

社会的厚生にもとづく実質国民所得の評価

緒方, 隆

<https://doi.org/10.15017/4475275>

出版情報：経済學研究. 47 (1), pp.33-43, 1982-02-10. 九州大学経済学会
バージョン：
権利関係：



社会的厚生にもとづく実質国民所得の評価

緒 方 隆

目 次

はじめに

I. 選好順序

- 1) 個人的選好順序と社会的選好順序
- 2) 個人的選好順序の性質
- 3) 個人的需要対応

II. 実質国民所得の評価

は じ め に

これまで、実質国民所得の評価の問題は、多くの経済学者の関心をひいてきた¹⁾。経済的厚生の尺度の一つとしての実質国民所得の評価に際しては、政府支出、不完全競争市場などの問題が介在する。ところが、政府が存在せず、財が最終消費財だけから成り、しかも、完全競争市場の場合に、実質国民所得を如何に評価すべきであろうか。本稿では、この問題を、消費者の合理的行動にもとづく個人的選好順序、また、それから導かれる社会的選好順序をもちいて検討する。

本稿の構成は次の通りである。I. 1) においては、まず、本稿における予備的定義および記号を説明し、それにもとづいて、個人的選好順序を述べる。さらに、この個人的選好順序か

ら社会的選好順序、より具体的にはパレート順序、Kaldor-Hicks-Samuelson 順序を定義する。

I. 2)においては、本稿において、個人的選好順序がもつと考えられるさまざまな性質について述べる。I. 3)では、選好順序の性質相互のあいだの関係について述べる。また、需要関数を拡張した需要対応を定義し、選好順序のさまざまな性質から、需要対応のどのような性質がみちびかれるかについて検討する。

II においては、実質国民所得の評価の方法について述べる。定義 3. 1 では、実質国民所得の評価方法についての三つの定式化をおこなう。これにもとづいて、ある実質国民所得が他の実質国民所得よりも Kaldor-Hicks-Samuelson 順序の意味で大きいためには、いかなる選好順序の性質、財分配の型、価格ベクトルの性質がみたされるべきかが定理 2. 1 で検討される。定理 2.2 では、定理 2.1 の仮定の十分条件をもとめる。定理 2.3 と定理 2.4 の目的は、定理 2.2 と同様であるが、仮定されている条件が若干異なる。定理 2.5、定理 2.2 の系では、前記の三つの定理が、同一の選好順序という強い仮定をとっていたのに対し、この仮定がゆるめられている。定理 2.6 では、正の価格ベクトルが成立するための条件について、定理 2.7 では凸性について、最後に、定理 2.8 では、定義 2.1 と定理 2.2 の関係について、それぞれ検討する。

注 1) たとえば、[4], [5] を参照。

I. 選好順序

1. 個人的選好順序と社会的選好順序

E_n , E_n^+ は, それぞれ, n 次元 Euclid 空間と Euclid 空間の非負象限を示す。すなわち,

$$E_n^+ = \{x \in E_n \mid x \geq 0\}.$$

ここで, ベクトル $x, y \in E_n$ に関する不等式を, 次のように定める。

$$x \geq y \Leftrightarrow x_i \geq y_i \text{ for } i=1, \dots, n$$

$$x \geq y \Leftrightarrow x \geq y \text{ かつ } x \neq y$$

$$x > y \Leftrightarrow x_i > y_i \text{ for } i=1, \dots, n$$

ただし, x_i, y_i は, それぞれ, x, y の第 i 番目の成分である。またスカラーの零を示すのに, “0” を用い, E_n の原点は “0” で表わす。さらに, 実数, 非負の実数を示すのに, それぞれ E_1, E_1^+ を用いる。

社会には, m 人の消費者と n 種の財が存在するとして, E_{mn} の点を示すのに, $m \times n$ 行列 X を用いる。 X の要素 x_{ij} は, i 番目の消費者にとって利用可能な j 番目の財である。また, X の第 i 行 x_i は, i 番目の消費者にとって利用可能な財の組である。本稿を通じて, われわれは, i 番目の消費者の消費集合は, E_n の非負象限であると仮定する。

定義 1.1 行列 $X \in E_{mn}^+$ は配分 (または分配) と呼ばれる。また $\sigma(X) \equiv \sum_{i=1}^m x_i = x$ ならば, X は x の配分 (または分配) と呼ばれる。

定義 1.1 におけるベクトル x の第 j 成分は, 社会全体にとって利用可能な j 財の量を示す。行列 X は, 各財が各消費者にどれだけ配分されているかを示す。

定義 1.2 もし, $x \in E_n^+$ ならば, x の達成可能集合 $A(x)$ を,

$$A(x) = \{X \in E_{mn}^+ \mid \sigma(X) = x\}, \text{ とする。}$$

定義 1.2 は, 社会全体にとって利用可能な財の一定量を各構成員に配分するに際して, どのような方法が可能であるかを示す。

次に, 各消費者は, E_n^+ において, (個人的) 選好順序を持っていると仮定しよう。

定義 1.3 E_n^+ 上で定義された二項関係 R_i ($i=1, \dots, m$) は, もし, R_i が次の三つの条件,

a) 完全性: $(\forall x_i, \bar{x}_i \in E_n^+) : x_i R_i \bar{x}_i$ または, $\bar{x}_i R_i x_i$,

b) 反射性: $(\forall x_i \in E_n^+) : x_i R_i x_i$,

c) 推移性: $(\forall x_i, \bar{x}_i, \hat{x}_i \in E_n^+) : x_i R_i \bar{x}_i \text{ かつ } \bar{x}_i R_i \hat{x}_i \Rightarrow x_i R_i \hat{x}_i$,

を満足するならば, R_i は選好順序である。

選好順序 R_i を所与とすると, 強い選好順序 P_i 無差別な選好順序 I_i を, それぞれ,

$$x_i P_i \bar{x}_i \Leftrightarrow x_i R_i \bar{x}_i \text{ かつ } \bar{x}_i R_i x_i \text{ でない,}$$

$$x_i I_i \bar{x}_i \Leftrightarrow x_i R_i \bar{x}_i \text{ かつ } \bar{x}_i R_i x_i,$$

とする。

R_i ($i=1, \dots, m$) が選好順序であるとき,

$$R = (R_1, R_2, \dots, R_m),$$

を, 選好順序の m 組と呼ぶ。

E_n^+ のすべての選好順序の集合を $\mathfrak{R}$ で示す。ゆえに, 上で定義した, 選好順序の m 組 R は $\mathfrak{R}^m$ の元である。すなわち,

$$R \in \mathfrak{R}^m.$$

さて, ここで, 上述の選好順序に基づいて, 競争均衡の概念を導入しよう。この概念は, 供給の側面を無視して, 需要の側面だけを問題にしている。換言すれば, 最終生産物だけについての競争均衡の概念であり, その意味で, 特別な競争均衡の概念である。

