九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

最適経済成長と非可逆的投資

武野, 秀樹

https://doi.org/10.15017/4403524

出版情報：經濟學研究. 40 (2), pp.1-31, 1974-06-30. 九州大学経済学会
バージョン：
権利関係：

KYUSHU UNIVERSITY

経　済　学　研　究

第40巻　第2号

June 1974　　*Vol. 40 No. 2*

最適経済成長と非可逆的投資

武　野　秀　樹

目　　次

はしがき
1. 効用関数と異時点消費
2. 生産関数の定義とその性質
3. 最適成長問題
4. ポントリャーギン径路
5. 最適径路の存在性
6. 非可逆的投資と最適径路
7. 自由区間と阻止区間
補　　節

はしがき

新古典派成長モデルでは，固定的貯蓄率のもとで，自律的に，indefinitely に成長する産出量経路が考察されるのであるが，そこでは，経済の軌道を，すすんで望ましい方向に調整していく意図と手段が欠如している。しかし，経済成長の軌道は，経済が生み出す消費のための財貨・サービスによる欲望充足の度合を最大ならしめるという目標を，もっとも有効に遂行しうるように，時々刻々に修正されるのでなければならない。ラムゼイによって最初の定式化が与えられた最適成長論では，上のような目標を達成するための手段として考えられる変数を組み込んだ成長モデルの検討が中心課題となっている。最適成長モデルについては，すでに多くの理論家によって種々のタイプのものが提出され，それぞれの型のモデルの性質も細部にわたって追求されているのであるが，それらの研究の共通の基礎となっている考え方は次のように要約されるであろう。

与えられた計画期間（有限あるいは無限の）にわたってえられる消費がもたらす効用（アロー・クルツ〔2〕は，幸福感（felicity）という言葉でよんでいる）の積分値を最大にするような成長の時間経路を，最適成長経路(軌道)という。このような軌道を探り出し，経済をそれに沿って運行させるための手段は，生産技術が与えられているかぎり，貯蓄率または消費に求められざるをえない。通常の最適成長モデルの定式化においては，消費が手段変数（instrument variable）として採用されるのである。

最適成長理論は，可変的貯蓄率のもとで，時をつうじての効用の総計を最大にする成長経路を求めるものであり，新古典派成長理論に比べ

て進んだ問題意識と意図をもつことがあきらかである。またそれは，以下にみるように，問題の解決のための数学的用具として変分法，とくに最大値原理の援用を必要とする。にもかかわらず，最適成長理論において求められる最適均衡解が，新古典派成長理論の枠内で，つとに発見されていた黄金律経路に一致することはとくに注目に値するであろう。

最適成長理論の定式化にあたって採用される多くの前提のなかでもっとも基本的とおもわれるのは，資本財（必ずしも有形なものにかぎらない）の性質に関するものである。それらは，(a) 可塑性の前提，(b) 同質性の前提，および (c) 量的減価の前提の三つである[1]。これらのうち，本稿でとくに検討の対象とするのは，第1の前提すなわち資本財の可塑性である。それは，次のようなことを意味する。特定の形態の資本ストックとしてすでに存在するいかなる財も，必要に応じて，即時的に無費用で他の形態の資本設備につくりかえることが可能である。また，すでに資本設備のかたちをとっている財を，ただちに消費用途に転用することが可能である。この前提そのものは，全く非現実的な内容のものであることはいうまでもない。しかし，このことは成長を続ける現実の経済においては，一見して考えられるほどに空想的な事態をあらわしてはいないことに注意すべきである。成長経済においては，生産物と資本ストックの最適な再配分が絶えずおこなわれると考えたとしても，生産の拡大に支えられているために，既存設備の取りこわしは，必ずしも必要とはならないであろう。すなわち現実における再配分は，生産物だけを対象としておこなわれれば十分であって，資本設備の転用を必要とすることはほとんどないと考えられる[2]。

いずれにせよ，資本設備の可塑性，あるいは投資の可逆性の前提のもとに構成された最適成長経路は，そのような前提をとり去った場合に，なんらかの修正をうけるであろうことは容易に想像されるであろう。本稿では，前半で最適成長経路の存在と一意性について検討するが，後半において投資の非可逆性のもとでの最適成長の軌道がどのようなものであるかを考察する。

1. 効用関数と異時点消費

効用関数　すでに述べた三つの前提を満す単一の財貨だけが存在する経済を想定し，そのような経済における社会的効用がどのように表示されるかを考えよう。まず，この経済は，その外部に対して実物資本の売買や移転を一切おこなわないという意味で完全に閉鎖的である。このことは，資本ストックが時間の連続関数であることを意味する。また，人口は，固定的比率で指数的に増大すると仮定される。生産のために投入することが可能な労働は，つねに人口の一定割合として示され，これが労働の供給をあらわすとする。しかも，供給される労働の全量が，生産のために利用されることが前提され，その意味で経済は完全雇用の状態を保持すると考えられる。

1) これらの三つの前提は，ミードがかつて掲げた，(1) 機械の完全可塑性の前提 (the assumption of perfect malleability)，(2) 生産における，資本財と消費財の完全代替性の前提 (the assumption of perfect substitutability in production between capital goods and consumption goods)，および (3) 蒸発による減価の前提 (the assumption of depreciation by evaporation) にそれぞれ対応している。(ミード〔5〕, pp. 6-7 参照)

2) アロー・クルツ〔2〕, pp. 60-62 を参照。

1人あたり効用の時間率を U で示す。U は，実物単位で表示された1人あたり消費 $\bar{c}$ の実数値関数であるとする。すなわち，

$$U = U(\bar{c}) \quad (\bar{c} > 0)$$

と書かれる。効用関数 U は，$\bar{c} > 0$ で定義されており，1人あたり消費 $\bar{c}$ は，時間の関数であるとされる。すなわち，

$$\bar{c} = \bar{c}(t) \quad (t \geqq 0)$$

ここで t は，時間を示しており，その値は非負であるとする。このように，本稿全体を通じて，経済量はすべて実物で表示され，それらは，時間 $t(\geqq 0)$ の関数である。しかし，必要な場合以外は変数としての時間 t は省略して記すことにする。

われわれは，効用関数 U の性質として次のことを前提する。「U は，$\sigma \neq 1$ なるある正定数 $\sigma(>0)$ に対して，変数 $\bar{c}$ の $1-\sigma$ 次の同次関数である。ただし，$0 < \sigma < 1$ ならば $U \geqq 0$，$\sigma > 1$ ならば $U < 0$ であるとする。」この定義は，U が二つ以上の変数の関数である場合にも適用できるという点で一般性をもっている。しかも，以下に示すように，1変数の場合は，関数 U の具体的なかたちと性質は，すべてこの定義から導びかれるのである。

まず，$\bar{c}$ と U の任意に固定された値を $\bar{c}_0$，U_0 とし，$U_0 = U(\bar{c}_0)$ が成立するとする。同次関数の性資から，

$$U = U(\bar{c}_0)\left(\frac{\bar{c}}{\bar{c}_0}\right)^{1-\sigma} = \frac{U_0}{\bar{c}_0{}^{1-\sigma}}\bar{c}^{1-\sigma}$$

となる。これは，基準となる $\bar{c}_0(>0)$ のとり方に関係なく成立するから，効用関数のかたちは確定することになる。すなわち，A を定数として

$$U = A\bar{c}^{1-\sigma} \quad (\bar{c} > 0) \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

と書かれる。ただし，$\bar{c}^{1-\sigma}$ は正であるので，効用関数の定義から，$0 < \sigma < 1$ であれば $A > 0$ であり，$\sigma > 1$ のときは $A < 0$ となっていなければならない。

効用関数 (1.1) のもつ性質のうち，重要なものを次に列挙しておく。(a) 効用関数 U は，$\bar{c}$ について2回連続微分可能な狭義単調増加凹関数である。これは，記号をもちいて，

$$U' \equiv \frac{d}{d\bar{c}}U(\bar{c}) > 0 \qquad \cdots\cdots(1.2)$$

$$U'' \equiv \frac{d}{d\bar{c}}U'(\bar{c}) < 0 \qquad \cdots\cdots(1.3)$$

と示される。(b) $\bar{c} \to 0$ のとき限界効用は無限大となる。また，$\bar{c} \to \infty$ のとき限界効用はゼロに近づく。すなわち，

$$\lim_{\bar{c}\to 0} U'(\bar{c}) = \infty\ , \qquad \lim_{\bar{c}\to\infty} U'(\bar{c}) = 0 \qquad \cdots\cdots(1.4)$$

(c) 1人あたり消費についての効用の弾力性は，$1-\sigma$ であり，限界効用の弾力性は $-\sigma$ である。これら (a)，(b) および (c) の性質は，本稿全体をつうじて採用される効用関数についてつねに成立すると想定しよう。

2，3の基礎概念　最適成長問題の技術的枠組みのために必要な2，3の基礎概念についてふれよう。まず，ここでは計画期間または経済的視野 (economic horizon) は無限であるとする。つまり，計画される時間区間は $(0, \infty)$ であり，そのような計画は，無限計画とよばれるケースである。次に，時間割引率 (time discount rate) は，正の定数として外生的に与えられると考える。また，社会的効用全体をあらわすのに，1人あたり消費からの効用と人

口との積をもちいる。このことにより，社会的効用全体は，1人あたり効用が一定であっても，人口の増加とともに増大することがわかる（アロー・クルツ〔2〕，pp. 13—4 参照)。これまでに示した前提のもとで，与えられた生産技術を利用して経済が成長を続けるとき，その成長径路が最適であるとは，次のように定義される積分値が最大になることを意味する。

$$\int_0^{\infty} PU(\bar{c})e^{-\rho t}dt \qquad \cdots\cdots(1.5)$$

ここで，$t(\geq 0)$ は時間を，$\rho(>0)$ は時間割引率を，P は人口をそれぞれあらわしている。ただし人口 P は，

$$P = P_0 e^{\pi t} \qquad (\pi > 0\ ,\ \ P_0 > 0) \qquad \cdots\cdots(1.6)$$

と示される。つまり，人口 P は，初期値 P_0 から出発して時間とともに，正定数 π の割合で成長する。

異時点消費の限界代替率・消費利子率　経済成長経路の最適性について考察するための準備として，時点を異にする消費が，特定の効用関数と時間割引率のもとで無差別となるような限界的交換比率が何であるかを考えよう。この比率は，異時点消費の限界代替率 (intertemporal consumption marginal rate of substitution) とよばれる。また，このような意味で無差別な効用を与える消費増分の成長率を定義し，それを消費利子率 (consumption rate of interest) と名づける。本稿では，いうまでもなく終始連続分析の方法が採用されるが，本節の以下の部分にかぎって，期間分析にもとづく説明を付加することにする。これは，基礎概念の導入にさいしての理解の便宜に供するためにすぎない。最初に，期間分析にもとづく説明をおこなう。

期間分析では，経済量はすべて離散的時間 $t(=0, 1, 2, \cdots\cdots)$ の関数として示される。たとえば，1人あたり消費 $\bar{c}$ は，この場合 $\bar{c}_t(>0)$ $(t=0, 1, 2, \cdots\cdots)$ と書く。ただ，定数としての時間割引率（時間選好率）$\rho(>0)$ だけは，混同のおそれがないと考えて，期間分析と連続分析の両方をつうじて同一の記号をもちいる。t_0 を現在期間，t_1 を比較期間とすれば，$t_1 > t_0$ であり，$t_1 - t_0$ は自然数である。期間 t_0 と t_1 の1人あたり消費は，$\bar{c}_{t0}$, $\bar{c}_{t1}$ と示される。$\bar{c}_{t0}$, $\bar{c}_{t1}$ が，それぞれ Δc_0, Δc_1 だけ変化するならば，t_0, t_1 の2期間の消費のもたらす効用は，それにともなって変動するであろう。これらの効用変化が，時間割引を考慮したうえで相互に無差別になるためには，次の関係が成立しなければならない。

$$U(\bar{c}_{t0}+\Delta c_0)-U(\bar{c}_{t0}) = \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{t_1-t_0} (U(\bar{c}_{t1}+\Delta c_1)-U(\bar{c}_{t1}))$$

この関係は，現在期間の消費の増加（あるいは減少）Δc_0 と将来期間の消費の減少（増加）Δc_1 が等価になるための条件であると解釈される。上式から求められる異期間における消費変動の交換率の極限を，異期間消費の限界代替率とよび，M_{t0t1} で示すことにする。すなわち，

$$\begin{aligned} M_{t0t1} &= \lim_{\substack{\Delta c0\to 0 \\ \Delta c1\to 0}} \frac{\Delta c_1}{\Delta c_0} \\ &= \lim_{\substack{\Delta c0\to 0 \\ \Delta c1\to 0}} \frac{(U(\bar{c}_{t0}+\Delta c_0)-U(\bar{c}_{t0}))/\Delta c_0}{(U(\bar{c}_{t1}+\Delta c_1)-U(\bar{c}_{t1}))/\Delta c_1} \\ &\quad \times (1+\rho)^{t1-t0} \\ &= \frac{U'(\bar{c}_{t0})}{U'(\bar{c}_{t1})}(1+\rho)^{t1-t0} \end{aligned}$$

となる。

ここで，期間 t_0, t_1 の消費水準が与えられて

いるとき，Δc_0 と Δc_1 との間に，一定の割引率（利子率といってもよい）があると考えれば，それはどのような大きさのものであるかをしらべよう。この割引率の極限を消費利子率と称し，R_{t0t1} と書くことにする。その定義から，

$$\lim_{\substack{\Delta c_0\to 0\\ \Delta c_1\to 0}} \frac{\Delta c_1}{\Delta c_0} = (1+R_{t0t1})^{t1-t0} = M_{t0t1}$$

$$R_{t0t1} = M_{t0t1}^{\frac{1}{t_1-t_0}} - 1$$

となる。とくに，$t_1=t_0+1$ ならば，$R_{t0t1}=M_{t0t1}-1$ となることがわかる。このように定義される消費利子率は，期間 t_0, t_1 のそれぞれにおける消費水準 $\bar{c}_{t0}$, $\bar{c}_{t1}$ に依存しており，したがって限界効用逓減の影響を直接受けるものであることに注意すべきである。

