保全回数を考慮した冗長システムの信頼性

児玉, 正憲

https://doi.org/10.15017/4475282

出版情報：經濟學研究. 47 (2/3), pp.85-111, 1982-04-10. 九州大学経済学会
バージョン：
権利関係：

保全回数を考慮した冗長システムの信頼性

児　玉　正　憲

はしがき

2つのユニットから構成される並列冗長システムで，保全回数に制限がある場合のシステムの信頼性測度を検討する。保全回数に制限があることはユニットが故障したとき，そのつど修理が可能であるのでなく，修理回数が M 回（M は有限）までに制限されることと見做すこともできるし，また修理作業を取替作業と見做せば，同一な M 個の予備をもつ修理を伴わない2ユニット並列冗長システムで，ユニットが故障すると予備と M 回まで取替えることができるシステムと見做すこともできる。

このようなシステムの信頼性を評価する測度として使命信頼度（関数），時点アベイラビリティ，信頼度，平均寿命および定常アベイラビリティを定義し，これらの測度の関係を明らかにするとともにこれらの測度を統一的に求める方法を展開する。得られた結果は従来の結果を特殊な場合として含む新しい結果である。保全回数に制限がある場合は論文〔2〕,〔3〕で取扱われたが，これらの論文では2つのユニットが共に故障状態になった回数を有限回に制限する形で使命信頼度を解析しているが，実際問題ではこの論文で述べる定義が採択される場合も多いい。

2つのユニットから構成される並列冗長システムでは，通常2つのユニットが故障になったとき致命的故障が起ったとし，t 時間の間致命的故障が起らない確率を信頼度（関数）$R(t)$ と定義し，はじめて致命的故障が起るまでの平均時間を平均寿命（$MTSF$）としている。しかし実際問題では致命的故障が起っても短かい時間に稼動状態になれば許される場合も多いいので，致命的故障が起っても短かい時間 τ（一定）以内に保全が完了すれば使命を果しているという意味でシステム故障と見做さないで，τ 時間をこえるとシステム故障が生じると定義することもある。この場合の t 時間システム故障が生じない確率（$M(t)$）を使命信頼度（関数）という。明らかに $\tau\to 0$ とすると，使命信頼度関数 $M(t)$ は信頼度関数 $R(t)$ に一致する。さらにシステムを長時間稼動さす場合には，任意の時点でシステムが稼動しているか否かは重要な信頼性尺度である。この点を考慮して，時点 t で致命的故障が生じていない確率を時点アベイラビリティ（$P_A(t)$），$t\to\infty$ として長時間使用後の定常状態における定常アベイラビリティ（$P_A(\infty)$）を定義する。

従来，$M(t)$，$R(t)$ および $P_A(t)$ は独立に，別個に方程式系を設定し解析されてきたが，これを統一的に同一の方程式系で解析しようとする試みが筆者によってなされた〔4〕,〔5〕。この論文は保全回数の制限がごく自然な2ユニット並列冗長システムで，上記の信頼性測度を統一的に取扱ったことにシステムの信頼性理論上の意義を有するものである。

1. モデルの定義と記号

本論文で取扱うシステムは，同一な2つのユニット（部分システム）から成る並列冗長システムである。このシステムを1人で保守し，保全されたユニットは新品同様になるものとする。このシステムにおける保全回数は M（有限）回までとする。2つのユニットが同時作動中の故障は次の3つの独立なポアソン過程に従うショックによって起るものとする。

（i）$z_i(t;\ \lambda)$ $(i=1, 2)$：パラメータ λ のポアソン過程でユニット i だけに与えるショック過程を表わし，この過程に従うただ一回のショックでユニット i だけが故障する。これは，ユニット i が単独に故障する時間間隔の分布を表わす故障確率密度関数が，$\lambda\exp[-\lambda t]$ で表わされることを意味する。

（ii）$z(t;\ \lambda_{12})$：パラメータ λ_{12} のポアソン過程で両方のユニットに与えるショック過程を表わし，この過程に従うただ一回のショックで両方のユニットが同時に故障する。従って同時故障を起す故障確率密度関数は，$\lambda_{12}\exp[-\lambda_{12}t]$ で与えられる。

また，一方が故障したとき他方が連鎖故障をおこす場合も考慮し，この確率を γ とする。このような連鎖故障の外に，故障率 λ_{12} のポアソン分布で同時故障をおこすのは，過剰電流とか外部からの衝激等によるショックによるものと見做することができる。

1つのユニットが単独に作動中の故障については，1個が作動することによる過負荷等によって2個が同時作動中の各ユニットの故障分布とは異るものとし，故障確率密度関数は一般分布

$$a(t) = \alpha(t)\exp[-\int_0^t \alpha(y)dy], \quad (A(t) = \int_0^t a(y)dy, A^c(t) = 1-A(t)) \tag{1}$$

に従うものとする。1個が単独で作動中に他の保全中のユニットの保全が完了して2つのユニットが作動中になれば，各ユニットの故障は $z_i(t, \lambda)$ と $z(t, \lambda_{12})$ に支配される。故障は瞬時に発見され他のユニットが保全中でなければ，ただちに保全が行われるものとする。故障したユニットの保全に要する時間は故障過程とは独立に一般分布に従うものとし，その保全確率密度関数を

$$g(t) = \beta(t)\exp[-\int_0^t \beta(y)dy] \quad (G(t) = \int_0^t g(y)dy, G^c(t)=1-G(t)) \tag{2}$$

とする。同時に故障したユニットの保全順序はランダムとする（同一ユニットであるから順序に依存しない）。2つのユニットが故障状態になったときに致命的故障が起ったという。システム停止は，

（i）致命的故障の後，一定時間 τ 以内に保全が完了しないとき

（ii）保全不可能な状態で致命的故障が起るとき

のいずれか一方が起るとき生じるものとする。

システムは任意の時点で次の状態のどれか1つの状態にある。

$E_2^{(n)}(t)$：時点 t で2個のユニットが作動中で，保全を n 回完了している状態，$0\leqq n\leqq M$，

$E_j^{(n)}(t)$：時点 t で j 個のユニットが作動中で，n 回目の保全を行っている状態，$j=0, 1;\ 1\leqq n$

$\leqq M$,

$E_j^{(M+1)}(t)$: 時点 t で j 個のユニットが作動中で，ユニットの故障に対しては保全が不可能な状態，$j=0.1$。

特に時点を指定しないときは $E_j^{(n)}(t)$ に対応して $E_j^{(n)}$ を用いる。このシステムの状態推移は図1に示される。

システムは使用開始時点で状態 $E_2^{(0)}$ 即ち2個のユニットが作動の状態にあり，故障率 $2\lambda(1-\gamma)$ で1個のユニットが故障すると，ユニットが1個作動，1回目の保全を行っている状態 $E_1^{(1)}$ に移る。さらに故障率 $\alpha(x)$ で作動中のユニットが故障すると，2個とも故障中で1回目の保全を行っている状態 $E_0^{(1)}$ に移る。一方状態 $E_1^{(1)}$ からは保全率 $\mu(x)$ で保全中ユニットが保全を完了すると，2個とも作動中で1回目の保全を完了した状態を表わす $E_2^{(1)}$ に移る。また，$E_2^{(0)}$ から同時故障や連鎖故障を表わす故障率 $(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)$ で2個のユニットとも故障状態になり，2つのユニットのうち1個がランダムに選ばれただちに保全をうけ一方は保全待ちになり，状態 $E_0^{(1)}$ に移る。時間と共に状態が推移して状態 $E_0^{(M)}$，即ち2つのユニットが故障で M 回目の保全が行われている状態に移っているとしょう。この場合，保全率 $\mu(x)$ で保全が完了し1個のユニットが作動で保全が不可能な状態 $E_1^{(M+1)}$ に移る。ここで作動中のユニットが故障すると，2個とも故障で保全が不可能な状態 $E_0^{(M+1)}$ に移ることになる。即ちシステム故障が起ることになる。また，$E_0^{(n)}$ $(0\leqq n\leqq M)$ になった後，τ 時間以内に保全が完了しなければシステム故障になる。図1のような状態推移を示すシステムで，序論で述べた信頼性の測度を求めるために，次のような確率関数および記号を導入する。

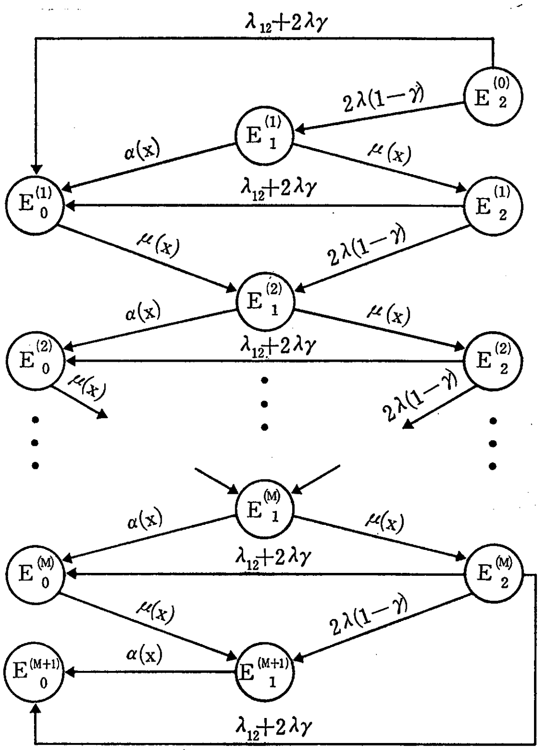

図1　システムの状態移図

(τ,t): τ, t の最小値；

$\varepsilon_1(t)$: 時点 t における保全中のユニットの保全経過時間；

$\varepsilon_2(t)$: 時点 t における1ユニットが作動中の場合の経過時間；

η_1: 使用開始後，はじめてシステム故障になるまでの時間；

$\omega(t)$: 時点 t における致命的故障が生じた時点からの経過時間；

$$P_2^{(n)}(t)=P\{E_2^{(n)}(t)\cap[n_1>t]\,|\,E_2^{(0)}(0)\}\,,\qquad 0\leqq n\leqq M$$

＝使用開始後，時点 t で2ユニット作動，n 回保全を完了した状態にあり，システム故障が一度も

起っていない確率を表わす；

$$P_1^{(n)}(t,x)dx = P\{E_1^{(n)}(t) \cap [\eta_1 > t] \cap [x < \varepsilon_1(t) < x+dx] \mid E_2^{(0)}(0)\}, \quad 1 \leqq n \leqq M$$

＝使用開始後，時点 t で1ユニット作動，n 回目の保全を行っており，その保全経過時間が $(x, x+dx)$ の間にあり，システム故障が一度も起っていない確率；

$$P_1^{(n)}(t) = P\{E_1^{(n)}(t) \cap [\eta_1 > t] \mid E_2^{(0)}(0)\} = \int_0^t P_1^{(n)}(t,x)dx$$

＝使用開始後，時点 t で1ユニット作動，n 回目の保全を行なっており，システム故障が一度も起っていない確率；

$$P_1^{(M+1)}(t,x)dx = P\{E_1^{(M+1)}(t) \cap [\eta_1 > t] \cap [x < \varepsilon_2(t) < x+dx] \mid E_2^{(0)}(0)\}$$

＝使用開始後，時点 t で 1ユニット作動，保全は不可能で作動中のユニットの作動経過時間が $(x, x+dx)$ にあり，システム故障が一度も起っていない確率；

$$P_1^{(M+1)}(t) = P\{E_1^{(M+1)}(t) \cap [\eta_1 > t] \mid E_2^{(0)}(0)\} = \int_0^t P_1^{(M+1)}(t,x)dx$$

＝使用開始後，時点 t で1ユニット作動，保全は不可能でシステム故障が一度も起っていない確率；

$$P_0^{(n)}(t,x,y)dxdy = P\{E_0^{(n)}(t) \cap [\eta_1 > t] \cap [x < \varepsilon_1(t) < x+dx] \cap [y < \omega(t) < y+dy] \mid E_2^{(0)}(0)\}$$
$$x > y, \quad 0 \leqq y \leqq \tau, \quad 1 \leqq n \leqq M$$

＝使用開始後，時点 t で2ユニット故障，n 回目の保全を行っており，先に故障したユニットの保全経過時間が $(x, x+dx)$ の間にあり，他のユニットの保全待機の経過時間が $(y, y+dy)$ の間にあり，システム故障が一度も起っていない確率；

$\int_0^{(\tau,t)} dy \int_y^t P_0^{(n)}(t,x,y)dxdy =$ 使用開始後，時点 t で2ユニット故障，n 回目の保全を行っており，システム故障が一度も起っていない確率，$1 \leqq n \leqq M$

$$P_0^{(n)}(t,x)dx = P\{E_0^{(n)}(t) \cap [\eta_1 > t] \cap [x < \varepsilon_1(t), \omega(t) < x+dx] \mid E_2^{(0)}(0)\},$$
$$0 \leqq x \leqq \tau, \quad 1 \leqq n \leqq M$$

＝使用開始後，時点 t で同時故障または連鎖故障によって2ユニット故障の状態にあり，保全中および待機中の経過時間がいずれも $(x, x+dx)$ の間にあり，システム故障が一度も起っていない確率

$\int_0^\tau P_0^{(n)}(t,x)dx =$ 使用開始後，時点 t で同時故障または連鎖故障によって2ユニット故障の状態にあり，システム故障が一度も起っていない確率，

$$P\{E_0^{(n)}(t) \cap [\eta_1 > t] \mid E_2^{(0)}(0)\} = \int_0^{(\tau,t)} dy \int_y^t P_0^{(n)}(t,x,y)dxdy + \int_0^\tau P_0^{(n)}(t,x)dx$$

