^{(1)}(s)+b_i^{(1)*}(s)\,, \tag{3.48}$$

(3.47) より $U_K(s,0)$ を既知の項で表現すればすべての $U_i(s,0)$ $(K+1\leqq i\leqq N-1)$ が求められたことになる。$U_K(s,0)$ を決定するには，(3.26)，(3.27) は $i=K-1$ に対して定義されていないことを考慮し，(3.32)，(3.34)，(3.45) を用い (3.43) の計算と同様な方法を用いればよい。まず関係式 (3.49) を用いると (3.50) を得る。

$$\sum_{n=i}^{m}(-1)^n\binom{m}{n}\binom{n}{i}=\begin{cases}(-1)^i\,, & m=i\\ 0 & m\neq i\end{cases} \tag{3.49}$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty\mu_0(x)\sum_{n=K}^{N-1}\binom{n}{K}\bar{P}_{n-1}(s,x)dx&=\int_0^\infty\mu_0(x)\,[P_{K-1}(s,x)+\sum_{n=K+1}^{N-1}\binom{n}{K}\bar{P}_{n-1}(s,x)]\,dx\\
&=\int_0^\infty\mu_0(x)\bar{P}_{K-1}(s,x)dx+\int_0^\infty\mu_0(x)\sum_{\gamma=K}^{N-2}\binom{\gamma+1}{K}\bar{P}_\gamma(s,x)dx\\
&=\int_0^\infty\mu_0(x)\bar{P}_{K-1}(s,x)dx+\int_0^\infty\mu_0(x)\sum_{\gamma=K}^{N-1}\binom{\gamma+1}{K}\bar{P}_\gamma(s,x)dx-\binom{N}{K}\int_0^\infty\mu_0(x)P_{N-1}(s,x)dx\\
&=\int_0^\infty\mu_0(x)\bar{P}_{K-1}(s,x)dx+\int_0^\infty\mu_0(x)\sum_{\gamma=K}^{N-1}\left[\binom{\gamma}{K}+\binom{\gamma}{K-1}\right]\bar{P}_\gamma(s,x)dx\\
&\quad-\binom{N}{K}\int_0^\infty\mu_0(x)\bar{P}_{N-1}(s,x)dx
\end{aligned}
$$

$$= \int_0^\infty \mu_0(x)\bar{P}_{K-1}(s,x)\,dx + \int_0^\infty \mu_0(x)U_K(s,x)dx$$

$$+\sum_{r=K}^{N-1}\binom{r}{K-1}\int_0^\infty \mu_0(x)\sum_{n=r}^{N-1}(-1)^{n-r}\binom{n}{r}U_n(s,x)dx-\binom{N}{K}\int_0^\infty \mu_0(x)U_{N-1}(s,x)dx$$

$$=\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n}{K}K\lambda_0U_n(s,0)[\bar{f}_0(s)-\bar{f}_0(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)]/(n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)$$

$$+\bar{f}_0(s+K\lambda_0+\lambda+\lambda^*)U_K(s,0)+\sum_{r=K}^{N-1}\binom{r}{K-1}\sum_{n=r}^{N-1}(-1)^{n-r}\binom{n}{r}\bar{f}_0(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)$$

$$\cdot U_n(s,0)-\binom{N}{K}\bar{f}_0(s+(N-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*)U_{N-1}(s,0)$$

$$=\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n}{K}K\lambda_0U_n(s,0)[\bar{f}_0(s)-\bar{f}_0(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)]/(n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)$$

$$+\bar{f}_0(s+K\lambda_0+\lambda+\lambda^*)U_K(s,0)+\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n}{K-1}\bar{f}_0(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)U_n(s,0)$$

$$-\binom{N}{K}\bar{f}_0(s+(N-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*)U_{N-1}(s,0)\ , \tag{3.50}$$

従って (3.26), (3.17) より (3.51) を得る。

$$U_K(s,0)=\sum_{n=K}^{N-1}\binom{n}{K}\bar{P}_n(s,0)$$

$$=\binom{N-1}{K}N\lambda_0\bar{P}_N(s,0)+\int_0^\infty \mu_0(x)\sum_{n=K}^{N-1}\binom{n}{K}\bar{P}_{n-1}(s,x)dx$$

$$+\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty \mu_0(x)\sum_{n=K}^{N-1}\binom{n}{K}\bar{P}_{nj}(s,x)dx+\binom{m}{K}\int_0^\infty \mu^*_{m+M}(x)\bar{Q}^*_0(s,x)dx$$

$$=\binom{N-1}{K}N\lambda_0\{\bar{f}_0(s+(N-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*)U_{N-1}(s,0)+1\}/\alpha(s,N,\lambda^*)$$

$$+\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n}{K}K\lambda_0U_n(s,0)[\bar{f}_0(s)-\bar{f}_0(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)]/(n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)$$

$$+\bar{f}_0(s+K\lambda_0+\lambda+\lambda^*)U_K(s,0)+\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n}{K-1}\bar{f}_0(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)U_n(s,0)$$

$$-\binom{N}{K}\bar{f}_0(s+(N-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*)U_{N-1}(s,0)$$

$$+\lambda\bar{f}(s)U_K(s,0)(1-\bar{f}_0(s+K\lambda_0+\lambda+\lambda^*))/(s+K\lambda_0+\lambda+\lambda^*)$$

$$+\binom{m}{K}\lambda^*\bar{g}^*_{m+M}(s)\sum_{j=K}^{N}\bar{P}_j(s)\ , \tag{3.51}$$