連続分析の場合　上に述べたのと同一の問題を，連続分析の場合について説明しよう。二つの時点 t_0, t_1 のおのおのにおける消費の変化 $\Delta c(0)$, $\Delta c(1)$ がもたらす効用率の差が等しくなるという条件は次のように書かれる。

$$U(c(t_0)+\Delta c(0))-U(c(t_0)) = e^{-\rho(t_1-t_0)}(U(c(t_1)+\Delta c(1))-U(c(t_1)))$$

この場合の異時点消費の限界代替率を $M(t_0, t_1)$ と記し，期間分析の場合と同様の手順でこれを計算すれば，次の表示がえられる。

$$M(t_0, t_1) = \lim_{\substack{\Delta c(0)\to 0\\ \Delta c(1)\to 0}} \frac{\Delta c(1)}{\Delta c(0)} = e^{\rho(t_1-t_0)}\frac{U'(\bar{c}(t_0))}{U'(\bar{c}(t_1))} \qquad \cdots\cdots(1.7)$$

消費利子率を $R(t_0, t_1)$ と書けば，それは，

$$\lim_{\substack{\Delta c(0)\to 0\\ \Delta c(1)\to 0}} \frac{\Delta c(1)}{\Delta c(0)} = e^{R(t_0,t_1)(t_1-t_0)} = M(t_0, t_1)$$

という関係から求められる。すなわち，これと (1.7) から，

$$R(t_0, t_1) = \frac{1}{t_1-t_0}\log M(t_0, t_1) = \rho - \frac{1}{t_1-t_0}(\log U'(\bar{c}(t_1)) - \log U'(c(t_0))) \cdots(1.8)$$

となる。

ここで，これまでのような時間区間についての消費利子率とは異る瞬間的な消費利子率を定義してみよう。時点 t_0 における消費利子率を $\overline{R}(t_0)$ と書くならば，これは，

$$\overline{R}(t_0) = \lim_{t1\to t0} R(t_0, t_1)$$

と定義され，(1.8) から，

$$\overline{R}(t_0) = \rho - \frac{d}{dt}\log U'(\bar{c}(t))\Big|_{t=t_0}$$

となる。今後たんに消費利子率というときは，連続分析におけるこの瞬間的消費利子率をさすものとする。一般的に，時点 t における消費利子率は，

$$\overline{R}(t) = \rho - \frac{d}{dt}\log U'(\bar{c})$$

と書かれる。さきに効用関数の基本性質（c）において注意したように，U' の弾力性が $-\sigma(<0)$ に等しいという事実をもちいれば，この関係は

$$\overline{R}(t) = \rho + \sigma\frac{1}{c}\frac{d\bar{c}}{dt} \qquad \cdots\cdots(1.9)$$

となる。

2. 生産関数の定義とその性質

生産関数　生産関数を (2.1) のように定義する。定義域は，$K\geqq 0$, $L_E>0$ であり，値域は $Y\geqq 0$ である。

$$Y = F(K, L_E) \qquad \cdots\cdots(2.1)$$

Kは，実物単位で測られた資本ストック，L_Eは，効率単位で測られた労働投入，Yは，実物単位で測られた純生産物である。KとYは，本稿の最初に示した財貨についての三つの前提，すなわち完全可塑性，同質性，および量的減価の3前提を満すものと考える。次に，労働投入L_Eについて説明しよう。生産において生じる能率の増大を生産関数の内部でどのように表現するかという問題については，これまでに多くの択一的方法が考案されている。このような生産性の上昇を生産関数にとり入れるいくつかの方法のうち，ここではとくに，「労働増大的」(labor augmenting) 表示法といわれるものを採用することにする。これは，生産における効率の改善を，もっぱら投入される労働の単位の変更という手段によって表現しようとすることにほかならない。この考え方によれば，生産関数における変数としての労働投入は，自然単位（たとえば労働時間のような）でなく，効率単位をもって測られるべきである。

効率単位によって測られる労働投入は，自然単位によって測られるそれに比べて，二つの点で異っていると考えられる。第1に，労働者は，時間がたつとともに，技術的知識，作業上の経験・判断力，作業環境への適応性などの点で効率的になると考えられる。このことは，効率単位で測った労働投入が自然単位のそれをこえて成長していくことを示している。この意味での効率的労働投入，いいかえれば技術進歩にもとづく効率単位労働投入をL_eという記号であらわし，それが次のように表示されると考えよう。

$$L_e = e^{\tau t}L \qquad (\tau > 0) \qquad \cdots\cdots(2.2)$$

ただし，Lは自然単位による労働投入をあらわし，τは，技術進歩率とよばれる正の定数である。すでに述べた完全雇用の前提から，Lは労働供給に一致している。ここで，労働供給の人口にたいする割合が一定であると仮定することにする。(1.6) から，

$$L = \lambda P = \lambda P_0 e^{\pi t} = L_0 e^{\pi t} \qquad (L_0 = \lambda P_0) \qquad \cdots\cdots(2.3)$$

となることはあきらかである。λは，$1 > \lambda > 0$なる定数であって，労働力化率とよばれる。L_0が，$t = 0$における自然単位労働投入であることはことわるまでもない。

効率単位による表示を必要とする第2の事情は，生産規模の拡大によってもたらされる能率化である。このような収穫逓増（または逓減）にたいしても労働投入は，修正されねばならない。規模の変化にもとづく効率単位労働投入をL_Eであらわし，これが，すでにえられたL_eを底とする指数関数として示されると前提しよう。そこで，

$$L_E = L_e^{\delta} \qquad (\delta > 0) \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

と書くことができる。ここで，δは正の定数であって，収穫逓増（あるいは逓減）指数とも名づけられるべきものである。

生産関数の性質　(2.1) の生産関数Fは，その直接の変数であるKとL_Eについて，次のような性質をもつことを前提する。(a)Fは，$K(\geqq 0)$と$L_E(>0)$の1次同次関数である。つまり，この生産関数は，規模にかんして収穫一定の性質をもつ。(b)KとL_Eのいずれかがゼロならば，生産物Yはゼロである。つまり，

$$F(0,\ L_E) = \lim_{LE \to 0} F(K,\ L_E) = 0 \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

である。(c) F は，2階連続微分可能であり，限界生産物は逓減的である。

$$F_K \equiv \frac{\partial F}{\partial K} > 0 \text{ (a)},$$

$$F_{LE} \equiv \frac{\partial F}{\partial L_E} > 0 \text{ (b)}, \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

$$F_{KK} \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0 \text{ (a)},$$

$$F_{LELE} \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial L_E^2} < 0 \text{ (b)}. \qquad \cdots\cdots(2.7)$$

(2.1) に (2.4) を代入すれば，

$$Y = F(K, L_e^{\delta}) \qquad \cdots\cdots(2.8)$$

である。F の1次同次性から，この生産関数は，K, L_e について考えるならば，$\delta > 1$ のとき，規模にかんして収穫逓増的であり，$\delta < 1$ のとき，収穫逓減的であることがわかる。

(2.1) に，(2.2)，(2.3)，および (2.4) を順次代入し，生産関数の詳しいかたちを示せば，

$$Y = F(K, L_E) = F(K, L_0^{\delta} e^{(\pi+\tau)\delta t}) \qquad \cdots\cdots(2.9)$$

である。この生産関数をとり扱いやすいかたちに改めるために変数の変換をおこなう。これは，通常生産関数の正規化 (normalization) とよばれる手続きにほかならない。定数 γ (これは，自然成長率とよばれる) を次のように定義し，それをもちいて，t の関数としての変数 y, k を定める。

$$\gamma = (\pi+\tau)\delta (> 0) \qquad \cdots\cdots(2.10)$$

$$y = Ye^{-\gamma t} \qquad \cdots\cdots(2.11)$$

$$k = Ke^{-\gamma t} \qquad \cdots\cdots(2.12)$$

ただちにわかるように，$y = (YL_0^{\delta})/L_E$, $k = (KL_0^{\delta})/L_E$ であるから，労働力の単位を適当にえらんで $L_0 = 1$ とすることによって，y, k を，効率労働の単位で測られた生産物および資本とよぶことができる。これらの変数変換によって，(2.9) は，

$$y = F(k, L_0^{\delta}) = f(k) \qquad (k \geqq 0) \qquad \cdots\cdots(2.13)$$

と書かれることになる。ここで，f は正規化された生産関数として知られるものである。

正規化された生産関数は，次のような性質をもつ。これらは，すべて最初の1次同次の生産関数 F の前提された性質 (2.5)，(2.6)，および (2.7) から導びくことができるのである。

$$f(0) = 0 \text{ (a)}, \quad f'(k) \equiv \frac{dy}{dk} > 0 \text{ (b)},$$

$$f''(k) \equiv \frac{d^2y}{dk^2} < 0 \text{ (c)} \qquad \cdots\cdots(2.14)$$

$$\lim_{k\to 0} f'(k) = \infty \text{ (a)},$$

$$\lim_{k\to\infty} f'(k) = 0 \text{ (b)} \qquad \cdots\cdots(2.15)$$

いいかえれば，$f(k)$ はいわゆる well-behaved な生産関数である。

3. 最適成長問題

問題の定式化 最適成長問題は，さきに示した効用積分値 (1.5) を最大ならしめる資本ストック K と1人あたり消費 $\bar{c}$ の時間経路を求めることである。1人あたり消費はプラスでなければならないが，資本 K を完全にくいつぶすほど大ではありえない。また，消費と投資の和が利用可能な生産物に等しいというフロー条件が満足されるべきであるのはもちろんである。実物単位で測られた消費と投資を，それぞれ C, I と記せば，これらの条件は，

$$K \geqq 0, \qquad \bar{c} > 0, \qquad Y = C + I \qquad \cdots\cdots(3.1)$$

と書かれる。また，次の定義的関係はあきらか

である。

$$C = P\bar{c} \text{ (a)}, \quad I = \dot{K} \text{ (b)}. \quad \cdots(3.2)$$

ここで$\dot{K}$は，Kの時間tについての導関数をあらわす。以下，このようなドット（・）は，すべて時間tについての微分をあらわすものとする。

次に，(3.1) と (3.2) から，$\bar{c} = (Y - \dot{K})/P$であり，消費関数は，$1-\sigma$次同次性をもつから，

$$U(\bar{c}) = U\left\{\frac{1}{P}(Y-\dot{K})\right\} = P^{\sigma-1}U(Y-\dot{K}) \quad \cdots\cdots(3.3)$$

となる。(1.5) を，(1.6)，(2.9)，および (3.3) を考慮して書きなおすことによって，最適成長問題は，結局次のように定式化することができる。

「1人あたり消費$\bar{c}$を時間tの区分的連続な正値関数とするとき，与えられた初期資本ストック$K(0)$から出発する時間経路のうち，次の性質をもつものを求める。

$$\int_0^\infty P_0^\sigma e^{(\sigma\pi-\rho)t}U(F(K, L_E)-\dot{K})dt \longrightarrow \max$$

subject to:

$$\dot{K} = F(K, L_E) - P_0 e^{\pi t}\bar{c},$$
$$L_E = L_0^\sigma e^{(\pi+\tau)\delta t}, \quad K \geqq 0, \quad \bar{c} > 0 \ 」$$

この定式化を，よりとり扱いやすいかたちに書き改めるために，変数の変換をおこなうことを考えよう。必要となる変換式の多くは，すでに生産関数の正規化のさいもちいたものと同一である。われわれは，ここで (2.10)，(2.11)，および (2.12) の関係を導入し，それに加えて正規化された消費の定義式 (3.4) を利用する。

$$c = Ce^{-rt} \quad \cdots\cdots(3.4)$$

(2.12) から，

$$\dot{K} = (\dot{k} + \gamma k)e^{rt} \quad \cdots\cdots(3.5)$$

となるから，(2.11)，(3.2)，および (3.4) によって，フロー条件 (3.1) は，

$$\dot{k} = f(k) - \gamma k - c \quad \cdots\cdots(3.6)$$

となる。また，(1.5) の被積分関数のうち，効用関数の部分 $U(\bar{c})$ は，$\bar{c} = C/P = ce^{rt}/P$ と U の $1-\sigma$ 次同次性から，

$$U(\bar{c}) = P^{\sigma-1}e^{r(1-\sigma)t}U(c)$$

と書かれる。被積分関数全体は，(1.6) を考慮して，

$$P_0^\sigma e^{\{r(1-\sigma)+\sigma\pi-\rho\}t}U(c)$$

となるが，これは，便宜のために，正規化された効用の時間割引率とも名づけられるべきμを定義し，

$$\mu = \rho + \sigma(\gamma - \pi) - \gamma \quad \cdots\cdots(3.7)$$

と書くことにすれば，結局次のかたちをとる。

$$P_0^\sigma e^{-\mu t}U(c)$$

変数変換をおこなうことによって正規化された最適成長問題は，次のように定式化される。

「cを時間tの区分的連続な正値関数とするとき，与えられた正規化された初期資本ストック $k(0)$ から出発する時間経路のうち，次の性質をもつものを求める。

$$\int_0^\infty P_0^\sigma e^{-\mu t}U(c)dt \longrightarrow \max \quad \cdots\cdots(3.8)$$

subject to:

$$\dot{k} = f(k) - \gamma k - c, \quad k \geqq 0, \quad c > 0 \quad 」$$

最適化の必要条件　上にえられた，正規化された最適成長問題を変分法の問題として眺めた場合，どのような必要条件がえられるかを考えよう。正規化された問題についてのオイラーの微分方程式は，次のものである。

$$\ddot{k} = (f'(k) - \gamma - \mu)\frac{U'(c)}{U''(c)} + (f'(k) - \gamma)\dot{k} \qquad \cdots\cdots(3.9)$$

