モンテカルロ法によるCFRP 直交積層板のトランスバースクラック進展解析

Onodera, Sota
Department of Aerospace Engineering, Tohoku University : Graduate Student

Okabe, Tomonaga
Department of Aerospace Engineering, Tohoku University : Professor

Nagumo, Yoshiko
Department of Aerospace Engineering, Tohoku University : Assistant Professor

出版情報：Journal of the Japan Society for Composite Materials. 43 (4), pp.124-132, 2017-07-15. The Japan Society for Composite Materials

原稿種類：研究論文

題目：モンテカルロ法による CFRP 直交積層板のトランスバースクラック進展解析
(Prediction of the progression of transverse cracking in carbon fiber-reinforced plastic cross-ply laminates using Monte Carlo method)

氏名および会員資格：
小野寺壮太・学生会員 (Sota ONODERA) *1
南雲佳子・正会員 (Yoshiko NAGUMO) *2
岡部朋永・正会員 (Tomonaga OKABE) *3

勤務先および職名：
*1~*3 東北大学大学院工学研究科航空宇宙工学専攻
(980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-01)
Department of Aerospace Engineering, Tohoku University
*1 大学院生 Graduate Student
*2 助教 Assistant Professor
*3 教授 Professor

連絡先：南雲佳子
〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-01
東北大学大学院　工学研究科　航空宇宙工学専攻
TEL：022-795-6932　FAX：022-795-6983
E-mail：nagumo@plum.mech.tohoku.ac.jp

使用ソフト：Microsoft Word 2016
使用機種：Microsoft Windows 7 Professional

邦文要旨

本論文では，90°層を含む積層板におけるトランスバースクラック挙動のモデル化を行った．トランスバースクラックを有する単層板の応力分布を熱残留ひずみの影響を考慮できるように拡張した応力分布(RSF)モデルにより定式化し，定式化した応力分布によりトランスバースクラック発生に伴うエネルギー解放率を求めた．また，比較のために連続体損傷力学(CDM)モデルによるエネルギー解放率の定式化も行った．その後，臨界応力およびエネルギー解放率に基づく応力クライテリオンおよびエネルギークライテリオンを設けてモンテカルロ法によるトランスバースクラック進展解析を実施し，CFRP 直交積層板のトランスバースクラック挙動を調べた.その結果，本論文で提案した RSF モデルおよび CDM モデルは，実験値を良く表現できることが示された．本論文で提案した解析モデルは 90°層を含む積層板に対して適用が可能である.

(370 文字/400 字以内)

英文アブストラクト

In this study, the prediction of the progression of transverse cracking in laminates, including 90° plies, was discussed. A refined stress field (RSF) model was formulated that takes into account the thermal residual strain for plies, including transverse cracks, and the energy release rate associated with transverse cracking was calculated using this RSF model. For comparison, the energy release rate based on a continuum damage mechanics (CDM) model was also formulated. Next, the prediction for the progression of transverse cracking in carbon fiber-reinforced plastic (CFRP) cross-ply laminates, including 90° plies, based on both stress and energy criteria was implemented using Monte Carlo methods. The results showed that the RSF and CDM models proposed in this paper can predict the experiment results for the relationship between the transverse crack density and ply strain in 90° plies. The models presented in this paper can potentially be applied to any arbitrary laminate that includes 90° plies.

Key words: CFRP, composite laminate, transverse crack, energy release late, Monte Carlo method

モンテカルロ法による CFRP 直交積層板のトランスバースクラック進展解析

Prediction of the progression of transverse cracking in carbon fiber-reinforced plastic cross-ply laminates using Monte Carlo method

小野寺壮太，南雲佳子，岡部朋永

1 諸 言

近年，炭素繊維強化プラスチック(CFRP)を初めとする繊維強化プラスチックは，優れた比強度と比剛性を有することから，特に軽量化が重視される航空・宇宙分野で実用化されてきている．実用的には，一方向繊維強化プラスチックが持つ強い異方性を利用して，これを重ね合わせて所定の力学特性を有する積層板として用いられる．積層板には，一方向繊維強化材を荷重方向に対して 0° および 90° 方向に重ね合わせた直交積層板，$\pm\theta^{\circ}$ に重ね合わせた斜交積層板，そして面内の弾性特性において等方性を有する擬似等方積層板などがある．これら種々の積層構成を有する積層板を実際の構造部材に使用するためには，詳細な破壊プロセスを知ることが必要不可欠である．繊維強化複合材料を用いた積層板は，特有の破壊プロセスを有しており，特に最も初期に起こるトランスバースク

ラック（繊維に対して平行方向のき裂）の発生によって応力の再分布が起こってクラック先端の応力集中が層間はく離や繊維破断を生じる要因となる．このため，トランスバースクラックの生じた積層板の力学的挙動を把握することはとても重要である．

トランスバースクラックを有する積層板に対して，様々な研究がなされている[1)-29)]．Pagano ら[1)]は，ある一定の熱力学的負荷を受けているときにトランスバースクラックが無制限に伝播する状態(steady-state cracking)を仮定して定式化した解析モデルにより，積層構成 $[0/90_n/0]$ (n=1, 2, 3, 4)の積層板について初期き裂発生応力を算出し，実験値との比較を行った．彼らの研究によると，試験片幅方向に貫通き裂が生成される場合，解析モデルと実験結果は一致することが示されている.また，彼らは McCartney[14,15)], Dvorak ら[13)]のモデルとの比較も行っている．

Wang ら[2)]は，トランスバースクラックが 90°層の潜在欠陥が成長して発生するとして，有限要素法によってトランスバースクラック進展に伴うエネルギー解放率を計算し，有効欠陥長さおよびその間隔の分布を仮定してモンテカルロシミュレーションを行い，応力とトランスバースクラック密度の関係を得た．