(3.45), (3.47) を (3.51) に代入し $U_K(s,0)$ について整理すると

$$U_K(s,0)=\left\{\binom{N}{K}[(N-K)\lambda_0-\alpha(s,K,\lambda^*)\bar{f}_0(s+(N-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*)b^{(1)}_{N-1}(s)]/\alpha(s,N,\lambda^*)\right.$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\Big[\binom{n}{K-1}\bar{f}_0(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)\\
&+\binom{n}{K}K\lambda_0(\bar{f}_0(s)-\bar{f}_0(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*))/(n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)\Big]b_n^{(1)}{}'(s)\\
&+\binom{m}{K}\lambda^*\bar{g}_{m+M}^*(s)k_0^{(1)}(s)\Big\}\Big\{1-\bar{f}_0(s+K\lambda_0+\lambda+\lambda^*)\\
&-\lambda\bar{f}(s)[1-\bar{f}_0(s+K\lambda_0+\lambda+\lambda^*)]/(s+K\lambda_0+\lambda+\lambda^*)\\
&+\binom{N}{K}\alpha(s,K,\lambda^*)\bar{f}_0(s+(N-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*)a_{N-1}^{(1)}{}'(s)/\alpha(s,N,\lambda^*)\\
&-\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\Big[\binom{n}{K-1}\bar{f}_0(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)\\
&+\binom{n}{K}K\lambda_0(\bar{f}_0(s)-\bar{f}_0(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*))/(n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)\Big]a_n^{(1)}{}'(s)\\
&-\binom{m}{K}\lambda^*\bar{g}_{m+M}^*(s)k_1^{(1)}(s)\Big\}^{-1},
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

となる。以上のことより時点アベイラビリティのラプラス変換 $\bar{P}_A(s)$ は (3.46), (3.52) を用いて (3.45) で与えられる。また**信頼度関数 $R(t)$ のラプラス変換 $\bar{R}(s)$ は適当な変換**を行うことによって $\bar{P}_A(s)$ から得られる。すなわち $\bar{f}(s)=0$(S_1 の停止によってシステム停止になったとき，システムが作動状態になる確率が 0 であることを意味する)，$(\bar{f}_0(s)-\bar{f}_0(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*))=0$，$K\leqq n\leqq N-1$ (S_0 の停止によってシステム停止になったとき，システムが作動状態になる確率が 0 であることを意味する)，$\bar{g}_{m+M}^*(s)=0$ (同時故障によってシステム停止になったとき，システムが作動状態になる確率が 0 であることを意味する) とおくとき，

$$
\alpha(s,i,\lambda^*)=s+i\lambda_0+\lambda+\lambda^*, \tag{3.35}
$$

$$
V_i^{(1)}(s)=\begin{cases}\prod_{j=K+1}^{i}[1-\bar{f}_0(s+i\lambda_0+\lambda+\lambda^*)]\bar{f}_0(s+i\lambda_0+\lambda+\lambda^*), & K+1\leqq i\leqq N-1 .\\ 1 & ,\ i=K\end{cases} \tag{3.54}
$$

となり，これらを $\bar{P}_A(s)$ に代入して $\bar{R}(s)$ が得られる。従ってつぎの 2 つの定理が得られる。

定理 1　システムの時点アベイラビリティ $P_A(t)$ のラプラス変換 $\bar{P}_A(s)$ は (3.45) で与えられる。ただし，$k_1^{(1)}(s)$, $k_0^{(1)}(s)$ および $U_K(s,0)$ はそれぞれ (3.46) および (3.52) で与えられる。

定理 2　システムの信頼度関数 $R(t)$ のラプラス変換形 $\bar{R}(s)$ は (3.45) で与えられる。ただし，$\bar{f}(s)=0$, $(\bar{f}_0(s)-\bar{f}_0(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*))=0$，$K\leqq n\leqq N-1$, $\bar{g}_{m+M}^*(s)=0$ であり，$\alpha(s,i,\lambda^*)$ および $V_i^{(1)}(s)$ は (3.53) および (3.54) で与えられる。また MTSF は $\bar{R}(0)$ で与えられる。

4. 定常アベイラビリティ

この節では長時間システムを使用したときのシステムの稼動率を調べるために定常状態における状態確率を求める。そのため次の確率関数を定義する。

$$P_N=\lim_{t\to\infty}P_N(t)\ ,\ \ P_i(x)=\lim_{t\to\infty}P_i(t,x)\ ,\ \ (K-1\leqq i\leqq N-1)\ ,$$
$$P_{ij}(x)=\lim_{t\to\infty}P_{ij}(t,x)\ \ (K\leqq i\leqq N\ ,\ \ 1\leqq j\leqq M)$$
$$Q_0(x)=\lim_{t\to\infty}Q_0(t,x)\ ,\ \ P_i=\int_0^\infty P_i(x)dx\ ,\ \ P_{ij}=\int_0^\infty P_{ij}(x)dx\ ,\ \ Q_0=\int_0^\infty Q_0(x)dx\ .$$