これは，(3.6) とあわせて2階の自律形の微分方程式であり，k と $\dot{k}$ の任意の初期条件にもとづく径路を生みだすのである。これらは，最適成長論におけるオイラー径路とよばれるものであって，無限期間における最適径路は，それらのオイラー径路の集合に含まれているのである。

次に，多少議論のわき道にそれることではあるが，(3.9) のもつ含意について考察を加えておく。正規化されたフロー条件 (3.6) を微分することにより，

$$\ddot{k} = (f'(k) - \gamma)\dot{k} - \dot{c} \qquad \cdots\cdots(3.10)$$

がえられるが，他方，(1.6)，(3.2 a)，および (3.4) から c と $\dot{c}$ との関係は，

$$\dot{c} = \{(\pi - \gamma)\bar{c} + \dot{\bar{c}}\}Pe^{-\gamma t} \qquad \cdots\cdots(3.11)$$

である。次に，効用関数にかんする前提から，U', U'' は，それぞれ $\bar{c}$ の $-\sigma$ 次と $-\sigma-1$ 次の同次関数であり，U' の弾力性は $-\sigma$ に等しいことに注目すれば，次の関係がたしかめられる。

$$\frac{U'(c)}{U''(c)} = \frac{U'(P\bar{c}e^{-\gamma t})}{U''(P\bar{c}e^{-\gamma t})} = Pe^{-\gamma t}\frac{U'(\bar{c})}{U''(\bar{c})} = -\frac{\bar{c}}{\sigma}Pe^{-\gamma t} \qquad \cdots\cdots(3.12)$$

(3.9) に，(3.10)，(3.11)，および (3.12) を代入し，μ の定義 (3.7) に注意すれば，最適性の必要条件は，次のかたちに帰着させることができる。

$$f'(k) = \rho + \sigma\frac{\dot{\bar{c}}}{\bar{c}} = \bar{R}(t). \qquad \cdots\cdots(3.13)$$

この関係の後半は，(1.9) の繰り返しである。

簡単に確認されるように，正規化された資本の限界生産物 $f'(k)$ と絶対値で示された資本の限界生産物 F_K は等しいから，(3.13) は結局，

$$F_K = \bar{R}(t) \qquad \cdots\cdots(3.14)$$

という関係に帰着する。すなわち，オイラーの微分方程式は，次のような経済的含意をもつものであることが知られる。「時間 t における現有の資本の限界生産物は，その時点において，人が，1人あたりの消費財を，与えられた時間選好率と将来の1人あたり消費量の増加にともなう限界効用逓減を考慮したうえで，瞬間的に将来消費財と無差別に交換しようとするときの割引率に一致すべきである。」

4. ポントリャーギン径路

ポントリャーギンの条件　前節で定式化された問題を，ポントリャーギンの最大値原理を適用することによって解決する方法について述べる。ここで，手段変数は，ただ一つであり，それは，$t \geqq 0$ で定義される区分的に連続な正値関数 c である。目的関数を別にすれば，状態変数 (state variable) もただ一つであり，それ

は，効率的労働1単位あたり資本 k である。そして，k は，$t\geqq 0$ において (3.6) の微分方程式：$\dot{k}=f(k)-\gamma k-c$ にしたがうのである。ポントリャーギンの最大値原理によれば，最適蓄積経路を生みだすような効率的労働1単位あたり消費 c は，次に定義される，現行価値ハミルトニアン H[3] を最大ならしめるようなものでなくてはならない。

$$H=U(c)+p\,(f(k)-\gamma k-c)\,. \qquad \cdots\cdots(4.1)$$

ただし p は，補助変数であり，(4.1) を最大ならしめる c の値にたいして，下記の微分方程式 (4.2) の解となるような，時間 t の連続関数である。

$$\dot{p}=\mu p-\frac{\partial H}{\partial k}=\mu p-p(f'(k)-\gamma)=p(\mu-f'(k)+\gamma) \qquad \cdots\cdots(4.2)$$

すでに示した，c と $\bar{c}$ の関係から，効用関数の前提された性質 (1.4) は，$\bar{c}$ を c でおきかえても成立している。すなわち，$\lim_{c\to 0}U'(c)=\infty$，かつ $\lim_{c\to\infty}U'(c)=0$ である。したがって，ハミルトニアン (4.1) の c についての導関数をゼロに等しいとした式：

$$\frac{\partial H}{\partial c}=0=U'(c)-p \qquad \cdots\cdots(4.3)$$

は，$p>0$ なる p にたいして，$c>0$ なる解をただ一つもつことがわかる。そしてこれは，ハミルトニアン H が，そのような c の値にたいして最大値をとることを示している。次に定数 ω を，

$$\omega=\mu+\gamma=\rho+\sigma(\gamma-\pi) \qquad \cdots\cdots(4.4)$$

と定義すれば，(4.2) の微分方程式は，

$$\dot{p}=p(\omega-f'(k)) \qquad \cdots\cdots(4.5)^{4)}$$

のかたちをとる。こうして，最適蓄積経路のための必要条件は，(3.6) の制約式と (4.3) および (4.5) の3式であることがわかる。

(4.3) は，効用関数の性質を考えれば，c について解くことができ，この関数は，

$$c=c(p) \qquad (p>0)$$

と書かれる。この関数は，限界効用関数の逆関数であり，効用関数の前提された性質から，次の性質をもつことが知られる。

$$c'(p)\equiv\frac{dc}{dp}<0\,, \quad \lim_{p\to 0}c(p)=\infty\,, \quad \lim_{p\to\infty}c(p)=0\,.$$

そこで，上に述べた最適性の必要条件は，次の連立微分方程式であらわされることになる。

$$\left.\begin{aligned}\dot{k}&=f(k)-\gamma k-c(p)\\ \dot{p}&=p(\omega-f'(k))\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(4.6)$$

位相図　(4.6) は，k, p の2変数を含む正規形の自律的連立微分方程式である。この方程式のえがきだす軌道と均衡点の存在について考えるための手段として，その軌道を位相図にあらわしてみよう。ただ，そのことに先立って，われわれはここで，体系に含まれる係数の相対的な大きさについて，次の二つの前提を設ける

3) 現行価値ハミルトアニのン定義については，アロー・クルツ〔2〕, pp. 47-49 を参照。

4) (4.5) は，オイラーの微分方程式 (3.9) と同一のものであることに注意しよう。(3.9) は，

$$p=U'(c), \quad \dot{p}=U''(c)\{(f'(k)-\gamma)\dot{k}-\ddot{k}\}$$

をつかって，(4.5) のかたちに書きなおされるのである。

ことにする。

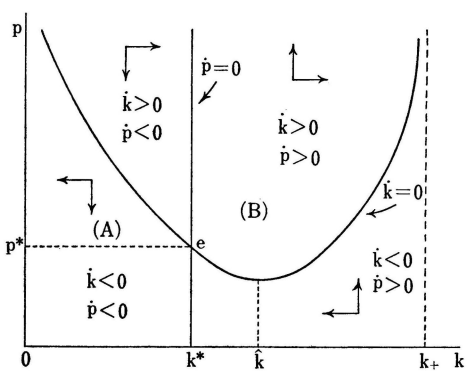
前提 (a) 当初の生産関数 F のもとでは，収穫一定あるいは収穫逓増が支配する。これは，$\delta \geqq 1$ であることを意味する。

前提 (b) 正規化された効用の時間割引率 μ は，非負である。したがって，(4.4) から $\omega \geqq \gamma$ となる。

図-4-1 では，k と p がそれぞれ水平軸と垂直軸にとられている。そこには，軌道図をえがく基準となる一つの曲線と一つの直線が示されている。それらは，(4.6) において $\dot{k}=0, \dot{p}=0$ とした式：

$$\left.\begin{aligned} f(k)-\gamma k-c(p) &= 0 \\ p(\omega-f'(k)) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(4.7)$$

をそれぞれあらわすのである。(4.7) の第1式のグラフは，どのような形状をとるであろうか。$k \to 0$ のとき $p \to \infty$ となることはただちにわかる。また，(2.14)，(2.15) で示された関数 f の性質から，$f(k)-\gamma k$ は，原点をとおる凹関数である。$f'(k)-\gamma=0$ となる k の値を $\hat{k}$ とし，$f(k)-\gamma k=0$ となる k の値を k_+ で示す。このことから，p は，$k=\hat{k}$ で最小値をとり，$k \to k_+$ のとき $p \to \infty$ となる。結局，(4.7) の第1式のグラフは，図-4-1 において下方に凸状の曲線としてえがかれている[5]。



図—4—1

(4.7) の第2式は，$p>0$ から $\omega - f'(k)=0$ となる。上記の前提 (a) と (2.10) の γ の定義を考えれば，$\tau>0$ から $\gamma>\pi$ である。したがって，(4.4) で定義された ω は正になることがあきらかであり，$f'(k)=\omega$ となる $k(>0)$ の値が一意に定まる。この k の値を k^* とすれば，グラフは，$k=k^*(>0)$ となる半直線にほかならない。上に述べた前提 (b) から，

$$f'(k^*) = \omega \geqq \gamma = f'(\hat{k})$$

であり，これは，$k^* \leqq \hat{k}$ を意味している。図-4-1 において，$\dot{k}=0$ をあらわす曲線と $\dot{p}=0$ を示す直線との交点を e とし，その座標を (k^*, p^*) で示す。初期における k と p の値，$k(0)$，$p(0)$ が，それぞれ k^*, p^* に等しければ，変数の時間径路は，点 e にとどまることがあきらかである。この均衡径路を，正規化される以前の変数で表現すれば，

$$K = k^* e^{rt}, \quad Y = f(k^*)e^{rt}$$

となる。つまり，均衡においては，資本ストックと産出量は，ともに $\gamma(=(\pi+\tau)\delta)$ で成長し，資本係数 $(=k^*/f(k^*))$ は一定である。$F_K = f'(k^*) =$ 一定であるから，資本の限界生産物も不変であることがわかる。したがって，均衡においては，生産物の分配が限界生産物にもとづいてなされるかぎり，資本と効率的単位で測られる労働の，生産物へのシェアーは一定にとどまるのである。最後に，1人あたり消費 $\overline{c}$ は，

5) この曲線の凸性は，効用関数 U の3次導関数 U''' が正であれば，容易に証明される。しかしこのことは前提されていない。

$$\bar{c} = (c(p^*)/P_0)e^{(\gamma-\pi)t}$$

と示されるから，それは，一定の成長率 $(\gamma-\pi)$ で増加する。このことから，(1.9) に示した消費利子率 $\overline{R}(t)$ は，均衡においては定数となりその値は

$$\overline{R} = \overline{R}^* = \rho+\sigma(\gamma-\pi) = \omega \cdots\cdots (4.8)$$

である。 $\overline{R}^*(=\omega)$ は，均衡消費利子率と名づけられるであろう。

位相図における軌道　$t=0$ における k と p が，それぞれ k^*, p^* に一致するといった偶然的事態を除外し，e 以外の (k, p) 平面上の任意の1点から出発する軌道が相平面上をどのようにすすむかという問題を考えてみよう。まず，相点が，$\dot{k}=0$ の曲線の上方にあれば，$\dot{k}>0$ である。相点がこの曲線の下方におかれるならば，$\dot{k}<0$ であり，k は減少しつつあることがわかる。相点が $\dot{p}=0$ の垂直線の左方にあるときは，$\dot{p}<0$ であり，その右方においては $\dot{p}>0$ となっている。相平面の非負象限全体 $(k\geqq 0, p\geqq 0)$ は，曲線：$\dot{k}=0$ と直線：$\dot{p}=0$ とによって4つの領域に分割される。そして，それぞれの領域内での相点の動く方向は，k, p の正負の組合せによって示される。図-4-1 では，k と p の動く方向が矢印によって示されている。

ここで，次節以下で詳細に論じられる最適径路の存在性の問題についての予備的考察をおこなう。相平面上の相点を示すのに，(k, p) または，$(k(t), p(t))$ といった記号をもちいることにする。自律的微分方程式のよく知られた性質から，特定の相点をとおる解は，t についての定差を除けば，ただ一つしか存在しないことがあきらかである。以下の考察にとって必要な相平面の領域区分を次に定める。均衡点 (k^*, p^*) を除く非負相平面を X であらわせば，

$$X = \{(k, p) \mid k \geqq 0,\ p \geqq 0,\ k \neq k^*,\ p \neq p^*\}$$

となる。図-4-1 にみるように，X は，$\dot{k}=0$ と $\dot{p}=0$ を示す (k, p) の軌跡によって，内点を共有しない四つの部分に分割される。これらのうち，二つの領域 A, B をとくに次のように定義する。

$$A = \{(k, p) \mid \dot{k} \leqq 0,\ \dot{p} \leqq 0\} \cap X,$$
$$B = \{(k, p) \mid \dot{k} \geqq 0,\ \dot{p} \geqq 0\} \cap X.$$

$(k(t), p(t)) \in A$ の場合の径路　ある t において相点が A に含まれるとき，その径路は時間の経過とともにどういう動きを示すであろうか。自律系の性質から，$t=0$ において相点が A に属すと考えても同様である。つまり $(k(0), p(0)) \in A$ としよう。(4.6) の第2式から p を解けば，

$$p(t) = p(0)\exp\left(\int_0^t (\omega - f'(k(\tau))d\tau\right), \quad p(0) > 0 \qquad \cdots\cdots (4.9)$$

となる。これから，$\omega - f'(k)$ の正負にかかわらず，$p>0$ $(t\geqq 0)$ であることがわかる。また，$k<k^*$ であるかぎり，$\omega - f'(k)<0$ であるから，p は狭義単調減少を続ける。つまり，$\dot{p}\geqq 0$ となるためには，それより以前に $\dot{k}>0$ が成立しなければならない。しかるに (4.6) の第1式を微分することによって，