Gudmundson と Zang[7)]は，トランスバースクラックを有する複合材料積層板の熱弾性特性を予測する解析モデル

を提案している．彼らのモデルでは，トランスバースクラックによる平均き裂開口変位が等方弾性体のものと近似できると仮定し，トランスバースクラックが発生した層のひずみ増分を算出している．また，彼らはこの手法を古典積層板理論へ組み込んだことによって，任意の積層構成を持つ積層板のトランスバースクラック密度と力学的特性の関係を解析的に予測することができる．Kobayashi ら[8)]は，Gudmundson と Zang のモデルを用いてトランスバースクラックのエネルギー解放率を導出し，擬似等方積層板のトランスバースクラック形成の予測を行った．Gudmundson と Zang のモデルでは，積層板の各層内の平均応力分布を計算することができるが，層内の局所的な応力分布を計算することができない．

Okabe ら[10)]は，連続体力学的手法を用いて，トランスバースクラックを有する任意の積層構成を有する複合材料積層板の剛性低下予測モデルをクラック密度の関数として定式化した．そして，先行研究の実験及び有限要素解析結果と比較して提案されたモデルが有効であることを示した．Okabe らのモデルでは，Gudmundson と Zang のモデルでは計算できないトランスバースクラックを有する層内の局所的な応力分布を計算することができる．

本論文では，90°層を含む積層板におけるトランスバースクラック挙動のモデル化を行った．まず，トランスバースクラックを有する単層板の応力分布を Okabe ら[10)]

のモデルで熱残留ひずみの影響を考慮できるように拡張した応力分布(RSF : Refined stress field)モデルにより定式化した．そして，定式化した応力分布によりトランスバースクラック発生に伴うエネルギー解放率を求めた．また，比較のために，連続体損傷力学(CDM : Continuum damage model)モデルによるエネルギー解放率の定式化も行った．その後，臨界応力およびエネルギー解放率に基づく応力クライテリオンおよびエネルギークライテリオンを設けることにより，定式化した層内の応力分布およびエネルギー解放率を用いてトランスバースクラック挙動を調べた．最後に，定式化したモデルを用いて直交積層板の初期き裂応力およびトランスバースクラック密度―実ひずみ関係について先行研究の実験および解析結果[1),9)]と比較して本モデルの有効性を評価した．また，本論文では直交積層板についての解析結果を示したが，本論文で提案する解析は90°層を含む積層板に対して適用が可能である．

2 力学モデル

2.1 トランスバースクラックを有する単層板の応力分布

トランスバースクラックを有する単層板の応力分布を，Okabeら[10)]のモデルで熱残留ひずみの影響を考慮できるように拡張した応力分布(RSF)モデルの定式化について述べる．モデルを確立する上で Fig. 1 (a)のようなトラン

スバースクラックを有する単層板を考え，(i) 単層板の厚さは薄い，(ii) 損傷は主にトランスバースクラックによるき裂からなる，ことを仮定した．仮定(i)により，単層板の曲げ変形は考慮せず, 仮定(ii)により層間はく離による損傷を無視した．Fig. 1 (b)は，両端にトランスバースクラックを有する単層板内の代表体積要素である．x 軸は厚さ方向，y 軸は繊維垂直方向とする．クラック間隔を $2l$, 単層板の厚さを $t_{\text{ply}} = 2t$とする．代表体積要素(単層板)は y 方向にトランスバースクラックによる開口変位量を考慮した実ひずみ ε_y^pだけ変形するとする．仮定として，トンネル状のクラック表面を有するトランスバースクラックを考え，トランスバースクラック表面は y 軸に対して対称であると仮定する．また，隣接する層内にはトランスバースクラックは進展しないものとする．問題の対称性により，$0 \le x \le t$, $0 \le y \le l$の領域を考えることとする．

Fig. 1 (b)の等方面内($x-y$平面)で平面熱ひずみ問題を考える．x,y方向の変位をそれぞれu,vとする．熱残留ひずみを考慮した場合，Hooke の法則により等方面内のひずみと応力の関係は次式のようになる．

$$\varepsilon_x^M = \frac{\partial u^M}{\partial x} = \varepsilon_x - \alpha_2 \Delta T = C_1 \sigma_x - C_2 \sigma_y \tag{1}$$

$$\varepsilon_y^M = \frac{\partial v^M}{\partial y} = \varepsilon_y - \alpha_2 \Delta T = C_1 \sigma_y - C_2 \sigma_x \tag{2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G_{23}} = \frac{\partial v^M}{\partial x} + \frac{\partial u^M}{\partial y} \approx \frac{\partial v^M}{\partial x} \tag{3}$$

ここで，定数C_1, C_2は

$$\mathrm{C}_1 = \frac{1 - \nu_{21}\nu_{12}}{E_2}, C_2 = \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{12}}{E_2} \tag{4}$$

とおいた．σ_x, σ_yはそれぞれx, y方向の応力，$\varepsilon_x, \varepsilon_y$はそれぞれ熱ひずみの影響を含む$x, y$方向のひずみ，$\varepsilon_x^M, \varepsilon_y^M$および$u^M, v^M$はそれぞれ熱ひずみの影響を含まない機械ひずみおよび変位，σ_{xy}はせん断応力，γ_{xy}は工学せん断ひずみ，ΔTは応力フリー温度T_{sf}から対象としている温度T間での温度差($\Delta T = T - T_{sf}$)である．また，E_1は長手方向ヤング率，E_2は横方向ヤング率，G_{23}は面外せん断弾性係数，α_2は横方向熱膨張係数，ν_{12}は面内ポアソン比，ν_{23}は面外ポアソン比，$\nu_{21} = E_2\nu_{12}/E_1$であり，添え字 1，2，3 は Fig. 1 (a) で示した方向である．式(3)において，変位u^Mのy方向勾配は非常に小さいと仮定した．また，ひずみε_x^Mとε_y^Mの間には以下の関係が成り立つとする．

$$\varepsilon_x^M = a\varepsilon_y^M \tag{5}$$

ここで，aは比例定数であり，平衡方程式を満たすように決定される．式(1)，(2)，(5)より応力σ_x, σ_yは以下のようになる．

$$\sigma_x = \frac{aC_1 + C_2}{C_1^2 - C_2^2}\frac{\partial v^M}{\partial y} \tag{6}$$

$$\sigma_y = \frac{C_1 + aC_2}{C_1^2 - C_2^2}\frac{\partial v^M}{\partial y} \tag{7}$$