$P_0(t) = P$ {時点 t でシステム故障である $| E_2^{(0)}(0)\}$

$M(t) = P\{[0,t)$ 間にシステム故障が生じない $| E_2^{(0)}(0)\} = P\{\eta_1 > t \mid E_2^{(0)}(0)\}$ これは全確率の定理より

$$=\sum_{n=0}^{M} P_2^{(n)}(t)+\sum_{n=1}^{M} P_1^{(n)}(t)+P_1^{(M+1)}(t)+\int_0^{(\tau,t)} dy\int_y^t P_0^{(n)}(t,x,y)dxdy+\int_0^{\tau} P_0^{(n)}(t,x)dx$$

となり使命信頼度関数を表わす

$MTSF_M$：はじめてシステム故障が起るまでの平均時間，これは $\int_0^\infty [1-M(t)]\,dt=\int_0^\infty M^c(t)dt$ で与えられる。

η_2：使用開始後，はじめて致命的故障になるまでの時間

$$Q_2^{(n)}(t)=P\{E_2^{(n)}(t)\cap[\eta_2>t]\,|\,E_2^{(0)}(0)\}\,,\qquad 0\leqq n\leqq M$$

＝使用開始後，時点 t で2ユニット作動，n 回保全を完了した状態にあり，システムの致命的故障が一度も起っていない確率を表わす。

$$Q_1^{(n)}(t,x)dx=P\{E_1^{(n)}(t)\cap[\eta_2>t]\cap[x<\varepsilon_1(t)<x+dx]\,|\,E_2^{(0)}(0)\}\,,\qquad 1\leqq n\leqq M$$

＝使用開始後，時点 t で1ユニット作動，n 回目の保全を行っており，その保全経過時間が $(x,x+dx)$ の間にあり，システムの致命的故障が一度も起っていない確率

$$Q_1^{(n)}(t)=P\{\mathrm{E}_1^{(n)}(t)\cap[\eta_2>t]\,|\,E_2^{(0)}(0)\}=\int_0^t Q_1^{(n)}(t,x)dx\,,\qquad 1\leqq n\leqq M$$

＝使用開始後，時点 t で1ユニット作動，n 回目の保全を行っており，システムの致命的故障が一度も起っていない確率

$$Q_1^{(M+1)}(t,x)dx=P\{E_1^{(M+1)}(t)\cap[\eta_2>t]\cap[x<\varepsilon_2(t)<x+dx]\,|\,E_2^{(0)}(0)\}$$

＝使用開始後，時点 t で1ユニット作動，保全は不可能で，作動中のユニットの作動経過時間が $(x,x+dx)$ の間にあり，システムの致命的故障が一度も起っていない確率

$$Q_1^{(M+1)}(t)=P\{E_1^{(M+1)}(t)\cap[\eta_2>t]\,|\,E_2^{(0)}(0)\}=\int_0^t Q_1^{(M+1)}(t,x)dx$$

＝使用開始後，時点 t で1ユニット作動，保全は不可能でシステムの致命的故障が一度も起っていない確率

$R(t)=P\{0,t)$ 間に致命的故障が生じない$|E_2^{(0)}(0)\}=P\{\eta_2>t|E_2^{(0)}(0)\}$。これは全確率の定理より

$=\sum_{n=0}^{M} Q_2^{(n)}(t)+\sum_{n=1}^{M} Q_1^{(n)}(t)+Q_1^{(M+1)}(t)$ となり信頼度関数を表わす

$MTSF_R$：はじめて致命的故障が起るまでの平均時間，これは $\int_0^\infty [1-R(t)]\,dt=\int_0^\infty R^c(t)dt$ で与えられる。

$$P_{*2}^{(n)}(t)=P\{E_2^{(n)}(t)\,|\,E_2^{(0)}(0)\}\,,\qquad 0\leqq n\leqq M$$

＝使用開始後，時点 t で2ユニット作動，n 回保全を完了した状態にある確率を表わす

$$P_{*1}^{(n)}(t,x)dx=P\{E_1^{(n)}(t)\cap[x<\varepsilon_1(t)<x+dx]\,|\,E_2^{(0)}(0)\}\qquad 1\leqq n\leqq M$$

＝使用開始後，時点 t で1ユニット作動，n 回目の保全を行なっており，その保全経過時間が $(x,x+dx)$ の間にある確率

$$P_{*1}^{(n)}(t)=P\{E_1^{(n)}(t)\,|\,E_2^{(0)}(0)\}=\int_0^t P_{*1}^{(n)}(t,x)dx$$

＝使用開始後，時点 t で1ユニット作動，n 回目の保全を行っている確率

$$P_{*1}^{(M+1)}(t,x)dx=P\{E_1^{(M+1)}(t)\cap[x<\varepsilon_2(t)<x+dx]\,|\,E_2^{(0)}(0)\}$$

＝使用開始後，時点 t で1ユニット作動，保全は不可能で，作動中のユニットの作動経過時間が $(x,x+dx)$ の間にある確率

$$P_{*1}^{(M+1)}(t)=P\{E_1^{(M+1)}(t)\,|\,E_2^{(0)}(0)\}$$

＝使用開始後，時点 t で1ユニット作動，保全は不可能な確率

$P_{*A}(t,M)=P$ {時点 t で致命的故障が生じていない $|E_2^{(0)}(0)\}$ これは全確率の定理より

$=\sum_{n=0}^{M}P_{*2}^{(n)}(t)+\sum_{n=1}^{M}P_{*1}^{(n)}(t)+P_{*1}^{(M+1)}(t)$　これは時点アベイラビリティを表わす

$$P_{*0}(t,x)dx=P\{E_0^{(n)}(t)\cap[x<\varepsilon_1(t)<x+dx]\,|\,E_2^{(0)}(0)\},\qquad 1\leqq n\leqq M$$

＝使用開始後，時点 t で2ユニット故障の状態にあり，n 回目の保全を行っており，保全経過時間が $(x,x+dx)$ の間にある確率；

$$P_{*0}(t)=P\{E_0^{(n)}(t)\,|\,E_2^{(0)}(0)\}=\int_0^t P_{*0}(t,x)dx$$

＝使用開始後，時点 t で2ユニット故障の状態にあり，n 回目の保全を行っている確率；

$P_{*0}(t)=P$ {時点 t で致命的故障が生じている $|E_2^{(0)}(0)\}=\sum_{n=1}^{M}P_{*0}^{(n)}(t)$；

$$P_{*A}(\infty)=\sum_{n=0}^{M}P_{*2}^{(n)}(\infty)+\sum_{n=1}^{M}P_{*1}^{(n)}(\infty)+P_{*1}^{(M+1)}(\infty);$$

これは定常アベイラビリティを表わす；

$$P_{*0}(\infty)=\sum_{n=1}^{M}P_{*0}^{(n)}(\infty);$$

これは定常状態で致命的故障が生じている確率を表わす。

2. システム解析

システムの状態推移図を参照し，システムの特性を考慮し，全確率の定理を用いると次の状態方程式をうる。

$$P_2^{(n)}(t+h)=P_2^{(n)}(t)[1-(2\lambda+\lambda_{12})h]+(1-\delta_{0,n})\int_0^t\mu(x)hP_1^{(n)}(t,x)dx+0(h),\quad 0\leqq n\leqq M, \tag{2.1}$$

$$P_1^{(n)}(t+h,x+h)h=P_1^{(n)}(t,x)h\{1-[\alpha(x)+\mu(x)]h+0(h)\},\qquad 1\leqq n\leqq M, \tag{2.2}$$

$$P_1^{(M+1)}(t+h,x+h)h=P_1^{(M+1)}(t,x)h[1-\alpha(x)h+0(h)], \tag{2.3}$$

$$P_0^{(n)}(t+h,x+h,y+h)h^2=P_0^{(n)}(t,x,y)h^2[1-\mu(x)h+0(h)], \tag{2.4}$$

$$P_0^{(n)}(t+h,x+h)h=P_0^{(n)}(t,x)h[1-\mu(x)h+0(h)], \tag{2.5}$$

$$P_0(t+h) = P_0(t) + \sum_{n=1}^{M} \{\int_{\tau}^{t} P_0^{(n)}(t,x,\tau)hdx + P_0^{(n)}(t,\tau)h\} + \int_0^t \alpha(x)P_1^{(M+1)}(t,x)hdx$$
$$+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)hP_2^{(M)}(t)+0(h) \qquad (2.6)$$

$\delta_{0,n}$ は $n=0$ のとき1，$n \neq 0$ のときは0を表わす。$0(h)$ は $h \to 0$ のとき $\frac{0(h)}{h} \to 0$，即ち h より高位の無限小を意味している。また $\mu(x)h+0(h)$, $\alpha(x)h+0(h)$ は，ユニットの保全時間および作動経過時間がそれぞれ x であるという条件のもとで，$(x, x+h)$ 間に保全を完了および故障する条件付確率を表わす。(2.1) の左辺は時点 $(t+h)$ で状態 $E_2^{(n)}$ にいる確率であり，右辺の第1項は時点 t で $E_2^{(n)}$ にあり，かつ $(t, t+h)$ 間に推移しない即ち故障しない確率を表わしている。第2項の積分の項は時点 t で $E_1^{(n)}$ にあり，かつ $(t, t+h)$ 間で $E_1^{(n)}$ から $E_2^{(n)}$ へ推移する確率を表わしている。第3項の $0(h)$ は $n=0$ のときは，$P_2^{(n)}(t)[1-[2\lambda(1-\gamma)+\lambda_{12}+2\lambda\gamma]h+0(h)] = P_2^{(n)}(t)[1-(2\lambda+\lambda_{12})h]+P_2^{(n)}(t)0(h)$ で $P_2^{(n)}(t)0(h)=0(h)$ を意味している。$n \neq 0$ のときは，$(t, t+h)$ の間に状態推移が2回以上おこり，時点 $t+h$ で $E_2^{(n)}$ にいる確率を表わしている（例：$E_2^{(0)} \to E_1^{(1)} \to E_2^{(1)}$）。(2.4) 式の左辺は $P\{E_0^{(n)}(t+h) \cap [\gamma_1 > t+h] \cap [x+h < \varepsilon_1(t) < x+2h] \cap [y+h < \omega(t) < y+2h] \mid E_2^{(0)}(0)\}$ を表わし，右辺は $P\{E_0^{(n)}(t) \cap [\gamma_1 > t] \cap [x < \varepsilon_1(t) < x+h] \cap [y < \omega(t) < y+h] \mid E_2^{(0)}(0)\}\ P\{(t, t+h)$ の間に保全が完了しない確率$\}$ を表わしている。(2.2)，(2.3)，(2.5) および (2.6) も同様に考えることができる。(2.1) 式より

$$\frac{P_2^{(n)}(t+h)-P_2^{(n)}(t)}{h} = -(2\lambda+\lambda_{12})P_2^{(n)}(t) + (1-\delta_{0,n})\int_0^t \mu(x)P_1^{(n)}(t,x)dx + \frac{0(h)}{h},\ 0 \leqq n \leqq M$$

ここで $h \to 0$ とすると

$$[d/dt+(2\lambda+\lambda_{12})]P_2^{(n)}(t) = (1-\delta_{0,n})\int_0^t \mu(x)P_1^{(n)}(t,x)dx, \qquad 0 \leqq n \leqq M \qquad (2.7)$$

同様にして，(2.2)～(2.6) 式から (2.8)～(2.12) 式をうる。

$$[\partial/\partial t+\partial/\partial x+\alpha(x)+\mu(x)]P_1^{(n)}(t,x) = 0, \qquad 1 \leqq n \leqq M \qquad (2.8)$$

$$[\partial/\partial t+\partial/\partial x+\alpha(x)]P_1^{(M+1)}(t,x) = 0 \qquad (2.9)$$

$$[\partial/\partial t+\partial/\partial x+\partial/\partial y+\mu(x)]P_0^{(n)}(t,x,y) = 0, \qquad y < x,\ 0 \leqq y \leqq \tau,\ 1 \leqq n \leqq M \qquad (2.10)$$

$$[\partial/\partial t+\partial/\partial x+\mu(x)]P_0^{(n)}(t,x) = 0, \qquad 0 \leqq x \leqq \tau,\ 1 \leqq n \leqq M \qquad (2.11)$$

$$\frac{d}{dt}P_0(t) = \sum_{n=1}^{M}\{\int_{\tau}^{t} P_0^{(n)}(t,x,\tau)dx + P_0^{(n)}(t,\tau)\} + \int_0^t \alpha(x)P_1^{(M+1)}(t,x)dx + (\lambda_{12}+2\lambda\gamma)P_2^{(M)}(t) \qquad (2.12)$$

次に $x=0$ における境界条件を求めよう。このため次の確率関数を定義する。

$$q_1^{(n)}(t) = \int_0^h P_1^{(n)}(t,x)dx$$

これは，時点 t で状態 $E_1^{(n)}$ におり，保全中のユニットの保全経過時間が $(0, h)$ の間にある確率

を表わす。このとき

$$q_1^{(n)}(t+h)=\int_0^h P_1^{(n)}(t+h,x)dx$$

$$=2\lambda(1-\gamma)hP_2^{(n-1)}(t)+(1-\delta_{1,n})\{\int_0^{(\tau,t)}dy\int_y^t\mu(x)hP_0^{(n-1)}(t,x,y)dx$$

$$+\int_0^{(\tau,t)}\mu(x)hP_0^{(n-1)}(t,x)dx\}+0(h) \tag{2.13}$$

(2.13) 式の右辺の第一項は時点 t で $E_2^{(n-1)}$ におり，$(t,t+h)$ の間に $E_2^{(n-1)}$ から $E_1^{(n)}$ に推移する確率である。右辺の第2項の積分の項は時点 t で $E_0^{(n-1)}$ におり，$(t,t+h)$ の間に先に故障したユニットの保全が完了して $E_0^{(n-1)}$ から $E_1^{(n)}$ に推移する確率を表わす。第3項の積分の項は時点 t で $E_0^{(n-1)}$ におり，同時故障で故障したユニットの保全が $(t,t+h)$ で完了して $E_0^{(n-1)}$ から $E_1^{(n)}$ に推移する確率を表わす。$q_1^{(n)}(t+h)$ を展開すると

$$q_1^{(n)}(t+h)=q_1^{(n)}(t)+q_1^{(n)\prime}(t)h+0(h)=P_1^{(n)}(t,\theta)h+P_1^{(n)}(t,\theta)h^2+0(h)\,,\quad 0<\theta<h \tag{2.14}$$