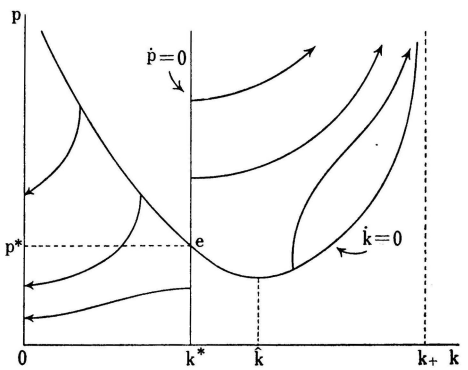
$$\ddot{k} = (f'(k)-\gamma)\dot{k} - c'(p)\dot{p} \cdots\cdots (4.10)$$

となるが，これから $k<k^*$, $\dot{k}<0$, および $\dot{p}<0$ であるかぎり $\ddot{k}<0$ であることがわかる。$t=0$ において，$\dot{k}=0$ か $\dot{p}=0$ のいずれか一方が成

立していたとしても，$\ddot{k}<0(t=0)$ であることにかわりはない。したがって，$t>0$ なるすべての t で $\ddot{k}<0$ となり，t のある値 t_0 において $k(t_0)<0$ とならざるをえない。これは，径路が indefinitely に feasible でないことを示している。つまりこの相軌道は，有限時間内に垂直座標軸を切るかたちで A の外にでてしまうのである。

$(k(t), p(t))\in B$ の場合の径路　この場合も $(k(0), p(0))\in B$ として軌道の動向を考えてよい。まず，$(k(0), p(0))\in B$ であれば，任意の $t>0$ について $(k(t), p(t))\in B$ となることを確かめよう。もしそうでなければ，ある t において，$(k(t), p(t))$ が B の外点になる。相点が $t=t_0$ で B の境界上にあるとしよう。$t=t_0$ で $k=k^*$ であれば，$\dot{p}=0$ かつ $\dot{k}>0$ でなければならない。（なぜなら，$\dot{p}=\dot{k}=0$ なら，それは均衡点を意味するから。）$\dot{k}$ が t について連続であることから，$\Delta t>0$ が存在して，$t_0<t<t_0+\Delta t$ なる任意の t において $\dot{k}>0$ であり，したがって $k>k^*$ である。これは，そのような t にたいして $\dot{p}>0$ であることを意味する。つまり，$t_0<t<t_0+\Delta t$ なる t において $(k(t), p(t))$ は B の内点である。$t=t_0$ で $\dot{k}=0$, $\dot{p}>0$ となる場合についても全く同様の推論（(4.10) を利用する）が妥当することが確かめられる。B の境界上の1点をとおる軌道は一意的であるから，結局 $(k(0), p(0))\in B$ ならば，その軌道が B の外点をとおることはできない。

以上のことから，この場合も相点は最初から B の内点であるとしても一般性は失なわれない。つまり，$\dot{k}(0)>0$, $\dot{p}(0)>0$ であると考えてよい。任意の $t\geqq 0$ にたいして，$\omega-f'(k(t))>\omega-f'(k(0))>\omega-f'(k^*)=0$ であるから，(4.9) によって $\lim_{t\to\infty} p(t)=\infty$ となることがわかる。これは，$c\to 0$ を示しており，その軌道が最適性をもたないことがあきらかである。次に，k の時間径路はどうであろうか。すべての $t\geqq 0$ について $\dot{k}\geqq 0$ であるから，$f(k)-\gamma k\geqq c(p)>0$ であり，これは $k<k_+$ を示している。つまり k は有界である。k が k_+ より小さい値，たとえば $k_1<k_+$ なる k_1 に収束することがないのは，次のように説明される。もし，$k\to k_1<k_+$ であれば，方程式：$\dot{k}=f(k)-\gamma k-c(p)$ の右辺は，$c(p)\to 0$ ($p\to\infty$ から) と $k\to k_1<k_+$ から正の値に収束することになる。したがって $\dot{k}$ も正値に収束して矛盾である。そこで，$\lim_{t\to\infty} k=k_+$ でなければならない。上の結論を要約するために，初期値が，部分集合 A，B のいずれかに含まれる場合の軌道の動向を，図-4-2に示そう。



図—4—2

5. 最適径路の存在性

最適径路の構成　相平面（(k, p) 平面）の正象限上の任意の初期状態から出発する軌道が，それぞれどのような動向を示すかという問題を考えながら，最適径路の存在を一般的に証明することが，本節の課題である。期待される結論は，どのような正の資本ストック k の初期値が与えられるとしても，初期における正の

pの大きさを適当にえらぶならば（これは，cの大きさを適当にえらぶことである），均衡点$e(k=k^*,\ p=p^*$ となる位置）に収束する軌道を一意的に構成でき，それが最適軌道にほかならないという事実を示すことである。このことを示すために，われわれは，$t=0$ における k の大きさにしたがって三つのケースを区別して考え，そのおのおのの場合について最適軌道の存在と一意性を証明することにする。それらの三つのケースとは，(a) $k(0)=k^*$, (b) $0<k(0)<k^*$, および (c) $k^*<k(0)$ である。証明中に利用される補助命題の証明のうち煩雑なものは，本稿末尾の補節でとり扱う。まず，k の初期値が k^* に等しい場合については，ほとんど説明の必要はない。つまり，対応する p の初期値 $p(0)$ が p^* に等しいときだけが均衡点 (k^*, p^*) にとどまりうる場合である。$p(0)\neq p^*$ であれば，$(k(0), p(0))$ は集合 A か B のいずれかに属すことになり，その軌道は前節に述べたように，indefinitely に feasible でないか，あるいは $k\to k_+$, $p\to\infty$ $(c\to 0)$ であるかである。これらの時間径路が最適でありえないことはいうまでもない。

$0<k(0)<k^*$ の場合　$0<k(0)<k^*$ なる $k(0)$ を任意にえらんで固定するとき，$p(0)$ を元素とする三つの集合 S_1, S_2, および S_3 を次のように定義する。

$$S_1=\{p(0)\mid \text{ある } t_0\ (0<t_0<\infty) \text{ にたいして, } k(t_0)=0,\ \lim_{t\to\infty} p(t)=0\}$$

$$S_2=\{p(0)\mid \lim_{t\to\infty} k(t)=k_+>k^*,\ \lim_{t\to\infty} p(t)=\infty\}$$

$$S_3=(S_1\cup S_2)^c\cap R \qquad (R \text{ は実数})$$

これら三つの集合が互いに素であることはあきらかである。$0<k(0)<k^*$ から，$\dot{p}(0)<0$ は明白であり，$p(0)$ を小さくとれば，(4.6) の第1式によって $\dot{k}(0)<0$ となるから，そのような $p(0)$ にたいしては，$(k(0), p(0))\in A$ である。この軌道は indefinitely feasible ではなく，したがってこの $p(0)$ は S_1 に属すことになる。つまり，$S_1\neq\phi$ である。

ここで，$S_2\neq\phi$ を確認するために，(4.6) を満足する相軌道にかんして次の補助命題が成立することに注意しよう。

補助命題 5.1[6]　「$0<k_1<k^*$, $p^*<p_1$ なる定数 k_1 と p_1 が与えられるとき，ある有限値 $T(>0)$ にたいして次の条件を満足するような (4.6) の解が存在する。

$$k(0)=k_1,\qquad \dot{k}(0)>0,$$
$$k(T)=k^*,\qquad p(T)=p_1 \quad (0<T<\infty)」$$

この補助命題 5.1 が成立することから，$0<k_1<k^*$ なる任意の k_1 と適当な p の初期値から出発する径路が，$t=T$ で前節で定義された相平面の領域 B に属すことになる。すなわちこの解は，$\lim_{t\to\infty} k=k_+$ となる性質をもつものであり，したがって $S_2\neq\phi$ である。

推論の次の段階にすすむに先立って，$0<k(0)<k^*$ の場合の最適径路の存在性と一意性を示すために必要となる補助命題 5.2 を次にあげる。

補助命題 5.2[7]　「任意の二つの異なるポントリャーギン軌道（(4.6) の解）$k^1(t)$, $k^2(t)$ において，$k^1(0)=k^2(0)$, $\dot{k}^1(0)=\dot{k}^2(0)$ であるならば，$0<t<\infty$ なるすべての t で $k^1(t)\neq k^2(t)$ となる。またこの場合，$\lim_{t\to\infty} k^1(t)$, $\lim_{t\to\infty} k^2(t)$ が，ともに有限でしかも k_+ に等しくないならば，$\lim_{t\to\infty} k^1(t)\neq\lim_{t\to\infty} k^2(t)$ である。」

6)　この証明は補節（28—29ページ）でおこなう。
7)　この証明は補節（39—31ページ）でおこなう。

上に示したように，S_1 と S_2 はともに空ではない。さらに，それらは上および下に有界な区間であることが示される。つまり，もし $a\in S_1$ であれば，$b<a$ なる任意の b がまた S_1 に属している。その理由は次のとおりである。

$$a = p^1(0) > p^2(0) = b$$

であれば，$k^1(0) = k^2(0) = k(0)$ から $\dot{k}^1(0) > \dot{k}^2(0)$ であり，小さい t の値にたいして $k^1 > k^2$ が成立する。補助命題 5.1 によって，k^1 と k^2 は $t>0$ なるいかなる t においても等しくならないから，k^2 は有限時間内に負値をとることになり，$p^2(0)=b\in S_1$ である。全く同じ理由によって，もし，$a'\in S_2$ であれば，$b'>a'$ なる b' は S_2 に属している。

集合 S_1, S_2 について $\sup S_1$, $\inf S_2$ を考えれば，S_1 と S_2 が互いに素な区間であることから，$\sup S_1 \leqq \inf S_2$ であることはあきらかである。次に，$\sup S_1 = \inf S_2$ であることが確かめられるが，その理由は以下のように説明される。もし，$\sup S_1 < \inf S_2$ であるならば，$\sup S_1 < p^1(0) < p^2(0) < \inf S_2$ であるような，p の異なる初期値をもつ二つの径路が存在する。それらの径路の初期値 $(k^1(0), p^1(0))$ と $(k^2(0), p^2(0))$ において，$k^1(0)=k^2(0)=k(0)$ かつ $\dot{k}^2(0) > \dot{k}^1(0)$ である。また $p^1(0)$, $p^2(0)$ は，S_1, S_2 のいずれにも属さないから，必然的に $\lim_{t\to\infty} k^1(t) = \lim_{t\to\infty} k^2(t) = k^*$ となる。補助命題 5.2 から，これは矛盾である。したがって，$\sup S_1 = \inf S_2$ でなければならない。また，これが S_3 のただ一つの元素であることもあきらかである。

以上の推論の結果を要約すれば次のようになる。k の初期値が $0<k(0)<k^*$ なる範囲で任意に与えられるとき，p の初期値 $p(0)(>0)$ を適当な大きさにえらべば（つまり $p(0)=\sup S_1 = \inf S_2$ ととれば），このような初期値をもつ解 $(k(t), p(t))$ は，均衡解 (k^*, p^*) に単調に収束する。与えられた $k(0)$ にたいして，そのような $p(0)$ はただ一つしか存在しない。$p(0)$ の値がそれより小さければ，解は，indefinitely feasible ではない。また，$p(0)$ がそれより大であれば，$\lim_{t\to\infty} p(t)=\infty$ すなわち $\lim_{t\to\infty} c(t)=0$ となる。

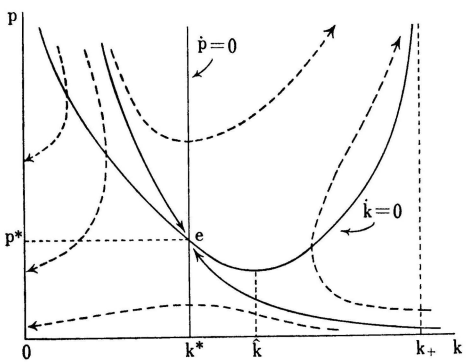
$k^*<k(0)$ の場合・相軌道図 $k(0)>k^*$ なる場合についても最適径路の存在と一意性が確認される。この場合の推論は，$0<k(0)<k^*$ の場合とほとんど同様である。とくに，$k(0)>k^*$ とした場合の集合 S_1 が空でないことを証明するのにさいしては，次の点に注意しなければならない。ポントリャーギン径路 (k, p) が，$t=T$ において，$k(T)=k^*$，$0<p(T)<p^*$ であれば，$0\leqq t<T$ なるすべての t で $\dot{k}(t)<0$, $\dot{p}(t)>0$ となる。このことは次のようにして確かめることができる。$\dot{k}$ と $\dot{p}$ の連続性から，十分小さい $\varepsilon(>0)$ にたいして，$\dot{k}(T-\varepsilon)<0$, $\dot{p}(T-\varepsilon)>0$ が成立する。ここで次のような t_1 と t_2 を定める。

$$t_1 = \max\{t \mid \dot{k}(t) = 0, \quad 0 \leqq t < T-\varepsilon\},$$
$$t_2 = \max\{t \mid \dot{p}(t) = 0, \quad 0 \leqq t < T-\varepsilon\}.$$

これらの式の右辺の集合が空でなければ，$\dot{k}$ と $\dot{p}$ の連続性から，t_1, t_2 は存在する。t_1, t_2 がともに存在しなければ，問題は解決しているから，少くともどちらか一方が存在するとしてよい。$t_1=t_2$ なら，それは均衡点を示しており，軌道の一意性に矛盾する。t_2 が存在しないか，または $t_1>t_2$ であれば，$\dot{k}(t_1)=0$ かつ $\dot{p}(t_1)>0$ が成立することとなり，これは，$(k(t_1), p(t_1))$ が相平面の領域 B に属すことにほかならない。