定義 1.4 $\bar{X} \in E_{mn}^+$ かつ $\bar{p} \in E_n^+$ となる組 $(\bar{X}, \bar{p})$ は, 二つの条件,

a.) $\bar{p} \neq 0$

b.) $(\forall x_i \in E_n^+) : \bar{p} \cdot x_i \leq \bar{p} \cdot \bar{x}_i \Rightarrow \bar{x}_i R_i x_i \text{ for } i = 1, \dots, m,$

を満たすときに、 $R(\in \mathfrak{R}^m)$ についての競争均衡である。

$R(\in \mathfrak{R}^m)$ を所与とするときに、

$C(R) = \{(X, p) \in E_{(m+1)n}^+ \mid (X, p) \text{ は } R \text{ についての競争均衡}\},$

と、

$Y(R) = \{x \in E_n^+ \mid (\exists X \in A(x)), p \in E_n^+ : (X, p) \in C(R)\},$

を定義する。

すなわち、 $C(R)$ は、 R についての競争均衡の組 (X, p) 全体の集合であり、 $Y(R)$ の任意の元 x の配分集合の元 X と価格ベクトル p の組 (X, p) の中に、 $C(R)$ の元であるものが存在する。

次に、社会的順序の例として、パレート順序と $K-H-S$ 順序について述べる。まず、パレート順序を定義する。

定義 1.5 R を $\mathfrak{R}^m$ の元とするとき、 R によって導かれた、配分のパレート順序を、

$$XR\bar{X} \Leftrightarrow x_i R_i \bar{x}_i \text{ for } i=1, \dots, m,$$

で定義する。

同様に、強いパレート選好順序 P 、無差別のパレート選好順序 I を、それぞれ、

$$XR\bar{X} \Leftrightarrow XR\bar{X} \text{ かつ } \bar{X}RX \text{ でない,}$$

$$XIX \Leftrightarrow XR\bar{X} \text{ かつ } \bar{X}RX,$$

で定義する。

たとえば、配分 X と $\bar{X}$ とが与えられたとき、それぞれの場合に、社会の各人にとって利用可能な財の組 x_i と $\bar{x}_i$ ($i=1, \dots, m$) に関して、すべての人が $\bar{x}_i$ よりも x_i を選好すれば、そして、そのときのみ、パレート順序に関して、 X は $\bar{X}$ より選好される。すなわち、ただ一人の反対も許されず、全員一致が必要とされるわ

けで、その意味で、きわめて強い順序であるといえる。このパレート順序 R を利用して、補償原理¹⁾を考慮した Kaldor-Hicks-Samuelson 順序（省略して $K-H-S$ 順序）を導入しよう。

定義 1.6 パレート順序 R が与えられたときに、 E_n^+ 上の Kaldor-Hicks-Samuelson 順序（以後 $K-H-S$ 順序と省略する） $>_R$ を、

$$\bar{x} >_R x \Leftrightarrow (\forall X \in A(x)) (\exists \bar{X} \in A(\bar{x})) : \bar{X}RX, \text{ で定義する。}$$

定義 1.6 は、社会全体の各財の量 $\bar{x}$ 、 x を比較するに際して、それぞれの配分集合の中の元を取り上げ、もし、 x の任意の配分集合 X に対して、 $\bar{x}$ の配分集合の中に、つねに $\bar{X}$ が存在して、パレート順序に関して、 X よりも $\bar{X}$ が選好されれば、 $K-H-S$ 順序に関して、 x よりも $\bar{x}$ が選好されることを示す。この際、 X が変化するに応じて $\bar{X}$ も変化してもよい。

2. 個人的選好順序の性質

ここでは、以後において使用される、選好順序 R_i の様々の性質、より具体的には、単調性、凸性、連続性、飽和性、同次性について述べよう。

定義 1.7 選好順序 $R_i \in \mathfrak{R}$ は、

i) もし、 $(\forall x_i, \bar{x}_i \in E_n^+) : x_i \geq \bar{x}_i \Rightarrow x_i R_i \bar{x}_i$, ならば、広義の単調、

ii) もし、 R_i が広義の単調、かつ、 $(\forall x_i, \bar{x}_i \in E_n^+) : x_i > \bar{x}_i \Rightarrow x_i P_i \bar{x}_i$, ならば、単調である。

iii) もし、 $(\forall x_i, \bar{x}_i \in E_n^+) : x_i \geq \bar{x}_i \Rightarrow x_i P_i \bar{x}_i$, ならば、狭義の単調である。

iv) もし、 $(\forall x_i \in E_n^+) : R_i x_i \equiv \{\bar{x}_i \in E_n^+ \mid \bar{x}_i R_i x_i\}$

1) カルドアの補償原理によれば、 x と $\bar{x}$ の二つの選択対象の比較に際して、補償を行なった結果、 x の方が $\bar{x}$ よりも高い満足度を誰にも与えるならば、補償が実際になされなくとも、 x が選択されるべきである。

が凸集合ならば、広義の凸である。

v) もし、 R_i が広義の凸で、しかも、 $x_i P_i \bar{x}_i$ となる $x_i, \bar{x}_i$ に対して、

$$(0 < \lambda < 1) : [\lambda x_i + (1 - \lambda) \bar{x}_i] P_i \bar{x}_i.$$

が成立するならば、凸である。

vi) もし、 R_i が、

$$(\forall x_i, \bar{x}_i \in E_n^+) : x_i R_i \bar{x}_i, \bar{x}_i \neq x_i \Rightarrow (0 < \lambda < 1) \cdot$$

$[\lambda x_i + (1 - \lambda) \bar{x}_i] P_i \bar{x}_i$ を満足するならば、狭義の凸である。

vii) もし、 $(\forall x_i \in E_n^+) : R_i x_i \equiv \{\bar{x}_i \in E_n^+ | \bar{x}_i R_i x_i\}$

が閉集合ならば、上半連続である。

viii) もし、 $(\forall x_i \in E_n^+) : x_i R_i \equiv \{\bar{x}_i \in E_n^+ | x_i R_i \bar{x}_i\}$

が閉集合ならば、下半連続である。

ix) もし、 R_i が上半連続かつ下半連続ならば、連続である。

x) もし、 $(\forall x_i \in E_n^+) (\exists \bar{x}_i \in E_n^+) : \bar{x}_i P_i x_i$ ならば、非飽和である。

xi) $P_i x_i \equiv \{\bar{x}_i \in E_n^+ | \bar{x}_i P_i x_i\}$ とし、 $\overline{P_i x_i}$ を $P_i x_i$ の閉包とするときに、

もし、 $(\forall x_i \in E_n^+) : R_i x_i \subset \overline{P_i x_i}$ ならば、局所的に非飽和である。

xii) もし、 $(\forall x_i, \bar{x}_i \in E_n^+) : x_i R_i \bar{x}_i \Rightarrow (\forall \lambda \in E_1^+) : \lambda x_i R_i \lambda \bar{x}_i$,