(2.13)，(2.14) 式の右辺を h で割って $h\to0$ とすると

$$P_1^{(n)}(t,0)=2\lambda(1-\gamma)P_2^{(n-1)}(t)+(1-\delta_{1,n})\{\int_0^{(\tau,t)}dy\int_y^t\mu(x)P_0^{(n-1)}(t,x,y)dx$$

$$+\int_0^{(\tau,t)}\mu(x)P_0^{(n-1)}(t,x)dx\} \tag{2.15}$$

同様な方法で (2.16)，(2.17) 式をうる。

$$P_0^{(n)}(t,x,0)=\alpha(x)P_1^{(n)}(t,x)\,,\qquad 1\leqq n\leqq M\,, \tag{2.16}$$

$$P_0^{(n)}(t,0)=(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)P_2^{(n-1)}(t)\qquad 1\leqq n\leqq M\,, \tag{2.17}$$

$t=0$ で $E_2^{(0)}$ にいると仮定すると，次の初期条件をうる。

$$P_2^{(0)}(0)=1\qquad \text{その他は}\quad 0 \tag{2.18}$$

初期条件 (2.18) 式のもとで (2.7)～(2.12)，(2.15)～(2.16) および (2.17) をプラス変換すると

$$[s+2\lambda+\lambda_{12}]\bar{P}_2^{(n)}(s)=(1-\delta_{0,n})\int_0^\infty\mu(x)\bar{P}_1^{(n)}(s,x)dx+\delta_{0,n}\,,\qquad 0\leqq n\leqq M\,, \tag{2.19}$$

$$[s+\partial/\partial x+\alpha(x)+\mu(x)]\bar{P}_1^{(n)}(s,x)=0\,,\qquad 1\leqq n\leqq M\,, \tag{2.20}$$

$$[s+\partial/\partial x+\alpha(x)]\bar{P}_1^{(M+1)}(s,x)=0\,, \tag{2.21}$$

$$[s+\partial/\partial x+\partial/\partial y+\mu(x)]\bar{P}_0^{(n)}(s,x,y)=0\,,\quad y<x,\ 0\leqq y\leqq M,\ 1\leqq n\leqq M\,, \tag{2.22}$$

$$[s+\partial/\partial x+\mu(x)]\bar{P}_0^{(n)}(s,x)=0\,,\qquad 0\leqq x\leqq\tau,\ 1\leqq n\leqq M\,, \tag{2.23}$$

$$s\bar{P}_0(s)=\sum_{n=1}^M\{\int_\tau^\infty\bar{P}_0^{(n)}(s,x,\tau)dx+\bar{P}_0^{(n)}(s,\tau)\}+\int_0^\infty\alpha(x)\bar{P}_1^{(M+1)}(s,x)dx+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\bar{P}_2^{(M)}(s)\,, \tag{2.24}$$

$$\bar{P}_1^{(n)}(s,0)=2\lambda(1-\gamma)\bar{P}_2^{(n-1)}(s)+(1-\delta_{1,n})\{\int_0^\tau dy\int_y^\infty \mu(x)\bar{P}_0^{(n-1)}(s,x,y)dx$$

$$+\int_0^\tau \mu(x)\bar{P}_0^{(n-1)}(s,x)dx\}\ ,\qquad 1\leqq n\leqq M+1\ , \tag{2.25}$$

$$\bar{P}_0^{(n)}(s,x,0)=\alpha(x)\bar{P}_1^{(n)}(s,x) \tag{2.26}$$

$$\bar{P}_0^{(n)}(s,0)=(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\bar{P}_2^{(n-1)}(s) \tag{2.27}$$

(2.20), (2.21), (2.23) および (2.27) より

$$\bar{P}_1^{(n)}(s,x)=\bar{P}_1^{(n)}(s,0)\exp\left[-sx-\int_0^x[\alpha(y)+\mu(y)]dy\right], \tag{2.28}$$

$$\bar{P}_1^{(M+1)}(s,x)=\bar{P}_1^{(M+1)}(s,0)\exp\left[-sx-\int_0^x\alpha(y)dy\right], \tag{2.29}$$

$$\bar{P}_0^{(n)}(s,x)=\bar{P}_0^{(n)}(s,0)\exp\left[-sx-\int_0^x\mu(y)dy\right]$$

$$=(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\bar{P}_2^{(n-1)}(s)\exp\left[-sx-\int_0^x\mu(y)dy\right] \tag{2.30}$$

(2.22), (2.26) および (2.28) 式より

$$\bar{P}_0^{(n)}(s,x,y)=\bar{P}_0^{(n)}(s,x-y,0)\exp\left[-sy-\int_{x-y}^x\mu(z)dz\right]$$

$$=\alpha(x-y)\bar{P}_1^{(n)}(s,x-y)\exp\left[-sy-\int_{x-y}^x\mu(z)dz\right]$$

$$=\alpha(x-y)\bar{P}_1^{(n)}(s,0)\exp\left[-s(x-y)\right.$$

$$\left.-\int_0^{x-y}[\alpha(z)+\mu(z)]dz\right]\exp\left[-sy-\int_{x-y}^x\mu(z)dz\right]$$

$$=\alpha(x-y)\bar{P}_1^{(n)}(s,0)\exp\left[-sx-\int_0^x\mu(z)dz\right] \tag{2.31}$$

(2.19) および (2.28) 式より

$$[s+2\lambda+\lambda_{12}]\bar{P}_2^{(n)}(s)=\delta_{0,n}+(1-\delta_{0,n})\bar{P}_1^{(n)}(s,0)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}g(x)e^{-\int_0^x\alpha(z)dz}dx$$

$$=\delta_{0,n}+(1-\delta_{0,n})\bar{P}_1^{(n)}(s,0)\overline{gA^c}(s) \tag{2.32}$$

ここに $\overline{gA^c}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}g(x)A^c(x)dx\ ,\quad A^c(x)=\exp\left[-\int_0^x\alpha(z)dz\right]$

従って (2.33) 式をうる

$$\bar{P}_2^{(n)}(s)=\begin{cases}1/(s+2\lambda+\lambda_{12}) & , \quad n=0\\ \overline{gA^c}(s)\bar{P}_1^{(n)}(s,0)/(s+2\lambda+\lambda_{12}), & 1\leqq n\leqq M,\end{cases} \tag{2.33}$$

$$\int_0^\tau dy\int_y^\infty e^{-sx}a(x-y)g(x)dx=\int_0^\tau dx\int_0^x e^{-sx}a(x-y)g(x)dy+\int_\tau^\infty dx\int_0^\tau e^{-sx}g(x)a(x-y)dy$$

$$=\int_0^\tau e^{-sx}g(x)dx\int_0^x a(y)dy+\int_\tau^\infty e^{-sx}g(x)dx\int_{x-\tau}^x a(y)dy$$

$$=\int_0^\infty e^{-sx}g(x)A(x)dx-\int_0^\infty e^{-s(x+\tau)}g(x+\tau)A(x)dx=\overline{Ag}(s)-e^{-s\tau}\overline{Ag}_\tau(s) \tag{2.34}$$

ここに　$\overline{Ag}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}A(x)g(x)dx,\ \overline{Ag}_\tau(s)=\int_0^\infty e^{-sx}A(x)g(x+\tau)dx$

$g^\dagger(s)=\int_0^\tau e^{-sx}g(x)dx$　とおいて (2.34)，(2.30) および (2.31) を用いて (2.25) 式を整理して (2.35) 式をうる。

$$\bar{P}_1^{(n)}(s,0)=2\lambda(1-\gamma)\bar{P}_2^{(n-1)}(s)+(1-\delta_{1,n})\{\int_0^\tau dy\int_y^\infty\mu(x)a(x-y)\exp[-sx-\int_0^x\mu(z)dz]$$

$$\cdot\bar{P}_1^{(n-1)}(s,0)dx+\int_0^\tau\mu(x)(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\bar{P}_2^{(n-2)}(s)\exp[-sx-\int_0^x\mu(z)dz]dx\}$$

$$=2\lambda(1-\gamma)\bar{P}_2^{(n-1)}(s)+(1-\delta_{1,n})\{\bar{P}_1^{(n-1)}(s,0)[\overline{Ag}(s)-e^{-s\tau}\overline{Ag}_\tau(s)]$$

$$+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)g^\dagger(s)\bar{P}_2^{(n-2)}(s)\} \tag{2.35}$$

(2.33) 式を (2.35) 式に代入して (3.36) 式をうる。

$$(s+2\lambda+\lambda_{12})\bar{P}_2^{(n)}(s)=2\lambda(1-\gamma)\overline{gA^c}(s)\bar{P}_2^{(n-1)}(s)+(1-\delta_{1,n})\{(s+2\lambda+\lambda_{12})[\overline{Ag}(s)$$

$$-e^{-s\tau}\overline{Ag}_\tau(s)]\bar{P}_2^{(n-1)}(s)+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\overline{gA^c}(s)g^\dagger(s)\bar{P}_2^{(n-2)}(s)\} \tag{2.36}$$

(2.33)，(2.35)，(2.36) 式より (2.37)，(2.38) 式をうる。

$$\bar{P}_2^{(1)}(s)=2\lambda(1-\gamma)\overline{gA^c}(s)\bar{P}_2^{(0)}(s)/(s+2\lambda+\lambda_{12})=2\lambda(1-\gamma)\overline{gA^c}(s)/(s+2\lambda+\lambda_{12})^2, \tag{2.37}$$

$$(s+2\lambda+\lambda_{12})\bar{P}_2^{(n)}(s)-\{2\lambda(1-\gamma)\overline{gA^c}(s)+(s+2\lambda+\lambda_{12})[\overline{Ag}(s)-e^{-s\tau}\overline{Ag}_\tau(s)]\}\bar{P}_2^{(n-1)}(s)$$

$$-(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\overline{gA^c}(s)g^\dagger(s)\bar{P}_2^{(n-2)}(s)=0,\quad 2\leqq n\leqq M, \tag{2.38}$$

差分方程式の理論から

$$(s+2\lambda+\lambda_{12})x^2-\{2\lambda(1-\gamma)\overline{gA^c}(s)+(s+2\lambda+\lambda_{12})[\overline{Ag}(s)-e^{-s\tau}\overline{Ag}_\tau(s)]\}x$$

$$-(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\overline{gA^c}(s)g^\dagger(s)=0 \tag{2.39}$$

の2根を $x_1(s)$, $x_2(s)$ とおくと $(x_1\neq x_2)$

$$\bar{P}_2^{(n)}(s)=B_1(s)x_1^n(s)+B_2(s)x_2^n(s)\qquad 2\leqq n\leqq M \tag{2.40}$$

と表現できる。ここに $B_1(s)$, $B_2(s)$ は (2.33)，(2.37) 式をみたすように定める，即ち

$$\begin{cases}B_1(s)+B_2(s)=1/(s+2\lambda+\lambda_{12})\\ B_1(s)x_1(s)+B_2(s)x_2(s)=2\lambda(1-\gamma)\overline{gA^c}(s)/(s+2\lambda+\lambda_{12})^2\end{cases} \tag{2.41}$$

このとき，(2.40) 式は $n=0,1,2,\cdots$, M に対して成立する。時点 t で状態 $E_2^{(n)}$ にいる確率のラプラス変換が既知の分布，パラメータを用いて表現できた。

補題 1. $s>0$ に対して $x_1(s)$, $x_2(s)$ は実数で $|x_i(s)|<1$ $(i=1,2)$

証明 実数であることは (2.39) 式より明らかである。(2.39) 式の左辺を $H(x)$ とおくと $H(0)<0$

$$H(1)=s+2\lambda+\lambda_{12}-\{2\lambda(1-\gamma)\overline{gA^c}(s)+(s+2\lambda+\lambda_{12})[\overline{Ag}(s)-e^{-s\tau}\overline{Ag}_\tau(s)]\}$$
$$-(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\overline{gA^c}(s)g^\dagger(s)$$
$$=s\{1-[\overline{Ag}(s)-e^{-s\tau}\overline{Ag}_\tau(s)]\}+2\lambda\{1-[(1-\gamma)\overline{gA^c}(s)+\overline{Ag}(s)-e^{-s\tau}\overline{Ag}_\tau(s)$$
$$+\gamma\overline{gA^c}(s)g^\dagger(s)]\}+\lambda_{12}\{1-[\overline{Ag}(s)-e^{-s\tau}\overline{Ag}_\tau(s)+\overline{gA^c}(s)g^\dagger(s)]\}$$