また，式(3)より，σ_{xy}は以下のようになる．

$$\sigma_{xy} = G_{23}\frac{\partial v^M}{\partial x} \tag{8}$$

式(6)-(8)を平衡方程式

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \tag{10}$$

へ代入することにより，比例定数aおよび変位v^Mに関するラプラス方程式が得られる．

$$a = -\{C_2 + G_{23}(C_1^2 - C_2^2)\}/C_1 \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 v^M}{\partial x^2} + \lambda^2\frac{\partial^2 v^M}{\partial y^2} = 0; \lambda = \sqrt{\frac{C_1 + aC_2}{G_{23}(C_1^2 - C_2^2)}} \tag{12}$$

変位v^Mを決定するために，ラプラス方程式(12)の境界条件を以下のように与える．

$$v^M = 0 \text{ on } y = 0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial v^M}{\partial y} = 0 \text{ on } y = l \tag{14}$$

$$\frac{\partial v^M}{\partial x} = 0 \text{ on } x = 0 \tag{15}$$

$$v^M = \left\{\varepsilon_y^p + (\alpha_c - \alpha_2)\Delta T\right\}y \text{ on } x = t \tag{16}$$

ここで，α_cは積層板の0°方向の熱膨張係数である．式(13)では$y = 0$で変位vはないと仮定している．式(14)は，クラック表面($y = l$)において応力$\sigma_y = 0$と考え，式(7)より定めた．式(15)は，単層板の中心線上($x = 0$)でせん断変形が生じない($\sigma_{xy} = 0$)と仮定して，式(8)より定めた．また，層界面での変位分布を与える式(16)は既存の研究例[25)]に従い，トランスバースクラックに関係なく隣接する層は実ひずみε_y^pと熱残留ひずみ$(\alpha_c - \alpha_2)\Delta T$で一様に変形していると考えた．上記のように境界条件を与えて変数分離法を用いると，境界条件(13)-(16)を満たすラプラス方程式(12)の

解 v^Mは以下のように書くことができる．

$$v^M = \frac{8l}{\pi^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\frac{\cosh\left[(2n-1)\pi\lambda x/(2l)\right]}{\cosh\left[(2n-1)\pi\lambda t/(2l)\right]}\sin\left[\frac{(2n-1)\pi y}{2l}\right]\right)(\varepsilon_y^p + \varepsilon_{th}) \tag{17}$$

ここで，$\varepsilon_{th} = (\alpha_c - \alpha_2)\Delta T$とおいた．上式を式(6)-(8)に代入することで，次式で示される代表体積要素内の応力分布を得る．

$$\sigma_x(x,y) = \frac{4}{\pi}\frac{aC_1 + C_2}{C_1^2 - C_2^2}f(x,y)(\varepsilon_y^p + \varepsilon_{th}) \tag{18}$$

$$\sigma_y(x,y) = \frac{4}{\pi}\frac{C_1 + aC_2}{C_1^2 - C_2^2}f(x,y)(\varepsilon_y^p + \varepsilon_{th}) \tag{19}$$

$$\sigma_{xy}(x,y) = \frac{4}{\pi}G_{23}\lambda g(x,y)(\varepsilon_y^p + \varepsilon_{th}) \tag{20}$$

ただし $f(x,y)$, $g(x,y)$は次式のようになる．

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\frac{\cosh\left[(2n-1)\pi\lambda x/(2l)\right]}{\cosh\left[(2n-1)\pi\lambda t/(2l)\right]}\cos\left[\frac{(2n-1)\pi y}{2l}\right] \tag{21}$$

$$g(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\frac{\sinh\left[(2n-1)\pi\lambda x/(2l)\right]}{\cosh\left[(2n-1)\pi\lambda t/(2l)\right]}\sin\left[\frac{(2n-1)\pi y}{2l}\right] \tag{22}$$

2.2 RSF モデルによるエネルギー解放率の定式化

ここでは，90°層におけるトランスバースクラックの発生を考え，2.1 節で Okabe ら [10]のモデルに熱残留ひずみの影響を考慮した応力分布(RSF)モデルを用いてエネルギー解放率の定式化を行う．Fig. 2 のように，もともと存在しているクラック間で新しいクラックが進展するときを考え，エネルギー解放率 Gを次のように定義する．

$$G = \frac{U(l) - [U(l_1) + U(l_2)]}{2t} \tag{23}$$

ここで，$U(l)$は Fig. 1(b)に示すクラック間隔 $2l$の代表体積

要素が蓄えているひずみエネルギーである．このひずみエネルギー$U(l)$は，次式により表される．

$$U(l) = \frac{1}{2}\int_V \left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_{xy}\gamma_{xy}\right) dV \tag{24}$$

ただし，領域Vは Fig. 1 (b)の代表体積要素内部とする．この式に，熱残留ひずみを考慮した Hooke の法則を表す式(1)-(3)，および代表体積要素内の応力分布を表す式(18)-(20)を代入すると，ひずみエネルギーは以下のように表すことができる．

$$U(l) = \int_0^t \left\{ \int_0^l \left(A\{f(x,y)\}^2 \left(\varepsilon_y^p + \varepsilon_{th}\right)^2 + B\{g(x,y)\}^2 \left(\varepsilon_y^p + \varepsilon_{th}\right)^2 + Cf(x,y)(\varepsilon_y^p + \varepsilon_{th}) \right) dy \right\} dx \tag{25}$$