ならば、同次である。

次にやや通常とは異なる凸性についての定義をする。

定義 1.8 $\text{int } E_n^+ = \{x \in E_n^+ | x > 0\}$, $A \subset E_n^+$ とするとき、

もし、 $(\forall x_i \in A) (\exists p \in \text{int } E_n^+) (\forall \bar{x}_i \in R_i x_i) : p \bar{x}_i \geq p \cdot x_i$

ならば、選好順序 $R_i \in \mathfrak{R}$ は、集合 A の上で原点に対して凸である。

3. 個人的需要対応

ここでは、前節で述べた選好順序のさまざま

な性質を基礎にして、それらの性質相互間の関係をみる。また、この選好順序に基づいて、需要対応を定義し、選好順序の性質から需要対応のいかなる性質が導かれるかについて検討する。これらは、次章における諸定理を導く際の補助定理としての役割を果す。まず、次の補助定理は、原点に対して凸という性質と、上述の単調性、凸性との間の関係を示す。

補助定理 1.1 選好順序 $R_i \in \mathfrak{R}$ は、連続であると仮定する。そのとき、

i) もし、 R_i が E_n^+ の上で原点に対して凸ならば、 R_i は狭義の単調、かつ凸である。

ii) もし、 R_i が狭義の単調かつ凸ならば、 R_i は $\text{int } E_n^+$ の上で原点に対して凸である。

証明)

i) a) 狭義の単調: $x_i \geq \bar{x}_i \Rightarrow x_i P_i \bar{x}_i$, 仮に、 $x_i \geq \bar{x}_i, x_i \in P_i \bar{x}_i \equiv \{x_i \in E_n^+ | x_i P_i \bar{x}_i\}$ ($\Leftrightarrow \bar{x}_i \in R_i x_i$) とすると、 $\forall p \in \text{int } E_n^+$ に対して、 $\bar{p} \cdot \bar{x} < p \cdot x_i$ が成立する。これは、 R_i が原点に対して凸であるとの仮定に反する。

b) まず、 $R_i x_i$ が凸であることを証明する。 $R_i x_i$ が凸性を満足しないとき、ある x_i について、 $R_i x_i$ の元 $\bar{x}_i, \bar{x}$ をうまくとり、 $0 < \lambda < 1$, $\lambda \bar{x}_i + (1 - \lambda) \bar{x} \leq x_i$ となるようにする。このとき、どんなにうまく、 $p \in \text{int } E_n^+$ をとっても、 $p \cdot \bar{x}_i \geq p \cdot x_i$, $p \cdot \bar{x} \geq p \cdot x_i$ とすることはできない。これは原点に対して凸であるとの仮定に反する。

次に $x_i P_i \bar{x}_i$ となる $\forall x_i, \bar{x}_i \in E_n^+$ に対して、 $(\forall \lambda \in (0, 1)) : [\lambda x_i + (1 - \lambda) \bar{x}_i] P_i \bar{x}_i$.

が成立することを示す。上に証明したように、 $R_i \bar{x}_i$ は凸であるので、 $x_i \in R_i \bar{x}_i$ とすると、 $0 < \forall \lambda < 1 : \lambda x_i + (1 - \lambda) \bar{x}_i \in R_i \bar{x}_i$ 。しかも、連続性の仮定により、 $R_i \bar{x}_i$ は閉であるので、内点 x_i はすべて、 $x_i P_i \bar{x}_i$ である。また、単調性から、

$x_i P_i \bar{x}_i$ となる x_i はすべて $R_i x_i$ の内点である。

ii) 仮に, $(\exists x_i \in \text{int } E_n^+) (\forall p \in \text{int } E_n^+) (\exists \bar{x}_i \in R_i x_i) : p \cdot \bar{x}_i < p \cdot x_i$ とすると, $\bar{x}_i \leq x_i$. ここで, 狭義の単調性から, $\bar{x}_i P_i x_i$. また, $0 < \forall \lambda < 1 : p[\lambda \bar{x}_i + (1-\lambda)x_i] < p \cdot \bar{x}_i$. ($\because p \cdot \bar{x}_i < p \cdot x_i$). 狭義の単調性から, $x_i P_i [\lambda \bar{x}_i + (1-\lambda)x_i]$. これは凸性に反する (証了)。

ここで, 価格について, 制約を加える。すなわち, p は単体の元と仮定しよう。

定義 1.9

$$S_{n-1} = \{p \in E_n^+ | \sum_{i=1}^n p_i = 1\},$$

$$S_{n-1}^0 = \{p \in S_{n-1} | p > 0\},$$

とするとき,

$$\Omega = \{(p, M) \in E_{n+1}^+ | p \in S_{n-1}^0, M \geq 0\},$$

かつ,

$$\bar{\Omega} = \{(p, M) \in E_{n+1}^+ | p \in S_{n-1}, M \geq 0\}.$$

つまり, S_{n-1} は基本単体で, S_{n-1}^0 は S_{n-1} の開核である。価格 p が S_{n-1} の元のときは, 価格ゼロ (自由財) を含むが, S_{n-1}^0 の元のときは, 価格ゼロを含まない。 $\bar{\Omega}$ は S_{n-1} の元 p と実数 $M \geq 0$ の組全体を示し, Ω は, S_{n-1}^0 の元 p と実数 $M \geq 0$ の組全体を示す。 M は所得を意味するので非負の仮定は当然である。明らかに, $S_{n-1}^0 \subset S_{n-1}$, $\Omega \subset \bar{\Omega}$ である。

さらに, 需要対応の定義に進もう。選好順序 $R_i \in \mathfrak{R}$ が与えられたとき, Ω 上の, i 番目の消費者の需要対応を,

$h^i(p, M) = \{x_i \in E_n^+ | p \cdot x_i \leq M \text{ かつ, } (\forall \bar{x}_i \in E_n^+) : p \cdot \bar{x}_i \leq M \Rightarrow x_i R_i \bar{x}_i\}$, で定義する。これは, 価格とある予算制約が与えられたとき, それを満足する財の組み合わせの中で最も選好される財の組み合わせの集合で, 補償されない需要対応とよばれる。次の三つの補助定理は, 選好順序 R_i のさまざまな性質の上に定義した需要対応の間の関係にかんするものである。

補助定理 1.2 もし, 選好順序 $R_i \in \mathfrak{R}$ が上半連続ならば,

- i) $(\forall (p, M) \in \Omega) : h^i(p, M) \neq \emptyset$,
- ii) $(\forall (p, M) \in \Omega) : h^i(p, M)$ は閉,
- iii) Ω の元 $(\bar{p}, \bar{M})$ について次の条件が成立する。もし, $(M^q) \in E_1^+$, $(x_i^q) \in E_n^+$ かつ $\bar{x}_i \in E_n^+$ が $M^q \geq \bar{M} f_{or} i=1, 2, \dots; M^q \rightarrow \bar{M}, x_i^q \in h^i(\bar{p}, M^q) f_{or} q=1, 2, \dots; x_i^q \rightarrow \bar{x}_i$ を満足するならば, $\bar{x}_i \in h^i(\bar{p}, \bar{M})$.