第 1 項: $s\{1-\int_0^\infty e^{-sx}A(x)g(x)dx+e^{-s\tau}\int_0^\infty e^{-sx}A(x)g(x+\tau)dx\}$

$$>s\{1-\int_0^\infty g(x)dx+e^{-s\tau}\int_0^\infty e^{-sx}A(x)g(x+\tau)dx\}$$

$$=s\{e^{-s\tau}\int_0^\infty e^{-sx}A(x)b(x+\tau)dx\}>0$$

第 2 項: $2\lambda\{1-(1-\gamma)\int_0^\infty e^{-sx}g(x)A^c(x)\,dx-\int_0^\infty e^{-sx}A(x)g(x)dx+e^{-s\tau}\overline{Ag}_\tau(s)$

$$-\gamma\int_0^\infty e^{-sx}g(x)A^c(x)dx\cdot\int_0^\tau e^{-sx}g(x)dx\}$$

$$>2\lambda\{1-(1-\gamma)\int_0^\infty e^{-sx}g(x)dx+e^{-s\tau}\overline{Ag}_\tau(s)-\gamma[\int_0^\infty e^{-sx}A(x)g(x)dx$$

$$+\int_0^\infty e^{-sx}g(x)(1-A(x))dx]\}$$

$$>1-\int_0^\infty e^{-sx}g(x)dx\geqq 0$$

第 3 項: $\lambda_{12}\{1-\int_0^\infty e^{-sx}A(x)g(x)dx+e^{-s\tau}\int_0^\infty e^{-sx}A(x)g(x+\tau)dx$

$$-\int_0^\infty e^{-sx}g(x)(1-A(x))dx\int_0^\tau e^{-sx}g(x)dx\}$$

$$>\lambda_{12}(1-G(\tau))\{1-\int_0^\infty A(x)g(x)dx\}>0$$

故に $H(1)>0$, 同様にして $H(-1)>0$。よって $s>0$ に対して $|H_i(s)|<1$ *Q.E.D.*

(2.24), (2.30), (2.31) 式より

$$s\bar{P}_0(s)=\sum_{n=1}^{M}\{\int_{\tau}^{\infty}a(x-\tau)\exp[-sx-\int_0^x\mu(z)dz]\bar{P}_1^{(n)}(s,0)dx+(2\lambda\gamma+\lambda_{12})\bar{P}_2^{(n-1)}(s)\exp[-s\tau$$

$$-\int_0^{\tau}\mu(z)dz]\}+\int_0^{\infty}\alpha(x)\exp[-sx-\int_0^x\alpha(z)dz]\bar{P}_1^{(M+1)}(s,0)dx+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\bar{P}_2^{(M)}(s)$$

$$=\sum_{n=1}^{M}\int_0^{\infty}a(x)\exp[-s(x+\tau)-\int_0^{x+\tau}\mu(z)dz]\bar{P}_1^{(n)}(s,0)dx+\sum_{n=1}^{M}(2\lambda\gamma+\lambda_{12})\bar{P}_2^{(n-1)}(s)\exp[-s\tau$$

$$-\int_0^{\tau}\mu(z)dz]+\bar{P}_1^{(M+1)}(s,0)\bar{a}(s)+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\bar{P}_2^{(M)}(s)$$

$$=e^{-s\tau}\overline{aG}_{\tau}^{c}(s)\sum_{n=1}^{M}\bar{P}_1^{(n)}(s,0)+(2\lambda\gamma+\lambda_{12})\exp[-s\tau-\int_0^{\tau}\mu(z)dz]\sum_{n=1}^{M}\bar{P}_2^{(n-1)}(s)$$

$$+\bar{a}(s)\bar{P}_1^{(M+1)}(s,0)+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\bar{P}_2^{(M)}(s)$$

$$=e^{-s\tau}\overline{aG}_{\tau}^{c}(s)[(s+2\lambda+\lambda_{12})/\overline{gA^c}(s)]\sum_{n=1}^{M}\bar{P}_2^{(n)}(s)+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\exp[-s\tau$$

$$-\int_0^{\tau}\mu(z)dz]\sum_{n=1}^{M}\bar{P}_2^{(n-1)}(s)+a(s)\bar{P}_1^{(M+1)}(s,0)+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\bar{P}_2^{(M)}(s) \tag{2.42}$$

ここで $\bar{P}_1^{(M+1)}(s,0)$ は (2.33), (2.35) 式より求められる。

$$\bar{P}_1^{(M+1)}(s,0)=2\lambda(1-\gamma)\bar{P}_2^{(M)}(s)+(s+2\lambda+\lambda_{12})\bar{P}_2^{(M)}(s)[\overline{Ag}(s)-e^{-s\tau}\overline{Ag}_{\tau}(s)]/\overline{gA^c}(s)$$

$$+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)g^{\dagger}(s)\bar{P}_2^{(M-1)}(s)$$

$$=\{2\lambda(1-\gamma)+(s+2\lambda+\lambda_{12})[\overline{Ag}(s)-e^{-s\tau}\overline{Ag}_{\tau}(s)]/\overline{gA^c}(s)\}[B_1(s)x_1(s)^M+B_2(s)x_2(s)^M]$$

$$+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)g^{\dagger}(s)[B_1(s)x_1(s)^{M-1}+B_2(s)x_2(s)^{M-1}] \tag{2.43}$$

(2.40), (2.43) 式を (2.42) 式に代入して整理すると

$$\bar{P}_0(s)=\Big\{[e^{-s\tau}\overline{aG}_{\tau}^{c}(s)(s+2\lambda+\lambda_{12})/\overline{gA^c}(s)]\Big\{\frac{B_1(s)x_1(s)[1-x_1(s)^M]}{1-x_1(s)}+\frac{B_2(s)x_2(s)[1-x_2(s)^M]}{1-x_2(s)}\Big\}$$

$$+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\exp[-s\tau-\int_0^{\tau}\mu(z)dz]\Big\{\frac{B_1(s)[1-x_1(s)^M]}{1-x_1(s)}+\frac{B_2(s)[1-x_2(s)^M]}{1-x_2(s)}\Big\}$$

$$+\bar{a}(s)\{[2\lambda(1-\gamma)+(s+2\lambda+\lambda_{12})[\overline{Ag}(s)-e^{-s\tau}\overline{Ag}_{\tau}(s)]/\overline{gA^c}(s)][B_1(s)x_1(s)^M$$

$$+B_2(s)x_2(s)^M]+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)g^{\dagger}(s)[B_1(s)x_1(s)^{M-1}+B_2(s)x_2(s)^{M-1}]\}$$

$$+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)[B_1(s)x_1(s)^M+B_2(s)x_2(s)^M]\Big\}/s \tag{2.44}$$

これは時点 t でシステムが故障している確率のラプラス変換形であり，逆変換すると $P_0(t)$ が求められる。具体解を求めることは特殊な場合（保全分布が指数分布，$M\to\infty$）を除いて困難であるが数値ラプラス逆変換を用いて数値計算は可能である。

(2.28)～(2.31), (2.33), (2.40), (2.43) 式から

$$\sum_{n=1}^{M}\int_0^{\tau}dy\int_y^{\infty}\bar{P}_0^{(n)}(s,x,y)dx=\sum_{n=1}^{M}\bar{P}_1^{(n)}(s,0)\{\int_0^{\tau}dx\int_0^{x}e^{-sx}a(x-y)G^c(x)dy$$

$$+\int_{\tau}^{\infty}dx\int_0^{\tau}e^{-sx}a(x-y)G^c(x)dy\}$$

$$=\sum_{n=1}^{M}\bar{P}_1^{(n)}(s,0)\{\int_0^{\tau}e^{-sx}G^c(x)A(x)dx+\int_{\tau}^{\infty}e^{-sx}G^c(x)[A(x)-A(x-\tau)]dx\}$$

$$=\sum_{n=1}^{M}\bar{P}_1^{(n)}(s,0)\{\int_0^{\infty}e^{-sx}G^c(x)A(x)dx-\int_{\tau}^{\infty}e^{-sx}G^c(x)A(x)dx$$

$$+\int_{\tau}^{\infty}e^{-sx}G^c(x)A(x)dx-\int_{\tau}^{\infty}e^{-sx}G^c(x)A(x-\tau)dx$$

$$=\sum_{n=1}^{M}\bar{P}_1^{(n)}(s,0)[\overline{AG^c}(s)-e^{-s\tau}\overline{AG_{\tau}^c}(s)]$$

$$=\{(s+2\lambda+\lambda_{12})[\overline{AG^c}(s)-e^{-s\tau}\overline{AG_{\tau}^c}(s)]/\overline{gA^c}(s)\}\sum_{n=1}^{M}\bar{P}_2^{(n)}(s)$$

$$=\{(s+2\lambda+\lambda_{12})[\overline{aG^c}(s)-\overline{Ag}(s)+e^{-s\tau}(\overline{g_{\tau}A(s)}-\overline{aG_{\tau}^c}(s))]/(s\overline{gA^c}(s))\}$$

$$\left\{\frac{B_1(s)x_1(s)[1-x_1(s)^M]}{1-x_1(s)}+\frac{B_2(s)x_2(s)[1-x_2(s)^M]}{1-x_1(s)}\right\} \tag{2.45}$$

$$\bar{P}_1^{(M+1)}(s)=\int_0^{\infty}\bar{P}_1^{(M+1)}(s,x)dx=\bar{P}_1^{(M+1)}(s,0)[1-\bar{a}(s)]/s$$

$$=[(1-\bar{a}(s))/s]\{\{2\lambda(1-\gamma)+(s+2\lambda+\lambda_{12})[\overline{Ag}(s)-e^{-s\tau}\overline{Ag_{\tau}}(s)]/\overline{gA^c}(s)\}$$
$$\cdot[B_1(s)x_1(s)^M+B_2(s)x_2(s)^M]+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)g^{\dagger}(s)[B_1(s)x_1(s)^{M-1}+B_2(s)x_2(s)^{M-1}]\} \tag{2.46}$$

$$\sum_{n=1}^{M}\bar{P}_0^{(n)}(s)=\sum_{n=1}^{M}\int_0^{\tau}\bar{P}_0^{(n)}(s,x)dx=(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\int_0^{\tau}\exp[-sx-\int_0^{x}\mu(z)dz]dx\sum_{n=1}^{M}\bar{P}_2^{(n-1)}(s)$$

$$=(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)[(1-\exp(-s\tau-\int_0^{\tau}\mu(z)dz)-g^{\dagger}(s))/s]\left\{\frac{B_1(s)[1-x_1(s)^M]}{1-x_1(s)}\right.$$

$$\left.+\frac{B_2(s)[1-x_2(s)^M]}{1-x_2(s)}\right\} \tag{2.47}$$

$$\sum_{n=1}^{M}\bar{P}_1^{(n)}(s)=\sum_{n=1}^{M}\int_0^{\infty}\bar{P}_1^{(n)}(s,x)dx=\sum_{n=1}^{M}\bar{P}_1^{(n)}(s,0)\{1-[\overline{aG^c}(s)+\overline{gA^c}(s)]\}/s$$

$$=(s+2\lambda+\lambda_{12})\{[1-\overline{aG^c}(s)-\overline{gA^c}(s)]/[s\overline{gA^c}(s)]\}\sum_{n=1}^{M}\bar{P}_2^{(n)}(s)$$

$$=(s+2\lambda+\lambda_{12})\{[1-\overline{aG^c}(s)-\overline{gA^c}(s)]/[s\overline{gA^c}(s)]\}\left\{\frac{B_1(s)x_1(s)[1-x_1(s)^M]}{1-x_1(s)}\right.$$

$$\left.+\frac{B_2(s)x_2(s)[1-x_2(s)^M]}{1-x_2(s)}\right\} \tag{2.48}$$

(2.45) 式と (2.47) 式の和は時点 t で2個ユニットが停止しているにもかかわらず，τ 時間以内であるためシステムが作動している確率のラプラス変換形を表わし，(2.46) 式と (2.48) 式の和は時点 t でユニットが1個作動していて，システムが作動している確率のラプラス変換形を表わしている。従って使命信頼度のラプラス変換 $\overline{M}(s)$ は (2.33)，(2.40)，(2.44)～(2.47)，(2.48) 式より

$$\begin{aligned}\overline{M}(s)&=\sum_{n=0}^{M}\bar{P}_2^{(n)}(s)+\sum_{n=1}^{M}\bar{P}_1^{(n)}(s)+\bar{P}_1^{(M+1)}(s)+\sum_{n=1}^{M}\bar{P}_0^{(n)}(s)+\sum_{n=1}^{M}\int_0^{\tau}dy\int_y^{\infty}\bar{P}_0^{(n)}(s,x,y)dx\\&=\{1+(s+2\lambda+\lambda_{12})[1-\bar{g}(s)+e^{-s\tau}(\overline{g_\tau A}(s)-\overline{aG_\tau^c}(s))]/(s\overline{gA^c}(s))\}\left\{\frac{B_1(s)x_1(s)[1-x_1(s)^M]}{1-x_1(s)}\right.\\&\quad\left.+\frac{B_2(s)x_2(s)[1-x_2(s)^M]}{1-x_2(s)}\right\}+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\{[1-\exp(-s\tau-\int_0^{\tau}\mu(z)dz)-g^{\dagger}(s)]/s\}\\&\quad\times\left\{\frac{B_1(s)[1-x_1(s)^M]}{1-x_1(s)}+\frac{B_2(s)[1-x_2(s)^M]}{1-x_2(s)}\right\}\\&\quad+[(1-\bar{a}(s))/s]\{(2\lambda(1-\gamma)+(s+2\lambda+\lambda_{12})[\overline{Ag}(s)-e^{-s\tau}\overline{Ag}_\tau(s)]/\overline{gA^c}(s)[B_1(s)x_1(s)^M\\&\quad+B_2(s)x_2(s)^M]+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)g^{\dagger}(s)[B_1(s)x_1(s)^{M-1}+B_2(s)x_2(s)^{M-1}]\}+1/(s+2\lambda+\lambda_{12})\end{aligned}\tag{2.49}$$

次に $P_0(t)+M(t)=1$ であることを確めよう。これは $s\bar{P}_0(s)+s\overline{M}(s)=1$ と同値であるからこの事を示す。まず，次の補題を証明する。

補題2．

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{M}\bar{P}_2^{(n)}(s)\{(s+2\lambda+\lambda_{12})[1-\overline{Ag}(s)+e^{-s\tau}\overline{Ag}_\tau(s)]-[2\lambda(1-\gamma)+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)g^{\dagger}(s)]\overline{gA^c}(s)\}\\&+\{(s+2\lambda+\lambda_{12})[\overline{Ag}(s)-e^{-s\tau}\overline{Ag}_\tau(s)]+[2\lambda(1-\gamma)+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)g^{\dagger}(s)]\overline{gA^c}(s)\}[B_1(s)x_1(s)^M\\&+B_2(s)x_2(s)^M]+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\overline{gA^c}g^{\dagger}(s)[B_1(s)x_1(s)^{M-1}+B_2(s)x_2(s)^{M-1}]\\&-[(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)g^{\dagger}(s)+2\lambda(1-\gamma)]\overline{gA^c}(s)/(s+2\lambda+\lambda_{12})=0\end{aligned}\tag{2.50}$$