とあくと，次の**差分・微分・積分方程式**を得る。

$$[N\lambda_0+\lambda+\lambda^*]P_N=\int_0^\infty\mu_0(x)P_{N-1}(x)dx+\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty\mu_j(x)P_{Nj}(x)dx\ , \tag{4.1}$$

$$[d/dx+i\lambda_0+\lambda+\lambda^*+\mu_0(x)]P_i(x)=(1-\delta_{i,N-1})(i+1)\lambda_0P_{i+1}(x)\ ,\ \ K\leqq i\leqq N-1\ , \tag{4.2}$$

$$[d/dx+\mu_0(x)]P_{K-1}(x)=K\lambda_0P_K(x)\ , \tag{4.3}$$

$$[d/dx+\mu_j(x)]P_{ij}(x)=0\ ,\ \ K\leqq i\leqq N\ ,\ 1\leqq j\leqq M\ , \tag{4.4}$$

$$[d/dx+\mu^*_{m+M}(x)]Q_0(x)=0\ , \tag{4.5}$$

境界条件:

$$P_i(0)=\delta_{i,N-1}N\lambda_0P_N+\int_0^\infty\mu_0(x)P_{i-1}(x)dx+\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty\mu_j(x)P_{ij}(x)$$
$$+\delta_{i,m}\int_0^\infty\mu^*_{m+M}(x)Q_0(x)dx\ ,\ \ K\leqq i\leqq N-1\ , \tag{4.6}$$

$$P_{k-1}(0)=0\ , \tag{4.7}$$

$$P_{Nj}(0)=\lambda_jP_N\ ,\ \ 1\leqq j\leqq M\ , \tag{4.8}$$

$$P_{ij}(0)=\lambda_j\int_0^\infty P_i(x)dx=\lambda_jP_i\ ,\ \ K\leqq i\leqq N-1\ ,\ 1\leqq j\leqq M\ , \tag{4.9}$$

$$Q_0(0)=\lambda^*P_N+\lambda^*\sum_{i=K}^{N-1}\int_0^\infty P_i(x)dx=\lambda^*\sum_{i=K}^{N}P_i \tag{4.10}$$

正規条件:

$$P_N+\sum_{i=K}^{N-1}\int_0^\infty P_i(x)dx+\int_0^\infty P_{K-1}(x)dx+\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty P_{Nj}(x)dx+\sum_{i=K}^{N-1}\sum_{j=1}^{M}\int_0^\infty P_{ij}(x)dx+\int_0^\infty Q_0(x)dx=1\ , \tag{4.11}$$

(4.4), (4.8), (4.9), (4.5), (4.10) および (4.1) より (4.12)～(4.16) を得る。

$$P_{ij}(x)=\lambda_jP_i\exp\left[-\int_0^x\mu_j(y)dy\right]\ , \tag{4.12}$$

$$P_{ij} = \int_0^\infty P_{ij}(x)dx = \lambda_j K_j P_i \ , \tag{4.13}$$

$$Q_0(x) = \lambda^* \sum_{i=K}^{N} P_i \exp\left[-\int_0^x \mu^*_{m+M}(y)dy\right] \tag{4.14}$$

$$Q_0 = \int_0^\infty Q_0(x)dx = \lambda^* K^*_{m+M} \sum_{i=K}^{N} P_i \ , \tag{4.15}$$

$$[N\lambda_0 + \lambda^*] P_N = \int_0^\infty \mu_0(x) P_{N-1}(x)dx \tag{4.16}$$

$P_i(i=K, \cdots, N)$ は定常状態でシステムが動作中で，S_0 の i 個のユニットが動作している確率，P_{K-1} は定常状態で S_0 の停止でシステムが停止（システム故障）している確率，Q_0 は定常状態で同時故障によりシステムが停止している確率を表している。

(4.2) に**離散的変換** (4.17) を用いると ((4.19) を得る。

$$\begin{cases} U_i(x) = \sum_{n=1}^{N-1} \binom{n}{i} P_n(x) \ , \quad K \leqq i \leqq N-1 \ , & (4.17) \\ P_i(x) = \sum_{n=i}^{N-1} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} U_n(x) \ , \quad K \leqq i \leqq N-1 \ , & (4.18) \end{cases}$$

$$[d/dx + i\lambda_0 + \lambda + \lambda^* + \mu_0(x)] U_i(x) = 0 \ , \quad K \leqq i \leqq N-1 \tag{4.19}$$

(4.19) を解くと

$$U_i(x) = U_i(0) \exp\left[-(i\lambda_0 + \lambda + \lambda^*)x - \int_0^x \mu_0(y)dy\right] \ , \tag{4.20}$$

$$U_i = \int_0^\infty U_i(x)dx = U_i(0)(1 - \bar{f}_0(i\lambda_0 + \lambda + \lambda^*))/(i\lambda_0 + \lambda + \lambda^*) \ , \tag{4.21}$$

を得る。(4.20) と (4.18) より (4.22), (4.23) を得る。さらに (4.22) を (4.16) に代入して (4.24) を得る。

$$P_i(x) = \sum_{n=i}^{N-1} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} U_n(0) \exp\left[-(n\lambda_0 + \lambda + \lambda^*)x - \int_0^x \mu_0(y)dy\right] \ , \quad K \leqq i \leqq N-1 \ , \tag{4.22}$$

$$P_i = \int_0^\infty P_i(x)dx = \sum_{n=i}^{N-1} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} U_n(0)(1 - \bar{f}_0(n\lambda_0 + \lambda + \lambda^*))/(n\lambda_0 + \lambda + \lambda^*) \ , \quad K \leqq i \leqq N-1 \ , \tag{4.23}$$

$$[N\lambda_0 + \lambda^*] P_N = \bar{f}_0((N-1)\lambda_0 + \lambda + \lambda^*) U_{N-1}(0) \ , \tag{4.24}$$