証明)

i), ii) 集合 $\{x_i \in E_n^+ | p \cdot x_i \leq M\}$ は有界な閉集合である。 $\forall x_i \in \{x_i \in E_n^+ | p \cdot x_i \leq M\}$ について, $R_i x_i$ は上半連続の仮定により閉集合である。したがって, $\{x_i \in E_n^+ | p \cdot x_i \leq M\} \cap R_i x_i$ は有界な閉集合。しかも, $x_i R_i x_i$ であるので, $\{x_i \in E_n^+ | p \cdot x_i \leq M\} \cap R_i x_i \neq \emptyset$ が成立する。

iii) 仮に, $\bar{x}_i \notin h^i(\bar{p}, \bar{M})$ とすると, $d(\bar{x}_i, h^i(\bar{p}, \bar{M})) > 0$. すなわち, $d(\bar{x}_i, \{x_i \in E_n^+ | \bar{p} \cdot x_i \leq \bar{M}\}) = \lambda > 0$. ゆえに, 十分大きな q について, $x_i^q \in U(\bar{x}_i, \lambda/2)$, かつ $d(\{x_i \in E_n^+ | \bar{p} \cdot x_i = \bar{M}\}, \{x_i \in E_n^+ | \bar{p} \cdot x_i = M^q\}) < \lambda/2$ とできる。ところが, これは, $x_i^q \notin h^i(\bar{p}, M^q)$ を意味する。これは仮定に反する (証了)。

補助定理 1.3 選好順序 $R_i \in \mathfrak{R}$ が与えられたとき,

- i) R_i が局所的に非飽和ならば,
 $(\forall (p, M) \in \bar{\Omega}) (\forall x_i \in h^i(p, M)) : p \cdot x_i = M$.
- ii) R_i が広義の凸ならば,
 $(\forall (p, M) \in \bar{\Omega}) : h^i(p, M)$ は凸 (または空) である。

証明)

i) 仮に $(\exists (p, M) \in \bar{\Omega}) (\exists x_i \in h^i(p, M)) : p \cdot x_i < M$ とすると, 局所的に非飽和の仮定により, $R_i x_i \subset \overline{P_i x_i}$. また, 定義により, $x_i R_i x_i$. ここで, x_i が $P_i x_i$ の境界にあるとき, $(\exists \delta > 0)$

$(\exists x'_i \in U(x_i; \delta)) : p \cdot x'_i < M, x'_i \in P_i x_i$. これは、 $x_i \in h^i(p, M)$ であることに矛盾する。また、 x_i が $P_i x_i$ の内点であるとき、 $x_i P_i x_i$ となるので矛盾。

ii) $x_i, x'_i \in h^i(p, M)$ とすると、 $p \cdot x_i \leq M, p \cdot x'_i \leq M$ であるので、

$p(\lambda x_i + (1-\lambda)x'_i) = \lambda p \cdot x_i + (1-\lambda)p \cdot x'_i \leq \lambda M + (1-\lambda)M = M$. また、 $x_i, x'_i \in R_i \bar{x}_i$ で、仮定より $R_i \bar{x}_i$ は凸であるので、

$\lambda x_i + (1-\lambda)x'_i \in R_i \bar{x}_i$, (ただし、 $\bar{x}_i \in E_n^+$) (証了)。

補助定理 1.4 もし、選好順序 $R_i \in \mathfrak{R}$ が同次で、かつ上半連続ならば、

i) $(\forall (p, M) \in \Omega) (\forall \lambda \in E_1^+) : \lambda h^i(p, M) = h^i(p, \lambda M)$, かつ、

ii) もし、 $(\exists (\bar{p}, \bar{M}) \in \bar{\Omega}) : h^i(\bar{p}, \bar{M}) \ni \phi$ ならば $0 \in h^i(\bar{p}, 0)$.

証明)

i) $\lambda h^i(p, M) \equiv \{\lambda x_i | x_i \in h^i(p, M)\}$ とする。 $x_i \in \lambda h^i(p, M)$ について、定義により、 $(1/\lambda)x_i \in h^i(p, M)$. すなわち、 $p \cdot [(1/\lambda)x_i] \leq M$ かつ $(\forall \bar{x}_i \in E_n^+) : p \cdot \bar{x}_i \leq M \Rightarrow (1/\lambda)x_i R_i \bar{x}_i$. 同次性の仮定から、 $p \cdot x_i \leq \lambda M$ かつ $(\forall \bar{x}_i \in E_n^+) : p(\lambda \bar{x}_i) \leq \lambda M \Rightarrow x_i R_i \lambda \bar{x}_i$. $\therefore \lambda h^i(p, M) \subset h^i(p, \lambda M)$. 逆に、 $x_i \in h^i(p, \lambda M)$ に対して、 $p \cdot x_i \leq \lambda M$ かつ $(\forall \bar{x}_i \in E_n^+) : p \bar{x}_i \leq \lambda M \Rightarrow x_i R_i \bar{x}_i$. 同次性の仮定から、 $p[(1/\lambda)x_i] \leq M$ かつ $(\forall \bar{x}_i \in E_n^+) : p[(1/\lambda)\bar{x}_i] \leq M \Rightarrow (1/\lambda)x_i R_i (1/\lambda)\bar{x}_i$. $\therefore h^i(p, \lambda M) \subset \lambda h^i(p, M)$.

ii) 仮に、 $0 \notin h^i(\bar{p}, 0)$ とすると、仮定により、 $h^i(\bar{p}, 0) \ni \phi$ であるので、 $x_i (\ni 0) \in h^i(\bar{p}, 0)$ が存在する。定義により、 $(\forall \bar{x}_i \in E_n^+) : \bar{p} \cdot \bar{x}_i \leq 0 \Rightarrow x_i R_i \bar{x}_i$. $\bar{x}_i$ を適当にとりて、その正の成分が、 x_i の正の成分とそれぞれ比例するようにできる。ここで、同次性の仮定により、 λ を適

当にとれば、 $\lambda x_i R_i \lambda \bar{x}_i, x_i = \lambda \bar{x}_i$ とできる。ゆえに、 $\{\bar{x}_i | \bar{x}_i = \lambda x_i, \lambda > 0\}$ が $h^i(\bar{p}, 0)$ の部分集合となる。これは、閉集合である。同様の操作を $h^i(\bar{p}, 0)$ の各点について行い、その和集合を求めれば、これも開集合である。ところが、上半連続の仮定により、補助定理から $h^i(\bar{p}, 0)$ は閉であるので、これは矛盾である (証了)。

II. 実質国民所得の評価

ここでは、まず、実質国民所得の評価の定式化をする。政府支出、資本形成などにかんする問題を無視するとすれば、実質国民所得の評価を次のように定式化してもよいであろう。すなわち、競争的配分を $\bar{X}$, 価格ベクトルを $\bar{p}$, また $\bar{y} = \sigma(\bar{X})$ とするとき、如何なる条件の下で、

$$\forall y \in E_n^+, \bar{p} \cdot y \leq \bar{p} \cdot \bar{y} \Rightarrow \bar{y} \succ_{Ry} y,$$