ただし，A，B，Cは定数であり，

$$A = \frac{32}{\pi^2} \frac{(1+a^2)C_1 + 2aC_2}{C_1^2 - C_2^2} \tag{26}$$

$$B = \frac{32}{\pi^2} G_{23}\lambda^2 \tag{27}$$

$$C = \frac{8}{\pi}\alpha_2 \Delta T \frac{1+a}{C_1 - C_2} \tag{28}$$

である．式(25)-(28)を式(23)に代入することにより，エネルギー解放率を計算することができる．ここで，式(25)を解析的に解くのは難しいため，ガウスの数値積分法を用いて計算を行った．

2.3 CDM モデルによるエネルギー解放率の定式化

次に，RSF モデルにより定式化したエネルギー解放率

との比較のために連続体損傷力学(CDM)モデルによるエネルギー解放率の定式化も行った．CDMモデルを用いると，Fig 1(b)のクラック間隔$2l$の代表体積要素が蓄えるひずみエネルギー$U(l)$は次式のように表すことができる．

$$U(l) = \frac{1}{2} \cdot E_2(1 - d_2(l))\left(\varepsilon_y^p\right)^2 \cdot 4tl \qquad (29)$$

ここで，$d_2(l)$は Fig. 1(a)で示した2方向（繊維垂直方向）の損傷変数である．Okabeら[10]によると，GudmundsonとZang[7]のモデルにより定式化した損傷変数d_2は，次式のように表すことができる．

$$d_2(l) = \frac{\pi}{2}\frac{tE_1(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{E_1 - E_2\nu_{12}^2}\frac{1}{l}\sum_{j=1}^{10}\frac{a_j}{(1 + t/l)^j} \qquad (30)$$

ここで，定数列a_jは Table 1のように与えられる．以上より，連続体力学的手法を用いると，式(29)，(30)を式(23)へ代入することによりエネルギー解放率を計算することができる．

3 モンテカルロ法によるトランスバースクラック進展解析手法

臨界応力に基づいた応力クライテリオンおよび臨界エネルギー解放率に基づいたエネルギークライテリオンを用いてトランスバースクラック進展解析を行った．トランスバースクラック進展解析手法について説明する．まず，Fig. 3に示すように，長さLの解析領域について90°層をn個の要素に離散化する．ここで，横方向強度は，材料

内に発生する初期欠陥により異なると考えられる．したがって，各要素i $(i = 1,2,\ldots,n)$の強度分布R_iが以下のようなWeibull分布に従うと仮定して，要素iの横方向強度F_iを計算した．

$$R_i = 1 - e^{-\frac{\Delta L}{L_0}\left(\frac{F_i}{\sigma_0}\right)^m} \tag{31}$$

ここで，L_0はゲージ長さ，ΔLは要素間隔，σ_0は横方向引張強度，mは形状パラメータである．R_iは各要素に擬似乱数を割り当てることにより決定し，式(31)より各要素の強度F_iを計算した．擬似乱数は*Mathematica* 9.0[30]により生成したものを用いた．また，本研究ではmをフィッティングパラメータとした．その後，実ひずみε_y^pを与えて以下の応力クライテリオンを満たした要素にマイクロクラックが発生すると仮定した．

$$\sigma_y(0,y) > F_i \tag{32}$$

ここで，$\sigma_y(0,y)$は式(19)にて与えられたRSFモデルの$x = 0$におけるy方向応力σ_yである．

次に，実ひずみがε_y^pのときに発生しているマイクロクラックのうち一つがトランスバースクラックへ進展すると仮定する．そして，マイクロクラックが発生している要素のうちでトランスバースクラック進展に伴うエネルギー解放率が最大となる要素を探し，その要素が以下のエネルギークライテリオンを満たした場合，その要素に発生しているマイクロクラックがトランスバースクラックへ進展するとした．

$$G > G_c \tag{33}$$

ここで，G_cは臨界エネルギー解放率である．また，Gはエネルギー解放率であり，RSF モデルにより定式化した式あるいは CDM モデルにより定式化した式により計算した．

上記の二つのクライテリオンにより，トランスバースクラック進展解析を行った．Fig. 4 に解析フローチャートを示す．

4 結果および考察

4.1 積層板初期き裂発生応力

トランスバースクラック進展解析を行う前に，定式化した力学モデルを用いて積層板の初期き裂発生応力を求めて Pagano ら [1)]の実験および解析結果と比較を行った．積層板の材料は IM7/5250-4 とし，解析に使用した材料物性値を Table 1 に示す．積層構成[0/90$_n$/0] (n=1,2,3,4)の積層板に対して 90°層にトランスバースクラックによる初期き裂が発生するとして解析を行った．なお，ここではクラック間隔は等間隔($l_1 = l_2 = l/2$)であると仮定し，トランスバースクラック密度を$\rho = 1/l$と定義した．積層板の初期き裂発生応力は，以下のような手順で求めた．

(1)　実ひずみε_y^pを負荷したときのエネルギー解放率Gをトランスバースクラック密度ρの関数として計算し，

エネルギー解放率の最大値が臨界エネルギー解放率G_cとなるときのトランスバースクラック密度ρ_cと実ひずみ$(\varepsilon_y^p)_c$を求める．

(2) Okabeら[10]が定式化した剛性低下モデルによりクラック密度ρ_cにおける積層板の有効コンプライアンス$\bar{\boldsymbol{C}}$を求め，構成則を用いて$(\varepsilon_y^p)_c$のときに積層板0°方向に負荷される応力σ_cを求める．この応力σ_cを積層板初期き裂発生応力とする．

