

種々の需要形態に関する統一的在庫モデルの研究

児玉, 正憲

北原, 貞輔

<https://doi.org/10.15017/4475378>

出版情報：経済學研究. 47 (5/6), pp. 49-72, 1983-03-10. 九州大学経済学会
バージョン：
権利関係：



種々の需要形態に関する統一的 在庫モデルの研究

児 玉 正 憲
北 原 貞 輔

製品や材料などに関する在庫管理問題は、発注あるいは生産関連費用と、材料あるいは製品の在庫のための諸費用、ならびに在庫不足にともなう生じる諸損失をいかに均衡させるか、あるいはそれらの総コストをいかに最小にするかの問題に帰着する。このとき、さらに問題となるのは、それらに含まれる諸変数のすべてが確定的ではなく、そのいくつかがそれぞれの状況に応じて確率的に変化することである。

かつては、上記の諸変数とその変化を含む諸種の決定が、それぞれに関与する担当者の経験と直感に左右されていた。しかし、戦後、OR 技法の導入と発展にともない、多くのモデルが研究・作成され、状況に応じてその1つを選択・活用することが可能になってきた。

本小論では、とくに購入・販売在庫モデルに関し、多くの需要形態を含む統合モデルについて考察し、多くのモデルがもっとも単純な特定モデルに変換できること、したがって、その最適解を求めることで、他の複雑な需要形態のモデルの解析を行なうことなしに、その最適解に達しうることを示す。

1. 単純な特定モデル (1)

単純な特定モデルの代表として、発注コストを考慮する必要がなく、需要が1回きりと仮定できる場合の購入・販売在庫モデルを取りあげる。そして発注量は期首に即時的にみたされ、需要はすべて期首に払いだされるものと仮定する。確率的に変化するのは需要量だけである。

まず

x : 前期からの繰越し在庫量

y : 発注量 (仮定によって期首に入荷)

z : 期首在庫量

とおく。仮定によって

$$z = x + y \quad (1.1)$$

以下、需要変数 b が連続的と仮定できる場合とそうでない場合に分けて考察する。

1.1. 需要変数が連続的な場合

需要量 b は、仮定によって確定的ではない。このため在庫量 z が需要量 b より大かどうかは確

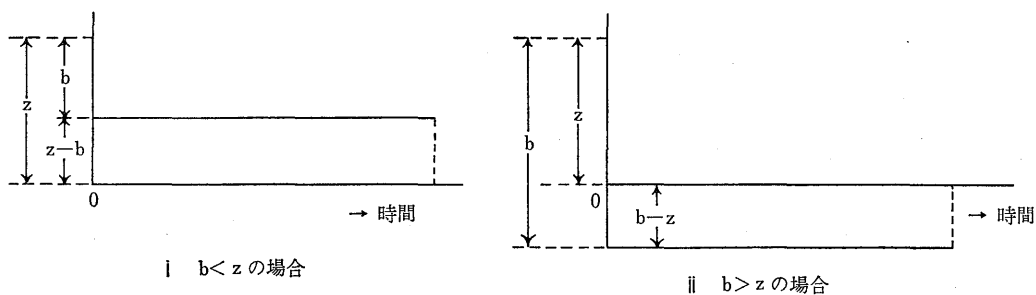


図 1. 突発需要在庫モデルの在庫状態

率的であり、その大小に応じて在庫状態は図1に示すように正か負のいずれかになる。

いま、 z が b より大かどうかによって、保持される在庫量をつぎのように表わすことにする。

i 保持される在庫量

$$I_1(b) = \begin{cases} z-b & b < z \text{ の場合} \\ 0 & b \geq z \text{ の場合} \end{cases} \quad (1.2)$$

ii 不足する在庫量

$$I_2(b) = \begin{cases} 0 & b < z \text{ の場合} \\ b-z & b \geq z \text{ の場合} \end{cases} \quad (1.3)$$

また、諸コストを

c : 購入コスト (単位当り)

h : 在庫維持コスト (期当り, 単位当り)

p : 品切れコスト (単位当り, また $p \geq c$)

とおき、さらに

$\phi(b)$; 需要量の確率密度関数

とする。

このモデルでは、発注コストを無視することにしたから、期待総コストを $E\{C(z)\}$ とすれば、それは

$$\begin{aligned} E\{C(z)\} &= cy + h \int_0^\infty I_1(b) \phi(b) db + p \int_0^\infty I_2(b) \phi(b) db \\ &= c(z-x) + h \int_0^z (z-b) \phi(b) db + p \int_z^\infty (b-z) \phi(b) db \end{aligned} \quad (1.4)$$

$E\{C(z)\}$ を最小にする z の値は、(1.4) の z に関する第1次微分を0とおくことによって求めることができる。結果を整理すれば、つぎようになる。

$$\int_0^z \phi(b) db = \frac{p-c}{p+h} \equiv q \quad (1.5)$$

q は臨界比 (critical ratio) といわれる。なお, z^* は z の最適値の意味である。

したがって, 最適発注政策は, 繰越し在庫量 x が与えられたとき, $b \leq z^*$ となる確率が q となるような z^* に関し

$$\begin{array}{l} z^* > x \\ z^* \leq x \end{array} \quad \text{ならば, 発注量} = \begin{cases} z^* - x \\ 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

1.2. 需要変数が離散の場合

需要変数が離散的であるから, 期待総コスト $E(C(z))$ は, さきの (1.4) に代わって

$$E(C(z)) = c(z-x) + h \sum_{b=0}^z (z-b)\phi(b) + p \sum_{b=z+1}^{\infty} (b-z)\phi(b) \quad (1.7)$$

と表わされる。

このときの期待コスト最小化の条件は

$$E(C(z-1)) \geq E(C(z)) \quad (1.8)$$

$$E(C(z+1)) \geq E(C(z)) \quad (1.9)$$

であり, 問題は, これをみたす z を求めることに帰着する。

ところが (1.7) から, 容易に

$$E(C(z-1)) - E(C(z)) = p - c - (h+p) \cdot p_r\{b \leq z-1\} \quad (1.10)$$

を求めることができる。したがって (1.8) の条件は

$$p_r\{b \leq z-1\} \leq \frac{p-c}{p+h} \quad (1.11)$$

と書き代えてよい。

全く同じようにして, (1.9) の条件は

$$p_r\{b \leq z\} \geq \frac{p-c}{p+h} \quad (1.12)$$

と書くことができる。

したがって, z の最適値 z^* は

$$p_r\{b \leq z^*-1\} \leq \frac{p-c}{p+h} \leq p_r\{b \leq z^*\} \quad (1.13)$$

をみたさねばならない。

2. 単純な特定モデル (2)

比較のための第2のモデルとして, 需要は期を通じて一様に発生する場合を例にとる。しかし, 他の条件は前の場合と同じとする。つまり, 発注は期首に行なわれ, 発注量は即時的に入荷するものと仮定する。したがって期首の総在庫量 z は, 前期からの繰越し在庫量 x と発注量 y の和で表

わされる。

このモデルの在庫の状態は、仮定の諸条件から、図2に示す2つの場合になると考えてよい。

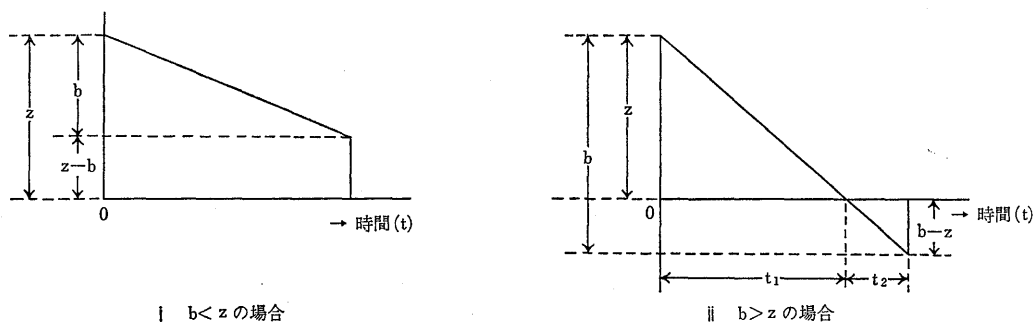


図2 一様需要・在庫モデルの在庫状態

期平均在庫量は、図のそれぞれの場合について

$$\begin{aligned} \text{i の場合;} I_1(b) &= z - \frac{b}{2} \\ \text{ii の場合;} I_2(b) &= \frac{z^2}{2b} \end{aligned} \quad (2.1)$$