が成立するのであろうか。

この定式化は、所与の価格ベクトルの下で、財の組み合わせ $\bar{y}$ が、 $\bar{p} \cdot y \leq \bar{p} \cdot \bar{y}$ の条件を満たす、任意の $y \in E_n^+$ に対して、如何なる条件の下で、K-H-S 順序の意味で、より選好されるのかということを意味する。

次の3つの条件は、以前において試みられた、実質国民所得の評価にかんする定式化である¹⁾。

定義 2.1 $R \in \mathfrak{R}^m$ とする。

1) R が条件 (*) を満足するとは、もし、 E_n^+ の元 $\bar{y}, y$ について、 $\sigma(\bar{X}) = \bar{y}, \bar{p} \cdot y \leq \bar{p} \cdot \bar{y}$ となる $(\bar{X}, \bar{p}) \in C(R)$ が存在するならば、 $\bar{y} \succ_{Ry} y$ が成立することである。

2) R が条件 (**) を満足するとは、もし、 $Y(R)$ の元 $\bar{y}, y$ について、 $\sigma(\bar{X}) = \bar{y}, \bar{p} \cdot y \leq \bar{p} \cdot \bar{y}$ となる $(\bar{X}, \bar{p}) \in C(R)$ が存在するならば、 $\bar{y} \succ_{Ry} y$ が成立することである。

3) R が条件 (***) を満足するとは、もし、 $Y(R)$ の元 $\bar{y}, \hat{y}$ について、 $\sigma(\bar{X}) = \bar{y}$, $\sigma(\hat{X}) = \hat{y}$, かつ $\bar{p} \cdot \bar{y} \geq \bar{p} \cdot \hat{y}$, $\bar{p} \cdot \bar{y} \geq \bar{p} \cdot \hat{y}$ となる $(\bar{X}, \bar{p})$, $(\hat{X}, \hat{p}) \in C(R)$ が存在するならば、 $\bar{y} >_R \hat{y}$ が成立することである。

定義 2.1 の 3 つの条件のあいだの関係は次の通りである。

補助定理 2.1 条件 (*) $\Rightarrow$ 条件 (**) $\Rightarrow$ 条件 (***)

証明 $Y(R) \subset E_n^+$ であるので、条件 (*) $\Rightarrow$ 条件 (**). また条件 (***) の仮定は条件 (**) の仮定に含まれるので、条件 (**) $\Rightarrow$ 条件 (***) (証了)。

ところで、より具体的に $R \in \mathfrak{R}^m$ がいかなる性質をもち、また、他のいかなる諸条件がみたされるときに、はじめに述べた、 $y \in E_n^+$, $\bar{p} \cdot y \leq \bar{p} \cdot \bar{y} \Rightarrow \bar{y} >_R y$ が成立するのであろうか。次の定理は、この問いに対する回答の一つである。

定理 2.1 もし、 $R \in \mathfrak{R}^m$ が同次性をみたす選好順序の m 組であり、かつ、 $(\bar{X}, \bar{p}) \in C(R)$ が、

1) $(\exists w \in S_{m-1}) : \bar{x}_i = \bar{w}_i \bar{y}$ かつ $\bar{w}_i > 0$ for $i = 1, \dots, m$; (ここで $\bar{y} = \sigma(\bar{X})$) を満足し、

2) $\bar{p} > 0$

または、

2') $\bar{p} \geq 0$ かつ R_i は上半連続 (for $i = 1, \dots, m$) であるならば、

$$(\forall y \in E_n^+) : \bar{p} \cdot y \leq \bar{p} \cdot \bar{y} \Rightarrow \bar{y} >_R y.$$

証明 $\hat{y}$ は E_n^+ の元で、 $\bar{p} \cdot \hat{y} \leq \bar{p} \cdot \bar{y}$, $X \in A(\hat{y})$ とする。

i) $\bar{p} \cdot \hat{y} = 0$ のケース、この場合、 $\hat{y} = \sum \hat{x}_i$, $\bar{p} \cdot \hat{x}_i \geq 0$ であるので、 $\bar{p} \cdot \hat{x}_i \geq \bar{p} \cdot \hat{x}_i$ for $i = 1, \dots, m$. ここで、 $(\bar{X}, \bar{p}) \in C(R)$ であるので、 $\bar{x}_i R_i \hat{x}_i$ for $i = 1, \dots, m$; すなわち、 $\bar{X} R X$. X は任意であるので、 $\bar{y} >_R y$.

ii) $\bar{p} \cdot \hat{y} > 0$ のケース

配分 $\tilde{X}$ を

$$(1) \tilde{X} = (\bar{p} \cdot \hat{x}_i / \bar{p} \cdot \hat{y}) \cdot \bar{y} \text{ for } i = 1, \dots, m,$$

で定義する。また、

$$\sum_{i=1}^m \tilde{x}_i = \sum_{i=1}^m (\bar{p} \cdot \hat{x}_i / \bar{p} \cdot \hat{y}) \cdot \bar{y} = (\bar{p} \cdot \sum \hat{x}_i / \bar{p} \cdot \hat{y}) \cdot \bar{y} = \bar{y},$$

であるので、 $\tilde{X} \in A(\bar{y})$.

$\bar{x}_i R_i \hat{x}_i$ を示すために、次の a), b) の二つのケースに分ける。

a) $\bar{p} \cdot \hat{x}_i = 0$ のケース

もし、 $\hat{x}_i = 0$ ならば、 $\bar{x}_i = \hat{x}_i$. ゆえに、 $\bar{x}_i R_i \hat{x}_i$. ところが、仮定 2') によって、 $\bar{p} \cdot \hat{x}_i = 0$ かつ $\hat{x}_i \geq 0$ のケースがある。この場合には、補助定理 1.4 ii) によって、 $\bar{x}_i R_i \hat{x}_i$. ($\because \bar{p}_i = (\hat{x}_i / \bar{x} \cdot \bar{y}) \cdot \bar{y} = 0$).

b) $\bar{p} \cdot \hat{x}_i > 0$ のケース

(1) 式と仮定 1) から、 $\bar{x}_i = (\bar{p} \cdot \hat{x}_i / \bar{p} \cdot \hat{y}) \cdot (1 / \bar{w}_i) \cdot \bar{x}_i$ であるので、

$$(2) (\exists \tilde{\lambda}_i > 0) : \bar{x}_i = \tilde{\lambda}_i \cdot \bar{x}_i.$$