Fig. 5に上記の方法で計算した積層板初期き裂発生応力σ_cと90°層厚さの関係を示す．Paganoら[1]の実験結果に関しては，トランスバースクラックが試験片幅方向に貫通したときの実験データを示した．RSFモデルによって計算された積層板初期き裂応力は，どの解析モデルよりも大きい値となった．これは，RSFモデルではトランスバースクラックが発生している層の界面は境界条件(16)により一定のひずみとなっており，トランスバースクラック発生による層界面のひずみ分布の変化を考慮していないからだと考えられる．また，RSFモデルと実験値を比較すると，90°層の厚さが厚くなるほど，両者の値は近くなった．CDMモデルにより計算した積層板き裂応力については，どのモデルよりも小さい値となった．また，これらのモデルの中でRSFモデルは積層板き裂発生応力の上限値を，CDMモデルは下限値を与えることが確認でき

る．

4.2 トランスバースクラック進展解析

ここでは，2 章で定式化した力学モデルおよび 3 章で述べた方法によりトランスバースクラックの進展解析を実施し，小林[9)]の実験結果との比較を行った．材料は，T800H/3900-2 および G40-800/5260 を用いた直交積層板について解析を行った．Table 3 に使用した物性値を示す．ここで，形状パラメータ m の値は，小林[9)]が実験より取得した $[0/90]_s$ 積層板のトランスバースクラック密度―実ひずみ関係と RSF モデルによる解析結果をフィッティングすることにより決定し，T800H/3900-2 では 10.5，G40-800/5260 では 7.5 を用いた．また，解析領域の長さ L は 50mm とし，要素の数 n は 8000 とした．要素間隔 ΔL は解析領域の長さ L を要素数 n で割ることによって計算し，$\Delta L=6.25\times10^{-3}$mm とした．トランスバースクラック密度はトランスバースクラックの本数を解析領域の長さ L で割って算出した．

まず，T800H/3900-2 を用いた $[0/90]_s$ 積層板の解析結果について述べる．Fig. 6 は，RSF モデルにより計算した実ひずみ ε_y^p=1.08%および 1.2%のときの 90°層端面のトランスバースクラック分布を表している．Fig. 6 (a)では，マイクロクラックは 24 本，トランスバースクラックは 12 本，Fig. 6 (b)ではマイクロクラックは 33 本，トラン

スパースクラックは28本であった．Fig. 6のように，トランスバースクラックの位置に不自然な偏りは見られず，実ひずみが大きくなるにつれクラックがほぼ均一に分布することを確認した．Fig. 7は，3章で述べたモンテカルロ法により計算したトランスバースクラック密度と実ひずみの関係を示したグラフである．また，比較のためにFig. 7には小林[9)]の実験結果を示した．Fig. 7を見ると，RSFモデルおよびCDMモデルは実験結果とよく一致していることが分かる．初期き裂発生ひずみは，CDMモデルよりもRSFモデルのほうが高い値となっている．これは，Fig. 5の結果と一致している．また，Fig. 7からCDMモデルおよびRSFモデルの挙動は，トランスバースクラック密度が大きい範囲ではほぼ一致した．このことを説明するために，Fig. 8にクラック間隔を等間隔と仮定($l_1 = l_2 = l/2$)し，トランスバースクラック密度を$\rho = 1/l$と表したときの実ひずみε_y^p=1.0%におけるエネルギー解放率Gとトランスバースクラック密度ρの関係を示す．Fig. 8を見ると，ρが小さい範囲では，RSFよりもCDMモデルのほうがエネルギー解放率が大きいが，ρが大きい範囲では両モデルはほぼ一致する．このため，Fig. 7でトランスバースクラック密度が大きい範囲では両モデルの挙動はほぼ一致する．

次に，G40-800/5260を用いた積層板の解析結果について述べる．Fig. 9に$[0/90]_s$積層板，Fig. 10に$[0/90_2]_s$積

層板のモンテカルロ法により計算したトランスバースクラック密度と実ひずみの関係を示す．比較のために Fig. 9, 10 にも小林[9)]による実験結果を示してある．Fig. 7 のときと同様に，Fig. 9 では，CDM モデルが初期き裂発生ひずみの下限値，RSF モデルが上限値を与え，またトランスバースクラック密度が大きいほど CDM モデルと RSF モデルはほぼ等しい挙動を示した．Fig. 10 では，実験値は両モデルよりも高い値となった．しかし，Fig. 9, 10 より，両解析モデルと実験値は90°層の厚さによらず良く一致しており，この解析の妥当性を示すものであると考えられる． さらに，RSF モデルに関して Fig. 9 と Fig. 10 を比較すると，$[0/90]_s$ よりも90°層の厚さが厚い $[0/90_2]_s$ のほうが初期き裂発生ひずみの予測値と実験値が近い値となった．このことは，Fig. 5 の結果と一致する．

ここでは，直交積層板についての解析結果を示したが，本論文で提案する解析は90°層を含む積層板に対して適用が可能である．また，Okabe ら[10)]の剛性低下モデルと組み合わせることにより，積層板の応力―ひずみ線図を予測することが可能となる．

5 結　言

本論文では，90°層を含む積層板におけるトランスバースクラック挙動のモデル化を行った．まず，トランスバースクラックを有する単層板の応力分布を Okabe ら[10)]

のモデルで熱残留ひずみの影響を考慮できるように拡張した応力分布(RSF)モデルにより定式化し,定式化した応力分布によりトランスバースクラック発生に伴うエネルギー解放率を求めた．また，比較のために連続体損傷力学(CDM)モデルによるエネルギー解放率の定式化も行った．その後，臨界応力およびエネルギー解放率に基づく応力クライテリオンおよびエネルギークライテリオンを設けることにより，定式化した層内の応力分布およびエネルギー解放率を用いて CFRP 直交積層板のトランスバースクラック挙動を調べた．その結果，本論文で提案した RSF モデルおよび CDM モデルは，実験値を良く表現でき，提案した解析モデルの妥当性が示された．また，本論文では直交積層板についての解析結果を示したが，本論文で提案する解析は90°層を含む積層板に対して適用が可能である．

参考文献

1) N.J. Pagano, G.A. Schoeppner & R. Kim : *Comp. Sci. Tech.*, **58**,11 (1998), 1811-1825.