となり、平均在庫不足量は

$$\begin{aligned} \text{i の場合;} I_1(b) &= 0 \\ \text{ii の場合;} I_2(b) &= \frac{(b-z)^2}{2b} \end{aligned} \quad (2.2)$$

したがって、このモデルの期待総コスト $E\{C(z)\}$ は、需要量 b を連続変数と仮定すれば

$$E\{C(z)\} = c(z-x) + h \left\{ \int_0^z \left(z - \frac{b}{2} \right) \phi(b) db \right\} + h \int_z^\infty \frac{z^2}{2b} \phi(b) db + p \int_z^\infty \frac{(b-z)^2}{2b} \phi(b) db \quad (2.3)$$

と表わされる。

$E\{C(z)\}$ を最小にする z は、(2.3) の第1次微分を0とおいて求めることができるが、結果を整理すれば

$$\int_0^{z^*} \phi(b) db + z^* \int_{z^*}^\infty \frac{1}{b} \phi(b) db = \frac{p-c}{p+h} \equiv q \quad (2.4)$$

をみたす z^* がそれである。

3. 需要形態の一般的モデル

1における需要形態は、突発需要で、それが期首に発生する例になっており、2のそれは期を通じて一様に発生する場合である。そこでこれらを特殊な場合として含む一般的かつ総合的需要形態を表わすモデルとして

$$Q(T) = z - g(b, T/t) \quad (3.1)$$

を用いることにする。ここに

$Q(T)$: 時刻 $T (\leq t)$ における在庫量

z : 期首在庫量

t : 発注間隔

b : 期間 t における需要量

$g(b, x)$: $g(b, 0) = 0$, $g(0, x) = 0$, $g(b, 1) = b$ となる x の微分可能な単調増加関数
($0 \leq x \leq 1$)

そこでわれわれの目的は、 $g(b, x)$ を需要形態を表わす 1 つの統一モデルとして使用し、そのときの最適化条件を求め、1, 2 のモデルとの同値問題について考察することにある。もちろん、この点を除き、他の仮定や記号は 1, 2 の場合と全く同じとする。以下、需要変数 b が連続的な場合と離散的な場合に分けて考察しよう。

3.1. 需要変数が連続的な場合

需要変数 b は連続的であるから、在庫の状態については、基本的には図 2 と類似の 2 つの場合について考えなければならない。また、それで十分である。ここに類似とは、図 2 では一様需要という仮定をおいていたことから在庫の時間的変化が直線的であったが、いまの場合は、このような仮定をおいていないため、その時間的変化は必ずしも直線的とはいえないということである。

まず、平均在庫量と在庫不足量 $I_1(b)$, $I_2(b)$ を求めることから始めよう。 T 時点での在庫量は (3.1) で表わされるから、 $b \leq z$, $b > z$ の各々の場合について (図 2 参照), $I_1(b)$, $I_2(b)$ はそれぞれ以下ようになる。

i $b \leq z$ の場合

$$I_1(b) = \frac{1}{t} \int_0^t \{z - g(b, T/t)\} dT = \frac{1}{t} \{zt - t \int_0^1 g(b, y) dy\} = z - G(b, 1) \quad (3.2)$$

($\because$ 変数変換: $y = T/t$)

ここに

$$G(b, x) \equiv \int_0^x g(b, y) dy \quad (3.3)$$

$$I_2(b) = 0 \quad (3.4)$$

ii $b > z \geq 0$ の場合

$$I_1(b) = \frac{1}{t} \int_0^{t_1} \{z - g(b, T/t)\} dT = \frac{1}{t} \{zt_1 - t \int_0^{t_1/t} g(b, y) dy\} = z \left(\frac{t_1}{t} \right) - G(b, t_1/t) \quad (3.5)$$

ところが図 2 の ii から、 t_1 時点では

$$Q(t_1) = z - g(b, t_1/t) = 0 \quad (3.6)$$

が成り立つ。 $g(b, y)$ は y の単調増加関数であるから, (3.6) を t_1/t について解けば

$$t_1/t = g^{-1}(b, z) \quad (3.7)$$

(3.7) を (3.5) に代入して

$$I_1(b) = zg^{-1}(b, z) - G(b, g^{-1}(b, z)) \quad (3.8)$$

また, $I_2(b)$ についても (3.7) を用いて

$$\begin{aligned} I_2(b) &= \frac{1}{t} \int_{t_1}^t \{g(b, T/t) - z\} dT = \int_{t_1/t}^1 \{g(b, y) - z\} dy \\ &= \{G(b, 1) - G(b, t_1/t)\} - z(1 - t_1/t) \\ &= G(b, 1) - G(b, g^{-1}(b, z)) - z(1 - g^{-1}(b, z)) \end{aligned} \quad (3.9)$$

以上をまとめると

i $b \leq z$ の場合

$$\begin{aligned} I_1(b) &= z - G(b, 1) \\ I_2(b) &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

ii $b > z \geq 0$ の場合

$$\begin{aligned} I_1(b) &= zg^{-1}(b, z) - G(b, g^{-1}(b, z)) \\ I_2(b) &= G(b, 1) - G(b, g^{-1}(b, z)) - z(1 - g^{-1}(b, z)) \end{aligned} \quad (3.11)$$

そこでこのモデルに関する期待総コストを求めよう。在庫維持費, ペナルティ・コストはそれぞれ h, p であるから

$$\begin{aligned} E\{C(z)\} &= c(z-x) + h \left\{ \int_0^z [z - G(b, 1)] \phi(b) db + \int_z^\infty [zg^{-1}(b, z) - G(b, g^{-1}(b, z))] \phi(b) db \right\} \\ &\quad + p \int_z^\infty [G(b, 1) - G(b, g^{-1}(b, z)) - z(1 - g^{-1}(b, z))] \phi(b) db \\ &= c(z-x) + h \int_0^z [z - G(b, 1)] \phi(b) db - p \int_z^\infty [z - G(b, 1)] \phi(b) db \\ &\quad + (h+p) \int_z^\infty [zg^{-1}(b, z) - G(b, g^{-1}(b, z))] \phi(b) db \end{aligned} \quad (3.12)$$

したがって, $E\{G(z)\}$ を最小にする条件は (3.12) を z で微分して 0 とおくことによって求めることができる。それは

$$\begin{aligned} c + h \left\{ \int_0^z \phi(b) db + [z - G(z, 1)] \phi(z) \right\} - p \left\{ \int_z^\infty \phi(b) db - [z - G(z, 1)] \phi(z) \right\} \\ + (h+p) \left\{ \int_z^\infty \left[g^{-1}(b, z) + z \frac{dg^{-1}(b, z)}{dz} - \frac{dG(b, g^{-1}(b, z))}{dz} \right] \phi(b) db = 0 \right. \end{aligned}$$

ここで関係式

$$g^{-1}(z, z) = 1$$

$$\frac{dG(b, g^{-1}(b, z))}{dz} = g(b, g^{-1}(b, z)) \frac{dg^{-1}(b, z)}{dz}$$

$$z = g(b, g^{-1}(b, z))$$

を用いて上式を整理すると

$$c - p + (h + p) \left\{ \int_0^z \phi(b) db + \int_z^\infty g^{-1}(b, z) \phi(b) db \right\} = 0 \quad (3.13)$$

がえられる。

(3.13) は、さらに

$$\int_0^{z^*} \phi(b) db + \int_{z^*}^\infty g^{-1}(b, z^*) \phi(b) db = \frac{p - c}{p + h} \equiv q \quad (3.14)$$

と書くこともできる。ここに z^* は、(3.13) をみたす z の値が $E\{C(z)\}$ を最小にする z の最適値を意味する。このことは $g(b, x)$ が x の単調増加関数であるから

$$\frac{dg^{-1}(b, z)}{dz} > 0$$

$$\frac{d^2 E\{C(z)\}}{dz^2} = (h + p) \int_z^\infty \frac{dg^{-1}(b, z)}{dz} \phi(b) db \geq 0 \quad (3.15)$$