また、(1) から、

$\bar{p} \cdot \bar{x}_i = \bar{y} / \bar{p} \cdot \hat{y} \cdot \bar{p} \cdot \hat{x}_i$. 仮定により、 $\bar{p} \cdot \bar{y} \geq \bar{p} \cdot \hat{y}$ であるので、

$$\bar{p} \cdot \bar{x}_i \geq \bar{p} \cdot \hat{x}_i.$$

ゆえに、(2) から、

$$\bar{p} \cdot \bar{x}_i = \bar{p} \cdot [(1 / \tilde{\lambda}_i) \cdot \bar{x}_i] \geq \bar{p} \cdot [(1 / \tilde{\lambda}_i) \hat{x}_i].$$

ここで、 $(\bar{X}, \bar{p}) \in C(R)$ であるので、

$$\bar{x}_i R_i [(1 / \tilde{\lambda}_i) \hat{x}_i].$$

R_i の同次性によって、 $(\tilde{\lambda}_i \bar{x}_i) R_i [\tilde{\lambda}_i (1 / \tilde{\lambda}_i) \hat{x}_i]$ であるので、

$$\bar{x}_i R_i \hat{x}_i. \quad (\text{証了})$$

さて、定理 2.1 においては $R \in \mathfrak{R}^m$ の性質にかんする仮定だけでなく、仮定 1), 2) (または 2')) が加えられていた。この仮定 1), 2) (または 2')) を $R \in \mathfrak{R}^m$ の性質からのみ導くことができなだろうか。すなわち、 $R \in \mathfrak{R}^m$ の性質

のみから、仮定1), 2) (または 2')) の十分条件を求めることはできないのだろうか。次の定理 2.2 においては、このことの検討がなされる。

定理 2.2 $R \in \mathfrak{R}^m$ が、次の条件をみたす、同一の選好順序 ($R_1 = \dots = R_m$) の m 組であるとするとき、すなわち、各 $i (i=1, \dots, m)$ について、 R_i は、

- 1) 同次、
- 2) 非飽和、
- 3) 広義の単調、
- 4) 上半連続、
- 5) 広義の凸、

であるとき、もし、 $(\bar{X}, \bar{p}) \in C(R)$ ならば、

- i) $\bar{p} \geq 0$,
- ii) $(\mu \in S_{m-1}) : x_i(\mu) = \mu_i \bar{y}$ for $i=1, \dots, m$ で定義された配分 $X(\mu)$ について、 $(X(\mu), \bar{p}) \in C(R)$ が成立する。(ただし、 $\bar{y} = \sigma(\bar{X})$)

証明)

i) $(\bar{X}, \bar{p}) \in C(R)$ とし、仮に、 $\bar{p}$ の h_0 成分 $\bar{p}_{h_0} < 0$ とする。仮定 2) によって、

$$(1) (\exists \hat{x}_i \in E_n^+) : \hat{x}_i P_1 \bar{x}_i.$$

$(\bar{X}, \bar{p}) \in C(R)$ であるので、 $\bar{p} \cdot \hat{x}_i > \bar{p} \cdot \bar{x}_i$ 。ここで、 $\tilde{x}$ を、

$$\tilde{x}_h = \begin{cases} \hat{x}_{1h} & \text{for } h \neq h_0 \\ \hat{x}_{1h_0} + \Delta x_{h_0} & \text{for } h = h_0, \text{ とする。} \end{cases}$$

但し、 $\Delta x_{h_0} = p \cdot (\bar{x}_1 - \hat{x}_1) / \bar{p}_{h_0}$ 。 $\tilde{x}_1 \geq x_1$ であるので、広義の単調性によって、 $\tilde{x}_i R_i \bar{x}_i$ 。これと(1)式から

$$(2) \tilde{x}_1 P_1 \bar{x}_1.$$

ところが、

$$\bar{p} \cdot \tilde{x}_1 = \bar{p} \cdot \hat{x}_1 + \bar{p}_{h_0} \Delta x_{h_0} = \bar{p} \cdot \bar{x}_1.$$

(2)を考慮すれば、これは、 $(\bar{X}, \bar{p}) \in C(R)$ との仮定に反する。したがって、 $\bar{p} \geq 0$ そして、 $\bar{p} \neq 0$ であるので、

$$(3) \bar{p} \geq 0.$$

ii) $\bar{y} = \sigma(\bar{X})$ として、2つのケースに分ける。

1) $\bar{p} \cdot \bar{y} = 0$ のケース

$\bar{p} \cdot \sum \bar{x}_i = 0$ であるので、 $\bar{p} \cdot \bar{x}_i = 0$ for $i=1, \dots, m$ 。各 i について $\bar{x}_i \in h^i(\bar{p}, \bar{p} \cdot \bar{x}_i) = h^i(\bar{p}, 0)$ であるので、補助定理 1.4 ii) により、

$$(4) 0 \in h^i(\bar{p}, 0) \text{ for } i=1, \dots, m.$$

他方、広義の単調性によって、

$$(5) (\forall \lambda \in [0, 1]) : \lambda \bar{y} R_i 0 \text{ for } i=1, \dots, m.$$

(4), (5) から、

$$(\forall \mu \in S_{m-1}) : (X(\mu), \bar{p}) \in C(R).$$

2) $\bar{p} \cdot \bar{y} > 0$ のケース

ここで、

$$I_1 = \{i \in \{1, \dots, m\} \mid \bar{p} \cdot \bar{x}_i > 0\},$$

$$I_2 = \{i \in \{1, \dots, m\} \mid \bar{p} \cdot \bar{x}_i = 0\},$$

とする。 $\bar{p} \cdot \bar{y} > 0$ ならば $I_1 \neq \emptyset$ である。そこで、一般性を失うことなく、 $\bar{p} \cdot \bar{x}_1 > 0$ としてよい。

$$(6) \hat{y} = \bar{y} - \sum_{i \in I_1} \bar{x}_i,$$

とすると、

$$(7) \bar{p} \cdot \hat{y} = \bar{p} \cdot \bar{y}$$

が成立する。仮定により、 $R_1 = R_2 = \dots = R_m$ であるので、補助定理 1.4 i) により、

$$(8) (\forall i \in I_1) : (\bar{p} \cdot \bar{x}_1 / \bar{p} \cdot \bar{x}_i) \bar{x}_i \in h^i(\bar{p}, \bar{M}),$$

が成立する。但し、 $\bar{M} = \bar{p} \cdot \bar{x}_1$ である。ゆえに、 R_1 が広義の凸であるとの仮定から、補助定理 1.3 ii) を用いれば、

$$(9) \sum_{i \in I_1} \lambda_i (\bar{p} \cdot \bar{x}_1 / \bar{p} \cdot \bar{x}_i) \bar{x}_i \in h^1(\bar{p}, \bar{M}),$$

が成立する。但し、 $\lambda_i = \bar{p} \cdot \bar{x}_i / \bar{p} \cdot \hat{y}$ for $i \in I_1$ 。