2) A. S. D. Wang, P. C. Chou & S.C. Lei : *J. Comp. Mater.*, **18**, 3 (1984), 239-254.

3) J.M. Berthelot & J. -F. Le Corre : *Comp. Sci. Tech.*, **60,** 14 (2000), 2659-2669.

4) J.M. Berthelot, *Appl. Mech. Rev.*, **56,** 1 (2003), 111-147.

5) J.M. Berthelot, P. Leblond, A. El Mahi & J. -F. Le Corre : *Comp. Part A*, **27**, 10 (1996), 989-1001.

6) N. Takeda, & S. Ogihara : *Comp. Sci. Tech.*, **52**, 2 (1994), 183-195.

7) P. Gudmundson & W. Zang : *Int. J. Solid Structures*, **30**, 23 (1993), 3211-3231.

8) S. Kobayashi, S. Ogihara, & N. Takeda : Adv. Comp. Mater., **9**, 4 (2000), 363-375.

9) 小林訓史 ：複合材料積層板におけるマトリックスクラック挙動の実験的評価及び損傷力学モデリング，東京大学博士論文，(1990)

10) T. Okabe, S. Onodera, Y. Kumagai & Y. Nagumo : *Int. J. Damage mech.* (in press).

11) G. J. Dvorak, N. Laws & M. Hejazi : *J. Comp. Mater.*, **19**, 3 (1985), 216-234.

12) G. J. Dvorak & N.Laws : *J. Comp. Mater.*, **21**, 4 (1987), 309-329.

13) G. J. Dvorak & N. Laws : *Eng. Frac. Mech.*, **25**, 5-6 (1986), 763-770.

14) McCartney, L. N. : *J. Mech. Phys. Solids*, **40**, 1 (1992), 27-68.

15) McCartney, L. N. : Stress transfer mechanics for ply cracks in general symmetric laminates, NPI, Report CMMT(A)50, National Physics Laboratory, Teddington,

UK, 1996.

16) J. A. Nairn : *J. Comp. Mater.*, **23**, 11 (1989), 1106-1129.

17) J. A. Nairn & S. Hu : *Int. J. Fract.,* **57**, 1 (1992), 1-24.

18) Y. Huang, J. Varna & R. Talreja : *Comp. Sci. Tech.*, **95**, (2014), 100-106.

19) 荻原慎二, 武田展雄, 小林訓史, 小林昭 : 材料, **47**, 1 (1998), 68-72.

20) 武田展雄 : 日本航空宇宙学会誌, **43**, 495 (1995), 245-253.

21) 武田展雄, 新妻秀規, 荻原慎二, 小林昭 : 材料システム, **14**, (1995), 73-78.

22) E. V. Iarve, M.R. Gurvich, D.H. Mollenhauer, C.A. Rose & C.G. Dávila : *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 88, 8 (2011), 749-773.

23) E.V. Iarve, S. Chellapilla & D. H. Mollenhauer : ICCM 15 Conference Proceedings, Durbon, S. Africa June 27-July 2, (2005).

24) M. R. Gurvich : *Comp. Sci. Tech.*, **59**, 11 (1999), 1701-1711.

25) J. W. Lee, D. H. Allen and C. E. Harris : *J. Comp. Mater.* , **23**, 12 (1989), 1273-1291.

26) S. Murakami : Continuum Damage Mechanics: A

Continuum Mechanics Approach to the Analysis of Damage and Fracture. Dordrecht Heidelberg London New York: Springer, (2012).

27) Y. Kanagawa, S. Murakami, Y. Liu, Q. Bai & K. Tanaka : *J. Soc. Mat. Sci., Japan* **45**, 2 (1996), 206-211.

28) Z.C. Xia, R.R. Carr & J.W. Hutchinson : *Acta Metall. Mater.*, **41**, 8 (1993), 2365-2376.

29) Z. Hashin : *Eng. Frac. Mech.*, **25**, 5-6 (1986), 771-778.

30) Wolfram Research, Inc., Mathematica, Version 9.0, Champaign, IL (2012).

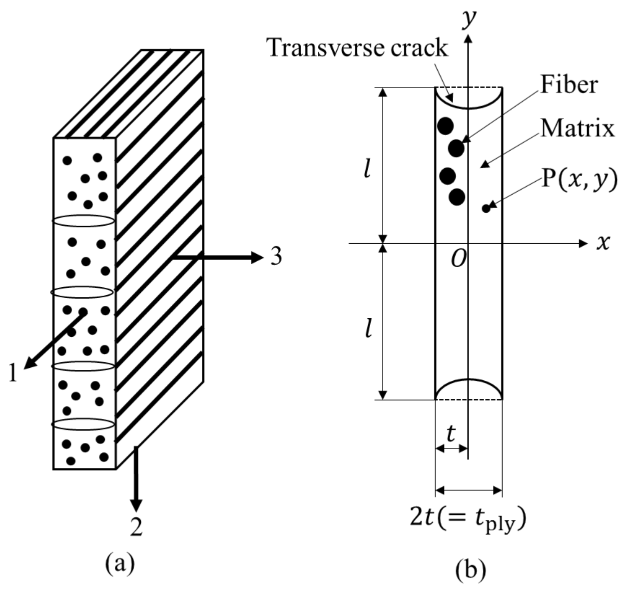

Fig. 1 Schematics of transverse crack model. (a) Ply including transverse crack, (b) Representative volume element.