となることから明らかである。

3.2. 需要変数が離散的な場合

需要変数が離散的であるから、期待総コスト $E\{C(z)\}$ は、さきの (3.12) に代わって以下のよう表わされる。

$$E\{C(z)\} = c(z - x) + h \left\{ \sum_{b=0}^z [z - G(b, 1)] \phi(b) + \sum_{b=z+1}^\infty [zg^{-1}(b, z) - G(b, g^{-1}(b, z))] \phi(b) \right\}$$

$$+ p \sum_{b=z+1}^\infty [G(b, 1) - G(b, g^{-1}(b, z)) - z(1 - g^{-1}(b, z))] \phi(b)$$

$$= c(z - x) + h \sum_{b=0}^z [z - G(b, 1)] \phi(b) - p \sum_{b=z+1}^\infty [z - G(b, 1)] \phi(b)$$

$$+ (h + p) \sum_{b=z+1}^\infty [z \cdot g^{-1}(b, z) - G(b, g^{-1}(b, z))] \phi(b) \quad (3.16)$$

したがって、また

$$E\{C(z+1)\} = c(z+1 - x) + h \sum_{b=0}^{z+1} [z+1 - G(b, 1)] \phi(b) - p \sum_{b=z+2}^\infty [z+1 - G(b, 1)] \phi(b)$$

$$+ (h + p) \sum_{b=z+2}^\infty [(z+1)g^{-1}(b, z+1) - G(b, g^{-1}(b, z+1))] \phi(b)$$

$$\begin{aligned}
 &= c + c(z-x) + h \left\{ \sum_{b=0}^z [z-G(b, 1)] \phi(b) + [z+1-G(z+1, 1)] \phi(z+1) + \sum_{b=0}^z \phi(b) \right\} \\
 &\quad - p \left\{ \sum_{b=z+1}^{\infty} [z-G(b, 1)] \phi(b) + \sum_{b=z+1}^{\infty} \phi(b) - [z+1-G(z+1, 1)] \phi(z+1) \right\} \\
 &\quad + (h+p) \left\{ \sum_{b=z+1}^{\infty} [(z+1)g^{-1}(b, z+1) - G(b, g^{-1}(b, z+1))] \phi(b) - [(z+1) \right. \\
 &\quad \quad \left. - G(z+1, 1)] \phi(z+1) \right\} \\
 &= c + c(z-x) + h \sum_{b=0}^z [z-G(b, 1)] \phi(b) - p \sum_{b=z+1}^{\infty} [z-G(b, 1)] \phi(b) \\
 &\quad + h \sum_{b=0}^z \phi(b) - p \left[1 - \sum_{b=0}^z \phi(b) \right] \\
 &\quad + (h+p) \left\{ \sum_{b=z+1}^{\infty} [(z+1)g^{-1}(b, z+1) - G(b, g^{-1}(b, z+1))] \phi(b) \right\} \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore E\{C(z+1)\} - E\{C(z)\} \\
 &= C + (h+p) \left\{ \sum_{b=0}^z \phi(b) + \sum_{b=z+1}^{\infty} \left[[(z+1)g^{-1}(b, z+1) - G(b, g^{-1}(b, z+1))] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - [zg^{-1}(b, z) - G(b, g^{-1}(b, z))] \right] \phi(b) \right\} - p \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

条件 $E\{C(z+1)\} - E\{C(z)\} \geq 0$ をみたすためには, (3.18) から

$$\begin{aligned}
 \frac{p-c}{h+p} \leq \sum_{b=0}^z \phi(b) + \sum_{b=z+1}^{\infty} \{ [(z+1)g^{-1}(b, z+1) - G(b, g^{-1}(b, z+1))] \\
 - [zg^{-1}(b, z) - G(b, g^{-1}(b, z))] \} \phi(b) \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

全く同様にして, $E\{C(z-1)\} - E\{C(z)\} \geq 0$ をみたすためには

$$\begin{aligned}
 \sum_{b=0}^{z-1} \phi(b) + \sum_{b=z}^{\infty} \{ [zg^{-1}(b, z) - G(b, g^{-1}(b, z))] \\
 - [(z-1)g^{-1}(b, z-1) - G(b, g^{-1}(b, z-1))] \} \phi(b) \leq \frac{p-c}{h+p} \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

そこで

$$\begin{aligned}
 M(z) &= \sum_{b=0}^z \phi(b) + \sum_{b=z+1}^{\infty} \{ [(z+1)g^{-1}(b, z+1) - G(b, g^{-1}(b, z+1))] \\
 &\quad - [zg^{-1}(b, z) - G(b, g^{-1}(b, z))] \} \phi(b) \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

とおくと, (3.19), (3.20) から, コストを最小にする z の最適値 z^* は

$$M(z^*-1) \leq \frac{p-c}{h+p} \leq M(z^*) \quad (3.22)$$

をみたさなければならない*。

* z^* が最小値を与えることは (3.18) が z の増加関数であることから示される (第2次差分 > 0 は 4.2 における a の証明の途中で示されている)。

4. モデルの同値問題

変数 $z_1, z_2, \dots, z_n$ に関して2つのシステムA, Bが同値であれば, Bのふるまい (behavior) を調べることでAのふるまいを知ることができる。このとき, BがAに比して簡単であれば好都合である。そこで3に述べた一般モデルと1のモデルがそれぞれA, Bを表わすものと考え, その同値関係について考えてみることにしよう。

ところが, A, B のいずれについても制御可能な変数は期首在庫量 z だけであり, z のシステムへの影響は期待総コスト $E\{C(z)\}$ である。したがって, われわれは $E\{C(z)\}$ について同値な関係を捜すことが目的となる。以下, z が連続的な場合と離散的な場合に分けて考察する。

4.1. 変数 z が連続的な場合

(1.4) と (3.12) の $E\{C(z)\}$ をそれぞれ以下のように書きあらためる。

$$E_1\{C(z)\} = c(z-x) + h \int_0^z (z-b)r(b)db + p \int_z^\infty (b-z)r(b)db \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} E_2\{C(z)\} &= c(z-x) + h \int_0^z [z-G(b, 1)]\phi(b)db - p \int_z^\infty [z-G(b, 1)]\phi(b)db \\ &\quad + (h+p) \int_z^\infty [zg^{-1}(b, z) - G(b, g^{-1}(b, z))]\phi(b)db \end{aligned} \quad (4.2)$$

問題は, (4.1) と (4.2) が同値になるよう $r(b)$ を $\phi(b)$ と $g(b, \cdot)$ に依存して決めることである。

(4.1) の z に関する第1次微分, 第2次微分は

$$\begin{aligned} \frac{dE_1\{C(z)\}}{dz} &= c + h \int_0^z r(b)db - p \int_z^\infty r(b)db \\ \frac{d^2E_1\{C(z)\}}{dz^2} &= (h+p)r(z) \end{aligned}$$

となり, (4.2) の z に関する第1次微分と第2次微分は

$$\begin{aligned} \frac{dE_2\{C(z)\}}{dz} &= c - p + (h+p) \left\{ \int_0^z \phi(b)db + \int_z^\infty g^{-1}(b, z)\phi(b)db \right\} \\ \frac{d^2E_2\{C(z)\}}{dz^2} &= (h+p) \int_z^\infty \frac{dg^{-1}(b, z)}{dz} \phi(b)db \end{aligned}$$

となる。したがって第2次微分を等しいとおいて

$$r(z) = \int_z^\infty \frac{dg^{-1}(b, z)}{dz} \phi(b)db \quad (4.3)$$

がえられる。

ここで

- a. $r(z)$ は確率密度関数である。
- b. (4.3) を (4.1) に代入すれば (4.2) に等しくなる。

ことを証明しておこう。

a の証明

i. $r \geq 0$ は

$$\frac{dg^{-1}(b, z)}{dz} \geq 0, \quad \phi(b) \geq 0$$

であるから明らかである。

$$\begin{aligned} \text{ii. } \int_0^\infty r(z) dz &= \int_0^\infty \left(\int_z^\infty \frac{dg^{-1}(b, z)}{dz} \phi(b) db \right) dz \\ &= \int_0^\infty \phi(b) \left(\int_0^b \frac{dg^{-1}(b, z)}{dz} dz \right) db = \int_0^\infty g^{-1}(b, b) \phi(b) db \\ &= \int_0^\infty \phi(b) db = 1 \end{aligned}$$

b の証明

(4.2) を変形すると

$$\begin{aligned} E_2\{C(z)\} &= c(z-x) + h \int_0^\infty [z - G(b, 1)] \phi(b) db - (p+h) \int_z^\infty \{[z - G(b, 1)] \\ &\quad + [G(b, g^{-1}(b, z)) - zg^{-1}(b, z)]\} \phi(b) db \\ &= c(z-x) + h(z-\mu_2) + (h+p) \int_z^\infty [zg^{-1}(b, z) - G(b, g^{-1}(b, z)) \\ &\quad + G(b, 1) - z] \phi(b) db \end{aligned} \quad (4.4)$$

