

## ON INVARIANTS OF SURFACES IN THE 3-SPHERE

栗原, 寛明

<https://hdl.handle.net/2324/4474947>

---

出版情報 : Kyushu University, 2020, 博士 (機能数理学), 課程博士  
バージョン :  
権利関係 :

氏 名	栗原 寛明			
論 文 名	ON INVARIANTS OF SURFACES IN THE 3-SPHERE (3次元球面内の曲面の不変量について)			
論文調査委員	主 査	九州大学	教授	佐伯 修
	副 査	九州大学	教授	岩瀬 則夫
	副 査	筑波大学	准教授	石井 敦
	副 査	株式会社富士通研究所	主任研究員	梅田 裕平

### 論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

3次元球面内に埋め込まれた連結で向き付け可能な閉曲面のイソトピー類の研究は、1950年前後に Fox や Homma らによって始められたが、その後あまり研究されてこなかった。4次元空間内に埋め込まれた曲面のイソトピー類の研究が近年かなり活発に行われているのとは極めて対照的である。このことは、3次元空間内の曲面の場合、次元差が1であることから従来の結び目理論の手法を適用することが難しいといった技術的な理由に起因するものと思われる。Homma が示しているように、3次元球面への閉曲面の埋め込みは実に多様であり、研究対象としては非常に興味深い。その後、1970年代には Tsukui や Suzuki が、3次元多様体論や補空間の基本群の観点から研究を行っているが、その後の研究はほとんどなく、ましてやカンドルなどの現代的な結び目不変量を用いた研究はこれまでまったくなかったと言っても過言ではない。ただし、閉曲面が3次元球面内でハンドル体の境界となっている場合は、ハンドル体結び目の理論が使える、現代的な不変量などを用いて研究することもできることに注意しておく。

こうした状況の中、本学位論文では、3次元球面内に埋め込まれた閉曲面の外部空間の2つの連結成分をコンパクトな3次元多様体とみなし、それらの、ハンドル体と圧縮体による Heegaard 分解を考え、そのハンドル体のパートに着目することで、新しい不変量を構成している。与えられたコンパクト3次元多様体の Heegaard 分解は一意的ではないが、Reidemeister-Singer の定理として、その安定同値類は一意的であることが知られている。ここで、安定同値類は、上のようにして構成された2つのハンドル体それぞれに3次元球面内で自明な1-ハンドルを接着することに対応する。したがって、3次元球面内に埋め込まれた連結な閉曲面があれば、それから2成分のハンドル体絡み目の安定同値類が得られることになる。本論文ではまず、こうした2成分ハンドル体絡み目の安定同値類から、もとの閉曲面が再構成できることを示している。これにより、閉曲面の研究が、ある種の2成分ハンドル体絡み目の安定同値類の研究に帰着できることになる。こうした観察は、これまでになく、3次元球面内の曲面の研究に極めて重要な観点を供給することになることが期待される。

そして本論文では、ハンドル体絡み目の不変量としてその有効性が知られているカンドルの G 族から得られるいくつかの不変量について考え、それらが自明な1-ハンドルの接着でどう変化するかを調べることで、ハンドル体結び目やハンドル体絡み目の安定同値類の不変量を構成している。なお、こうした不変量にはいくつかのバリエーションがあり、カンドルによる彩色を用いるもの、コサイクル不変量によるもの、またハンドル体絡み目の各成分に着目するもの、2成分同時に考えるものなど、いくつかの不変量が本論文の第3章で構成されている。これらの不変量は、3次元球面

に埋め込まれた閉曲面のカンドル不変量とみなすことができ、これまでにないまったく新しい不変量が構成されているのは、非常に興味深い。

そして第4章において、3次元球面内の具体的な2つの閉曲面に対して、それらの不変量が計算されている。これらの閉曲面はハンドル体の境界にはならないものであり、本論文で構成された不変量によってこれら2つの閉曲面のイソトピー類が異なることが明確に示されており、本論文における不変量の有効性を示している。

さらに第5章においては、3次元球面内の閉曲面に対して、新しい幾何的な不変量が定義されている。どんなハンドル体結び目も、それにいくつかの1-ハンドルを接着することで自明にできることが知られており、その最小数はトンネル数と呼ばれている。一般の閉曲面に対しても、いくつかの1-ハンドルをその両側に接着することで自明にできることが本論文で示され、その最小数としてハンドル数が定義されている。そして、この不変量が、対応する2成分ハンドル体絡み目の各成分のトンネル数から計算できることなどが示されている。そして最後に、埋め込まれた閉曲面の種数が2のときに、対応するハンドル体結び目の既約性についての考察がなされている。

本論文では、3次元球面内に埋め込まれた連結な閉曲面の新しい不変量を、カンドルを用いて新しく定義し、その有効性を示している。今後の3次元球面内の閉曲面のイソトピー類の研究に影響を与える、意味のある結果であり、低次元トポロジーの分野において大きな価値がある業績と認められる。

なお、本論文の研究は、いくつかの異なる物質や材料の、空間における混ざり方の指標を開発するために応用することなども期待でき、そうした対象のデータ解析や物性の予測などに貢献できる可能性も十分にある。

以上のことから、本研究者は博士（機能数理学）の学位を受ける資格があるものと認める。