(4.22), (4.3) および (4.7) より

$$P_{K-1}(x) = \exp\left[-\int_0^x \mu_0(y)dy\right] \sum_{n=K}^{N-1} \binom{n}{K} K\lambda_0 U_n(0) \{1 - \exp[-(n\lambda_0 + \lambda + \lambda^*)x]\}/(n\lambda_0 + \lambda + \lambda^*) \ , \tag{4.25}$$

$$P_{K-1}=\int_0^\infty P_{K-1}(x)dx=\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n}{K}K\lambda_0U_n(0)[K_0$$
$$-(1-\bar{f}_0(n\lambda_0+\lambda+\lambda^*))/(n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)]/(n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)\ , \tag{4.26}$$

となり，(4.17) に (4.6) を代入して (3.37) と同様にして (4.27) を得る。

$$\{1-\bar{f}_0(i\lambda_0+\lambda+\lambda^*)-\lambda[1-\bar{f}_0(i\lambda_0+\lambda+\lambda^*)]/(i\lambda_0+\lambda+\lambda^*)\}U_i(0)$$
$$=\bar{f}_0((i-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*)U_{i-1}(0)-(i\lambda_0+\lambda^*)\binom{N}{i}\bar{f}_0((N-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*)U_{N-1}(0)/(N\lambda_0+\lambda^*)$$
$$+\lambda^*\binom{m}{i}\sum_{i=K}^{N}P_i\ , \tag{4.27}$$

(4.27) の両辺に $V_{i-1}^{(1)}(0)$ をかけて $i=K+1, K+2, \cdots, i$ について加えると (4.28) を得る。

$$\bar{f}_0(i\lambda_0+\lambda+\lambda^*)V_i^{(1)}(0)U_i(0)=\bar{f}_0(K\lambda_0+\lambda+\lambda^*)U_K(0)+\lambda^*\sum_{n=K}^{N}P_n\sum_{j=K+1}^{i}\binom{m}{i}V_{j-1}^{(1)}(0)$$
$$-[\bar{f}_0((N-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*)U_{N-1}(0)/(N\lambda_0+\lambda^*)]\sum_{j=K+1}^{i}\binom{N}{j}(j\lambda_0+\lambda^*)V_{j-1}^{(1)}(0)\ , \tag{4.28}$$

(4.28) で $i=N-1$ とおいて整理すると

$$U_{N-1}(0)=a_{N-1}^{(1)}(0)U_K(0)+\lambda^*\sum_{j=K}^{N}P_jb_{N-1}^{(1)}(0) \tag{4.29}$$

となり，(4.29) を (4.28) に代入し整理すると (4.30) を得る。

$$U_i(0)=a_i^{(1)}(0)U_K(0)+\lambda^*\sum_{j=K}^{N}P_jb_i^{(1)}(0)\ ,\quad K\leqq i\leqq N-1\ , \tag{4.30}$$

(4.30) が $i=N-1$ で成立することは容易に確められる。(4.23), (4.24) に (4.30) を代入し，$\sum_{i=K}^{N-1}\sum_{n=i}^{N-1}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}f_n=\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n-1}{K-1}f_n$ に注意すると

$$\sum_{i=K}^{N}P_i=\bar{f}_0((N-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*)[a_{N-1}^{(1)}(0)U_K(0)+\lambda^*b_{N-1}^{(1)}(0)\sum_{i=K}^{N}P_i]/(N\lambda_0+\lambda^*)$$
$$+\sum_{i=K}^{N-1}\sum_{n=i}^{N-1}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}[a_n^{(1)}(0)U_K(0)+\lambda^*b_n^{(1)}(0)\sum_{i=K}^{N}P_i]$$
$$\cdot[1-\bar{f}_0(n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)]/(n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)$$
$$=[\bar{f}_0((N-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*)a_{N-1}^{(1)}(0)/(N\lambda_0+\lambda^*)$$
$$+\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n-1}{K-1}a_n^{(1)}(0)(1-\bar{f}_0(n\lambda_0+\lambda+\lambda^*))/(n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)]U_K(0)$$
$$+\sum_{i=K}^{N}P_i[\lambda^*\bar{f}_0((N-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*)b_{N-1}^{(1)}(0)/(N\lambda_0+\lambda^*)$$
$$+\lambda^*\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n-1}{K-1}b_n^{(1)}(0)(1-\bar{f}_0(n\lambda_0+\lambda+\lambda^*))/(n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)] \tag{4.31}$$

となり，$\sum_{i=K}^{N} P_i$ について解くと

$$\sum_{i=K}^{N} P_i = k_1^{(1)}(0)U_K(0) \ , \tag{4.32}$$

を得る。(4.32) を (4.30) に代入して (4.33) を得る。

$$U_i(0) = [a_i^{(1)}(0) + \lambda^* k_1^{(1)}(0) b_i^{(1)}(0)] U_K(0) = a_i^{(1)\prime}(0) U_K(0) \ , \quad K+1 \leqq i \leqq N-1 \ , \tag{4.33}$$

正規条件，(4.13)，(4.15)，(4.23)，(4.25)，(4.32) および (4.33) より

$$1 = \sum_{n=K}^{N} P_n + P_{K-1} + P_N \sum_{j=1}^{M} \lambda_j K_j + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j K_j \sum_{i=K}^{N-1} P_i + \lambda^* K_{m+M}^* \sum_{i=K}^{N} P_i$$

$$= k_1^{(1)}(0)[1 + \lambda^* K_{m+M}^* + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j K_j] \, U_K(0) + \sum_{n=K}^{N-1} (-1)^{n-K} \binom{n}{K} [K\lambda_0/(n\lambda_0 + \lambda + \lambda^*)]$$

$$\cdot [K_0 - (1 - \bar{f}_0(n\lambda_0 + \lambda + \lambda^*))/(n\lambda_0 + \lambda + \lambda^*)] \, a_n^{(1)\prime}(0) U_K(0)$$