ここに

$$\mu_2 = \int_0^\infty G(b, 1) \phi(b) db \quad (4.5)$$

他方, (4.1) はつぎのように変形できる。

$$E_1\{C(z)\} = c(z-x) + h(z-\mu_1) + (h+p) \int_z^\infty (b-z) \gamma(b) db \quad (4.6)$$

ここに

$$\mu_1 = \int_0^\infty b \gamma(b) db \quad (4.7)$$

ところが関係式

$$\frac{dG(b, g^{-1}(b, z))}{dz} = g(b, g^{-1}(b, z)) \frac{dg^{-1}(b, z)}{dz} = z \frac{dg^{-1}(b, z)}{dz}$$

を用いると

$$\int_z^y b \frac{dg^{-1}(y, b)}{db} db = [G(y, g^{-1}(y, b))]_z^y = G(y, 1) - G(y, g^{-1}(y, z)) \quad (4.8)$$

がえられる。

そこで (4.6) の第3項に $r(b)$ を代入して積分順序を交換し, (4.8) を用いると

$$\begin{aligned}
 (h+p) \int_z^{\infty} (b-z)r(b)db &= (h+p) \int_z^{\infty} (b-z) \left(\int_b^{\infty} \frac{dg^{-1}(y, b)}{db} \phi(y)dy \right) db \\
 &= (h+p) \int_z^{\infty} \phi(y) \left(\int_z^y (b-z) \frac{dg^{-1}(y, b)}{db} db \right) dy \\
 &= (h+p) \int_z^{\infty} \phi(y) \left\{ [G(y, g^{-1}(y, b))]_z^y - z[g^{-1}(y, b)]_z^y \right\} dy \\
 &= (h+p) \int_z^{\infty} \{G(y, 1) - G(y, g^{-1}(y, z)) - z + zg^{-1}(y, z)\} \phi(y) dy
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

したがって (4.6) の第3項は (4.4) の第3項に一致する。

ついで

$$\begin{aligned}
 \mu_1 &= \int_0^{\infty} br(b)db = \int_0^{\infty} b \left(\int_b^{\infty} \frac{dg^{-1}(y, b)}{db} \phi(y)dy \right) db \\
 &= \int_0^{\infty} b \left(\int_0^{\infty} \frac{dg^{-1}(y, b)}{db} \phi(y)dy \right) db = \int_0^{\infty} \phi(y) \left(\int_0^y b \frac{dg^{-1}(y, b)}{db} db \right) dy \\
 &= \int_0^{\infty} \phi(y) [G(y, g^{-1}(y, b))]_0^y dy = \int_0^{\infty} G(y, 1) \phi(y) dy
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

となるから, (5.6) の第2項は (5.4) の第2項に一致する。したがって b は証明された。

4.2. 変数 z が離散的な場合

(1.7) と (3.16) の $E\{C(z)\}$ をそれぞれ以下のように書きあらためる。

$$E_1\{C(z)\} = c(z-x) + h \sum_{b=0}^z (z-b)r(b) + p \sum_{b=z+1}^{\infty} (b-z)r(b) \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}
 E_2\{C(z)\} &= c(z-x) + h \sum_{b=0}^z [z - G(b, 1)] \phi(b) - p \sum_{b=z+1}^{\infty} [z - G(b, 1)] \phi(b) \\
 &\quad + (h+p) \sum_{b=z+1}^{\infty} [zg^{-1}(b, z) - G(b, g^{-1}(b, z))] \phi(b)
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

問題は4.1におけると同じように, (4.11) と (4.12) が同値になるよう $r(b)$ を $\phi(b)$ と $g(b, \cdot)$ に依存して決めることである。

(4.11) と (4.12) の第1次差分を $\Delta E_1\{C(z)\}$, $\Delta E_2\{C(z)\}$ とすれば

$$\Delta E_1\{C(z)\} = c + (h+p) \sum_{b=0}^z r(b) - p \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta E_2\{C(z)\} &= c + (h+p) \left\{ \sum_{b=0}^z \phi(b) + \sum_{b=z+1}^{\infty} [[(z+1)g^{-1}(b, z+1) - G(b, g^{-1}(b, z+1))] \right. \\
 &\quad \left. - [zg^{-1}(b, z) - G(b, g^{-1}(b, z))] \phi(b) \right\} - p
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

ついで (4.13), (4.14) の差分, つまり (4.11) と (4.12) の第2次差分をそれぞれ $\Delta^2 E_1\{C(z)\}$, $\Delta^2 E_2\{C(z)\}$ とすれば, それは以下ようになる。

$$\Delta^2 E_1\{C(z)\} = \Delta E_1\{C(z+1)\} - \Delta E_1\{C(z)\} = (h+p)r(z+1) \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 E_2\{C(z)\} &= \Delta E_2\{C(z+1)\} - \Delta E_2\{C(z)\} \\ &= (h+p)\{G(z+1, 1) - z + [zg^{-1}(z+1, z) - G(z+1, g^{-1}(z+1, z))]\}\phi(z+1) \\ &\quad + \sum_{b=z+2}^{\infty} \phi(b)\{[(z+2)g^{-1}(b, z+2) - G(b, g^{-1}(b, z+2))]\} \\ &\quad - 2[(z+1)g^{-1}(b, z+1) - G(b, g^{-1}(b, z+1))]\} \\ &\quad + [zg^{-1}(b, z) - G(b, g^{-1}(b, z))]\} \end{aligned} \quad (4.16)$$

したがって (4.13), (4.14) で $z=0$ とおき, $\Delta E_1\{C(0)\} = \Delta E_2\{C(0)\}$ とおくことによって

$$r(0) = \phi(0) + \sum_{b=1}^{\infty} [g^{-1}(b, 1) - G(b, g^{-1}(b, 1))]\phi(b) \quad (4.17)$$

また, $\Delta^2 E_1\{C(z)\} = \Delta^2 E_2\{C(z)\}$ において

$$\begin{aligned} r(z+1) &= \{1 - [(z+1) - G(z+1, 1) - [zg^{-1}(z+1, z) - G(z+1, g^{-1}(z+1, z))]]\}\phi(z+1) \\ &\quad + \sum_{b=z+2}^{\infty} \phi(b)\{[(z+2)g^{-1}(b, z+2) - G(b, g^{-1}(b, z+2))]\} \\ &\quad - 2[(z+1)g^{-1}(b, z+1) - G(b, g^{-1}(b, z+1))]\} \\ &\quad + [zg^{-1}(b, z) - G(b, g^{-1}(b, z))]\} \\ &\quad z = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

以上をまとめると

$$\begin{aligned} r(z) &= \phi(0) + \sum_{b=1}^{\infty} [g^{-1}(b, 1) - G(b, g^{-1}(b, 1))]\phi(b) \quad , \quad z = 0 \\ r(z) &= \{1 - z + G(z, 1) + [(z-1)g^{-1}(z, z-1) - G(z, g^{-1}(z, z-1))]\}\phi(z) \\ &\quad + \sum_{b=z+1}^{\infty} \phi(b)\{[(z+1)g^{-1}(b, z+1) - G(b, g^{-1}(b, z+1))]\} \\ &\quad - 2[zg^{-1}(b, z) - G(b, g^{-1}(b, z))]\} \\ &\quad + [(z-1)g^{-1}(b, z-1) - G(b, g^{-1}(b, z-1))]\} \\ &\quad z = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.18)$$