これが前提に反することはあきらかである。最後に，t_1 が存在しないか，または $t_1<t_2$ であれば，$\dot{p}(t_2)=0$ であるとともに，$T-\varepsilon\geqq t\geqq t_2$ なるすべての t について $\dot{k}(t)<0$ となる。これから，$k(t_2)>k(T-\varepsilon)>k^*$ である。ところで，(4.9) において，$t=T$ として p の初期値を考えれば，それは必ずプラスである。とくに $p(t_2)>0$ である。これらは，あきらかに $\dot{p}(t_2)=0$ に矛盾している。したがって，このようなケースもまたおこりえない。

図-5-1は，図-4-1や図-4-2と同じ構造をもつ位相図をもちいて最適軌道と他の軌道を示したものである。そこでは，相平面 (k, p) の任意の点をとおってそれぞれただ一つの連続的軌道が存在することが示される。これらはすべてポントリャーギン軌道であるが，そのなかで点 (k^*, p^*) に収束する，実線で示されたものが最適性をそなえたそれである。図-5-1では，初期値が最適軌道からはずれていれば，それらの径路は，時間の経過とともに，feasible でなくなるか，$c\to 0$ となるかのいずれかであるように見える。しかし，c が不連続的に変動しうることを考えれば，初期状態が相平面上のどこにあったとしても，その径路が均衡点に到達することが可能であることがわかる。つまり，そのときは，ある時点で p の値は不連続的に変動し，相点は最適軌道上におかれることになるのである[8]。



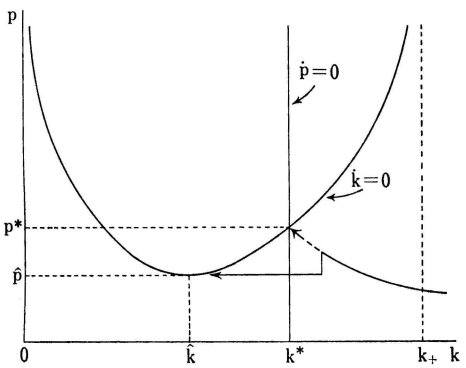
図—5—1

最適軌道の不存在　上に証明された最適成長径路の一意的存在は，あくまで当初から示されている多くの条件と前提に依存する成長モデルの枠内で妥当する命題である。問題の性質を基本的に限定する多くの前提のうち，それなしには問題の解決が不可能であるだけでなく，最適軌道そのものが存在しないという意味で，もっとも基本的なものは何であるかを考えてみよう。そのような基本的条件は，第4節で「位相図」を説明するのに先立って示した前提 (b) にほかならない。その前提とは $\omega\geqq\gamma$ ということであり，これは，(4.8) によって $\overline{R}^*\geqq\gamma$ とも書かれる。これまでの議論では，均衡消費利子率 $\overline{R}^*(=\omega)$ は，自然成長率 γ より小さくないことが仮定されていたのである。もしもこの仮定が成立しないとすればどうであろうか。次に，そのような場合は最適軌道が存在しえなくなることを示そう。

$\gamma>\omega$ であるとすれば，$\omega=f'(k^*)<f'(\hat{k})=\gamma$ という関係から，$\hat{k}<k^*$ となることはあきらかである。この場合は，直線：$\dot{p}=0$ と曲線：$\dot{k}=0$ のグラフの位置関係は，図-5-2のように変更される。この図では，曲線：$\dot{k}=0$ 上の，$\hat{k}$ に対応する p の値を $\hat{p}$ で示している。すなわち，$f(\hat{k})-\gamma\hat{k}-c(\hat{p})=0$ であり，曲線上の p の値は，$k=\hat{k}$ で最小である。最適径路の不存在を示すためには，任意の $k(>0)$ の値から出発する，すでに $\gamma\leqq\omega$ の場合に確立されている

8)　このような c の不連続点においては，最大値原理から導びかれる (4.6) の微分方程式は成立しないことはいうまでもない。(ホールキン〔3〕, p. 209 参照)

ところの，均衡点に収束する径路が，この場合（$r>\omega$ の場合）は最適でなく，他によりすぐれた indefinitely feasible な径路が存在することをいえばよい。(4.6) の式は，径路が最適であるための必要条件であったから，ポントリャーギン径路よりすぐれた径路が存在することは，最適径路の不存在を意味するのである。



図—5—2

この場合は，$\hat{k}<k^*$, $\hat{p}<p^*$ であるから，均衡点 (k^*, p^*) に単調に収束するポントリャーギン径路 $(k(t), p(t))$ において，ある有限な $t_0(0<t_0<\infty)$ をとれば，$t>t_0$ なるすべての t について，$k(t)>\hat{k}$, $p(t)>\hat{p}$ が成立する。そこで，この径路が，$t\geqq t_0$ なる t については，次の微分方程式にしたがって動くものと考える。

$$\dot{k}(t)=f(k(t))-rk(t)-\hat{c} \qquad (t\geqq t_0) \qquad \cdots\cdots(5.1)$$

ただし $\hat{c}$ は，$\hat{p}$ に対応する c の値であり，いうまでもなく定数である。つまり，$\hat{c}=c(\hat{p})$. $0\leqq t<t_0$ なる t で，(k^*, p^*) に向うポントリャーギン径路をとり，$t\geqq t_0$ で (5.1) にしたがって動く相点の軌道は，図-5-2において実線で示されている。

$$\dot{k}=f(k)-rk-\hat{c}<f(\hat{k})-r\hat{k}-\hat{c}=0$$

であるから，$t\geqq t_0$ では k は単調減少であり，容易にわかるように $\lim_{t\to\infty} k=\hat{k}$ となる。こうして構成された径路では，$0\leqq t<t_0$ なる t では，ポントリャーギン最適径路と等しい消費がもたらされ，$t\geqq t_0$ ではあきらかに $\hat{c}$ に等しい消費を生む。この定数としての消費 $\hat{c}$ は，ポントリャーギン径路のそれより大きいことはいうまでもない。このあたらしい indefinitely feasible な径路が，(k^*, p^*) へ収束する（点線で示される）それよりすぐれていることは明白である。

$r>\omega(=\overline{R}^*)$，したがって $\mu<0$ であるときは，人は，生産物を直接消費するよりも，それをすべて蓄積し，その果実である生産物を手に入れる方を有利と考えるであろう。ただ，このように均衡消費利子率よりも均衡成長率が大であるとしても，経済的視野が仮りに有限であったとすれば，蓄積された元本がその視野の終期にすべて消費されてしまうような最適径路が決定されるであろう。しかし，本稿で取り扱ってきたような無限視野の場合は，きわめて逆説的な事態が発生するのである。すなわち消費は，最適化行動の基準にしたがうかぎり棚上げにされ，その果実もすべて蓄積に廻されることになる。このような消費の延期には限界がなく，したがって最適径路は存在しないことになるのである[9]。

6. 非可逆的投資と最適径路

投資の非可逆性とモデルの定式化　「はしがき」で述べたように，最適成長論の根底には，

9) この蓄積のパラドックスともいうべき事態については，アロー・クルツ〔2〕, pp. 59-60, pp. 71-72 およびイナガキ〔4〕, pp. 126-28 を参照せよ。

資本財の性質についての三つ基本的前提，すなわち (a) 可塑性の前提，(b) 同質性の前提，および (c) 量的減価の前提，がおかれている。これらの単純化の前提のうち，(b) と (c) は保持されるが，(a) の資本の完全可塑性が認められないと考えよう。そのときは，投資は，非可逆性 (irreversibility) をもつことになる。この場合は，マイナスの投資は，減耗分を限度とすることになるが，減耗分を生産関数の内部におけるロスとして吸収させ，生産物を純量で示すことにすれば，結局投資は非負量としてあらわされるとしてよい。この非可逆性の制約を考慮に入れるとき，これまでに提示された最適成長モデルの分析結果は，どのような修正を受けるであろうか。

これまでにもちいた変数，関数，およびそれらにかんする前提は，すべてそのままである。ただ，われわれがこれまでの問題でもちいた手段変数（コントロール変数）が，効率労働1単位あたり消費 c だけであったのにたいして，今度はさらにもう一つの手段変数を導入しなければならない。追加される手段変数は，効率労働1単位あたり投資である。これを i であらわせば，それは次のように定義される。

$$i = Ie^{-rt}, \quad \text{ただし } I=\dot{K}$$

これらの関係と定義的関係：$K=ke^{rt}$ から，

$$\dot{k} = i-\gamma k \qquad \cdots\cdots(6.1)$$

という関係をえる。本来の制約式：$\dot{k}=f(k)-\gamma k-c$ は，これから

$$f(k)-i-c = 0 \qquad \cdots\cdots(6.2)$$

と書かれる。そこで，最大値問題は次のかたちをとることになる。

「c を時間 t の区分的連続な正値関数とし，i を，やはり区分的連続な t の非負値関数とするとき，与えられた初期資本ストック $k(0)$ から出発する k の時間径路のうち次の性質をもつものを求める。

$$\int_0^\infty P_0^\sigma e^{-\mu t}U(c)dt \longrightarrow \max$$

subject to:

$$\dot{k} = i-\gamma k, \quad f(k)-i-c=0, \quad k \geqq 0,$$
$$c > 0, \quad i \geqq 0. \qquad \text{」}$$

ハミルトニアン H は，ここでは

$$H = U(c)+p(i-\gamma k) \qquad \cdots\cdots(6.3)$$

のかたちをとる。k, p をパラメータとする関数 H を次の条件のもとに，c と i について最大にすることを考えねばならない。

$$f(k)-i-c = 0, \quad i \geqq 0, \quad c > 0^{10)} \qquad \cdots\cdots(6.4)$$

(6.4) で，$i+c>0$ であるから，$k>0$ となり，この問題では，パラメータ k はプラスでなければならないことがわかる。

さて，(6.4) のもとに (6.3) を最大にするという非線型計画法の問題において中心的役割をはたすのは，次のように定義されるラグランジアン L である。

$$L = U(c)+p(i-\gamma k)+q(f(k)-i-c) \qquad \cdots\cdots(6.5)$$

ここで q はラグランジュ係数である。この問題は，クーン・タッカーの制約想定を満足するこ

10) $c\to 0$ のとき，$U'(c)\to\infty$ であるから，$c>0$ を $c\geqq 0$ でおきかえても問題の性質は変化しないことに注意しよう。

とが確かめられ，また，関数 H と $f(k)-i-c$ はともに c と i について凹である。したがって，クーン・タッカーの定理により，(6.4) の条件下に (6.3) が $c=c^0$, $i=i^0$ で最大となるための必要・十分条件は，次の関係 (6.6) を満足させる q の値 q^0 が存在することである[11]。

$$\begin{aligned} &U'(c^0)-q^0 \leqq 0 \quad \text{(a)}, \\ &p-q^0 \leqq 0 \quad \text{(b)}, \\ &c^0(U'(c^0)-q^0)+i^0(p-q^0)=0 \quad \text{(c)}, \\ &f(k)-i^0-c^0=0 \quad \text{(d)}. \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(6.6)$$

以上のこととあわせて，最大値原理においては，この問題に含まれる p が，次の微分方程式を満足すべきことが要求される。

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \mu p - \frac{\partial L}{\partial k} = \mu p + \gamma p - q f'(k) \\ &= \omega p - q f'(k) \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(6.7)$$

非可逆的投資のもとでの最適性条件の吟味

すでに示した非線型計画問題においては，与えられた k と p の値にたいして，c^0, i^0 および q^0 が定まる。そのとき，与えられた k にたいして，p が $U'(f(k))$ より大であるか小であるかによって i^0 がプラスかゼロのいずれかになることに注意しよう。すなわち，

$$i^0 \begin{cases} >0 \\ =0 \end{cases} \quad \text{according as} \quad p \begin{cases} >U'(f(k)) \\ \leqq U'(f(k)) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(6.8)$$

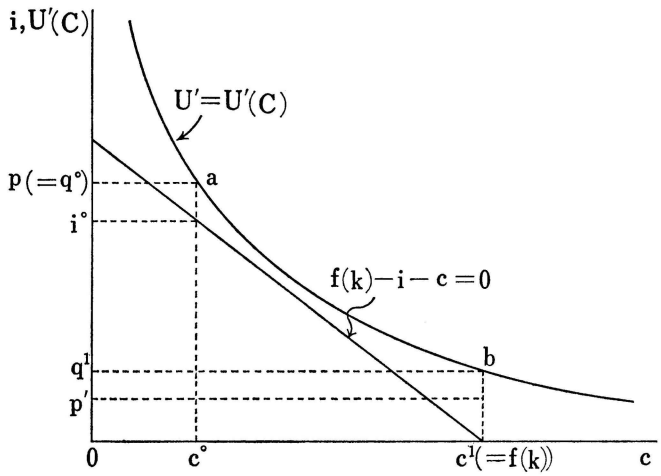
このことは次のように示される。まず，$p>U'(f(k))$ であるとしよう。このときは $p=q^0$ であることがわかる。その理由は以下のとおりである。もし $p<q^0$ であるとすれば，(6.6a), (6.6c) から $i^0=0$ でなければならず，それは (6.6d) によって，$f(k)=c^0$ を意味する。最初の前提とあわせて，

$$q^0 > p > U'(f(k)) = U'(c^0)$$

となるが，これは，$c^0>0$ を考慮すれば (6.6c) に矛盾する。したがって，$p>U'(f(k))$ ならば $p=q^0$ である。そして $p=q^0$ であれば，$c^0>0$ と (6.6c) から $U'(c^0)=p$ であり，最初の前提とあわせて，$U'(c^0)>U'(f(k))$ がでてくる。これから $c^0<f(k)$ であり，(6.6d) を考えれば，$i^0>0$ がしたがう。次に，$p \leqq U'(f(k))$ であれば，$i^0=0$ となることをみよう。$i^0>0$ であるとすれば，$c^0>0$ と (6.6c) と (6.6d) から，$p \leqq U'(f(k)) < U'(c^0)=q^0$ となる。これは (6.6c) に矛盾しており，よって $i^0=0$ でなければならない。

k, p をパラメータとする (6.6) の解がどのように定まるかという問題を，今度は図をもちいて検討しよう。これは，上の推論の結果を視覚的に確めるのに役立つ。図-6-1では，水平軸に c，垂直軸に i および U' がそれぞれ測られている。図示される曲線は，限界効用：$U'=U'(c)$ を示している。もう一つの $-45°$ の傾きをもつ直線は，$f(k)-i-c=0$ を表示している。いま，$k(\geqq 0)$ が，ある大きさで与えられるならば，それに応じて，直線：$f(k)-i-c=0$ が定まる。それにたいして，p が，図でみるように比較的大きい値，つまり $p>U'(f(k))$ なる値をとっているならば，(6.8) とその証明において示されたように，c^0 と q^0 は $p=q^0=U'(c^0)$ を満すように定まる。図では，点 a の座標としてそれを読みとることができる。同時に，図から $i^0>0$ であることもわかる。p が，図の p' のように $U'(f(k))$ より小さい値をとるときは，