となり，(4.34) を得る。

$$U_K(0) = \left\{ k_1^{(1)}(0)[1 + \lambda^* K_{m+M}^* + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j K_j] + \sum_{n=K}^{N-1} (-1)^{n-K} \binom{n}{K} [K\lambda_0/(n\lambda_0 + \lambda + \lambda^*)] \right.$$

$$\left. \cdot [K_0 - (1 - \bar{f}_0(n\lambda_0 + \lambda + \lambda_0))/(n\lambda_0 + \lambda + \lambda^*)] \, a_n^{(1)\prime}(0) \right\}^{-1} \tag{4.34}$$

つぎに $k_1^{(1)}(0)$ と $a_i^{(1)\prime}(0)$ の関係を求めておこう。(3.46) より

$$k_1^{(1)}(0) \left\{ 1 - \lambda^* \bar{f}_0((N-1)\lambda_0 + \lambda + \lambda^*) b_{N-1}^{(1)}(0)/(N\lambda_0 + \lambda^*) \right.$$

$$\left. - \lambda^* \sum_{n=K}^{N-1} (-1)^{n-K} \binom{n-1}{K-1} (1 - \bar{f}_0(n\lambda_0 + \lambda + \lambda^*)) b_n^{(1)}(0)/(n\lambda_0 + \lambda + \lambda^*) \right\}$$

$$= \bar{f}_0((N-1)\lambda_0 + \lambda + \lambda^*) a_{N-1}^{(1)}(0)/(N\lambda_0 + \lambda^*)$$

$$+ \sum_{n=K}^{N-1} (-1)^{n-K} \binom{n-1}{K-1} (1 - \bar{f}_0(n\lambda_0 + \lambda + \lambda^*)) a_n^{(1)}(0)/(n\lambda_0 + \lambda + \lambda^*)$$

となり，左辺の第2項以下を右辺に移項して (3.48) を用いて整理すると (4.35) を得る。

$$k_1^{(1)}(0) = \bar{f}_0((N-1)\lambda_0 + \lambda + \lambda^*)[a_{N-1}^{(1)}(0) + \lambda^* b_{N-1}^{(1)}(0) k_1^{(1)}(0)]$$

$$+ \sum_{n=K}^{N-1} (-1)^{n-K} \binom{n-1}{K-1} [(1 - \bar{f}_0(n\lambda_0 + \lambda + \lambda^*))/(n\lambda_0 + \lambda + \lambda^*)]$$

$$\cdot [a_n^{(1)}(0) + \lambda^* b_n^{(1)}(0) k_1^{(1)}(0)]$$

$$= \bar{f}_0((N-1)\lambda_0 + \lambda + \lambda^*) a_{N-1}^{(1)\prime}(0)/(N\lambda_0 + \lambda^*)$$

$$+ \sum_{n=K}^{N-1} (-1)^{n-K} \binom{n-1}{K-1} [(1 - \bar{f}_0(n\lambda_0 + \lambda + \lambda^*))/(n\lambda_0 + \lambda + \lambda^*)] \, a_n^{(1)\prime}(0) \tag{4.35}$$

以上のことより次の定理を得る。

定理3 定常アベイラビリティ $P_A = \sum_{n=K}^{N} P_n$ は (4.32) で与えられる。ただし，$k_1^{(1)}(0)$ は (3.46)

式で $s=0$ として得られ，(4.35) 式のように表現できる。$U_K(0)$ は (4.34) 式で与えられる。

定理 4　定常状態における状態確率 P_i $(K \leqq i \leqq N-1)$, P_N, P_{K-1} および Q_0 はそれぞれ (4.23), (4.24), (4.26) および (4.15) 式で与えられる。ただし $U_n(0)$ $(K+1 \leqq n \leqq N-1)$, $U_K(0)$ および $\sum_{n=K}^{N} P_i$ はそれぞれ (4.33), (4.34) および (4.32) 式で与えられる。

定理 3 はシステムを長時間使用したときの稼動率を表わす定常アベイラビリティが既知の項を用いて具体的に陽な形で表現できることを示している。

特殊な場合

1)　$\lambda^* = 0$.　このとき (4.35) を用いて

$$U_K(0) = \Bigl\{k_1^{(1)}(0)\Bigl(1+\sum_{j=1}^{N}\lambda_j K_j\Bigr)+\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n}{K}[K\lambda_0/(n\lambda_0+\lambda)]$$

$$\cdot[K_0-(1-\bar{f}_0(n\lambda_0+\lambda))/(n\lambda_0+\lambda)]\,a_n^{(1)}(0)\Bigr\}^{-1}$$

$$= \Bigl\{\Bigl(1+\sum_{j=1}^{M}\lambda_j K_j\Bigr)[\bar{f}_0((N-1)\lambda_0+\lambda)a_{N-1}^{(1)}(0)/N\lambda_0$$

$$+\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n-1}{K-1}(1-\bar{f}_0(n\lambda_0+\lambda))a_n^{(1)}(0)/(n\lambda_0+\lambda)]$$

$$+\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n}{K}[K_0-(1-\bar{f}_0(n\lambda_0+\lambda))/(n\lambda_0+\lambda)]\,a_n^{(1)}(0)/(n\lambda_0+\lambda)\Bigr\}^{-1}, \tag{4.36}$$