そこで

a. $r(z)$ は確率関数である。

b. (4.18) の $r(z)$ を (4.11) に代入すれば (4.12) に等しくなる。

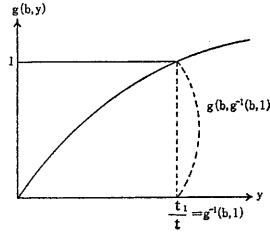
ことを証明しておこう。

a の証明

$g(b, y)$ は y の単調増加関数で $g(b, g^{-1}(b, 1)) = 1$ であるから

$$g^{-1}(b, 1) - G(b, g^{-1}(b, 1)) = \int_0^{g^{-1}(b, 1)} [1 - g(b, y)] dy > 0$$

$$b = 1, 2, \dots$$



また, $\phi(b) \geq 0$, したがって $z = 0$ に対する (5.18) より

$$r(0) \geq 0$$

$z = 1, 2, \dots$ のときは

$$f(b, z) = zg^{-1}(b, z) - G(b, g^{-1}(b, z)) \quad (4.19)$$

とおくと

$$f(b, z) = \int_0^{g^{-1}(b, z)} [z - g(b, y)] dy \quad (4.20)$$

と表わすことができるから

$$\begin{aligned} & [(z+1)g^{-1}(b, z+1) - G(b, g^{-1}(b, z+1))] - 2[zg^{-1}(b, z) - G(b, g^{-1}(b, z))] \\ & \quad + [(z-1)g^{-1}(b, z-1) - G(b, g^{-1}(b, z-1))] \\ & = f(b, z+1) - 2f(b, z) + f(b, z-1) = \Delta^2 f(b, z-1) \\ & = \int_0^{g^{-1}(b, z+1)} [z+1 - g(b, y)] dy - 2 \int_0^{g^{-1}(b, z)} [z - g(b, y)] dy + \int_0^{g^{-1}(b, z-1)} [z-1 - g(b, y)] dy \\ & = \left\{ \int_0^{g^{-1}(b, z)} [z+1 - g(b, y)] dy - \int_0^{g^{-1}(b, z)} [z - g(b, y)] dy \right\} + \int_{g^{-1}(b, z)}^{g^{-1}(b, z+1)} [z+1 - g(b, y)] dy \\ & \quad - \left\{ \int_0^{g^{-1}(b, z-1)} [z - g(b, y)] dy + \int_{g^{-1}(b, z-1)}^{g^{-1}(b, z)} [z - g(b, y)] dy \right\} + \int_0^{g^{-1}(b, z-1)} [z-1 - g(b, y)] dy \\ & = \left\{ \int_0^{g^{-1}(b, z)} dy - \int_0^{g^{-1}(b, z-1)} dy \right\} - \int_{g^{-1}(b, z-1)}^{g^{-1}(b, z)} [z - g(b, y)] dy + \int_{g^{-1}(b, z)}^{g^{-1}(b, z+1)} [z+1 - g(b, y)] dy \\ & = - \int_{g^{-1}(b, z-1)}^{g^{-1}(b, z)} [z-1 - g(b, y)] dy + \int_{g^{-1}(b, z)}^{g^{-1}(b, z+1)} [z+1 - g(b, y)] dy \\ & = -[g^{-1}(b, z) - g^{-1}(b, z-1)][z-1 - g(b, \theta_1)] \\ & \quad + [g^{-1}(b, z+1) - g^{-1}(b, z)][z+1 - g(b, \theta_2)] \end{aligned}$$

($\because$ 積分の平均値の定理; $g^{-1}(b, z-1) < \theta_1 < g^{-1}(b, z) < \theta_2 < g^{-1}(b, z+1)$)

仮定によって $g(b, y)$ は微分可能な y の単調増加関数であるから

$$z+1 > g(b, \theta_2), \quad g(b, \theta_1) > z-1, \quad g^{-1}(b, z+1) > g^{-1}(b, z) > g^{-1}(b, z-1)$$

となり

$$4^2 f(z-1) = f(z+1) - 2f(z) + f(z-1) > 0$$

となる。すなわち $f(z)$ は z の凸関数である。

さらに

$$\begin{aligned} & 1 - z + G(z, 1) + [(z-1)g^{-1}(z, z-1) - G(z, g^{-1}(z, z-1))] \\ &= \int_0^1 g(z, y) dy - \int_0^{g^{-1}(z, z-1)} g(z, y) dy + (z-1)[g^{-1}(z, z-1) - 1] \\ &= \int_{g^{-1}(z, z-1)}^1 g(z, y) dy + (z-1)[g^{-1}(z, z-1) - 1] \\ &= [1 - g^{-1}(z, z-1)]g(z, \theta_3) - (z-1)[1 - g^{-1}(z, z-1)] \\ & \hspace{15em} (\text{ただし } g^{-1}(z, z-1) < \theta_3 < 1) \\ &= [1 - g^{-1}(z, z-1)][g(z, \theta_3) - (z-1)] > 0 \quad (\because g(z, \theta_3) > z-1) \end{aligned}$$

となり, $\phi(z) \geq 0, (z \geq 0)$ より $r(z) \geq 0, (z \geq 0)$ となる。

$$\sum_{z=0}^{\infty} r(z) = 1 \quad \text{の証明}$$

(4.18), (4.19) より

$$\begin{aligned} \sum_{z=0}^{\infty} r(z) &= \phi(0) + \sum_{b=1}^{\infty} [g^{-1}(b, 1) - G(b, g^{-1}(b, 1))] \phi(b) \\ &+ \sum_{z=1}^{\infty} \phi(z) + \sum_{z=1}^{\infty} \{G(z, 1) - z + [(z-1)g^{-1}(z, z-1) - G(z, g^{-1}(z, z-1))]\} \phi(z) \\ &+ \sum_{z=1}^{\infty} \sum_{b=z+1}^{\infty} \{f(b, z+1) - 2f(b, z) + f(b, z-1)\} \phi(b) \\ &= \sum_{z=0}^{\infty} \phi(z) + \sum_{b=1}^{\infty} f(b, 1) \phi(b) + \sum_{b=1}^{\infty} [f(b, b-1) - f(b, b)] \phi(b) \\ &+ \sum_{z=1}^{\infty} \sum_{b=z+1}^{\infty} \{f(b, z+1) - 2f(b, z) + f(b, z-1)\} \phi(b) \end{aligned} \tag{4.21}$$

(4.21) の第4項の $\sum$ の順序を交換すると

$$\begin{aligned} & \sum_{b=2}^{\infty} \phi(b) \sum_{z=1}^{b-1} \{f(b, z+1) - 2f(b, z) + f(b, z-1)\} \\ &= \sum_{b=2}^{\infty} \phi(b) \{[f(b, 2) - 2f(b, 1) + f(b, 0)] + [f(b, 3) - 2f(b, 2) + f(b, 1)] \\ & \quad + [f(b, 4) - 2f(b, 3) + f(b, 2)] + \dots \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [f(b, b-1) - 2f(b, b-2) + f(b, b-3)] \\
& + [f(b, b) - 2f(b, b-1) + f(b, b-2)] \} \\
& = \sum_{b=2}^{\infty} \phi(b) \{f(b, b) - f(b, b-1) - f(b, 1)\} \quad (\because f(b, 0) = 0) \\
& = \sum_{b=1}^{\infty} \phi(b) \{f(b, b) - f(b, b-1) - f(b, 1)\} \tag{4.22}
\end{aligned}$$

したがって (4.21) の第2項, 第3項および第4項の和は 0 となる。

$$\therefore \sum_{z=0}^{\infty} r(z) = \sum_{z=0}^{\infty} \phi(z) = 1$$

b の証明

(4.11), (4.12) をつぎのように変形する。

$$\begin{aligned}
E_1\{C(z)\} &= c(z-x) + h \sum_{b=0}^{\infty} (z-b)r(b) + (h+p) \sum_{b=z+1}^{\infty} (b-z)r(b) \\
&= c(z-x) + h(z-\mu_1) + (h+p) \sum_{b=z+1}^{\infty} (b-z)r(b) \tag{4.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_2\{C(z)\} &= c(z-x) + h \sum_{b=0}^{\infty} [z-G(b, 1)]\phi(b) - (h+p) \sum_{b=z+1}^{\infty} [z-G(b, 1)]\phi(b) \\
&\quad + (h+p) \sum_{b=z+1}^{\infty} [zg^{-1}(b, z) - G(b, g^{-1}(b, z))]\phi(b) \\
&= c(z-x) + h(z-\mu_2) \\
&\quad + (h+p) \sum_{b=z+1}^{\infty} [zg^{-1}(b, z) - G(b, g^{-1}(b, z)) + G(b, 1) - z]\phi(b) \tag{4.24}
\end{aligned}$$