ところが、

$$\sum_{i \in I_1} \lambda_i (\bar{p} \cdot \bar{x}_1 / \bar{p} \cdot \bar{x}_i) \bar{x}_i = \sum_{i \in I_1} (\bar{p} \cdot \bar{x}_i / \bar{p} \cdot \hat{y}) (\bar{p} \cdot \bar{x}_1 / \bar{p} \cdot \bar{x}_i) \bar{x}_i = (\bar{p} \cdot \bar{x}_1 / \bar{p} \cdot \hat{y}) \sum_{i \in I_1} \bar{x}_i = (\bar{p} \cdot \bar{x}_1 / \bar{p} \cdot \hat{y}) \hat{y},$$

であるので、 R_1 の広義単調性、すなわち、

$$\bar{y} \geq \hat{y} \Rightarrow \bar{y} R_1 \hat{y} \text{ と (9), (10) から、}$$

$$(\bar{p} \cdot \bar{x}_1 / \bar{p} \cdot \hat{y}) \bar{y} \in h^1(\bar{p}, \bar{M}).$$

ここで、補助定理 1.4 により、

$$(\forall \mu_i \in [0, 1] : \mu_i \bar{y} \in h^1(\bar{p}, \mu_i \bar{p} \cdot \bar{y}).$$

が成立する。ゆえに、

$$(\forall \mu \in S_{m-1}) : (X(\mu), \bar{p}) \in C(R).$$

但し、 $X(\mu)$ は

$$x_i(\mu) = \mu_i \bar{y} \text{ for } i=1, \dots, m,$$

で定義される(証了)。

ところで、定理 2.1 においては、 $R \in \mathfrak{R}^m$ の競争均衡 $(\bar{X}, \bar{p})$ の存在を仮定し、また、 $\bar{y} = \sigma(\bar{X})$ とするとき、 $\bar{x}_i = \bar{w}_i \bar{y}$ 、 $\bar{w}_i > 0$ for $i=1, \dots, m$ となる $w = (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m)$ の存在を仮定した。これらの存在を保証する十分条件を求めよう。次の定理 2.3、定理 2.4 がそれである。ただし、ここでは、 $R \in \mathfrak{R}^m$ の性質のみでなく、他の仮定も加えられている。

定理 2.3 もし、選好順序 $R_i \in \mathfrak{R}$ が、 $R_1 = \dots = R_m$ であり、その各々が、

- 1) 同次、
- 2) 上半連続、

という 2 つの仮定をみたし、さらに、

- 3) $\bar{p} > 0$,

4) $\bar{x}_i = \alpha \bar{y} (\alpha > 0)$ となる i が存在するならば、

そのとき、 S_{m-1} の元 μ が存在し、 $(X(\mu), \bar{p}) \in C(R)$ 。ただし、 $x_i(\mu) = \mu_i \bar{y}$ for $i=1, \dots, m$ 。

証明 仮定 2)、3) を用いれば、補助定理 1.2 i) より、 $h^j(\bar{p}, M_j) \ni \phi$ for $j=1, \dots, m$ 。ゆえに、 $\bar{x}_j \in h^j(\bar{p}, M_j)$ 。ところが、 $R_1 = R_2 = \dots = R_m$ であるので、 $\bar{x}_i \in h^j(\bar{p}, M_i)$ for $i, j=1, \dots, m$ 。すなわち、 $(\bar{X}, \bar{p}) \in C(R)$ 、 $\bar{y} = \sigma(\bar{X})$ 。ここで、仮定 4) により、 $\bar{x}_i = \alpha \bar{y} (\alpha > 0)$ となる i が存在する。ここで、 β を $\alpha \cdot \beta = \frac{1}{m}$ となるようにとると $\beta \cdot \bar{x}_i = \alpha \beta \bar{y} = (1/m) \bar{y}$ 。仮定 1) により、 $\beta \bar{x}_i \in h^j(\bar{p}, \beta M_j)$ 。 $\mu_i = \alpha \beta (i=1, \dots, m)$ とすると $\mu \in S_{m-1}$ 。また $(X(\mu), \bar{p}) \in C(R)$ 。ただし、 $x_i(\mu) = \beta \bar{x}_i = \alpha \beta \bar{y} = \mu_i \bar{y}$ (証了)。

定理 2.4 もし、 $R \in \mathfrak{R}^m$ が同一の選好順序

$(R_1 = R_2 = \dots = R_m)$ で、各 i について、 R_i は上半連続であり、

- 1) $\bar{p} > 0$,

- 2) $M_i = (1/m)M$ for $i=1, \dots, m$

ならば、そのとき、

$w \in S_{m-1}$ が存在し、 $\bar{x}_i = \bar{w}_i \bar{y}$ 、 $(\bar{X}, \bar{p}) \in C(R)$ とできる。ここで、 $\bar{y} = \sigma(\bar{X})$ である。

証明 $\bar{p} > 0$ 、 R_i が上半連続であるので、補助定理 1.2 i) によって、 $h^i(\bar{p}, M_i) \ni \phi$ for $i=1, \dots, m$ 。したがって、 $\bar{x}_i \in h^i(\bar{p}, M_i)$ が存在する。すなわち、 $(\bar{X}, \bar{p}) \in C(R)$ 。ここで、 $M_i = (1/m)M$ for $i=1, \dots, m$ であるので、 $\bar{w}_i = 1/m$ とすれば、 $\bar{x}_i = \bar{w}_i \bar{y}$ とできる。ここで、 $\bar{w} = (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m) \in S_{m-1}$ (証了)。

上述の諸定理においては、 $R \in \mathfrak{R}^m$ が同一の選好順序であること、すなわち、 $R_1 = R_2 = \dots = R_m$ が仮定されていた。このことは、社会の各人が、選好に際して全く同一の行動をとるという仮定である。この仮定は余りにも強すぎる仮定といえるであろう。そこで、この仮定を多少とも緩めることはできないだろうか。次の定理 2.5、定理 2.2 の系において、このことを検討してみよう。まず、定理 2.5 においては、 $R_i \neq R_j$ の場合において、定理 2.2 の仮定 1) を導くために必要な条件は何かが問題となる。

定理 2.5 もし、 $R_i (i=1, \dots, m)$ が同次かつ上半連続で、

- 1) $\bar{p} > 0$

2) $x_i = \lambda_i \bar{y}$ 、 $\lambda_i > 0$ for $i=1, \dots, m$ 、ならば、そのとき、 $w \in S_{m-1}$ が存在し、 $\bar{x}_i = \bar{w}_i \bar{y}$ 、 $(\bar{X}, \bar{p}) \in C(R)$ とできる。ここで、 $\bar{y} = \sigma(\bar{X})$ である。

証明 $\bar{p} > 0$ 、 R_i が上半連続であるので、補助定理 1.2 i) によって、 $h^i(\bar{p}, M_i) \ni \phi$ for $i=1, \dots, m$ 。したがって、 $\bar{x}_i \in h^i(\bar{p}, M_i)$ が存在