となり，拙稿〔7〕のモデル 5 の (30)′ 式に一致する。

2)　$\lambda = 0$.　このとき (4.35) を用いて

$$P_A = \sum_{n=K}^{N} P_n = U_K(0)\Bigl\{\bar{f}_0((N-1)\lambda_0+\lambda^*)a_{N-1}^{(1)}(0)/(N\lambda_0+\lambda^*)$$

$$+\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n-1}{K-1}[(1-\bar{f}_0(n\lambda_0+\lambda^*))/(n\lambda_0+\lambda^*)]\,a_n^{(1)\prime}(0)\Bigr\} \tag{4.37}$$

ここに

$$U_K(0) = \Bigl\{(1+\lambda^* K_{m+M}^*)\bar{f}_0((N-1)\lambda_0+\lambda^*)a_{N-1}^{(1)}(0)/(N\lambda_0+\lambda^*)$$

$$+\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\binom{n-1}{K-1}a_n^{(1)\prime}(0)\,[n\lambda_0 K_0/(n\lambda_0+\lambda^*)$$

$$+\lambda^*(1-\bar{f}_0(n\lambda_0+\lambda^*))(K_{m+M}^*+1/(n\lambda_0+\lambda^*))/(n\lambda_0+\lambda^*)]\Bigr\}^{-1}, \tag{4.38}$$

(4.37) 式および (4.38) 部はそれぞれ拙稿〔10〕の (29) 式および (28) 式に一致する。

5.　同時故障後すべてのユニットを保全する場合

同時故障によってシステム停止になったとき，すべての故障ユニットの保全を行う場合は前節ま

での解析には含まれなかった。すなわち $1 \leqq K \leqq m \leqq N-1$ ((i)) の解析が前節までのものである。この節では $m=N$ の場合を2つの場合にわけて解析する。

(ii) $1 \leqq K \leqq N-1$, $m=N$

(3.2), (3.3), (3.4), (3.7), (3.8), (3.9), (3.10), (3.11) はそのまま残り，新しく3つの方程式が追加される。

$$[d/dt+N\lambda_0+\lambda+\lambda^*]P_N(t)=\int_0^t \mu_0(x)P_N(t,x)dx+\sum_{j=1}^{M}\int_0^t \mu_j(x)P_{Nj}(t,x)dx$$
$$+\int_0^t \mu_{N+M}^*(x)Q_0(t,x)dx\,, \tag{5.1}$$

$$[\partial/\partial t+\partial/\partial x+\mu_{N+M}^*(x)]Q_0(t,x)=0\,, \tag{5.2}$$

$$P_i(t,0)=\delta_{i,N-1}N\lambda_0P_N(t)+\int_0^t \mu_0(x)P_{i-1}(t,x)dx+\sum_{j=1}^{M}\int_0^t \mu_j(x)P_{ij}(t,x)dx \tag{5.3}$$

（i）と同様な解析により次の結果を得る。

$$\bar{P}_N(s)=\left\{\bar{f}_0(s+(N-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*)U_{N-1}(s,0)+1+\lambda^*\bar{g}_{N+M}^*(s)\sum_{i=K}^{N}\bar{P}_i(s)\right\}/\alpha(s,N,\lambda^*)\,, \tag{5.4}$$

$$\bar{P}_i(s)=\sum_{n=i}^{N-1}(-1)^{n-i}\binom{n}{i}U_n(s,0)[1-\bar{f}_0(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)]/(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)\,,$$
$$1\leqq i\leqq N-1\,, \tag{5.5}$$

$$U_n(s,0)=a_n^{(2)\prime}(s)U_K(s,0)+b_n^{(2)*\prime}(s)\,,\quad K+1\leqq n\leqq N-1\,, \tag{5.6}$$

$$\bar{P}_A(s)=\sum_{i=K}^{N}\bar{P}_i(s)=k_1^{(2)}(s)U_K(s,0)+k_0^{(2)}(s) \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}U_K(s,0)=&\left\{\binom{N}{K}[(N-K)N\lambda_0(1+\lambda^*\bar{g}_{N+M}^*(s)k_0^{(2)}(s))\right.\\&-\alpha(s,K,\lambda^*)f(s+(N-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*)b_{N-1}^{(1)*\prime}(s)]/\alpha(s,N,\lambda^*)\\&+\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\left[\binom{n}{K-1}\bar{f}_0(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)\right.\\&\left.\left.+\binom{n}{K}k\lambda_0(\bar{f}_0(s)-f_0(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*))/(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)\right]b_n^{(1)\prime}(s)\right\}\\&\cdot\left\{1-\bar{f}_0(s+K\lambda_0+\lambda+\lambda^*)-\lambda\bar{f}(s)(1-\bar{f}_0(t+K\lambda_0+\lambda+\lambda^*))/(s+K\lambda_0+\lambda+\lambda^*)\right.\\&+\binom{N}{K}[\alpha(s,K,\lambda^*)\bar{f}_0(s+(N-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*)a_{N-1}^{(1)\prime}(s)\\&-(N-K)\lambda_0\lambda^*\bar{g}_{N+M}^*(s)k_1^{(2)}(s)]/\alpha(s,N,\lambda^*)\\&-\sum_{n=K}^{N-1}(-1)^{n-K}\left[\binom{n}{K-1}\bar{f}_0(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)\right.\\&\left.\left.+\binom{n}{K}K\lambda_0(\bar{f}_0(s)-\bar{f}_0(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*))/(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)\right]a_n^{(1)\prime}(s)\right\}^{-1}\,,\end{aligned} \tag{5.8}$$