このとき (4.18), (4.19) から

$$\begin{aligned}
\sum_{b=z+1}^{\infty} (b-z)r(b) &= \sum_{b=z+1}^{\infty} (b-z)[1+f(b, b-1)-f(b, b)]\phi(b) \\
&\quad + \sum_{b=z+1}^{\infty} (b-z) \left\{ \sum_{y=z+1}^{\infty} \phi(y) [f(y, b+1) - 2f(y, b) + f(y, b-1)] \right\} \\
&= [1-f(z+1, z) - f(z+1, z+1)]\phi(z+1) \\
&\quad + \sum_{b=z+2}^{\infty} (b-z)[1+f(b, b-1)-f(b, b)]\phi(b) \\
&\quad + \sum_{y=z+2}^{\infty} \phi(y) \sum_{b=z+1}^{y-1} (b-z)[f(y, b+1) - 2f(y, b) + f(y, b-1)] \tag{4.25}
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
& \sum_{b=z+1}^{y-1} (b-z)[f(y, b+1) - 2f(y, b) + f(y, b-1)] \\
&= [f(y, z+2) - 2f(y, z+1) + f(y, z)] + 2[f(y, z+3) - 2f(y, z+2) + f(y, z+1)] \\
&\quad + 3[f(y, z+4) - 2f(y, z+3) + f(y, z+2)] + \cdots \\
&\quad + (y-1-z)[f(y, y) - 2f(y, y-1) + f(y, y-2)]
\end{aligned}$$

$$= f(y, z) + (z-y)f(y, y-1) + (y-1-z)f(y, y)$$

となるから, (4.24) は

$$\begin{aligned} \sum_{b=z+1}^{\infty} (b-z)r(b) &= [1+f(z+1, z)-f(z+1, z+1)]\phi(z+1) \\ &+ \sum_{y=z+2}^{\infty} (y-z)[1+f(y, y-1)-f(y, y)]\phi(y) \\ &+ \sum_{y=z+2}^{\infty} \phi(y)[f(y, z) + (z-y)f(y, y-1) + (y-z-1)f(y, y)] \\ &= [1+f(z+1, z)-f(z+1, z+1)]\phi(z+1) + \sum_{y=z+2}^{\infty} \phi(y)[f(y, z) + y-z-f(y, y)] \\ &= \sum_{y=z+1}^{\infty} \phi(y)[f(y, z) + y-z-f(y, y)] \\ &= \sum_{y=z+1}^{\infty} \phi(y)[zg^{-1}(y, z) - G(y, g^{-1}(y, z)) + G(y, 1) - z] \\ &\quad (\because f(y, y) = y - G(y, 1)) \end{aligned} \quad (4.26)$$

となる。このことは, (4.24) の第3項と (4.25) の第3項が等しいことを示すものである。

ついで (4.26) で $z=0$ とおいてみよう。

$$\begin{aligned} \sum_{b=1}^{\infty} br(b) &= \sum_{y=1}^{\infty} \phi(y)[G(y, 1) - G(y, 0)] = \sum_{y=1}^{\infty} G(y, 1)\phi(y) = \sum_{y=0}^{\infty} G(y, 1)\phi(y) \\ &\quad (\because g^{-1}(y, 0) = 0, \quad G(0, 1) = \int_0^1 g(0, y)dy = 0) \end{aligned}$$

したがって

$$\mu_1 = \sum_{b=0}^{\infty} br(b) = \sum_{b=1}^{\infty} br(b) = \sum_{y=0}^{\infty} G(y, 1)\phi(y) = \mu_2$$

これは (5.24) の第2項と (5.25) の第3項が等しいことを示すものである。よって b が証明された。

最後に, 需要変数が連続の場合の期待総コストを最小にする z^* の若干の性質について述べておこう。期待総コストを最小にする z^* は

$$\int_0^{z^*} r(b)db = \int_0^{z^*} \left(\int_b^{\infty} \frac{dg^{-1}(y, b)}{db} \phi(y)dy \right) db = q \quad (4.27)$$

をみたとす z^* によって与えられるが, (4.27) の $r(b)$ は $\phi(y)$ と $g^{-1}(y, b)$ に依存する。そこで $\phi(y)$ を固定して $g^{-1}(y, b)$ について二種類の $g_1^{-1}(y, b)$, $g_2^{-1}(y, b)$ を考えることにする。このとき
〔性質1〕 $g_i^{-1}(y, b)$ ($i=1, 2$) に対応する最適値, すなわち (4.27) をみたとす解を z_i^* ($i=1, 2$) とすると

$$g_1^{-1}(y, b) \geq g_2^{-1}(y, b) \Rightarrow z_1^* \leq z_2^*$$

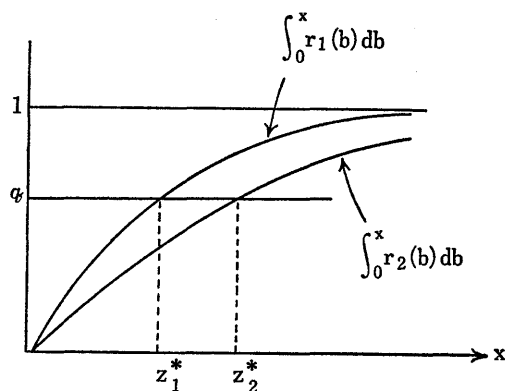
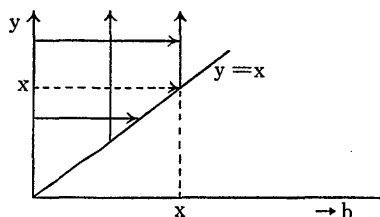
が成り立つ。

証明

$$r_i(b) = \int_b^{\infty} \frac{dg_i^{-1}(y, b)}{db} \phi(y) dy \quad (i = 1, 2)$$

とおくと

$$\begin{aligned} \int_0^x [r_1(b) - r_2(b)] db &= \int_0^x \left\{ \int_b^{\infty} \frac{dg_1^{-1}(y, b)}{db} \phi(y) dy - \int_b^{\infty} \frac{dg_2^{-1}(y, b)}{db} \phi(y) dy \right\} db \\ &= \int_0^x \phi(y) \left[\int_0^y \left(\frac{dg_1^{-1}(y, b)}{db} - \frac{dg_2^{-1}(y, b)}{db} \right) db \right] dy \\ &\quad + \int_x^{\infty} \phi(y) \left[\int_0^x \left(\frac{dg_1^{-1}(y, b)}{db} - \frac{dg_2^{-1}(y, b)}{db} \right) db \right] dy \\ &= \int_0^x \phi(y) [g_1^{-1}(y, y) - g_2^{-1}(y, y)] dy + \int_x^{\infty} \phi(y) [g_1^{-1}(y, x) - g_2^{-1}(y, x)] dy \\ &\quad (\because g_i^{-1}(y, y) = 1, g_i^{-1}(y, 0) = 0) \\ &= \int_x^{\infty} \phi(y) [g_1^{-1}(y, x) - g_2^{-1}(y, x)] dy \geq 0 \quad (\forall x \geq 0) \\ \therefore \int_0^x r_1(b) db &\geq \int_0^x r_2(b) db \end{aligned}$$



$\int_0^x r_i(b) db$ は x の連続増加関数であり, z_i^* は (4.27) をみたす解であるから, $z_1^* \leq z_2^*$ が成り立つ。

$g_i(y, z)$ は単調増加関数であるから, $z = g_i^{-1}(y, b)$ とおくと

$$g_1^{-1}(y, b) \geq g_2^{-1}(y, b) \Leftrightarrow g_1(y, z) \leq g_2(y, z)$$

が成立するので, 性質 1 の条件は

$$g_1(y, z) \leq g_2(y, z) \Rightarrow z_1^* \leq z_2^*$$

に置き代えることもできる。

ついで $g^{-1}(y, b)$ を固定して $\phi(y)$ について2種類の $\phi_1(y), \phi_2(y)$ を考えてみよう。このとき
〔性質2〕 $\phi_i(y) (i=1, 2)$ に対応する最適値, すなわち (4.27) をみたす解を $z_i^* (i=1, 2)$ とするとき

$$\int_0^x \phi_1(y) dy \geq \int_0^x \phi_2(y) dy \quad (\forall x \geq 0) \Rightarrow z_1^* \leq z_2^*$$