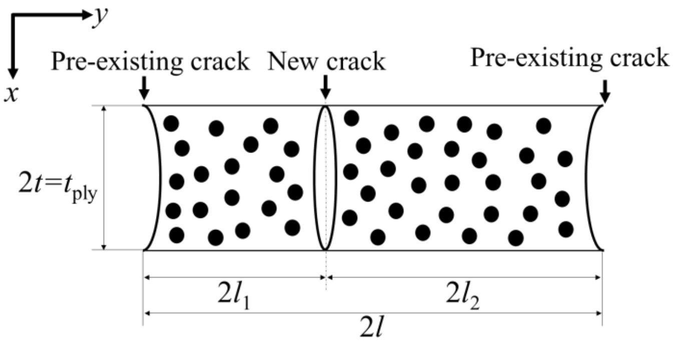

Fig. 2 The formation of a new crack between two pre-existing cracks.

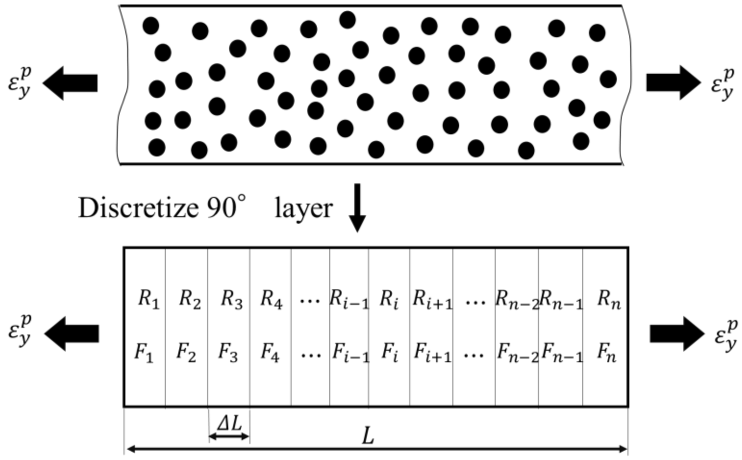

Fig. 3 Discretization of the 90° plies for distributed static transverse strength.

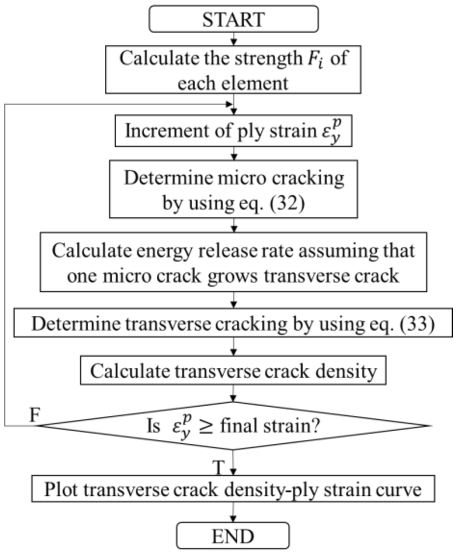

Fig. 4 A flow chart of the procedure implemented for the analysis of the progression of transverse cracking.

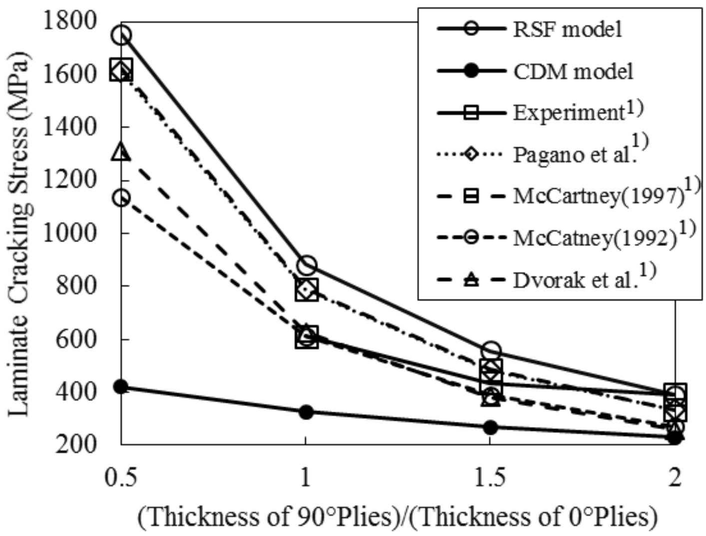

Fig. 5 Laminate cracking stress as a function of thickness of 90° plies / thickness of 0° plies.

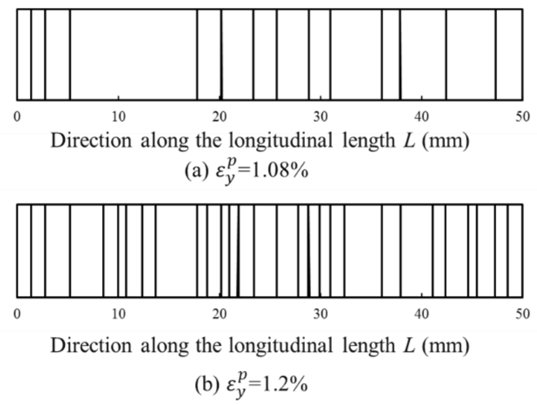

Fig. 6 Prediction of transverse crack distribution in the 90° ply for $[0/90]_s$ T800H/3900-2 laminate along the longitudinal length L using RSF model. Each vertical line represents one transverse crack: (a) under ε_y^p=1.08%, (b) under ε_y^p=1.2%.