$$a_n^{(2)\prime}(s) = a_n^{(1)}(s) + \lambda^* \bar{g}_{N+M}^*(s) k_1^{(2)}(s) b_n^{(1)*}(s)\ ,\quad K+1 \leqq n \leqq N-1\ , \tag{5.9}$$

$$b_n^{(2)*\prime}(s) = (1+\lambda^* \bar{g}_{N+M}^*(s) k_0^{(2)}(s)) b_n^{(1)*}(s)\ ,\quad K+1 \leqq n \leqq N-1\ , \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned} k_1^{(2)}(s) = \Big\{ & 1-\lambda^* \bar{g}_{N+M}^*(s)\,[1+f_0(s+(N-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*) b_{N-1}^{(1)*}(s)]/\alpha(s,N,\lambda^*) \\ & -\lambda^* \bar{g}_{N+M}^*(s) \sum_{n=K}^{N-1} (-1)^{n-K} \binom{n-1}{K-1} \\ & \cdot [(1-\bar{f}_0(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*))/(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)]\, b_n^{(1)*}(s) \Big\}^{-1} \\ & \cdot \Big\{ \bar{f}_0(s+(N-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*) a_{N-1}^{(1)}(s)/\alpha(s,N,\lambda^*) \\ & + \sum_{n=K}^{N-1} (-1)^{n-K} \binom{n-1}{K-1} [(1-\bar{f}_0(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*))/(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)]\, a_n^{(1)}(s) \Big\}\ , \end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned} k_2^{(0)}(s) = \Big\{ & 1-\lambda^* \bar{g}_{N+M}^*(s)\,[1+\bar{f}_0(s+(N-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*) b_{N-1}^{(1)*}(s)]/\alpha(s,N,\lambda^*) \\ & -\lambda^* \bar{g}_{N+M}^*(s) \sum_{n=K}^{N-1} (-1)^{n-K} \binom{n-1}{K-1} \\ & \cdot [(1-\bar{f}_0(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*))/(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)]\, b_n^{(1)*}(s) \Big\}^{-1} \\ & \cdot \Big\{ [1+\bar{f}_0(s+(N-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*) b_{N-1}^{(1)*}(s)]/\alpha(s,N,\lambda^*) \\ & + \sum_{n=K}^{N-1} (-1)^{n-K} \binom{n-1}{K-1} [(1-f_0(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*))/(s+n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)]\, b_n^{(1)*}(s) \Big\}\ , \end{aligned} \tag{5.12}$$

定常アベイラビリティ　(4.2)～(4.4), (4.7)～(4.11) はそのまま残り，新しく次の3つの方程式が追加される。諸結果が (5.16)～(5.24) に示される。

$$[N\lambda_0+\lambda+\lambda^*]P_N = \int_0^\infty \mu_0(x)P_{N-1}(x)dx + \sum_{j=1}^M \int_0^\infty \mu_j(x)P_{Nj}(x)dx + \int_0^\infty \mu_{N+M}^*(x)Q_0(x)dx\ , \tag{5.18}$$

$$[d/dx+\mu_{N+M}^*(x)]Q_0(x) = 0\ , \tag{5.14}$$

$$P_i(0) = \delta_{i,N-1}N\lambda_0 P_N + \int_0^\infty \mu_0(x)P_{i-1}(x)dx + \sum_{j=1}^M \int_0^\infty \mu_j(x)P_{ij}(x)dx\ , \tag{5.15}$$

諸結果:

$$P_N = \Big\{ \bar{f}_0((N-1)\lambda_0+\lambda+\lambda^*)U_{N-1}(0) + \lambda^* \sum_{i=K}^N P_i \Big\} / (N\lambda_0+\lambda^*)\ , \tag{5.16}$$

$$P_i = \sum_{n=i}^{N-1} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} U_i(0)(1-\bar{f}_0(i\lambda_0+\lambda+\lambda_*))/(i\lambda_0+\lambda+\lambda^*)\ ,\quad K \leqq i \leqq N-1\ , \tag{5.17}$$

$$P_{K-1} = \sum_{n=K}^{N-1} (-1)^{n-K} \binom{n}{K} U_n(0)\,[K\lambda_0/(n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)]\,[K_0-(1-\bar{f}_0(n\lambda_0+\lambda+\lambda^*))/(n\lambda_0+\lambda+\lambda^*)]\ , \tag{5.18}$$

$$U_i(0) = a_i^{(2)\prime}(0) U_K(0) \tag{5.19}$$

$$P_{ij} = \lambda_j K_j P_i, \quad K \leqq i \leqq N, \ 1 \leqq i \leqq M, \tag{5,20}$$

$$Q_0 = \lambda^* K_{N+M}^* \sum_{i=K}^{N} P_i = \lambda^* K_{N+M}^* P_A, \tag{5.21}$$

$$P_A = \sum_{i=K}^{N} P_i = k_1^{(2)}(0) U_K^*(0), \tag{5.22}$$

$$a_i^{(2)\prime}(0) = a_i^{(1)}(0) + \lambda^* k_1^{(2)}(0) b_i^{(1)}(0), \tag{5.23}$$

$$U_K(0) = \left\{ k_1^{(2)}(0) [1 + \lambda^* K_{N+M}^* + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j K_j] + \sum_{n=K}^{N-1} (-1)^{n-K} \binom{n}{K} [K\lambda_0/(n\lambda_0 + \lambda + \lambda^*)] \right.$$
$$\left. \cdot [K_0 - (1 - \bar{f}_0(n\lambda_0 + \lambda + \lambda^*))/(n\lambda_0 + \lambda + \lambda^*)] \, a_n^{(1)\prime}(0) \right\}^{-1} \tag{5.24}$$