証明　(2.38) 式の両辺を n について2から M まで加え，さらに両辺に $(s+2\lambda+\lambda_{12})\bar{P}_2^{(1)}(s)=2\lambda(1-\gamma)\overline{gA^c}(s)/(s+2\lambda+\lambda_{12})$ を加えると (2.51) 式をうる。

$$\begin{aligned}&(s+2\lambda+\lambda_{12})\sum_{n=1}^{M}\bar{P}_2^{(n)}(s)-\{2\lambda(1-\gamma)\overline{gA^c}(s)+(s+2\lambda+\lambda_{12})[\overline{Ag}(s)-e^{-s\tau}\overline{Ag}_\tau(s)]\}\sum_{n=1}^{M-1}\bar{P}_2^{(n)}(s)\\&\qquad-(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\overline{gA^c}(s)g^{\dagger}(s)\sum_{n=0}^{M-2}\bar{P}_2^{(n)}(s)=2\lambda(1-\gamma)\overline{gA^c}(s)/(s+2\lambda+\lambda_{12}),\end{aligned}\tag{2.51}$$

一方，(2.52)，(2.53) 式が成立する。

$$\sum_{n=1}^{M-1}\bar{P}_2^{(n)}(s)=\sum_{n=1}^{M}\bar{P}_2^{(n)}(s)-[B_1(s)x_1(s)^M+B_2(s)x_2(s)^M]\tag{2.52}$$

$$\sum_{n=0}^{M-2}\bar{P}_2^{(n)}(s)=\sum_{n=1}^{M}\bar{P}_2^{(n)}(s)+1/(s+2\lambda+\lambda_{12})-[B_1(s)x_1(s)^M+B_2(s)x_2(s)^M]$$
$$-[B_1(s)x_1(s)^{M-1}+B_2(s)x_2(s)^{M-1}] \tag{2.53}$$

(2.52)，(2.53) 式を (2.51) 式に代入して $\sum_{n=1}^{M}\bar{P}_2^{(n)}(s)$ に関して整頓すると (2.50) 式をうる。

Q.E.D.

関係式

$$(s+\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\overline{gA^c}(s)-(s+2\lambda+\lambda_{12})\bar{g}(s)=-[2\lambda(1-\gamma)\overline{gA^c}(s)+(s+2\lambda+\lambda_{12})\overline{gA}(s)]$$

を用いると (2.44)，(2.49) 式および補題2より

$$s\bar{P}_0(s)+s\overline{M}(s)$$
$$=\left\{\frac{B_1(s)x_1(s)[1-x_1(s)^M]}{1-x_1(s)}+\frac{B_2(s)x_2(s)[1-x_2(s)^M]}{1-x_2(s)}\right\}\{[1-\bar{g}(s)$$
$$+e^{-s\tau}\overline{g_\tau A}(s)](s+2\lambda+\lambda_{12})/\overline{gA^c}(s)+s\}$$
$$+\left\{\frac{B_1(s)[1-x_1(s)^M]}{1-x_1(s)}+\frac{B_2(s)[1-x_2(s)^M]}{1-x_2(s)}\right\}(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)(1-g^\dagger(s))$$
$$+\{B_1(s)x_1(s)^M+B_2(s)x_2(s)^M\}\{2\lambda+\lambda_{12}+(s+2\lambda+\lambda_{12})[\overline{Ag}(s)-e^{-s\tau}\overline{Ag}_\tau(s)]/\overline{gA^c}(s)\}$$
$$+\{B_1(s)x_1(s)^{M-1}+B_2(s)x_2(s)^{M-1}\}(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)g^\dagger(s)+s/(s+2\lambda+\lambda_{12})$$
$$=\sum_{n=1}^{M}\bar{P}_2^{(n)}(s)\{[(s+\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\overline{gA^c}(s)-(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)g^\dagger(s)\overline{gA^c}(s)+(s+2\lambda+\lambda_{12})[1-\bar{g}(s)$$
$$+e^{-s\tau}\overline{g_\tau A}(s)]]/\overline{gA^c}(s)\}+\{B_1(s)x_1(s)^M+B_2(s)x_2(s)^M\}\{2\lambda(1-\gamma)+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)g^\dagger(s)$$
$$+(s+2\lambda+\lambda_{12})[\overline{Ag}(s)-e^{-s\tau}\overline{Ag}_\tau(s)]/\overline{gA^c}(s)\}+\{B_1(s)x_1(s)^{M-1}$$
$$+B_2(s)x_2(s)^{M-1}\}(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)g^\dagger(s)+\{s+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)(1-g^\dagger(s))\}/(s+2\lambda+\lambda_{12})$$
$$=\left\{\sum_{n=1}^{M}\bar{P}_2^{(n)}(s)[(s+2\lambda+\lambda_{12})(1-\overline{Ag}(s)+e^{-s\tau}\overline{Ag}_\tau(s))-[2\lambda(1-\gamma)+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)g^\dagger(s)]\overline{gA^c}(s)]\right.$$
$$+[B_1(s)x_1(s)^M+B_2(s)x_2(s)^M][[2\lambda(1-\gamma)+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)g^\dagger(s)]\overline{gA^c}(s)$$
$$+(s+2\lambda+\lambda_{12})[\overline{Ag}(s)-e^{-s\tau}\overline{Ag}_\tau(s)]]$$
$$+[B_1(s)x_1(s)^{M-1}+B_2(s)x_2(s)^{M-1}](\lambda_{12}+2\lambda\gamma)g^\dagger(s)\overline{gA^c}(s)$$
$$\left.-[(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)g^\dagger(s)+2\lambda(1-\gamma)]\overline{gA^c}(s)/(s+2\lambda+\lambda_{12})\right\}/\overline{gA^c}(s)$$
$$+[s+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)+2\lambda(1-\gamma)]/(s+2\lambda+\lambda_{12})$$
$$=1$$

従って $P_0(t)$ および $M(t)$ が実際に確率測度になっていることが示された。

次にシステム故障までの平均寿命 $MTSF_M$ を求めよう。このため次の極限計算の結果を用いる。

$$\lim_{s\to 0}(1-\bar{g}(s))=0,$$

$$\lim_{s\to 0} e^{-s\tau}[\overline{g_\tau A}(s)-\overline{aG_\tau^c}(s)]=\int_0^\infty A(x)g(x+\tau)dx-\int_0^\infty a(x)G^c(x+\tau)dx=0$$

$$\lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\{[1-\bar{g}(s)+e^{-s\tau}(\overline{g_\tau A}(s)-\overline{aG_\tau^c}(s))]\}=\int_0^\infty xg(x)dx+\int_0^\infty xa(x)G^c(x+\tau)dx$$

$$-\int_0^\infty xA(x)g(x+\tau)dx=K-\int_0^\infty A(x)G^c(x+\tau)dx$$

$$\lim_{s\to 0}[1-\exp(-s\tau-\int_0^\tau \mu(z)dz)-g^\dagger(s)]=1-\exp(-\int_0^\tau \mu(z)dz)-\int_0^\tau g(x)dx=0$$

$$\lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\{[1-\exp(-s\tau-\int_0^\tau \mu(z)dz)-g^\dagger(s)]\}=\tau\exp(-\int_0^\tau \mu(z)dz)+\int_0^\tau xg(x)dx=\int_0^\tau G^c(x)dx$$

$$\lim_{s\to 0}(1-\bar{a}(s))/s=\int_0^\infty xa(x)dx=K^* \tag{2.54}$$

この結果を用いると

$$MTSF_M=\int_0^\infty xdM(x)=\lim_{s\to 0}\overline{M}(s)$$

$$=\{1+(2\lambda+\lambda_{12})[K-\int_0^\infty A(x)G^c(x+\tau)dx]/\int_0^\infty g(x)A^c(x)dx\}\Big\{\frac{B_1(0)x_1(0)[1-x_1(0)^M]}{1-x_1(0)}$$

$$+\frac{B_2(0)x_2(0)[1-x_2(0)^M]}{1-x_2(0)}\Big\}+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\int_0^\tau G^c(x)dx\Big\{\frac{B_1(0)[1-x_1(0)^M]}{1-x_1(0)}$$

$$+\frac{B_2(0)[1-x_2(0)^M]}{1-x_2(0)}\Big\}+K^*\{[2\lambda(1-\gamma)$$

$$+(2\lambda+\lambda_{12})\int_0^\infty A(x)[g(x)-g(x+\tau)]dx/\int_0^\infty g(x)A^c(x)dx][B_1(0)x_1(0)^M+B_2(0)x_2(0)^M]$$

$$+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)G(\tau)[B_1(0)x_1(0)^{M-1}+B_2(0)x_2(0)^{M-1}]\}+1/(2\lambda+\lambda_{12}) \tag{2.55}$$

となり，システム故障までの平均時間が既知のパラメータ，分布，および根によって具体的に表現された。ここに K, K^* は $g(x)$, $a(x)$ の1次の積率（平均値），即ち平均保全時間および平均作動時間を表わす。

従って次の定理をうる。

定理 1

このシステムの使命信頼度（mission reliability）のラプラス変換は（2.49）式で与えられ，また使命を果さない確率の ラプラス変換は（2.44）式で与えられる。またシステム故障までの平均時間は（2.55）式で与えられる。

3. 信頼度とアベイラビリティ

信頼度関数，時点アベイラビリティ，使命信頼度関数，平均寿命および定常アベイラビリティの

間の関係を検討する。信頼度関数および使命信頼度関数の定義から明らかに $\lim_{\tau\to 0} M(t)=R(t)$ となる。(2.39), (2.40), (2.41) 式で $\tau=0$ とすると

$$x_1(s)=0\,,\quad x_2(s)=2\lambda(1-\gamma)\overline{gA^c}(s)/(s+2\lambda+\lambda_{12})\,,\quad B_2(s)=1/(s+2\lambda+\lambda_{12}) \tag{3.1}$$

となるから, (2.49), (2.55) 式より次の定理をうる。

定理 2

このシステムの信頼度関数のラプラス変換 $\bar{R}(s)$ および致命的故障までの平均時間 $MTSF_R$ はそれぞれ (3.2), (3.3) 式で与えられる。

$$\begin{aligned}\overline{R}(s) = \{&2\lambda(1-\gamma)[\overline{gA^c}(s)+(s+2\lambda+\lambda_{12})(1-\bar{g}(s))/s][1\\ &-[2\lambda(1-\gamma)\overline{gA^c}(s)/(s+2\lambda+\lambda_{12}]^M]/(s+2\lambda+\lambda_{12}-2\lambda(1-\gamma)\overline{gA^c}(s))\\ &+1+2\lambda(1-\gamma)[(1-a(s))/s][2\lambda(1-\gamma)\overline{gA^c}(s)/(s+2\lambda+\lambda_{12})]^M\}/(s+2\lambda+\lambda_{12})\,, \end{aligned}\tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}MTSF_R=\{&2\lambda(1-\gamma)[\int_0^\infty g(x)A^c(x)dx+(2\lambda+\lambda_{12})K][1\\ &-[2\lambda(1-\gamma)\int_0^\infty g(x)A^c(x)dx/(2\lambda+\lambda_{12})]^M]/(2\lambda+\lambda_{12}-2\lambda(1-\lambda)\int_0^\infty g(x)A^c(x)dx)\\ &+1+2\lambda(1-\gamma)K^*[2\lambda(1-\gamma)\int_0^\infty g(x)A^c(x)dx/(2\lambda+\lambda_{12})]^M\}/(2\lambda+\lambda_{12})\end{aligned}\tag{3.3}$$

時点アベイラビリティ関数のラプラス変換形 $\bar{P}_{*A}(s, M)$ について次の定理が成立する。

定理 3

$\bar{P}_{*A}(s, M)$ は (2.49) 式の右辺の第3項までの和 $\sum_{n=0}^{M}\bar{P}_2^{(n)}(s)+\sum_{n=1}^{M+1}\bar{P}_1^{(n)}(s)$ で $\tau\to\infty$ としたときの極限, 即ち (3.4) 式で与えられる

$$\begin{aligned}\bar{P}_{*A}(s,M) = \{&1+(s+2\lambda+\lambda_{12})(1-\overline{aG^c}(s)-\overline{gA^c}(s))/(s\overline{gA^c}(s))\}\left\{\frac{B_1(s)x_1(s)[1-x_1(s)^M]}{1-x_1(s)}\right.\\ &\left.+\frac{B_2(s)x_2(s)[1-x_2(s)^M]}{1-x_2(s)}\right\}+[(1-\bar{a}(s))/s]\{[2\lambda(1-\gamma)\\ &+(s+2\lambda+\lambda_{12})\overline{Ag}(s)/\overline{gA^c}(s)][B_1(s)x_1(s)^M+B_2(s)x_2(s)^M]\\ &+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\bar{g}(s)[B_1(s)x_1(s)^{M-1}+B_2(s)x_2(s)^{M-1}]\}+1/(s+2\lambda+\lambda_{12})\,.\end{aligned}\tag{3.4}$$

ここに $x_1(s)$, $x_2(s)$ は (2.39) 式で $\tau\to\infty$ とした式, すなわち

$$(s+2\lambda+\lambda_{12})x^2-\{2\lambda(1-\gamma)\overline{gA^c}(s)+(s+2\lambda+\lambda_{12})\overline{Ag}(s)\}x-(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\overline{gA^c}(s)\bar{g}(s)=0 \tag{3.5}$$