11) 坂口〔6〕，200-203 ページ参照。



図—6—1

事情は異っている。対応する (6.6) の解は，図でみるように c^1, q^1 ($>p'$) が与えられ，$i^1=0$ もあきらかである。また，$p\leqq U'(f(k))$ なるどのような p の値にたいしても $q=q^1$ であることも確かめられる。

二つのシステム　非可逆的投資のもとでの最適成長径路を，k と p の座標で構成される相平面上で検討するためには，相平面上の任意の位置における変数の動きを知らねばならない。k と p の関係について次の三つの場合が区別される。それらは，$p>U'(f(k))$, $p<U'(f(k))$, および $p=U'(f(k))$ の三つの択一的関係が成立する場合である。

(1) $p>U'(f(k))$ の場合。このときは，(6.8) とその証明において示したように，$i>0$, $p=q$ である。したがって，(6.6c) から $U'(c)=p$ であることがわかる。これらの関数と (6.1), (6.2), および (6.7) から，結局この場合の相点の動きは，

$$\left.\begin{aligned}\dot{k}&=f(k)-\gamma k-c\\ \dot{p}&=p(\omega-f'(k)\\ p&=U'(c)\end{aligned}\right\}\qquad\cdots\cdots(6.9)$$

で示されることになる。これは (4.6) の運動式と同じものであり，したがって，このケースは投資が可逆性をもつケースと全く同じ軌道をたどることになるのである。

(2) $p<U'(f(k))$ の場合。このときは $i=0$ であり，(6.6) の諸関係を考慮すれば，$p<q$ となっている。(6.1), (6.2), および (6.7) から変数の動きは次の式にまとめられる。

$$\left.\begin{aligned}\dot{k}&=-\gamma k\\ \dot{p}&=\omega p-qf'(k)\\ q&=U'(f(k))\\ p&<q.\end{aligned}\right\}\qquad\cdots\cdots(6.10)$$

(3) $p=U'(f(k))$ の場合，このときは，$i=0$ であるが，$p=q$ が成立する。このケースは，(6.9) において $i=0$ すなわち $f(k)=c$ とするかあるいは (6.10) において $p=q$ とすることによって導びかれる。これは (1) の特別な場合であり，相平面上でいえば，(1) と (2) の支配する二つの領域の境界における相点の動きが，それによって示される。したがって，本質的には (6.9) と (6.10) の二つのシステムが存在することになるのである。

(6.9) にしたがう相点の動きについては前節までに十分な検討を加えているので，ここでは (6.10) のシステムについて考えよう。$\dot{k}=0$, $\dot{p}=0$ を示す2曲線の性質を検討しよう。これらは，

$$\gamma k = 0, \quad p = U'(f(k))\cdot f'(k)/\omega \qquad \cdots\cdots(6.11)$$

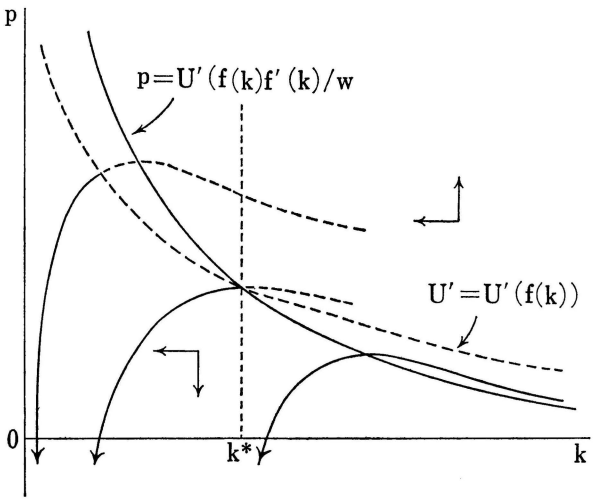
となる。(6.11) の第1式から，$k \gtrless 0$ にしたがって，$\dot{k} \lesseqgtr 0$ であることがわかる。第2式から，$k=k^*$ のとき $p=U'(f(k^*))$ となる。また，(6.11) の示す直線と曲線は交わらないから，このシステムには均衡点は存在しない。すなわち，非可逆的投資を前提し，$i=0$ となる状態のもとでは，均衡点に収束することがないのはもちろん，均衡点そのものも存在しない。

阻止曲線の構成とその役割　(6.10) のシステムによる軌道は，図-6-2に示される。この図には二つの右下がり曲線がえがかれているが，それらのうち実線で示されるものは $p=U'(f(k))\cdot f'(k)/\omega$ をあらわし，破線のものは，$U'=U'(f(k))$ をあらわしている。図-6-2にみるように，これらの2曲線は，$k=k^*$ で交わっている。破線の曲線：$U'=U'(f(k))$は，(6.9) のシステムと (6.10) のそれとを区分する境界線であって，これを境として $i>0$ から $i=0$ に移ることになる。この意味でこの曲線を阻止曲線 (blocking curve) とよんでよいであろう。図-6-2 では，システム (6.9) に支配される相軌道図が示されている。しかしながら，これらの軌道の動きのうち，現実的に有効なものは阻止曲線の下方の部分だけであり，図でこの部分だけが実線で示されているのは，このためである。

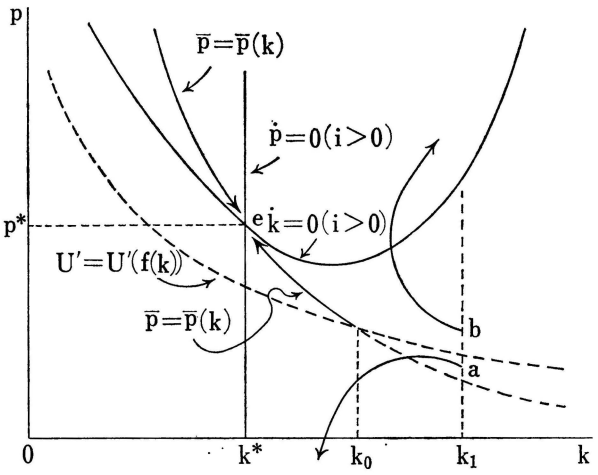
次に，この阻止曲線と前節までにえられた可逆的投資のもとでの最適軌道との位置関係を考えてみよう。投資の可逆性が前提されている場合の $\dot{k}=0$ を示す曲線では，$c=f(k)-\gamma k$ であり，

$$p = U'(c) = U'(f(k)-\gamma k) > U'(f(k))$$

があきらかであるから，$k=0$ 曲線は，あきらかに図-6-3にみられるように阻止曲線の上方にあることになる。図-6-3において，曲線：$\dot{k}=0$



図—6—2



図—6—3

と直線：$\dot{p}=0$ は，これまで幾度も現われた $i>0$ なる状態での静止線であり，阻止曲線：$U'=U'(f(k))$ は，その下方に破線で示されている。最適軌道は，均衡点 e に向う矢印をつけた曲線によって示されるが，これは，微分方程式：

$$\frac{dp}{dk}=\frac{p(\omega-f'(k))}{f(k)-\gamma k-c(p)} \qquad \cdots\cdots(6.12)$$

の解のうち，均衡点 (k^*, p^*) をとおり，かつその点に収束する径路である。この最適軌道を関数：$\bar{p}=\bar{p}(k)$ $(k>0)$ によって示すことにする。いうまでもなく，

$$p^*=\bar{p}(k^*), \qquad \frac{d\bar{p}}{dk}<0 \quad (k>0)$$

が成立する。

ところで，$\bar{p}=\bar{p}(k)$ と $U'=U'(f(k))$ を比較すれば，図-6-3 にみるように，$0<k\leqq k^*$ なる k については，$\bar{p}>U'(f(k))$ である。しかし，$k^*<k$ なるある k について $\bar{p}<U'(f(k))$ であるとすればどうであろうか。そのような k にたいしては，(6.2) から，

$$\bar{p}=U'(c)=U'(f(k)-i)<U'(f(k))$$

となるから $i<0$ であることがわかる。すなわち，$\bar{p}$ が阻止曲線の下側にあるときは $i<0$ であり，非可逆的投資のもとでは，(6.9) に代って (6.10) のシステムが作動することになる。$\bar{p}(k)<U'(f(k))$ なる大きさの k（図でいえば k_0 より大きい値をもつ）が初期値として与えられるときは，均衡点 (k^*, p^*) に収束する径路は，(6.9) と (6.10) のいずれのシステムによってもえられないことがわかる。このように，非可逆的投資の前提のもとでは，これまでのポントリャーギン径路がすべて最適性を失うような k のある区間が存在することが示される[12]。図-6-3 についてみれば，このような開区間は，(k_0, ∞) である。もし k の初期値が $k_1(>k_0)$ であるとすれど，p の初期値が，$U'(f(k_1))$ より小でないか否かによって，図でみるように軌道は，異なる仕方で均衡点から遠ざかるのである。このような k の開区間（すな

12) アロー・クルツ〔2〕, p. 83-85 を参照。

わち $\bar{p}(k)<U'(f(k))$ となる区間）は，アロー・クルツによって阻止区間（blocked interval）と名づけられている[13]。アローとクルツは，その共同論文〔1〕で，可逆的投資の前提のもとでの最適政策がそのまま適用可能な区間（これを自由区間（free interval）とよぶ）と非可逆的投資の前提のもとでの最適政策を同時に考慮に入れねばならないような k の区間（すなわち阻止区間）が，どのような条件によって発生するか，という問題を詳細に考察している。次節でわれわれは，かれらの行なった精緻な分析のなかで，主要な結果とおもわれる部分を取り上げて整理し，それに若干のコメントを与えることを試みよう。

7. 自由区間と阻止区間

判定関数の構成　自由区間，阻止区間，およびそれらの境界を，それぞれ F，B，および D で示し，それらを次のように定義する。

$$F=\{k|\,\bar{p}(k)-U'(f(k))>0\},$$
$$B=\{k|\,\bar{p}(k)-U'(f(k))<0\},$$
$$D=\{k|\,\bar{p}(k)-U'(f(k))=0\}.$$

F と B は開集合，D は閉集合である。図-6-3からもあきらかなように，$0<k\leqq k^*$ なる任意の k は F にぞくすから，以下の考察では，阻止区間が生じる可能性をもつ，$k>k^*$ なる k だけを取り上げれば十分である。ここで，k の関数 v を次のように定義する。

$$v=v(k)\equiv\frac{U'(f(k))}{\bar{p}(k)}\qquad(k>0)$$

$v(k)$ は，あきらかに連続かつ微分可能であり，$k\in F$ のとき $v<1$，$k\in B$ のとき $v>1$ である。

そして，$k\in D$ ならば $v=1$ が成立することはもちろんである。v の k についての弾力性を Ev/Ek $(\equiv(k/v)(dv/dk))$ で示せば，次の関係が成り立つことはあきらかである。

$$\frac{Ev}{Ek}=\frac{E}{Ek}\left(\frac{U'(f(k))}{\bar{p}(k)}\right)=\frac{EU'(f(k))}{Ek}-\frac{E\bar{p}(k)}{Ek}=\left(\frac{EU'}{Ec}\right)_{c=f(k)}\cdot\frac{Ef(k)}{Ek}-\frac{E\bar{p}(k)}{Ek}\qquad\cdots\cdots(7.1)$$

また，効用関数についての前提から，

$$\frac{EU'}{Ec}=-\sigma\ (\sigma>0)\qquad\cdots\cdots(7.2)$$

である。

投資の可逆性が認められている場合の最適政策における投資 i を $\bar{i}$ と書くことにすれば，(6.12) から，

$$\frac{d\bar{p}}{dk}=\frac{\bar{p}(\omega-f'(k))}{\bar{i}-\gamma k},$$

したがって，

$$\frac{E\bar{p}}{Ek}=\frac{\omega-f'(k)}{-\gamma+\dfrac{\bar{i}}{k}}$$

となる。k が，F，D，あるいは B のいずれに属しているかにしたがって，$\bar{i}>0$，$\bar{i}=0$，あるいは $\bar{i}<0$ となることから，$E\bar{p}/Ek<0$ $(k>k^*)$ を考慮すれば次の関係が確かめられる。

$$-\gamma\frac{E\bar{p}}{Ek}=\omega-f'(k)-\frac{E\bar{p}}{Ek}\frac{\bar{i}}{k}\begin{cases}>f'(k)-\omega & (k\in F)\\ =f'(k)-\omega & (k\in D)\\ <f'(k)-\omega & (k\in B).\end{cases}\qquad\cdots\cdots(7.3)$$