また，$k_1^{(2)}(0)$ は $a_i^{(2)\prime}(0)$ を用いて次のように表現できる。

$$k_1^{(2)}(0) = \bar{f}_0((N-1)\lambda_0 + \lambda + \lambda^*) a_{N-1}^{(2)\prime}(0)/N\lambda_0$$
$$+ (N\lambda_0 + \lambda^*) \sum_{n=K}^{N-1} (-1)^{n-K} \binom{n-1}{K-1} [(1 - \bar{f}_0(n\lambda_0 + \lambda + \lambda^*))/(n\lambda_0 + \lambda + \lambda^*)] \, a_n^{(2)\prime}(0)/N\lambda_0 \tag{5.25}$$

(iii)　$2 \leqq K = N$, $m = N$

(3.12), (5.1), (5.2) はそのまま残り新しい次の5つの方程式が追加される。

$$[\partial/\partial t + \partial/\partial x + \mu_0(x)] P_{K-1}(t, x) = 0, \tag{5.26}$$

$$[\partial/\partial t + \partial/\partial x + \mu_j(x)] P_{Nj}(t, x) = 0, \quad 1 \leqq j \leqq M, \tag{5.27}$$

$$P_{Nj}(t, 0) = \lambda_j P_N(t) \quad , \quad 1 \leqq j \leqq M \tag{5.28}$$

$$P_{K-1}(t, 0) = N\lambda_0 P_N(t), \tag{5.29}$$

$$Q_0(t, 0) = \lambda^* P_N(t), \tag{5.30}$$

諸結果：

$$\bar{P}_A(s) = \bar{P}_N(s) = \{s + N\lambda_0(1 - \bar{f}_0(s)) + \lambda(1 - f(s)) + \lambda^*(1 - \bar{g}_{N+M}^*(s))\}^{-1}, \tag{5.31}$$

$$\bar{P}_{K-1}(s) = N\lambda_0 \bar{P}_N(s)(1 - \bar{f}_0(s))/s, \tag{5.32}$$

$$\bar{P}_{Nj}(s) = \lambda_j \bar{P}_N(s)(1 - \bar{f}_j(s))/s, \quad 1 \leqq i \leqq M, \tag{5.33}$$

$$\bar{Q}_0(s) = \lambda^* \bar{P}_N(s)(1 - \bar{g}_{N+M}^*(s))/s \tag{5.34}$$

$$P_A = P_N = \left(1 + N\lambda_0 K_0 + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j K_j + \lambda_* K_{N+M}^*\right)^{-1} \tag{5.35}$$

$$P_{K-1} = N\lambda_0 K_0 P_N, \tag{5.36}$$

$$P_{Nj} = \lambda_j K_j P_N, \quad 1 \leqq j \leqq M, \tag{5.37}$$

$$Q_0 = \lambda^* K_{N+M}^* P_N \tag{5.38}$$

文　　献

[1] Kulshrestha, D. K.: "Reliability of a Parallel Redundant Complex System," Opns Res. 16. No. 1, 1968.

[2] Kulshrestha, D. K.: "Reliability of a Repairble Multicomponent System with Redundancy in Parallel." IEEE. Trans. on Reliability. 19, No. 2, 1970.

[3] H. Nakamichi, J. Fukuta, S. Takamatsu, and M. Kodama, "Reliability Consideration on a Repairable Multicomponent System with Redundancy in Parallel," J. Opns. Res, Soc. of Japan. 17, No. 1, 1974.

[4] M. Kodama: "Probabilistic Analysis of a Multicomponent Series-Parallel System under Preemptive Repeat Repair Discipline." Opns. Res. 24, No. 23, 1976.

[5] M. Kodama and I. Sawa: "Reliability and Maintainability of a Multicomponent Series-Parallel System under Several Repair Disciplines," Microelectron. Reliab. 22, No. 6, 1982.

[6] M. Kodama and I. Sawa: "Reliability and Maintainability of a Mulficomponent Series-Prallel System with Simultaneous Failure and Repair Priorities." to appear in Microelectron. Reliab.

[7] N. K. Jaiswal, "Priority Queues, Academic Press, New York, 1968.

[8] 児玉正憲: "2段直列構成システムの信頼性・保全性Ⅰ，経済学研究，第46巻 第1・2合併号 1981.

[9] 児玉正憲: "2段直列構成システムの信頼性・保全性Ⅱ，経済学研究，第46巻 第4・5合併号 1981.

[10] M. Kodama and K. Adachi, "On the Steady State Arailability of a Single-Sever k-out-of-n: G System with Simultaneous Failure and General Repair Distribution," Bulletin of Nagoya Institute of Technology, Vol. 30, 1978.

[11] F. Ohi, M. Kodama and T. Nishida, "M+1-out-of-N: G System with Correlated Failure and Single Repair Facility. J. Opns. Res. Soc. of Japan. 21, No. 1, 1978.

[12] 福田治郎，児玉正憲: "複合冗長系の信頼度解析"，愛知大学法経論集，98, 1982.

[13] 児玉正憲: "複合冗長系の保全性（Ⅰ）"，経済学研究，第48巻 第5・6合併号 1983.

[14] 児玉正憲: "複合冗長系の保全性（Ⅱ）"，経済学研究，第49巻 第1・2合併号 1984.