の2根であり, $B_1(s)$, $B_2(s)$ は (2.41) 式で決定される。

証明　まず方程式をたてラプラス変換をとり直接に証明しよう。このシステムの特性より確率関数を用いて, 次の差分・微分・積分方程式をうる（ラプラス変換形）

$$[s+2\lambda+\lambda_{12}]\bar{P}^{(n)}_{*2}(s) = (1-\delta_{2,n})\int_0^\infty \mu(x)\bar{P}^{(n)}_{*1}(s,x)dx+\delta_{2,n}\,, \qquad 0\leqq n\leqq M \tag{3.6}$$

$$[s+\partial/\partial x+\alpha(x)+\mu(x)]\bar{P}^{(n)}_{*1}(s,x) = 0\,, \qquad 1\leqq n\leqq M\,, \tag{3.7}$$

$$[s+\partial/\partial x+\alpha(x)]\bar{P}^{(M+1)}_{*1}(s,x) = 0\,, \tag{3.8}$$

$$[s+\partial/\partial x+\mu(x)]\bar{P}^{(n)}_{*0}(s,x) = \alpha(x)\bar{P}^{(n)}_{*1}(s,x)\,, \qquad 1\leqq n\leqq M \tag{3.9}$$

$$s\bar{P}^{(M+1)}_{*0}(s) = \int_0^\infty \alpha(x)\bar{P}^{(M+1)}_{*1}(s,x)dx+(2\lambda\gamma+\lambda_{12})\bar{P}^{(M)}_{*2}(s) \tag{3.10}$$

$$\bar{P}^{(n)}_{*1}(s,0) = 2\lambda(1-\gamma)\bar{P}^{(n-1)}_{*2}(s)+(1-\delta_{1,n})\int_0^\infty \mu(x)\bar{P}^{(n-1)}_{*0}(s,x)dx\,, \qquad 1\leqq n\leqq M+1 \tag{3.11}$$

$$\bar{P}^{(n)}_{*0}(s,0) = (\lambda_{12}+2\lambda\gamma)P^{(n-1)}_{*2}(s)\,, \qquad 1\leqq n\leqq M\,, \tag{3.12}$$

使命信頼度の解析と同様な方法で (3.6)～(3.9) 式を解くと,

$$\bar{P}^{(n)}_{*1}(s,x) = \bar{P}^{(n)}_{*1}(s,0)\exp[-sx-\int_0^x(\alpha(z)+\mu(z))dz] \tag{3.13}$$

$$\bar{P}^{(M+1)}_{*1}(s,x) = \bar{P}^{(M+1)}_{*1}(s,0)\exp[-sx-\int_0^x\alpha(z)dz] \tag{3.14}$$

$$\bar{P}^{(n)}_{*0}(s,x) = \{(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\bar{P}^{(n-1)}_{*2}(s)+\int_0^x\exp[sx+\int_0^x\mu(z)dz]\alpha(x)\bar{P}^{(n)}_{*1}(s,x)dx\}\exp[-sx$$
$$-\int_0^x\mu(z)dz] \tag{3.15}$$

$$(s+2\lambda+\lambda_{12})\bar{P}^{(n)}_{*2}(s)=(1-\delta_{0,n})\bar{P}^{(n)}_{*1}(s,0)\overline{gA^c}(s)+\delta_{0,n} \tag{3.16}$$

となる。(3.16) 式より

$$\begin{cases}\bar{P}^{(0)}_{*2}(s) = 1/(s+2\lambda+\lambda_{12}) \\ \bar{P}^{(n)}_{*2}(s) = \bar{g}A^c(s)\bar{P}^{(n)}_{*1}(s,0)/(s+2\lambda+\lambda_{12})\,, \qquad 1\leqq n\leqq M\end{cases} \tag{3.17}$$

(3.11) 式より

$$\bar{P}^{(n)}_{*1}(s,0) = 2\lambda(1-\lambda)\bar{P}^{(n-1)}_{*2}(s)+(1-\delta_{1n})\{\bar{P}^{(n-1)}_{*1}(s,0)\overline{gA}(s)+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\bar{P}^{(n-2)}_{*2}\bar{g}(s)\}\,, \tag{3.18}$$

(3.17) 式を (3.18) 式に代入して

$$\bar{P}^{(1)}_{*2}(s) = 2\lambda(1-\gamma)\overline{gA^c}(s)/(s+2\lambda+\lambda_{12})^2 \tag{3.19}$$

$$(s+2\lambda+\lambda_{12})\bar{P}^{(n)}_{*2}(s) = [2\lambda(1-\gamma)\overline{gA^c}(s)+(s+2\lambda+\lambda_{12})\overline{gA}(s)]\bar{P}^{(n-1)}_{*2}(s)$$
$$+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\overline{gA^c}(s)\bar{g}(s)\bar{P}^{(n-2)}_{*2}(s)\,, \qquad n\geqq 2 \tag{3.20}$$

(3.5) 式の 2 根を $\bar{x}_1(s)$, $\bar{x}_2(s)$ とおくと

$$\bar{P}^{(n)}_{*2}(s) = B_1(s)x_1(s)^n+B_2(s)x_2(s)^n \tag{3.21}$$

ここに $B_1(s)$, $B_2(s)$ は (2.41) で決定される。

使命信頼度の解析と同様にして $s>0$ に対して $|x_i(s)|<|$ $(i=1,2)$ となり $s=0$ に対して

$$\bar{x}_1=(0)=1\,,\quad \bar{x}_2(0)=-(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\overline{gA^c}(0)/(2\lambda+\lambda_{12}) \tag{3.22}$$

(3.13), (3.14) 式より

$$\bar{P}^{(n)}_{*1}(s)=(s+2\lambda+\lambda_{12})\overline{AG^c}(s)\bar{P}^{(n)}_{*2}/\overline{gA^c}(s) \tag{3.23}$$

$$\bar{P}^{(M+1)}_{*1}(s)=\bar{P}^{(M+1)}_{*1}(s,0)(1-\bar{a}(s))/s\,, \tag{3.24}$$

ここに

$$\begin{aligned}\bar{P}^{(M+1)}_{*1}(s,0)=&[2\lambda(1-\gamma)+(s+2\lambda+\lambda_{12})\overline{gA}(s)/\overline{gA^c}(s)][B_1(s)x_1(s)^M+B_2(s)x_2(s)^M]\\&+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\bar{g}(s)[B_1(s)x_1(s)^{M-1}+B_2(s)x_2(s)^{M-1}]\end{aligned} \tag{3.25}$$

従って，時点アベイラビリティのラプラス変換 $\bar{P}_{*A}(s)$ は $\overline{A^cG^c}(s)=[1-(\overline{aG^c}(s)+\overline{gA^c}(s))]/s$ を用いて

$$\begin{aligned}\bar{P}_{*A}(s)&=\sum_{n=0}^{M}\bar{P}^{(n)}_{*2}(s)+\sum_{n=1}^{M+1}\bar{P}^{(n)}_{*1}(s)\\&=(3.4)\end{aligned}$$

となる。　　*Q.E.D.*

定理の確率論的意味を考え別証明を与えよう。時点アベイラビリティは定義から確率 $P_{*A}(t)$ は,

$$P_{*A}(t)=\sum_{n=1}^{M+1}P^{(n)}_{*1}(t)+\sum_{n=0}^{M}P^{(n)}_{*2}(t)=\sum_{n=1}^{M+1}P\{E_1^{(m)}(t)\,|\,E_2^{(3)}(0)\}+\sum_{n=0}^{M}P\{E_2^{(n)}(t)\,|\,E_2^{(0)}(0)\} \tag{3.26}$$

を求めることである。$E_j^{(n)}(t)$ を時点 t までにシステム故障が起っているか否かに着目して，2つの排反事象 $E_j^{(n)}(t)\cap[\eta_1>t]$ (時点 t で $E_j^{(n)}$ におり，t までにシステム故障が起っていないという事象), $E_j^{(n)}(t)\cap[\eta_1\leqq t]$ (時点 t で $E_j^{(n)}$ におり，t までにシステム故障が起っているという事象) の和事象として表わそう。即ち

$$E_j^{(n)}(t)=(E_j^{(n)}(t)\cap[\eta_1>t])\cup(E_j^{(n)}(t)\cap[\eta_1\leqq t])$$

従って

$$\begin{aligned}P\{E_j^{(n)}(t)\,|\,E_2^{(0)}(0)\}&=P\{(E_j^{(n)}(t)\cap[\eta_1>t])\cup(E_j^{(n)}(t)\cap[\eta_1\leqq t])\,|\,E_2^{(0)}(0)\}\\&=P\{E_j^{(n)}(t)\cap[\eta_1>t]\,|\,E_2^{(0)}(0)\}+P\{E_j^{(n)}(t)\cap[\eta_1\leqq t]\,|\,E_2^{(0)}(0)\}\end{aligned} \tag{3.27}$$

$[\eta_1>t]$ は時点 t までにシステム故障が起っていないという事象を表わし，これは t までにシステムが "$E_0^{(M+1)}$" および "$E_0^{(n)}(1\leqq n\leqq M)$ に推移した直後からの保全経過時間 $>\tau$ という状態" に推移していないことを表わしている。$[\eta_1\leqq t]$ は $[\eta_1>t]$ の補事象であり，時点 t までにシステが "$E_0^{(M+1)}$" または "$E_0^{(n)}(1\leqq n\leqq M)$ に推移した直後からの保全時間 $>\tau$ という状態" に推移していることを表わしている。$\tau\to\infty$ とすると，"$E_0^{(n)}(1\leqq n\leqq M)$ に推移した直後からの保全時間 $(<t)>\infty$ という事象は空事象となり，$[\eta_1>t]$ は時点 t までに システムが $E_0^{(M+1)}$ に推移していな

いことを表わし，$[\eta_1 \leqq t]$ は t までにシステムが $E_0^{(M+1)}$ に推移していることを表わしている。しかし，このモデルでは一度システムが $E_0^{(M+1)}$ に推移すると，その他の状態に推移できない（M が有限のため $E_0^{(M+1)}$ は吸収壁）ので，$P\{E_0^{(M+1)}(t) \cap [\eta_1 \leqq t] \mid E_2^{(0)}(0)\} = 1$，$P\{E_j^{(n)}(t) \cap [\eta_1 \leqq t] \mid E_2^{(0)}(0)\} = 0$（その他の n, j に対して）従って $\tau \to \infty$ のとき，$j=1, 2$ に対して $P\{E_j^{(n)}(t) \cap [\eta_1 > t] \mid E_2^{(0)}(0)\}$ は時点 t までに システムが $E_0^{(M+1)}$ に 推移しないで t で $E_j^{(n)}$ にいる 確率を表わし，$P\{E_j^{(n)}(t) \cap [\eta_1 \leqq t] \mid E_2^{(0)}(0)\} = 0$ となる。故に $j=1, 2$ に対して $\tau \to \infty$ とすると，$P\{E_j^{(n)}(t) \mid E_2^{(0)}(0)\} = P\{E_j^{(n)}(t) \cap [\eta_1 > t] \mid E_2^{(0)}(0)\}$ となる。従って時点アベイラビリティは

$$\sum_{n=1}^{M+1} P\{E_1^{(n)}(t) \cap [\eta_1 > t] \mid E_2^{(0)}(0)\} + \sum_{n=0}^{M} P\{E_2^{(n)}(t) \cap [\eta_1 > t] \mid E_2^{(0)}(0)\} = \sum_{n=1}^{M} P_1^{(n)}(t) + \sum_{n=0}^{M} P_2^{(n)}(t)$$

を求めて $\tau \to \infty$ とすればよい。この証明は具体解を求める必要はなく一般的である。

定常アベイラビリティについては次の定理が成立する。

定理 4

定常アベイラビリティ $P_*(\infty, M)$ は0である。

証明 $\lim_{s \to 0} (1 - \overline{aG^c}(s) - \overline{gA^c}(s)) = \int_0^\infty a(x)G(x)dx - \int_0^\infty g(x)A^c(x)dx = 0$，$\lim_{s \to 0} (1 - \bar{a}(s)) = 0$，

$|x_i(s)| < 1$，$(s > 0, i = 1, 2)$, $x_1(0) = 0$，$[1 - x_1(s)^M]/(1 - x_1(s)) = \sum_{k=0}^{M-1} x_1(s)^k$，を用いると

$$P_{*A}(\infty, M) = \lim_{s \to 0} s\bar{P}_{*A}(s, M) = 0 \tag{3.28}$$

Q.E.D

これは保全回数が有限であるため長時間使用の後では状態 $E_0^{(M+1)}$ に推移し，システムは故障した状態にとどまることからも推察される。

定理 5

時点 t でシステムの状態が $E_0^{(1)}, \cdots, E_0^{(M)}$ のいずれかである確率のラプラス変換 $\bar{P}_{*0}(s)$ および定常状態でシステムの状態が $E_0^{(1)}, \cdots, E_0^{(M)}$ のいずれかである 確率 $P_{*0}(\infty)$ はそれぞれ (3.29), (3.30) 式で与えられる。

$$\bar{P}_{*0}(s) = \lim_{\tau \to \infty} \{ \sum_{n=1}^{M} \bar{P}_0^{(n)}(s) + \sum_{n=1}^{M} \int_0^\tau dy \int_0^\infty \bar{P}_0^{(n)}(s, x, y) dx \}$$

$$= \{(\lambda_{12} + 2\lambda\gamma)[(1 - \bar{g}(s))/s]\} \left\{ \frac{B_1(s)[1 - x_1(s)^M]}{1 - x_1(s)} + \frac{B_2(s)[1 - x_2(s)^M]}{1 - x_2(s)} \right\}$$

$$+ \{(s + 2\lambda + \lambda_{12})[(\overline{aG^c}(s) - \overline{Ag}(s))/(s\overline{gA^c}(s))]\}$$

$$\cdot \left\{ \frac{B_1(s)x_1(s)[1 - x_1(s)^M]}{1 - x_1(s)} + \frac{B_2(s)x_2(s)[1 - x_2(s)^M]}{1 - x_2(s)} \right\}, \tag{3.29}$$

$$P_{*0}(\infty) = \lim_{s \to 0} s\bar{P}_{*0}(s) = 0. \tag{3.30}$$

証明 $P_{*0}(t)=\sum_{n=1}^{M}P_{*0}^{(n)}(t)=\sum_{n=1}^{M}P\{E_0^{(n)}(t)\,|\,E_2^{(0)}(0)\}$

$$=\sum_{n=1}^{M}P\{E_0^{(n)}(t)\cap[\eta_1>t]\,|\,E_2^{(0)}(0)\}+\sum_{n=1}^{M}P\{E_0^{(n)}(t)\cap[\eta_1\leqq t]\,|\,E_2^{(0)}(0)\}$$