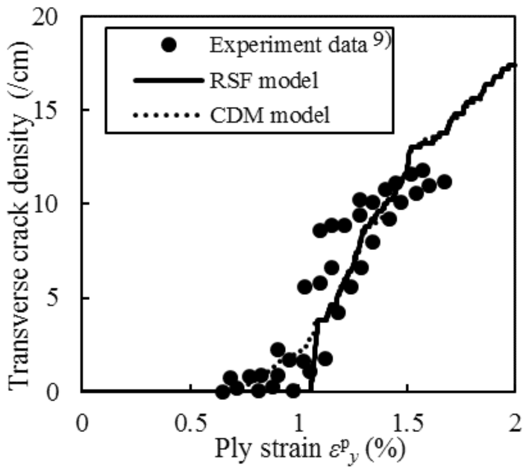

Fig. 7 Transverse crack density in the 90° ply for $[0/90]_s$ T800H/3900-2 laminate as a function of ply strain.

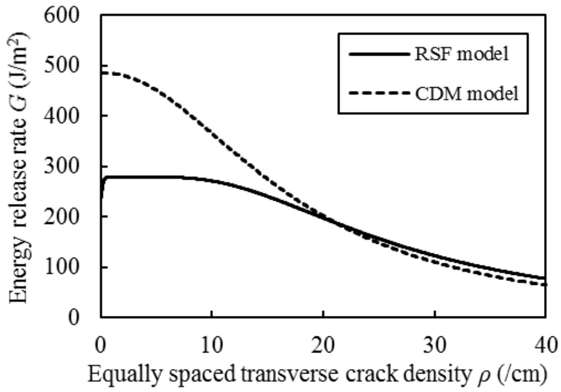

Fig. 8 Energy release rate associated with transverse cracking in 90° ply as a function of equally spaced transverse crack density for $[0/90]_s$ T800H/3900-2 laminate (ε_y^p =1.0%).

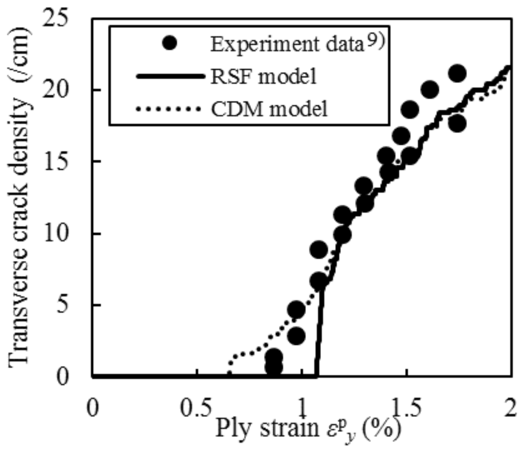

Fig. 9 Transverse crack density in the 90° ply for $[0/90]_s$ G40-800/5260 laminate as a function of ply strain.

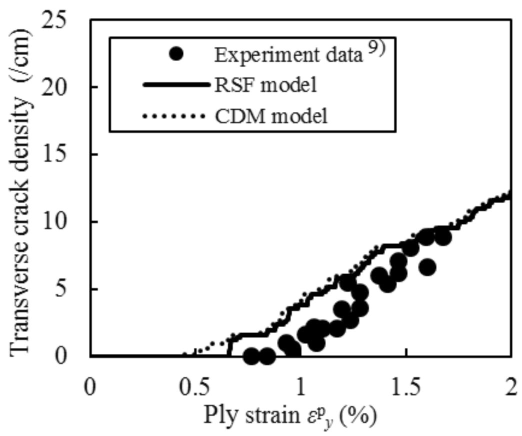

Fig. 10 Transverse crack density in the 90° ply for $[0/90_2]_s$ G40-800/5260 laminate as a function of ply strain.

Table 1 Numerical parameter a_j used in eqn. (30)[7].

j	a_j	j	a_j
1	0.63666	6	-33.09444
2	0.51806	7	74.32002
3	0.51695	8	-103.06411
4	-1.04897	9	73.60337
5	8.95572	10	-20.34326

Table 2 Material properties of IM7/5250-4.[1)]

Longitudinal Young's Modulus E_1 (GPa)	165.475
Transverse Young's Modulus E_2 (GPa)	10.342
In-Plane Poisson's Ratio ν_{12}	0.31
Out-of-Plane Poisson's Ratio ν_{23}	0.56
In-Plane Shear Modulus G_{12} (GPa)	5.7922
Longitudinal Thermal Expansion Coefficient α_1 (10^{-6}/℃)	0.45
Transverse Thermal Expansion Coefficient α_2 (10^{-6}/℃)	24.66
Stress Free Temperature T_f (℃)	180
Ambient Testing Temperature T (℃)	24
Ply thickness t_0 (mm)	0.127
Critical Energy Release Rate G_c (J/m^2)	225

Table 3 Material properties of T800H/3900-2 and G40-800/5260.[8,9]

	T800H/3900-2	G40-800/5260
Longitudinal Young's Modulus E_1 (GPa)	143.0	152.0
Transverse Young's Modulus E_2 (GPa)	7.99	10.0
In-Plane Poisson's Ratio ν_{12}	0.35	0.33
Out-of-Plane Poisson's Ratio ν_{23}	0.49	0.49
In-Plane Shear Modulus G_{12} (GPa)	3.96	6.94
Longitudinal Thermal Expansion Coefficient α_1 (10^{-6}/℃)	-1.5	-0.6
Transverse Thermal Expansion Coefficient α_2 (10^{-6}/℃)	34.3	36.0
Stress Free Temperature T_f (℃)	165	195
Ambient Testing Temperature T (℃)	25	25
Ply thickness t_{ply} (mm)	0.18	0.14
Gauge length L_0 (mm)	80	80
Critical Average Stress σ_0 (MPa)	72	75
Distribution Shape Constant m	10.5	7.5
Critical Energy Release Rate G_c (J/m^2)	300	330