証明

$$r_i(b) = \int_b^\infty \frac{dg^{-1}(y, b)}{db} \phi_i(y) dy \quad (i=1, 2)$$

とおく。 $y \geq x \geq 0$ をみたす x, y に対して

$$0 \leq g^{-1}(y, x) \leq 1$$

また

$$g^{-1}(y, y) = 1$$

$$\int_x^\infty \phi_1(y) dy \leq \int_x^\infty \phi_2(y) dy$$

であるから, 以下が導かれる。

$$\begin{aligned} \int_0^x [r_1(b) - r_2(b)] db &= \int_0^x \left[\int_b^\infty \frac{dg^{-1}(y, b)}{db} \phi_1(y) dy - \int_b^\infty \frac{dg^{-1}(y, b)}{db} \phi_2(y) dy \right] db \\ &= \int_0^x (\phi_1(y) - \phi_2(y)) \left[\int_0^y \frac{dg^{-1}(y, b)}{db} db \right] dy + \int_x^\infty (\phi_1(y) - \phi_2(y)) \left[\int_0^x \frac{dg^{-1}(y, b)}{db} db \right] dy \\ &= \int_0^x (\phi_1(y) - \phi_2(y)) g^{-1}(y, y) dy + \int_x^\infty (\phi_1(y) - \phi_2(y)) g^{-1}(y, x) dy \\ &\geq \int_0^x (\phi_1(y) - \phi_2(y)) dy + \int_x^\infty (\phi_1(y) - \phi_2(y)) dy = 0 \end{aligned}$$

したがって, $z_1^* \leq z_2^*$ がえられる。

5. 需要形態の具体的・特殊型

これまでに用いてきた需要形態を表わす関数 $g(b, T/t)$ は, T/t に関して微分可能な単調増加関数という条件を付しただけであった。そこでこれを若干具体的に $\sqrt[n]{T/t}$ とおいてみよう。もちろん, これが上記の条件をみたすことは明らかである。このとき (3.1) は

$$Q(T) = z - \sqrt[n]{T/t} \quad (5.1)$$

と表わせる。

(5.1) はナダーによって紹介されているモデルと同じであるが, これによれば需要形態は指標 n によって完全に決定される。そこで図3に n の相違による在庫量 $Q(T)$ の変動を示しておこう。

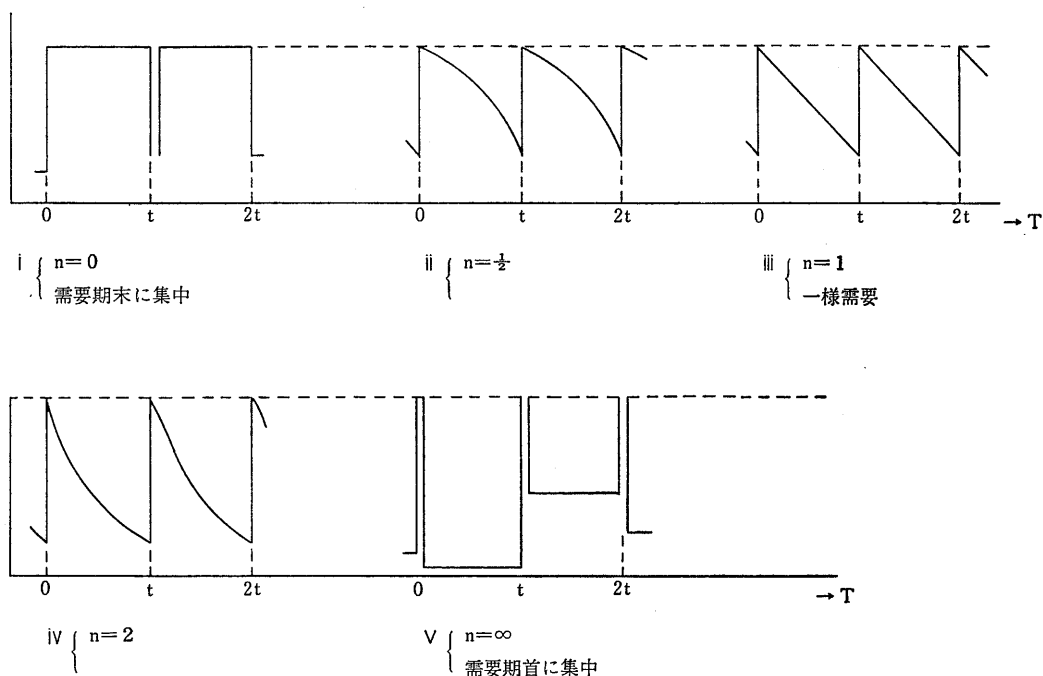


図 3 各種の需要形態

とくに $n = 0, 1, \infty$ の場合は、それぞれ

$$n = 0 \text{ の場合} \quad Q(T) = z$$

$$n = 1 \text{ の場合} \quad Q(T) = z - b \frac{T}{t}$$

$$n = \infty \text{ の場合} \quad Q(T) = z - b$$

となって、期末に需要集中、一様需要、期首に需要集中の場合に相当する。また、 n にこれらの中間の値を指定すれば、図 3 にそのいくつかを例示しているように、上記の場合と異なった需要の変化形態を示す。(5.1) によって、考えられる需要形態の大半が表わされる。

まず、需要変数が連続的な場合と離散的な場合に分けて、上記のモデルが、さきに考察した一般モデルのどのような特殊型になっているかを示しておこう。

平均在庫量と平均不足量

$$g(b, T/t) = \sqrt[n]{T/t}$$

であるから

$$G(b, y) = \int_0^y g(b, z) dz = b \int_0^y z^{\frac{1}{n}} dz = \frac{n}{n+1} b y^{1+\frac{1}{n}} \quad (5.2)$$

また、 $z = g(b, t_1/t)$ から (3.6) より)

$$\frac{z}{t} = \sqrt[n]{\frac{t_1}{t}}$$

$$\therefore \left(\frac{t_1}{t}\right) = g^{-1}(b, z) = \left(\frac{z}{b}\right)^n \quad (5.3)$$

したがって

$$G(b, g^{-1}(b, z)) = G\left(b, \left(\frac{z}{b}\right)^n\right) = \frac{n}{n+1} b \left\{\left(\frac{z}{b}\right)^n\right\}^{\frac{1+n}{n}} = \frac{nb}{n+1} \left(\frac{z}{b}\right)^{1+n} \quad (5.4)$$

$$G(b, 1) = \frac{n}{n+1} b \quad (5.5)$$

以上を (3.10), (3.11) に用いて

i $b \leq z$ の場合

$$I_2(b) = z - G(b, 1) = z - \frac{n}{n+1} b$$

$$I_2(b) = 0 \quad (5.6)$$

ii $b > z \geq 0$ の場合

$$\begin{aligned} I_1(b) &= zg^{-1}(b, z) - G(b, g^{-1}(b, z)) = z \left(\frac{z}{b}\right)^n - \frac{nb}{n+1} \left(\frac{z}{b}\right)^{n+1} \\ &= \frac{z(z/b)^n}{n+1} \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} I_2(b) &= G(b, 1) - G(b, g^{-1}(b, z)) - z(1 - g^{-1}(b, z)) \\ &= \frac{nb + z(z/b)^n}{n+1} - z \end{aligned}$$

需要変数が連続的な場合

(5.2)~(5.7) を (3.12), (4.14) に用いれば期待総コスト $E\{C(z)\}$ は

$$\begin{aligned} E\{C(z)\} &= c(z-x) + h \left\{ \int_0^z \left(z - \frac{n}{1+n} b \right) \phi(b) db \right. \\ &\quad \left. + \int_z^\infty \frac{z(z/b)^n}{1+n} \phi(b) db \right\} + p \int_z^\infty \left[\frac{nb + (z/b)^n}{1+n} - z \right] \phi(b) db \end{aligned} \quad (5.8)$$

となり、期待総コストを最小にする最適値 z^* を決定する式は

$$\int_0^{z^*} \phi(b) db + z^* \int_{z^*}^\infty \frac{1}{b^n} \phi(b) db = \frac{p-c}{p+h} \equiv q \quad (5.9)$$

となる。

(5.6)~(5.9) は文献2の諸結果と一致している。

需要変数が離散的な場合

$$zg^{-1}(b, z) - G(b, g^{-1}(b, z)) = \frac{z(z/b)^n}{n+1}$$

であるから

$$\begin{aligned}
& [(z+1)g^{-1}(b, z+1) - G(b, g^{-1}(b, z+1))] - [zg^{-1}(b, z) - G(b, g^{-1}(b, z))] \\
& = \frac{(z+1)^{n+1} - z^{n+1}}{(n+1)b^n}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