ここで，$\tau\to\infty$ とすると定理 3 と同様な議論で

$$=\sum_{n=1}^{M}P\{E_0^{(n)}(t)\cap[\eta_1>t]\,|\,E_2^{(0)}(0)\}$$

よって (2.49) 式の第 4 項と第 5 項の和である $\sum_{n=1}^{M}\bar{P}_0^{(n)}(s)+\sum_{n=1}^{M}\int_0^{\tau}dy\int_0^{\infty}\bar{P}_0^{(n)}(s,\ x,\ y)dx$ を求めて，$\tau\to\infty$ とすればよい。(3.30) 式は (3.29) 式より明らか。 *Q.E.D.*

定理 6

$\tau\to\infty$ のとき $\bar{P}_0(s)$ は

$$\bar{P}_0(s)=\{[\bar{a}(s)[2\lambda(1-\gamma)+(s+2\lambda+\lambda_{12})\overline{Ag}(s)/\overline{gA^c}(s)]+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)][B_1(s)x_1(s)^M$$
$$+B_2(s)x_2(s)^M]+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\bar{g}(s)[B_1(s)x_1(s)^{M-1}+B_2(s)x_2(s)^{M-1}]\}/s\,, \tag{3.31}$$

となる。これは時点 t でシステムの状態が $\mathrm{E}_0^{(M+1)}$（吸収壁）である確率のラプラス変換を表わしている。このとき

$$P_0(\infty)=\lim_{s\to0}s\bar{P}_0(s)=\{[2\lambda(1-\gamma)+(2\lambda+\lambda_{12})\overline{Ag}(0)/\overline{gA^c}(0)]+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\}$$
$$\cdot[B_1(0)x_1(0)^M+B_2(0)x_2(0)^M]+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)[B_1(0)x_1(0)^{M-1}+B_2(0)x_2(0)^{M-1}]$$
$$=[(2\lambda+\lambda_{12})/\int_0^{\infty}g(x)A^c(x)dx][B_1(0)x_1(0)^M+B_2(0)x_2(0)^M]$$
$$+(2\lambda\gamma+\lambda_{12})[B_1(0)x_1(0)^{M-1}+B_2(0)x_2(0)^{M-1}]=1\,, \tag{3.32}$$

証明 (3.31) 式は (2.44) 式で $\tau\to\infty$ とすることによって得られる。(3.32) 式の最後の等式は補題 2 が $\tau\to\infty,\ s\to0$ のとき成立することに着目し，補題 2 で $\tau\to\infty$，さらに $s\to0$ とし，$\lim_{s\to0}\bar{P}_2^{(n)}(s)<\infty$ を用いて得られる。 *Q.E.D.*

信頼度関数 $R(t)$，時点アベイラビリティ関数 $P_{*A}(t)$，時点アンアベイラビリティ関数 $P_{*0}(t)$，使命信頼度関数 $M(t)$ および $P_0(t)$ の間の関係を検討しよう。定義より

$$R(t)=\sum_{n=0}^{M}P\{E_2^{(n)}(t)\cap[\eta_2>t]\,|\,E_2^{(0)}(0)\}+\sum_{n=1}^{M+1}P\{E_1^{(n)}(t)\cap[\eta_2>t]\,|\,E_2^{(0)}(0)\}\,, \tag{3.33}$$

$$P_{*A}(t)=\sum_{n=0}^{M}P\{E_2^{(n)}(t)\,|\,E_2^{(0)}(0)\}+\sum_{n=1}^{M+1}P\{E_1^{(n)}(t)\,|\,E_2^{(0)}(0)\}\,, \tag{3.34}$$

$$P_{*0}(t)=\sum_{n=1}^{M}P\{E_0^{(n)}(t)\,|\,E_2^{(0)}(0)\}\,, \tag{3.35}$$

$$M(t)=\sum_{n=0}^{M}P\{E_2^{(n)}(t)\cap[\eta_1>t]\,|\,E_2^{(0)}(0)\}+\sum_{n=1}^{M+1}P\{E_1^{(n)}(t)\cap[\eta_1>t]\,|\,E_2^{(0)}(0)\}$$
$$+\sum_{n=1}^{M}P\{E_0^{(n)}(t)\cap[\eta_1>t]\,|\,E_2^{(0)}(0)\}\,, \tag{3.36}$$

$$P_0(t)=\sum_{n=1}^{M}P\{E_0^{(n)}(t)\cap[\eta_1\leqq t]\,|\,E_2^{(0)}(0)\}+P\{E_0^{(M+1)}(t)\,|\,E_2^{(0)}(0)\}\,, \tag{3.37}$$

となる。

（a）　$\tau\to 0$ とすると $\eta_1\to\eta_2$, $E_0^{(n)}(t)\cap[\eta_1>t]=\phi$ となり

$$M(t)=R(t)$$

となる。このとき

$$\begin{aligned}P_0(t)&=\sum_{n=1}^{M}P\{E_0^{(n)}(t)\cap[\eta_1\leqq t]\,|\,E_2^{(0)}(0)\}+\sum_{n=1}^{M}P\{E_0^{(n)}(t)\cap[\eta_1>t]\,|\,E_2^{(0)}(0)\}\\&\qquad+P\{E_0^{(M+1)}(t)\,|\,E_2^{(0)}(0)\}\\&=\sum_{n=1}^{M}P\{E_0^{(n)}(t)\,|\,E_2^{(0)}(0)\}+P\{E_0^{(M+1)}(t)\,|\,E_2^{(0)}(0)\}\\&=P_{*0}(t)+P\{E_0^{(M+1)}(t)\,|\,E_2^{(0)}(0)\}\,.\end{aligned} \tag{3.38}$$

$P_{*A}(t)$ から $R(t)$ を求めるために

$$\begin{aligned}P_{*A}(t)&=\sum_{n=0}^{M}P\{E_2^{(n)}(t)\cap[\eta_1>t]\,|\,E_2^{(0)}(0)\}+\sum_{n=0}^{M}P\{E_2^{(n)}(t)\cap[\eta_1\leqq t]\,|\,E_2^{(0)}(0)\}\\&\quad+\sum_{n=1}^{M+1}P\{E_1^{(n)}(t)\cap[\eta_1>t]\,|\,E_2^{(0)}(0)\}+\sum_{n=1}^{M+1}P\{E_1^{(n)}(t)\cap[\eta_1\leqq t]\,|\,E_2^{(0)}(0)\}\,,\ \eta_1=\eta_2,\ \tau=0,\end{aligned} \tag{3.39}$$

と変形し，$P\{E_1^{(n)}(t)\cap[\eta_1\leqq t]\,|\,E_2^{(0)}(0)\}=0$ $(n=1,2,\cdots,M+1)$ とおくと，このモデルの特性（図1参照)から $P\{E_2^{(n)}(t)\cap[\eta_1\leqq t]\,|\,E_2^{(0)}(0)\}=0$ $(n=0,1,\cdots,M)$ となり $P_{*A}(t)$ は $R(t)$ となる。

（b）　$\tau\to\infty$ とすると，$E_2^{(n)}(t)\cap[\eta_1\leqq t]=\phi$ $(n=0,1,\cdots,M)$；$E_1^{(n)}(t)\cap[\eta_1\leqq t]=\phi$ $(n=1,2,\cdots,M+1)$；$E_0^{(n)}(t)\cap[\eta_1\leqq t]=\phi$ $(n=1,2,\cdots,M)$ となるから (3.39)，(3.35) 式より

$$M(t)=P_{*A}(t)+\sum_{n=1}^{M}P\{E_0^{(n)}(t)\cap[\eta_1>t]\,|\,E_2^{(0)}(0)\}$$

すなわち，

$$P_{*A}(t)=\sum_{n=0}^{M}P\{E_2^{(n)}(t)\cap[\eta_1>t]\,|\,E_2^{(0)}(0)\}+\sum_{n=1}^{M+1}P\{E_1^{(n)}(t)\cap[\eta_1>t]\,|\,E_2^{(0)}(0)\}\,, \tag{3.40}$$

また，

$$P_{*0}(t)=\sum_{n=1}^{M}P\{E_0^{(n)}(t)\cap[\eta_1>t]\,|\,E_2^{(0)}(0)\}\,, \tag{3.41}$$

となる。従って $P_{*A}(t)$ および $P_{*0}(t)$ は $M(t)$ の式で $\tau\to\infty$ とおき (3.40)，(3.41) 式を用いて求めることができる。明らかに

$$M(t)=P_{*A}(t)+P_{*0}(t)\,,\quad M(t)+P_0(t)=1$$

が成立している。

4. 保全回数に制限がない場合

ここで $M\to\infty$ の特別な場合を考察する。記号 $P_{*A}(t)$, $\bar{P}_{*A}(s)$, $P_{*A}(\infty)$, $\cdots$, の代りにそれぞれ記号 $P_{*A}(t,\infty)$, $\bar{P}_{*A}(s,\infty)$, $P_{*A}(\infty,\infty)$, $\cdots$ を用いる。$M\to\infty$ の場合は保全回数に制限がないことを意味するので，故障すればそのつど何回でもユニットを保全できることになる。これは保全を取替と考えれば，ユニットの取替回数に制限のない場合（予備ユニットが無限個ある場合）に相当する。$s>0$ に対して

$|x_i(s)|<1$ であるから $\lim_{M\to\infty} x_i(s)^M=0$

従って (2.44), (2.49) 式から

$$s\bar{P}_0(s,\infty)=[e^{-s\tau}\overline{aG_\tau^c}(s)(s+2\lambda+\lambda_{12})/\overline{gA^c}(s)]\{B_1(s)x_1(s)/(1-x_1(s))+B_2(s)x_2(s)/(1-x_2(s))\}$$
$$+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\exp[-s\tau-\int_0^\tau\mu(z)dz]\{B_1(s)/(1-x_1(s))+B_2(s)/(1-x_2(s))\} \tag{4.1}$$

$$s\overline{M}(s,\infty)=\{s+(s+2\lambda+\lambda_{12})[1-\bar{g}(s)+e^{-s\tau}(\overline{g_\tau A}(s)-\overline{aG_\tau^c}(s))]/\overline{gA^c}(s)\}$$
$$\cdot\{B_1(s)x_1(s)/(1-x_1(s))+B_2(s)x_2(s)/(1-x_2(s))\}$$
$$+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)[1-\exp(-s\tau-\int_0^\tau\mu(z)dz)-g^\dagger(s)]\{B_1(s)/(1-x_1(s)$$
$$+B_2(s)/(1-x_2(s))\}+s/(s+2\lambda+\lambda_{12}), \tag{4.2}$$

(2.39) 式から

$$\begin{cases} x_1(s)+x_2(s)=\{2\lambda(1-\gamma)\overline{gA^c}(s)+(s+2\lambda+\lambda_{12})[\overline{Ag}(s)-e^{-s\tau}\overline{Ag_\tau}(s)]\}/(s+2\lambda+\lambda_{12}), \\ x_1(s)x_2(s)=-(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\overline{gA^c}(s)g^\dagger(s)/(s+2\lambda+\lambda_{12}) \end{cases} \tag{4.3}$$

(2.41), (4.1), (4.2), (4.3) 式から

$$s\bar{P}_0(s,\ \infty)=[B_1(s)/(1-x_1(s))+B_2(s)/(1-x_2(s))]\{[e^{-s\tau}\overline{aG_\tau^c}(s)(s+2\lambda+\lambda_{12})/\overline{gA^c}(s)]$$
$$\cdot\{[B_1(s)x_1(s)(1-x_2(s))+B_2(s)x_2(s)(1-x_1(s))]/[B_1(s)(1-x_2(s))$$
$$+B_2(s)(1-x_1(s))]\}+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\exp[-s\tau-\int_0^\tau\mu(z)dz]\}$$
$$=\left\{\frac{(B_1(s)+B_2(s))[1-(x_1(s)+x_2(s))]+B_1(s)x_1(s)+B_2(s)x_2(s)}{1-(x_1(s)+x_2(s))+x_1(s)x_2(s)}\right\}$$
$$\cdot\left\{[e^{-s\tau}\overline{aG_\tau^c}(s)(s+2\lambda+\lambda_{12})/\overline{gA^c}(s)]\right.$$
$$\cdot\left[\frac{B_1(s)x_1(s)+B_2(s)x_2(s)-x_1(s)x_2(s)(B_1(s)+B_2(s))}{(B_1(s)+B_2(s))[1-(x_1(s)+x_2(s))]+B_1(s)x_1(s)+B_2(s)x_2(s)}\right]$$
$$\left.+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\exp[-s\tau-\int_0^\tau\mu(z)dz]\right\}$$
$$=\left\{\frac{1-\overline{Ag}(s)+e^{-s\tau}\overline{Ag_\tau}(s)}{(s+2\lambda+\lambda_{12})[1-\overline{Ag}(s)+e^{-s\tau}\overline{Ag_\tau}(s)]-[2\lambda(1-\gamma)\overline{gA^c}(s)+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\overline{gA^c}(s)g^\dagger(s)]}\right\}$$

$$\cdot\Big\{[e^{-s\tau}\overline{aG^c_\tau}(s)(s+2\lambda+\lambda_{12})/\overline{gA^c}(s)]\left[\frac{2\lambda(1-\gamma)\overline{gA^c}(s)+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\overline{gA^c}(s)g^\dagger(s)}{(s+2\lambda+\lambda_{12})[1-\overline{Ag}(s)+e^{-s\tau}\overline{Ag_\tau}(s)]}\right]$$