する。すなわち, $(\bar{X}, \bar{p}) \in C(R)$. ここで, 仮定2)より, $\bar{x}_i = \bar{\lambda}_i \bar{y}$, $\bar{\lambda}_i > 0$ for $i=1, \dots, m$, が成立する。また, R_i は同次である。すなわち, $(\forall \lambda > 0): \lambda h^i(\bar{p}, M_i) = h^i(\bar{p}, \lambda M_i)$ が成立する。したがって, $\bar{\lambda}_i$ を適当に調整すれば, $\bar{x}_i = \bar{w}_i \bar{y}$, $\bar{w}_i > 0$ for $i=1, \dots, m$. となる $\bar{w} \in S_{m-1}$ が存在する (証了)。

次に, 定理2.2の系においては, 定理2.2の結果にもとづき, m 人を二つのグループに分け, その中の一つのグループのみが同一の選好順序という条件をみたせばよいことが証明される。

定理2.2の系 $R \in \mathfrak{R}^m$ は m 組の選好順序である。

$$I_1 = \{i \in \{1, \dots, m\} \mid \bar{p} \cdot \bar{x}_i > 0\}.$$

$$I_2 = \{i \in \{1, \dots, m\} \mid \bar{p} \cdot \bar{x}_i = 0\},$$

とするとき,

i) I_1 の元 i, j について, $R_i = R_j$ が成立し, R_i はそれぞれ次の仮定をみたす。

- 1) 同次性,
- 2) 非飽和性,
- 3) 広義の単調性,
- 4) 上半連続,
- 5) 広義の凸性。

ii) I_2 の元 i は, 上の1)~4)をみたす。そのとき, もし, $(\bar{X}, \bar{p}) \in C(R)$ ならば, $\bar{y} = \sigma(\bar{X})$ とするとき,

i) $\bar{p} \geq 0$,

ii) $(\mu \in S_{m-1}): x_i(\mu) = \mu_i \bar{y}$ for $i=1, \dots, m$ で定義された配分 $X(\mu)$ について, $(X(\mu), \bar{p}) \in C(R)$ が成立する。

証明) 定理2.2の証明から明らかである (証了)。

上に述べた諸定理において, 価格ベクトル $\bar{p} > 0$ という仮定が多く使用された。そこで, $\bar{p} > 0$ が成立するための十分条件を述べよう。

定理2.6 選好順序 $R_i \in \mathfrak{R}$ ($i=1, \dots, m$) が,

- 1) 非飽和,
- 2) 狭義の単調,

のときに, $(\bar{X}, \bar{p}) \in C(R)$ ならば, $\bar{p} > 0$ が成立する。

証明) 仮定1)より, $(\exists \hat{x}_1 \in E_n^+): \hat{x}_1 P_1 \bar{x}_1$. ところが, $(\bar{X}, \bar{p}) \in C(R)$ であるので, $\bar{p} \cdot \hat{x}_1 > \bar{p} \cdot \bar{x}_1$.

仮に $P_{h_0} = 0$ とし,

$$\bar{x}_1 = \begin{cases} \bar{x}_{1h} \text{ for } h \neq h_0, \\ \bar{x}_{1h} + \bar{p}(\hat{x}_1 - \bar{x}_1) \text{ for } h = h_0, \end{cases}$$

とすると, $\bar{x}_1 \geq \bar{x}_1$. ここで, 狭義の単調性より, $\bar{x}_1 P_1 \bar{x}_1$. ところが, $P_{h_0} = 0$ であるので, $\bar{p} \cdot \bar{p}_1 = \bar{p} \cdot \bar{x}_1$. これは, $(\bar{X}, \bar{p}) \in C(R)$ に矛盾する (証了)。

さらに,

$$\bar{Y} = \{\bar{y} \mid (\forall y \in E_n^+): \bar{p} \cdot y \leq \bar{p} \cdot \bar{y} \Rightarrow \bar{y} >_{Ry}\}.$$

とするとき, $\bar{Y}$ が凸であるために, $R_i \in \mathfrak{R}$ ($i=1, \dots, m$) が満足すべき条件を求めよう。

定理2.7 もし, 選好順序 $R_i \in \mathfrak{R}$ for $i=1, \dots, m$ が広義の凸ならば, $\bar{Y}$ は凸である。すなわち, $\bar{y}, \hat{y} \in \bar{Y}$ に対して,

$$(\forall y \in E_n^+): \bar{p} \cdot y \leq \bar{p} \cdot \bar{y}, \bar{p} \cdot y \leq \bar{p} \cdot \hat{y} \Rightarrow \lambda \bar{y} + (1-\lambda) \hat{y} >_{Ry}. \quad (\text{ただし, } 0 \leq \lambda \leq 1).$$

証明) 仮定により, $\bar{y}, \hat{y} \in \bar{Y}$, すなわち,

$$\begin{cases} (\forall y \in E_n^+): \bar{p} \cdot y \leq \bar{p} \cdot \bar{y} \Rightarrow \bar{y} >_{Ry}, \\ (\forall y \in E_n^+): \bar{p} \cdot y \leq \bar{p} \cdot \hat{y} \Rightarrow \hat{y} >_{Ry}. \end{cases}$$

つまり, $\sigma(\bar{X}) = \bar{y}$, $\sigma(\hat{X}) = \hat{y}$ となる $\bar{X}, \hat{X}$ が存在し, $\bar{X} R X, \hat{X} R X$. これは, $\bar{x}_i R_i x_i, \hat{x}_i R_i x_i$ for $i=1, \dots, m$, を意味する。ここで, $\sigma(X) = y$ とすると, R_i は広義の凸であるので, $(0 \leq \lambda \leq 1): [\lambda \bar{x}_i + (1-\lambda) \hat{x}_i] R_i x_i$ for $i=1, \dots, m$. つまり, $\lambda \bar{y} + (1-\lambda) \hat{y} >_{Ry}$ (証了)。

最後に、定理 2.1 と定理 2.2 を用いれば、容易に、次の定理が証明される。

定理 2.8 もし、選好順序 $R \in \mathfrak{R}^m$ が、定理 2.2 の仮定をみたせば R は条件 (*) をみたす。

証明) 定理 2.1 と定理 2.2 により明らかである (証了)。

もちろん、補助定理 2.1 によって、条件 (*) を条件 (**), 条件 (***) としてもよい。

参 考 文 献

- [1] Arrow, K.J., *Social Choice and Individual Values*. New York: Wiley, 1951; Revised Edition, New York and London: Yale University Press, 1963. (長名寛明訳『社会的選択と個人的評価』,

日本経済新聞社, 昭和52年)

- [2] Arrow, K.J. and Scitovsky, T. eds., *Readings in Welfare Economics*, Homewood, Ill.: Irwin, 1969.
- [3] Chipman, J.S., and Moore, J.C., "Aggregate Demand, Real National Income, and the Compensation Principle," *International Economic Review*, 1973.
- [4] Hicks, R.J., "The Valuation of the Social Income," *Economica*, 1940.
- [5] Kuznets, S., "On the Valuation of Social Income-Reflections on Professor Hicks' Article," *Economica*, 1948.
- [6] Scitovsky, T., "A Note on Welfare Propositions in Economics," *Review of Economic Studies*, 1941.