(5.2)～(5.7), および (5.10) を (3.17), (3.21) および (3.22) に用いると, 期待総コストおよび期待総コストを最小にする最適値 z^* のみたすべき式は, それぞれ以下の (5.11), (5.12) で与えられる。

$$\begin{aligned}
E\{C(z)\} = c(z-x) + h \left\{ \sum_{b=0}^z \left(z - \frac{n}{1+n} b \right) \phi(b) + \sum_{b=z+1}^{\infty} \frac{z(z/b)^n}{1+n} \phi(b) \right\} \\
+ p \sum_{b=z+1}^{\infty} \left[\frac{nb + z(z/b)^n}{1+n} - z \right] \phi(b)
\end{aligned} \tag{5.11}$$

$$M_n(z^*-1) \leq \frac{p-c}{p+h} \leq M_n(z^*) \tag{5.12}$$

ここに

$$M_n(z) = \sum_{b=0}^z \phi(b) + \frac{(z+1)^{n+1} - z^{n+1}}{1+n} \sum_{b=z+1}^{\infty} \frac{\phi(b)}{b^n} \tag{5.13}$$

(5.11)～(5.13) は文献 2 の結果と一致している。

以上によって, ナダー・モデルは図 3 に示せるように需要形態がかなりの範囲をカバーできる具体的モデルであること, しかしそれは (3.1) に含まれる特殊型であることが明らかになる。

同値問題

以上にえられた結果を考慮し, 同値問題について, 一般モデルの特殊型を求めておこう。

$$g(b, T/b) = \sqrt[n]{T/t}$$

であるから, 同値問題で重要な量である確率密度関数 $r(b)$ (離散型の場合は確率関数) は, 確率密度関数 $\phi(b)$ (離散型の場合は確率関数) と需要形態を定める指標 n に依存して決めることになるので $r(b)$ を $r_n(b)$ と書くことにする。

変数 z が連続的な場合

一般モデルでは, 同値関係は (4.3) で与えられた。ところが (4.3) の $g^{-1}(b, z)$ はさきに求めた $(z/b)^n$ に等しいから, これを (4.3) に代入すると

$$r_n(z) = nz^{n-1} \int_z^{\infty} b^{-n} \phi(b) db \tag{5.14}$$

となり, 総期待コストを最小にする z^* は

$$\int_0^{z^*} r_n(b) db = q \tag{5.15}$$

をみたす z^* で与えられる。

(5.14) は文献2の結果に一致している。

変数 z が離散的な場合

(5.3), (5.4), (5.7) を (4.18) に代入すると

$$r_n(z) = \begin{cases} \phi(0) + \sum_{b=1}^{\infty} \frac{\phi(b)}{(n+1)b^n}, & z=0 \\ \left[1 - \frac{z^{n+1} - (z-1)^{n+1}}{(n+1)z^n}\right] \phi(z) + \sum_{b=z+1}^{\infty} \left[\frac{(z+1)^{n+1} + (z-1)^{n+1} - 2z^{n+1}}{(n+1)b^n} \right] \phi(b) & z=1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.16)$$

となり、総期待コストを最小にする z^* は、

$$\sum_{b=0}^{z^*-1} r_n(b) \leq \frac{p-c}{p+h} \leq \sum_{b=0}^{z^*} r_n(b) \quad (5.17)$$

をみたす z^* で与えられる。文献2では、 $r_n(z)$ が確率関数であること、ならびに同値性については証明を与えていないが、これらについては一般モデルを用いてすでに4.2で証明済みである。

つぎに一般的モデルで述べた最適値 z^* の性質はどのように表現されるか調べてみよう。この場合、 $g^{-1}(b, z) = (z/b)^n$ であるから、条件 $g_1^{-1}(y, b) \geq g_2^{-1}(y, b)$ は $\left(\frac{b}{y}\right)^{n_1} \geq \left(\frac{b}{y}\right)^{n_2} \Leftrightarrow n_1 \geq n_2$ におきかえられ、

〔性質3〕 需要形態を決定する指標 $n_i (i=1, 2)$ に対応する最適値、すなわち (5.17) をみたす解を $z_i^* (i=1, 2)$ とすると、

$$n_1 \geq n_2 \Rightarrow z_1^* \leq z_2^*$$

をうる。〔性質2〕はそのままの形で成り立つ

なお、ナダー・モデルと需要形態の一般的モデルの中間的モデルとして、 $g(b, T/t) = bg(T/t)$ の場合も考えられる。このとき (3.1) は

$$Q(T) = z - bg(T/t) \quad (5.18)$$

と表わせる*。この場合の在庫問題は一般モデルの特殊型として解決される。このときの在庫問題を決定する重要な諸量を列記しておこう（一般モデルに対応する式の番号に'を付しておく）。

平均在庫量と平均不足量

i $b \leq z$ の場合

$$I_1(b) = z - bG(1) \quad (3.2)'$$

ここに

* 需要形態の一般モデルは $g(b, T/t)$ であった。 $bg(T/t)$ はその特殊型であるが、ナダー・モデル $\sqrt[n]{T/t}$ はさらにその特殊タイプである。

$$G(x) \equiv \int_0^x g(y) dy \quad (3.3)'$$

$$I_2(b) = 0 \quad (3.4)'$$

ii $b > z \geq 0$ の場合

$$I_1(b) = zg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right) - bG\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right) \quad (3.11)'$$

$$I_2(b) = b\left[G(1) - G\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right)\right] - z\left[1 - g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right]$$

需要変数 z が連続的な場合

$$\begin{aligned} E\{C(z)\} &= c(z-x) + h \int_0^z [z-bG(1)]\phi(b)db - p \int_z^\infty [z-bG(1)]\phi(b)db \\ &\quad + (h+p) \int_z^\infty \left[zg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right) - bG\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right) \right] \phi(b)db \end{aligned} \quad (3.12)'$$

$$\int_0^{z^*} \phi(b)db + \int_{z^*}^\infty g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db = q \quad (3.14)'$$

$$r(z) = \int_z^\infty \frac{d}{dz} g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\phi(b)db \quad (4.3)'$$

需要変数 z が離散な場合

$$\begin{aligned} E\{C(z)\} &= c(z-x) + h \sum_{b=0}^z [z-bG(1)]\phi(b) - p \sum_{b=z+1}^\infty [z-bG(1)]\phi(b) \\ &\quad + (h+p) \sum_{b=z+1}^\infty \left[zg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right) - bG\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right) \right] \phi(b) \end{aligned} \quad (3.16)'$$

$$\begin{aligned} M(z) &= \sum_{b=0}^z \phi(b) + \sum_{b=z+1}^\infty \left\{ \left[(z+1)g^{-1}\left(\frac{z+1}{b}\right) - bG\left(g^{-1}\left(\frac{z+1}{b}\right)\right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[zg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right) - bG\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right) \right] \right\} \phi(b) \end{aligned} \quad (3.21)'$$

$$\begin{aligned} r(z) &= \phi(0) + \sum_{b=1}^\infty \left[g^{-1}\left(\frac{1}{b}\right) - bG\left(g^{-1}\left(\frac{1}{b}\right)\right) \right] \phi(b), \quad z=0 \\ &= \left\{ 1 - z + zG(1) + \left[(z-1)g^{-1}\left(\frac{z-1}{z}\right) - zG\left(g^{-1}\left(\frac{z-1}{z}\right)\right) \right] \right\} \phi(z) \\ &\quad + \sum_{b=z+1}^\infty \phi(b) \left\{ \left[(z+1)g^{-1}\left(\frac{z+1}{b}\right) - bG\left(g^{-1}\left(\frac{z+1}{b}\right)\right) \right] \right. \\ &\quad \left. - 2 \left[zg^{-1}\left(\frac{z}{b}\right) - bG\left(g^{-1}\left(\frac{z}{b}\right)\right) \right] + \left[(z-1)g^{-1}\left(\frac{z-1}{b}\right) - bG\left(g^{-1}\left(\frac{z-1}{b}\right)\right) \right] \right\}, \\ &\quad z=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.18)'$$

む す び

以上によって、ナダー・モデルを含む需要形態のより一般的モデル、つまり条件をよりゆるやかにしたモデルが、もっとも単純なモデルと同値な関係をもつよう $r(z)$ を定めた。したがって多くの他のモデルについても、この $r(z)$ を通じて最適解を求めることができる。諸賢の御批判、御助言を乞う次第である。

参 考 文 献

- [1] J. G. Monks: Operations Management, Theory and Problems, McGraw-Hill, 1977.
- [2] E. Naddor: Inventory Systems, John Wiley, 1966.
- [3] H. A. Taha: Operations Research, an Introduction, macmillan, 1976.