$$+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\exp[-s\tau-\int_0^\tau\mu(z)dz]\Big\},$$

$$=\{(s+2\lambda+\lambda_{12})-\overline{gA^c}(s)[2\lambda(1-\gamma)+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)g^\dagger(s)]/[1-\overline{Ag}(s)+e^{-s\tau}\overline{Ag_\tau}(s)]\}^{-1}$$

$$\cdot\Big\{\left[\frac{e^{-s\tau}\overline{aG^c_\tau}(s)[2\lambda(1-\gamma)+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)g^\dagger(s)}{1-\overline{Ag}(s)+e^{-s\tau}\overline{Ag_\tau}(s)}\right]+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\exp[-s\tau-\int_0^\tau\mu(z)dz]\Big\} \tag{4.4}$$

$$s\overline{M}(s,\infty)=\{(s+2\lambda+\lambda_{12})-\overline{gA^c}(s)[2\lambda(1-\gamma)+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)g^\dagger(s)]/[1-\overline{Ag}(s)+e^{-s\tau}\overline{Ag_\tau}(s)]\}^{-1}$$

$$\cdot\Big\{[\overline{sgA^c}(s)/(s+2\lambda+\lambda_{12})+[1-\bar{g}(s)+e^{-s\tau}(\overline{g_\tau A}(s)-\overline{aG^c_\tau}(s))]]$$

$$\cdot\left[\frac{2\lambda(1-\gamma)+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)g^\dagger(s)}{1-\overline{Ag}(s)+e^{-s\tau}\overline{Ag_\tau}(s)}\right]+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)[1-\exp(-s\tau-\int_0^\tau\mu(z)dz)-g^\dagger(s)]\Big\}$$

$$+s/(s+2\lambda+\lambda_{12}) \tag{4.5}$$

(4.4) 式は〔2〕の §3, (15) 式において $A(t)=1-e^{-\lambda^* t}$ とおけば完全に一致する。システムの平均寿命 $MTSF_M$ は (4.5) 式より

$$MTSF_M=\lim_{s\to 0}\overline{M}(s,\infty)$$

$$=\{(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)G^c(\tau)+\int_0^\infty g(x)A(x)dx[2\lambda(1-\gamma)+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)G(\tau)]/[\int_0^\infty(A^c(x)g(x)$$

$$+A(x)g(x+\tau))dx]\}^{-1}\Big\{[\int_0^\infty g(x)A^c(x)dx/(2\lambda+\lambda_{12})+[K-\int_0^\infty A(x)G^c(x+\tau)dx]]$$

$$\cdot\left[\frac{2\lambda(1-\gamma)+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)G(\tau)}{1-\int_0^\infty A(x)(g(x)-g(x+\tau))dx}\right]+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\int_0^\tau G^c(x)dx\Big\}+1/(2\lambda+\lambda_{12}), \tag{4.6}$$

さらに $\tau\to 0$ とすると，保全回数に制限がない場合の t 時間システム故障が起らない確率（t 時間の間，2つのユニットがともに故障状態にならない確率)，すなわち信頼度関数のラプラス変換形 $\bar{R}(s,\infty)$ および平均寿命 $MTSF_R$ が求まる。

$$\bar{R}(s,\infty)=\lim_{\tau\to 0}\overline{M}(s,\infty)$$

$$=\{(s+2\lambda+\lambda_{12})-2\lambda(1-\gamma)\overline{gA^c}(s)\}^{-1}\{2\lambda(1-\gamma)[\overline{gA^c}(s)/(s+2\lambda+\lambda_{12})$$

$$+(1-\bar{g}(s))/s]\}+1/(s+2\lambda+\lambda_{12}), \tag{4.7}$$

$$MTSF_R=\lim_{s\to 0}\bar{R}(s,\infty)$$

$$=\{\lambda_{12}+2\lambda\gamma+2\lambda(1-\gamma)\int_0^\infty g(x)A(x)dx\}^{-1}\{2\lambda(1-\gamma)[\int_0^\infty g(x)A^c(x)dx/(2\lambda+\lambda_{12})+K]\}$$

$$+1/(2\lambda+\lambda_{12}), \tag{4.8}$$

次に $\tau\to\infty$ の場合を考察する。このとき保全回数に制限がない場合の時点 t でシステムが作動

している確率，すなわち時点アベイラビリティのラプラス変換形 $\bar{P}_{*A}(s,\infty)$ および定常状態でシステムが作動している確率を表わす定常アベイラビリティ $P_{*A}(\infty.\infty)$ が求まる。

定理3で $|x_i(s)|<|$ を考慮し，(2.87) 式の計算方法を用いると

$$\bar{P}_{*A}(s,\infty)=\lim_{M\to\infty}\bar{P}_{*A}(s,M)$$
$$=\{1+(s+2\lambda+\lambda_{12})[(1-\overline{aG^c}(s)-\overline{gA^c}(s))/(s\overline{gA^c}(s))]\}\left\{\frac{B_1(s)x_1(s)}{1-x_1(s)}+\frac{B_2(s)x_2(s)}{1-x_2(s)}\right\}$$
$$+1/(s+2\lambda+\lambda_{12})$$
$$=\frac{\overline{gA^c}(s)[2\lambda(1-\gamma)+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\bar{g}(s)]}{(s+2\lambda+\lambda_{12})\{(s+2\lambda+\lambda_{12})-[2\lambda(1-\gamma)\overline{gA^c}(s)+(s+2\lambda+\lambda_{12})\overline{Ag}(s)+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\overline{gA^c}(s)\bar{g}(s)]\}}$$
$$\cdot\{1+(s+2\lambda+\lambda_{12})[(1-\overline{aG^c}(s)-\overline{gA^c}(s))/(s\overline{gA^c}(s))]\}+1/(s+2\lambda+\lambda_{12}) \tag{4.9}$$

$$P_{*A}(\infty,\infty)=\lim_{s\leftarrow 0}s\bar{P}_{*A}(s,\infty)$$
$$=\{\lim_{s\to 0}\overline{gA^c}(s)[2\lambda(1-\gamma)+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\bar{g}(s)]/(s+2\lambda+\lambda_{12})\}$$
$$\cdot\{\lim_{s\to 0}s[(s+2\lambda+\lambda_{12})(1-\overline{Ag}(s))-\overline{gA^c}(s)[2\lambda(1-\gamma)+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\bar{g}(s)]]^{-1}\}$$
$$\cdot\{\lim_{s\to 0}[1+(s+2\lambda+\lambda_{12})[(1-\overline{aG^c}(s)-\overline{gA^c}(s))/(s\overline{gA^c}(s))]]\}$$
$$=\overline{gA^c}(0)\{(2\lambda+\lambda_{12})K+[1+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)K]\overline{gA^c}(0)\}^{-1}\{1+(2\lambda+\lambda_{12})\overline{A^cG^c}(s)/\overline{gA^c}(s)\}$$
$$=\{\int_0^\infty g(x)A^c(x)dx+(2\lambda+\lambda_{12})\int_0^\infty A^c(x)G^c(x)dx\}\{(2\lambda+\lambda_{12})K$$
$$+[1+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)K]\int_0^\infty g(x)A^c(x)dx\}^{-1}, \tag{4.10}$$

また，時点 t でシステムが停止している確率のラプラス変換形 $\bar{P}_{*0}(s,\infty)$ および定常状態でシステムが停止している確率 $P_{*0}(\infty,\infty)$ は，それぞれ (4.11)，(4.12) 式で与えられる。

$$\bar{P}_{*0}(s,\infty)=(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)[(1-\bar{g}(s))/s]\left[\frac{B_1(s)}{1-x_1(s)}+\frac{B_2(s)}{1-x_2(s)}\right]$$
$$+\{(s+2\lambda+\lambda_{12})[\overline{aG^c}(s)-\overline{Ag}(s)]/(s\overline{gA^c}(s))\}\left[\frac{B_1(s)x_1(s)}{1-x_1(s)}+\frac{B_2(s)x_2(s)}{1-x_2(s)}\right]$$
$$=(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)[(1-\bar{g}(s))/s](1-\overline{Ag}(s))\{(s+2\lambda+\lambda_{12})(1-\overline{Ag}(s))$$
$$-[2\lambda(1-\gamma)+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\bar{g}(s)]\overline{gA^c}(s)\}^{-1}$$
$$+\{(s+2\lambda+\lambda_{12})[\overline{aG^c}(s)-\overline{Ag}(s)]/(s\overline{gA^c}(s))\}\{\overline{gA^c}(s)[2\lambda(1-\gamma)$$
$$+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\bar{g}(s)]/(s+2\lambda+\lambda_{12})\}\{(s+2\lambda+\lambda_{12})(1-\overline{Ag}(s))$$
$$-[2\lambda(1-\gamma)+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\bar{g}(s)]\overline{gA^c}(s)\}^{-1}, \tag{4.11}$$

$$P_{*0}(\infty,\infty)=\lim_{s\to 0}s\bar{P}_{*0}(s,\infty)$$
$$=\lim_{s\to 0}s\{(s+2\lambda+\lambda_{12})(1-\overline{Ag}(s))-[2\lambda(1-\gamma)+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\bar{g}(s)]\overline{gA^c}(s)\}^{-1}$$
$$\cdot\{\lim_{s\to 0}(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)(1-\overline{Ag}(s))\cdot\lim_{s\to 0}[(1-\bar{g}(s))/s]$$

$$+\lim_{s\to 0}[(\overline{aG^c}(s)-\overline{A}g(s))/s]\lim_{s\to 0}[2\lambda(1-\gamma)+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)\bar{g}(s)]\}$$

$$=\{(2\lambda\gamma+\lambda_{12})K\int_0^\infty g(x)A^c(x)dx+(2\lambda+\lambda_{12})\int_0^\infty A(x)G^c(x)dx\}$$

$$\cdot\{(2\lambda+\lambda_{12})K+[1+(\lambda_{12}+2\lambda\gamma)K]\int_0^\infty g(x)A^c(x)dx\}^{-1}, \tag{4.12}$$

(4.10), (4.12) 式より $P_{*A}(\infty,\infty)+P_{*0}(\infty,\infty)=1$ は容易に示される。

モデルを一般化し，$E_0,\cdots,E_n$ をシステムの作動状態，$F_0,\cdots,F_m$ を致命的故障状態とし次の確率関数を考えよう。

$$P_{*A}(t)\equiv\sum_{i=0}^{n}P\{E_i(t)\,|\,E_0(0)\}=\sum_{j=0}^{n}P\{E_i(t)\cap[\gamma_1>t]\,|\,E_0(0)\}+\sum_{i=0}^{n}P\{E_i(t)\cap[\gamma_1\leqq t]\,|\,E_0(0)\}$$

$$P_{*0}(t)\equiv\sum_{i=0}^{m}P\{F_j(t)\,|\,E_0(0)\}=\sum_{j=0}^{m}P\{F_j(t)\cap[\gamma_1>t]\,|\,E_0(0)\}+\sum_{j=0}^{m}P\{F_j(t)\cap[\gamma_1\leqq t]\,|\,E_0(0)\}$$

$$M(t,\infty)\equiv\sum_{i=0}^{n}P\{E_i(t)\cap[\gamma_1>t]\,|\,E_0(0)\}+\sum_{j=0}^{m}P\{F_j(t)\cap[\gamma_1>t]\,|\,E_0(0)\}$$

ここで $[\gamma_1>t]$ は時点 t までにシステムが "F_j $(0\leqq j\leqq m)$ に推移した直後からの保全時間 $>\tau$ という状態" に推移していないという事象を表わし，$[\gamma_1\leqq t]$ はその補事象を表わす。$\tau\to\infty$ とすると，$[\gamma_1>t]$ は全事象となり $[\gamma_1\leqq t]$ は空事象となる。
よって

$$P_{*A}(t,\infty)=\sum_{i=0}^{n}P\{E_i(t)\,|\,E_0(0)\}=\sum_{i=0}^{n}P\{E_i(t)\cap[\gamma_1>t]\,|\,E_0(0)\}$$

$$P_{*0}(t,\infty)=\sum_{j=0}^{m}P\{F_j(t)\,|\,E_0(0)\}=\sum_{j=0}^{m}P\{F_j(t)\cap[\gamma_1>t]\,|\,E_0(0)\}$$

となり

$$M(t)=P_{*A0}(t)+P_{*0}(t)=1$$

が成立する（保全回数が無限大，吸収壁がない場合)。$P_{*A}(t)$, $P_{*0}(t)$ は時点 t における時点アベイラビリティ および 時点アンアベイラビリティであるので $M(t)$ を何らかの方法で求めておけば $P_{*A}(t)$, $P_{*0}(t)$ は $\tau\to\infty$ とすることにより容易に求まることを示している。

参　考　文　献

〔1〕 M. Kodama, J. Fukuta and S. Takamatsu: "Mission Reliability for a I-Unit System with Allowed Down Time." IEEE. Trans. on Reliability. **22**, No. **5**, 1973.

〔2〕 J. Fukuta and M. Kodama: "Mission Availability for a Redundant Repairable System with Dissimilar Units." IEEE. Trans. on Reliability. **28**, No. **4**, 1974.

〔3〕 M. Kodama: "Mission Reliability for a 2-Dissimilar-Unit Warm Standby System with Allowed Down Time and Allowed Number of Failure." Trans. I.E.C.E. Japan. **59**-E, No. **12**, 1976.

〔4〕 M. Kodama: "Probabilistic Analysis of a Multicomponent Series-Parallel System under Preemptive Repeat Repair Discipline." J. Oper. Res. Soc. America. **24**, No. **3**, 1976.

〔5〕 K. Adachi, M. Kodama and M. Ohashi: "K-out-of-N: G System with Simultaneous Failure and Three Repair Policies." Microelectron. Reliab. **19**, No. **4**, 1979.