(7.1) の両辺に $\gamma(>0)$ をかけて (7.2)，(7.3) を代入すれば，次の関係が成立する。

13)　アロー・クルツ〔1〕, p. 335 を参照。

$$\gamma\frac{Ev}{Ek}\gtrless\omega-f'(k)-\sigma\gamma\frac{Ef}{Ek}$$

$$\text{according as}\quad k\begin{cases}\in F\\ \in D\\ \in B\end{cases}$$

……(7.4)

ここで議論の簡単化のために，判定関数ともよぶべきあたらしい関数φを次のように定義してみる。

$$\varphi=\varphi(k)\equiv\omega-f'(k)-\sigma\gamma\frac{Ef}{Ek}$$

……(7.5)

そうすれば (7.4) は，

$$\gamma\frac{Ev}{Ek}\begin{cases}>\varphi(k) & (k\in F)\\ =\varphi(k) & (k\in D)\\ <\varphi(k) & (k\in B)\end{cases}\qquad\cdots\cdots(7.6)$$

と書きなおされる。

自由区間と阻止区間は，一般的に $k>k^*$ なる k の全域にわたって散在するのであるが，任意の区間について次の区別を設けてみる。すなわち，個々の自由区間（あるいは阻止区間）が，その右方に阻止区間（自由区間）を有しているか否かによって，それらを，有界自由区間（あるいは有界阻止区間）および終端自由区間 (terminal free interval)（または終端阻止区間 (terminal blocked interval)）と名づける。いいかえれば，有界自由区間（有界阻止区間）とは，その右方に阻止区間（自由区間）を少なくとも一つもつような自由区間（阻止区間）のことであり，終端自由区間（終端阻止区間）とは，その右方がすべて自由区間（阻止区間）あるいは境界であるような自由区間（阻止区間）のことである。ここで，以下の考察のための基礎となる命題をあげておく。

命題 7.1　「任意の自由区間あるいは阻止区間が有界であるならば，その区間に上端の境界を加えた区間は，$\varphi(k)=0$ を満す k を少なくとも一つ含む。」

（証明）任意の有界自由区間 (a, b)（ただし，$k^*<a<b$）をとり，その任意の点を c とすれば，$v(c)<1$ である。$k\to b-0$ のとき $v(k)\to1$ であり，また $k\to a+0$ ならば，$v(k)\to1$ である。したがって $c<k<b$ なるある k で $v'(k)>0$ また，$a<k<c$ なるある k で $v'(k)<0$ となる。これは，開区間 (a, b) に含まれるある k で $v'(k)=0$，したがって (7.6) から $\varphi(k)<0$ となることを示している。k^* を左端とする自由区間では，(7.5) に k^* を代入することにより，$\varphi(k^*)<0$ がわかる。(a, b) に右端の境界を加えた区間を $(a, b]$ と書き，その上限を k_1 としよう。任意の実数 $\varepsilon<0$ にたいして，次の条件を満す k_2, k_3 が存在する。

$$v(k_1)=1,\quad v(k_3)>1,\quad v'(k_2)>0,$$
$$k_1<k_2<k_3<k_1+\varepsilon,\quad k_2, k_3\in B.$$

したがって，(7.6) から $\varphi(k_2)>0$ である。$\varphi(k)$ が，(a, b)のある k で負値をとることと合せて，$\varphi(k)=0$ となる k が存在するが，$\varepsilon>0$ の任意性から，$k\in(a,b]$ でなければならない。有界阻止区間についても同様に証明される (*q. e. d.*)。

終端自由区間と終端阻止区間の存在　終端自由区間と終端阻止区間が存在するための十分条件は，次のように示される。

命題 7.2　「

$$\omega>\lim_{k\to\infty}f'(k)+\gamma\sigma\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{Ef}{Ek}\cdots\cdots(7.7)$$

が成立するならば，終端阻止区間が存在する。

また，

$$\omega < \lim_{k\to\infty} f'(k) + \gamma\sigma \lim_{k\to\infty} \frac{Ef}{Ek} \quad \cdots(7.8)$$

の関係が成立するならば，終端自由区間が存在する。」

（証明）まず，次の二つの関数を定める。

$$\underline{e} = \underline{e}(k) = \inf_{k'\geq k}\left(\frac{Ef}{Ek'}\right),$$

$$\bar{e} = \bar{e}(k) = \sup_{k'\geq k}\left(\frac{Ef}{Ek'}\right).$$

ただしここで，Ef/Ek' は，$k=k'$ における Ef/Ek の値であり，sup, inf は，$[k, \infty)$ にわたるものとする。さらに，次の二つの関数を定義する。

$$\underline{\varphi} = \underline{\varphi}(k) = \omega - f'(k) - \gamma\sigma\bar{e}(k)$$
$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(k) = \omega - f'(k) - \gamma\sigma\underline{e}(k)$$

(7.5) の φ の定義と比較すれば，任意の $k\geqq k^*$ にたいして

$$\underline{\varphi}(k) \leqq \varphi(k) \leqq \bar{\varphi}(k) \qquad \cdots\cdots(7.9)$$

となることがわかる。$f'(k)$, $\bar{e}(k)$ はともに単調減少であり，かつ生産関数の前提された性質から，$0<Ef/Ek<1$ であるから，$\underline{\varphi}(k)$ は $k\to\infty$ のとき有限値に収束する。この極限を m で示せば，(7.9) から，

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(k) \geqq \lim_{k\to\infty} \underline{\varphi}(k) = m$$

となる。$\bar{e}$, $\underline{\varphi}$ の定義から，条件 (7.7) が成立するときは，

$$m = \omega - \lim_{k\to\infty} f'(k) - \gamma\sigma \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{Ef}{Ek} > 0$$

である。すなわち，

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(k) \geqq m > 0.$$

これは，下極限の意味から，十分大きい k にたいしては，$\varphi(k)$ がすべて正値をとることを意味する。したがって命題7.1によって，この場合は終端自由区間か終端阻止区間かのいずれかが存在することになる。仮りに終端自由区間が存在するとしよう。(7.6) から，Ev/Ek はそのとき十分大きな k にたいして，つねに正である。すなわち v は，$k\to\infty$ につれていくらでも大きくなるが，自由区間では $v<1$ のはずであり，これは矛盾である。これで，(7.7) のもとでは終端阻止区間が存在することがたしかめられた。

命題 7.2 の後半の証明は，前半のそれと同様である。今度は $\varphi(k)$ が，十分大きな k にたいしてつねに負値をとることになり，やはりいずれかの終端区間が存在することとなる。$Ev/Ek<0$ が，大きい k についてつねに成立することから，$v\to 0$ である。これは，阻止区間においてはつねに $v>1$ であることに矛盾する。したがってこの場合は，終端自由区間が存在するのである（*q. e. d.*）。

次に，命題7.2から直接えられる系をいくつかあげる。

系 7.2-1 「$\lim_{k\to\infty} \varphi(k)>0$ であれば，終端阻止区間が存在する。$\overline{\lim_{k\to\infty}} \varphi(k)<0$ であれば，終端自由区間が存在する。」

（証明）命題 7.2 の証明のなかで示された。

系 7.2-2 「$\lim_{k\to\infty} f'(k)<\omega-\sigma\gamma$ が成立すれば，終端阻止区間が存在する。」

（証明）すべての k について $0<Ef/Ek<1$ であるから，$\overline{\lim_{k\to\infty}}(Ef/Ek)\leqq 1$ となる。したがって (7.7) が成立する。

系 7.2-3 「$\lim_{k\to\infty} f'(k)=0$ かつ $\sigma\leqq 1$ ならば，終端阻止区間が存在する。」

（証明）基本的関係：$\omega>\gamma$ と $\overline{\lim_{k\to\infty}} Ef/E \leqq 1$

に注意すれば，(7.7) が成立していることがわかる。

系 7.2-4　「$\lim_{k\to\infty} f'(k)=0$ かつ $\lim_{k\to\infty}(Ef/Ek)>\omega/(\gamma\sigma)$ であれば，終端自由区間が存在する。」

(証明) (7.8) が成立することからあきらかである。

系 7.2-5　「$\lim_{k\to\infty} f'(k)>0$ かつ $\lim_{k\to\infty} f'(k)>\omega-\gamma\sigma$ であれば，終端自由区間が存在する。」[14]

(証明) $\lim_{k\to\infty} f'(k)>0$ ならば，f が原点をとおる凹関数であることから，$\lim_{k\to\infty}(Ef/Ek)=1$ であることがたしかめられる。したがって (7.8) が成立する。

k のすべての範囲について阻止区間が全くあらわれないための十分条件を次にあげる。

命題 7.3　「

$$\sigma>\frac{\omega}{\gamma(Ef/Ek)}\ (>1)\quad (k>k^*)$$

という関係が成立しているならば，$k>k^*$ なる k の全区間が自由区間である。」

(証明) (7.5) から，$\varphi(k)<0$ $(k>k^*)$ が成立している。命題 7-1 の証明におけると同様の方法で，自由区間の上端 $k_1(>k^*)$ を定めれば，任意の実数 $\varepsilon>0$ にたいして次のような $k_2(k^*<k_1<k_2<\infty)$ が存在する。

$$v(k_1)=1,\quad v'(k_2)>0,\qquad k_1<k_2<k_1+\varepsilon$$

$k_1\in D$ であるから，(7.6) から

$$(Ev/Ek)_{k=k_1}=\frac{1}{\gamma}\varphi(k_1)<0$$

である。一方，

$$(Ev/Ek)_{k=k_2}>0$$

となり，これは ε の任意性と Ev/Ek の連続性に矛盾する (*q. e. d.*)。

結語　これまでは，具体的な生産関数，効用関数を定めることなく，自由区間と阻止区間の問題を考察してきた。この問題と結論にたいして，具体的な生産関数をあてはめてみればどうであろうか。コブ・ダグラス型生産関数：$y=Ak^{\alpha}$ $(0<\alpha<1,\ A>0)$ では，$f'(k)\to 0$ となっている。したがって系 7.2-3 と命題 7.3 から，次のようにいうことができる。コブ・ダグラス生産関数のもとでは，限界効用 $U'(c)$ の弾力性 (の絶対値) σ が 1 より大でないならば，終端阻止区間が存在する。また，限界効用の弾力性が十分大であり，

$$\sigma>\frac{\omega}{\gamma}\cdot\frac{1}{\alpha}\left(>\frac{\omega}{\gamma}>1\right)$$

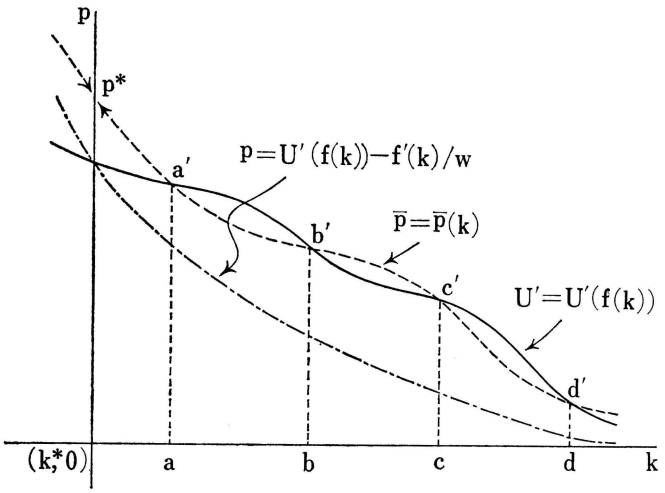
という関係が成立しているならば，命題 7.3 から全区間が自由区間となる。

次に問題になるのは，自由区間と阻止区間が無限に交代的に出現するようなケースが具体的にありうるか否かということである。終端区間が存在せず，2 種の区間が無限に交代的に発生するケースは，アロー・クルツによって見事に構成された。かれらは，コブ・ダグラス生産関数を基礎として，そのような生産関数を作り上げることに成功している[15]。

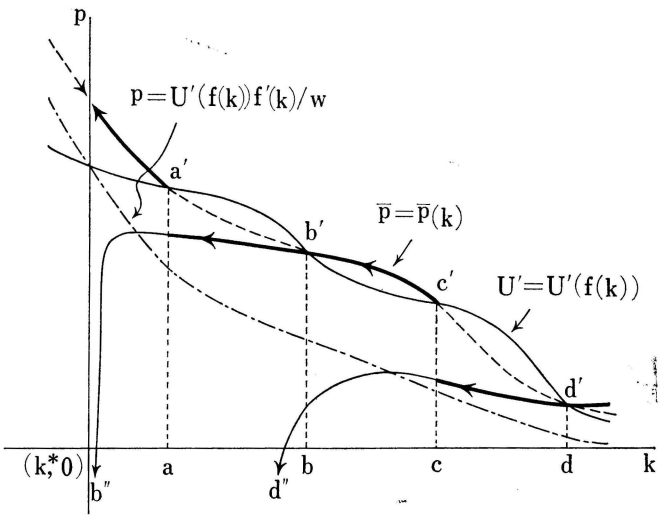
最後に，自由区間と阻止区間が交代的にあらわれる場合，(6.9) と (6.10) の二つのシステムのそれぞれにもとづく最適政策が，どのように連結されねばならないかという問題を考えてみよう。この問題は，いわばこれまでの議論を

14) 生産関数の性質 (2.15 b) によれば，生産における労働要素の不可欠性，すなわち $\lim_{k\to\infty} f'(k)=0$ が前提されているから，この系の場合は事実上除かれる。

15) アロー・クルツ [1], pp. 341-344 を参照。



図—7—1



図—7—2

集約するものであり，図-7-1と図-7-2に示されている。これらの図は，全く同じ構成をもっており，これらを区別して示すのは，たんに図を読みとりやすくするためにすぎない。これらの図では，これまでとは異なり，相平面の $k \geqq k^*$, $p \geqq 0$ の部分が示されている。点 (k^*, p^*) に向う破線（- - - -）は，可逆的投資のもとでの最適軌道としてすでに確立されたものである。それと絡み合ってえがかれているのは，阻止曲線：$U' = U'(f(k))$ である。それらの曲線の下方には，$p = U'(f(k)) \cdot f'(k)/\omega$ をあらわす曲線が示されている。これらの図の水平軸上で，開区間 $(0, a)$, (b, c),…… は自由区間であり，一方開区間 (a, b), (c, d),……は阻止区間であることがわかる。k の初期値が点 d より右方にあるとしよう。径路は，図-7-2にお

いてみられるように，太い実線で示された最適軌道の部分にそって，点 d' まですすむであろう。$k=d$ となるにいたって，$i=0$ となるために，以後は，軌道は (6.10) のシステムにしたがうことになる。すなわち，$p<q(=U'(f(k)))$ となり，軌道は，時間とともに曲線 $d'd''$ を矢印の方向にすすむであろう。$k=c$ となったとき，システムは，(6.10)から (6.9) に再び切り替えられる。そして，点 c' を起点として，可逆的投資の場合の最適径路である $\bar{p}=\bar{p}(k)$ に乗った動きがはじまるであろう。こうして，k の任意の初期値 ($>k^*$) から出発する軌道は，(6.9) と (6.10) の二つのシステムに交互に支配されながら，図-7-2にみるように，太い実線に沿って動くことによって，均衡点 (k^*, p^*) に近づくことが可能となるのである。その過程で必要となる c の不連続な変化は有限回でたりることもあきらかであろう。

補　　説

補助命題 5.1 の証明　この証明を3段階にわけておこなう。

(1) 命題にいう特定の値ではない任意に定めた $T(>0)$ にたいして，$k(T)=k^*$, $p(T)=p_1$ となる解を考える。$p_1>p^*$ から，$\dot{k}(T)>0$ である。この相点が，$0\leqq t<T$ なるすべての t において，相平面の部分集合 A，B のいずれにも属さないことを確かめよう。すなわち，

$$\dot{k}(t)>0,\quad \dot{p}(t)<0\quad (0\leqq t<T)$$

となることを示す。もし，$0\leqq t_1<T$ なる t_1 が存在して，$\dot{k}(t_1)=0$, $\dot{k}(t)>0$ $(t_1<t<T)$ であるとしよう。$k(t_1)<k^*$ となっているから，$\dot{p}(t_1)<0$ になるはずであるが，これは，$(k(t_1), p(t_1))\in A$ となることを示す。そのときは，すでに確かめたように，この解では，$t>t_1$ なる t について $\dot{k}(t)<0$ であるから矛盾である。したがって，$\dot{k}(t)>0$ $(0\leqq t<T)$ である。$k<k^*$ から $\dot{p}<0(0\leqq t<T)$ もあきらかである。

(2) $t=T$ で (k^*, p_1) をとおる解において T の値を変化させれば，相平面上の同一軌道をもつ異なる解が生み出される。そこで，次のような解の列を考える。

$$k^\nu(T_\nu)=k^*,\quad p^\nu(T_\nu)=p_1$$
$$(\nu=1,2,3,\cdots\cdots)$$
$$0<T_1<T_2<T_3<\cdots\cdots\to\infty$$

(1) で示した，k の狭義単調増加性と自律的微分方程式の解の性質から，

$$k^1(0)=k^2(T_2-T_1)>k^2(0)$$
$$=k^3(T_3-T_2)>k^3(0)\cdots\cdots$$

である。つまり，

$$k^1(0)>k^2(0)>k^3(0)>\cdots\cdots$$

となる。次に，単調減少列 $\{k^\nu(0)\}$ $(\nu=1,2,3,\cdots\cdots)$ が0と k のあいだのどのような k の値にも収束しないことを示す。背理法によることとし，もし，このことが成立しないとすれば，$0<\tilde{k}<k^*$ なる定数 $\tilde{k}$ が存在して，$\lim_{\nu\to\infty} k^\nu(0)=\tilde{k}$ である。そこで，任意の正数 $\varepsilon(>0)$ をとるとき，整数 $N(\varepsilon)$ が存在して，$m>N(\varepsilon)$, $n>N(\varepsilon)$ $(n>m)$ なる任意の番号にたいして，

$$\varepsilon>k^m(0)-\tilde{k},\quad \varepsilon>k^n(0)-\tilde{k}$$

が成立する。ところで，

$$k^m(0)=k^n(T_n-T_m)\quad (T_n>T_m)$$

であるから，

$$\varepsilon>k^n(T_n-T_m)-k^n(0)$$

なる関係が認められる。これは，$0 \leqq t < T_n - T_m$ なるある t にたいして，

$$0 < \dot{k}^n(t) \leqq \frac{\varepsilon}{T_n - T_m}$$

が成立していなければならないことを意味する。ここで $n \to \infty$ とすれば，$\dot{k}^n(t) \to 0$ である。ところで，t の定め方から，

$$\tilde{k} < k^n(0) = k^n(t) < k^n(T_n - T_m) < \tilde{k} + \varepsilon$$

である。$k^n(t)$ に対応する p を $p^n(t)$ と書き，一方 $f(\tilde{k}) - \gamma\tilde{k} - c(p) = 0$ を満足するような p を $\tilde{p}$ であらわすことにする。上に述べたことから，結局 $n \to \infty$ とするとき，相点 $(k^n(t), p^n(t))$ は，相点 $(\tilde{k}, \tilde{p})$ の ε 正方形近傍に含まれることになる。これは，相点の極限の意味で，

$$\lim_{n \to \infty} (k^n(t), p^n(t)) = (\tilde{k}, \tilde{p})$$

を示しており，$(\tilde{k}, \tilde{p}) \in A$ であるから，解 (k^n, p^n) は，集合 A の点をとおる軌道に接近せねばならない。これは，解 (k^n, p^n) の定め方に矛盾している。以上のことから，狭義単調減少列 $\{k^\nu(0)\}$ は，開区間 $(0, k^*)$ のいかなる k の値にも収束しないことがわかる。しかも，$\dot{k}^\nu(0) > 0 (\nu = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ であることから，結局，

$$\lim_{\nu \to \infty} k^\nu(0) = 0, \quad \lim_{\nu \to \infty} p^\nu(0) = \infty$$

となることもわかる。

(3) 上で構成した解の列において，十分大きい番号 l をもつ解をとれば，(2) でえた結論から，t のある値 t_0 において，補助命題 5.1 にいう与えられた k_1, p_1 にたいして，

$$k^l(t_0) = k_1, \quad k^l(T_l) = k^*,$$
$$p(T_l) = p_1, \quad \dot{k}^l(t) > 0, \quad \dot{p}^l(t) < 0$$
$$(0 \leqq t < T_l)$$

が成立することがあきらかである。ここであらためて，$k(t)$, $p(t)$ を次のように定義する。

$$k(t) = k^l(t + t_0), \quad p(t) = p^l(t + t_0).$$

また，$T = T_l - t_0$ と定める。この $k(t)$, $p(t)$ が求める解であることは簡単に確かめられる。(*q. e. d.*)

補助命題 5.2 の証明　この証明は 2 段階にわけておこなう[16]。

(1) 任意の feasible な径路について，$c = f(k) - \gamma k - \dot{k}$ であるから，$U = U(c) = U(f(k) - \gamma k - \dot{k})$ を k と $\dot{k}$ の関数とみて，$k = k^1$, $\dot{k} = \dot{k}^1$ のまわりに 2 次の項まで展開すれば次のようになる。

$$U(c^2) - U(c^1) = \left\{(k^2 - k^1)\frac{\partial}{\partial k} + (\dot{k}^2 - \dot{k}^1)\frac{\partial}{\partial \dot{k}}\right\} U(c^1)$$
$$+ \frac{1}{2}\left\{(k^2 - k^1)\frac{\partial}{\partial k} + (\dot{k}^2 - \dot{k}^1)\frac{\partial}{\partial \dot{k}}\right\}^2 U(c_\theta) \quad \cdots\cdots (8.1)$$

ただし，$c^1 = f(k^1) - \gamma k^1 - \dot{k}^1$, $c^2 = f(k^2) - \gamma k^2 - \dot{k}^2$,

$$c_\theta = f(k^1 + \theta_1(k^2 - k^1)) + \gamma\{k^1 + \theta_1(k^2 - k^1)\} + \{\dot{k}^1 + \theta_2(\dot{k}^2 - \dot{k}^1)\} \quad (0 \leqq \theta_1 \leqq 1, \ 0 \leqq \theta_2 \leqq 1)$$

ところで，(8.1) の右辺第 2 項は，$k^1 \gtrless k^2$ かまたは $\dot{k}^1 \gtrless \dot{k}^2$ であるかぎりつねに負値をとる t の連続関数である。なぜならば，この 2 次形式の行列：

16) この証明の主要部分は，イナガキ〔4〕, pp. 106-107 において最初に示された。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial k^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial k \partial \dot{k}} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial k \partial \dot{k}} & \frac{\partial^2 U}{\partial \dot{k}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U''(f'-\gamma)^2 + U'f'' & -U''(f'-\gamma) \\ -U''(f'-\gamma) & U'' \end{pmatrix}$$

が負値行列であるからである。つまり，(8.1) の右辺第2項を $m=m(t)$ と書くならば，$m(t)$ $\leqq 0$ であり，とくに $k^1(t) \fallingdotseq k^2(t)$ なる t については $m(t)<0$ となる。定理の前提から，小さい $t(>0)$ の値にたいしては，$m(t)<0$ となることがわかる。

(8.1) の両辺に $e^{-\mu t}$ を乗じたものを 0 から T まで積分すれば，次のかたちになる。

$$\begin{aligned} \int_0^T (U(c^2)-U(c^1))e^{-\mu t}dt &= \int_0^T \left\{(k^2-k^1)\frac{\partial}{\partial k}+(\dot{k}^2-\dot{k}^1)\frac{\partial}{\partial \dot{k}}\right\} U(c^1)\ e^{-\mu t}dt + \int_0^T m(t)e^{-\mu t}dt \\ &= \int_0^T (f'(k^1)-\gamma)(k^2-k^1)U'(c^1)e^{-\mu t}dt - \int_0^T (\dot{k}^2-\dot{k}^1)U'(c^1)e^{-\mu t}dt \\ &\quad + \int_0^T m(t)e^{-\mu t}dt \end{aligned}$$

右辺の第2項を部分積分し，$p^1=U'(c^1)$，$\dot{p}^1=\dot{U}'(c^1)$，および $\omega=\gamma+\mu$ という関係に注目すれば，次の関係が成立することがわかる。

$$\begin{aligned} \int_0^T (U(c^2)-U(c^1))e^{-\mu t}dt &= \int_0^T (k^2-k^1)\left(\frac{\dot{p}^1}{p^1}+f'(k^1)-\omega\right)p^1 e^{-\mu t}dt \\ &\quad -(k^2-k^1)p^1 e^{-\mu t}\Big|_0^T + \int_0^T m(t)dt \qquad \cdots\cdots(8.2) \end{aligned}$$

(k^1, p^1) がポントリャーギン径路であることから，右辺第1項はゼロとなり，また右辺の最後の項は負であることから，結局，

$$\int_0^T (U(c^2)-U(c^1))e^{-\mu t}dt < -(k^2-k^1)p^1 e^{-\mu t}\Big|_0^T \qquad \cdots\cdots(8.3)$$

となる。

(2) 補助命題5.2が否定されるとしよう。$t=T$ において，$k^1(T)=k^2(T)$ $(T>0)$ となるならば，(8.3) から，

$$\int_0^T (U(c^2)-U(c^1))e^{-\mu t}dt < 0$$

となる。ここで，k^1 と k^2 を入れ換えて最初からの推論を繰り返し，上の関係と組み合せれば，

$$0 > \int_0^T (U(c^1)-U(c^2))e^{-\mu t}dt = -\int_0^T (U(c^2)-U(c^1))e^{-\mu t}dt > 0$$

となり，これはあきらかに矛盾である。したがって命題の前半は証明された。次に，命題の後半を否定し，$\lim_{t\to\infty} k^1(t)=\lim_{t\to\infty} k^2(t)=$ 有限値 $\fallingdotseq k_+$ であるとしてみる。(4.9) から，k^1 が収束する以上，十分大きな t にたいして p^1 は単調な動きをすることがわかる。(4.6) の第1式で $k=k^1$ としたものを考えよう。もし，$p^1\to\infty$ ならば，k^1 の収束性から，この式の右辺と左辺は収束し，$\dot{k}^1\to 0$，$k^1\to k_+$ がでてくる。これは上の前提に反するから，p^1 は有限値に収束していなければならない。このことから，(8.2) において T を大ならしめるとき，その右辺第2

項は任意に小さくなる。したがって k^1 のポントリャーギン最適性とあわせて,

$$\int_0^T (U(c^2)-U(c^1))e^{-\mu t}dt < 0$$

が成立する。k^2 もまたポントリャーギン径路であることを考えれば，全く同じ推論によって

$$\int_0^T (U(c^1)-U(c^2))e^{-\mu t}dt < 0$$

となり，これは矛盾である。したがって補助命題の後半が証明された。(*q. e. d.*)

参 考 文 献

〔1〕 Arrow, K. J. and M. Kurz, "Optimal Growth with Irreversible Investment in a Ramsey Model", *Econometrica, Mar.*, 1970.

〔2〕 Arrow, K. J. and M. Kurz, *Public Investment, the Rate of Return, and Optimal Fiscal Policy*, 1970.

〔3〕 Halkin, H. "Mathematical Foundations of of System Optimization", *Topics in Optimization*, edited by G. Leitmann, 1967.

〔4〕 Inagaki, M. *Optimal Economic Growth*, 1970.

〔5〕 Meade, J. E., A Neo-Classical Theory of Economic Growth, 1961.

〔6〕 坂口　実『数理計画法』培風館，1970.