部分観測可能なマルコフ連鎖での多段決定モデルについて : MTP_2の場合

中井, 達
九州大学経済学部 : 教授

https://doi.org/10.15017/4371075

出版情報：經濟學研究. 64 (5/6), pp.231-243, 1998-06-30. 九州大学経済学会

部分観測可能なマルコフ連鎖での多段決定モデルについて——MTP_2 の場合

中　井　　　達

1　部分観測可能なマルコフ決定過程

不完備情報の決定モデルを考えるとき，部分観測可能なマルコフ過程での動的決定過程として定式化することが多い。この部分観測可能なマルコフ連鎖では，状態に関する情報は状態空間上の確率分布で与えられることが多く，これらの確率分布を比較する必要がおきる。これらの情報を比較するためには，情報の間に何らかの順序を導入することは自然である。Nakai [6, 7, 10, 14] などにおいて，TP_2 (totally positivity of order two) として知られている尤度比を用いた半順序を導入し，この順序と多段決定モデルにおける最適政策をはじめとする不完備情報の動的決定過程の性質について考えた。このような，確率分布のあいだの順序関係については，Stoyan [18] などでも考えられている。ここでは，状態についての情報が，多変量確率変数によって得られるときに，情報と決定のあいだにどのような関係があるかを中心に考える。

第 2 節では，部分観測可能なマルコフ連鎖を考え，その状態に関する情報全体に，尤度比を用いて順序関係を導入する。さらに，状態についての情報は，それぞれの状態に依存する多変量の確率変数を観測することによって得られる。ここでは，学習のプロセスとして，ベイズの定理に従うとする。このとき，確率密度関数や推移確率行列について，いくつかの仮定をおき，それらの仮定のもとで，事前情報と事後情報の関係を考える。特に，ここで得られた性質は動的決定モデルを考えるときに必要な，基本的な性質である。また，それぞれの時点で観測する多変量確率変数の確率密度関数についての仮定は，TP_2 の概念を一般化した，MTP_2 (multivariate totally positivity of order two) と呼ばれる性質になる。また，この仮定のもとで，Holley [2]，Kemperman [5]，Preston [16]，Karlin and Rinott [3, 4] などで得られている性質を利用する。Brown and Solomon においても，TP_2 の考え方を用いた順序関係を [1] で扱い，Nakai [6, 7, 10, 14, 15] では，それぞれの期で観測できる確率変数が，独立な確率変数となっている場合を扱っている。ここで得られた結果は，それらの結果の一般化となっていると言える。

第 3 節では，第 2 節で扱った部分観測可能なマルコフ連鎖の上での動的決定過程の簡単な例として，最適停止モデルの性質をみる。さらに，このモデルの一般化ともなっている，最適選択モデルをこの枠組みの中で解析し，不完備情報の決定モデルについての性質を求める。さらに，これらの最適停止

モデルと最適選択モデルにおける最適政策と，その政策にしたがったときに得られる値の性質を考える。

2　部分観測可能なマルコフ決定モデル

部分観測可能なマルコフ連鎖を考える。このマルコフ連鎖の状態を直接に知ることができない。ここでは，情報過程を通して，状態に関する情報を得ることができる。Nakai [6, 7, 14, 15] において，いくつかの基本的な性質が得られている。また，部分観測可能なマルコフ連鎖での多段決定モデルについて [10] で考えられている。

いま，$\{0,1,2,\cdots\}$ をマルコフ連鎖の状態全体を表す集合とし，$\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{i,j=0,1,2,\cdots}$ をその推移確率行列とする。これらの状態に依存する k-次元の多変量確率変数から得られる標本を得て，この状態に関する情報を得る。これらの多変量確率変数は互いに独立とする。したがって，これらの確率変数を観測するプロセスが情報過程となる。このマルコフ連鎖の状態が i のとき，この状態に依存する非負の k 次元多変量確率変数を $\boldsymbol{X}_i$ とする。さらに，この絶対連続な確率変数の分布関数を

$$\mathbf{Pr}(\boldsymbol{X}_s\leq\boldsymbol{x}\,|\,Y_n=i)=F_i(\boldsymbol{x})\quad(\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^k, i\in\{0,1,2,\cdots\}, n\in\{0,1,2,\cdots\}), \tag{1}$$

とし，その確率密度関数を $f_s(\boldsymbol{x})$ とする。ここで，$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_k)$ とし，Y_n は時点 n でのこのマルコフ連鎖の状態を表す確率変数とする。また，つぎの順序を考える。

定義 1　いま，$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_k)$ と $\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_k)\in\boldsymbol{R}^k$ を，k 次元の多変量確率変数 $\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_k)$ からの二つの標本とする。ここで，$x_i\leq y_i(i=1,2,\cdots,k)$ のとき，$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{y}$ より小さいといい，$\boldsymbol{x}<\boldsymbol{y}$ と表す。

このマルコフ連鎖の状態に関する情報は，状態空間上の確率分布 $\boldsymbol{\Phi}=(\phi_0,\phi_1,\phi_2,\cdots)$ で表されている。さらに，すべての標本値 $\boldsymbol{x}$ と事前情報 $\boldsymbol{\Phi}$ に対して事後情報は存在し，その学習プロセスはベイズの定理によるものとする。

状態についての事前情報が $\boldsymbol{\Phi}$ のとき，推移確率行列 $\boldsymbol{P}$ にしたがってマルコフ連鎖の状態が推移するから，状態に関する情報は

$$\begin{cases}\bar{\phi}_j=\sum_{i=0}^{\infty}\phi_i p_{ij},\\ \bar{\boldsymbol{\Phi}}=(\bar{\phi}_0,\bar{\phi}_1,\bar{\phi}_2,\cdots)\end{cases} \tag{2}$$

となる。つぎに，標本値 $\boldsymbol{x}(\in\boldsymbol{R}_+^k=(0,\infty)^k)$ を得てから，状態に関する情報をベイズの定理にしたがって修正し，$\boldsymbol{T}(\bar{\boldsymbol{\Phi}}|\boldsymbol{x})$ となる。すなわち，任意の $j=0,1,2,\cdots$ に対して

$$\begin{cases}T_j(\bar{\boldsymbol{\Phi}}|\boldsymbol{x})=\dfrac{\bar{\phi}_j f_j(\boldsymbol{x})}{\sum_{i=0}^{\infty}\bar{\phi}_i f_i(\boldsymbol{x})}\\ \boldsymbol{T}(\bar{\boldsymbol{\Phi}}|\boldsymbol{x})=(T_0(\bar{\boldsymbol{\Phi}}|\boldsymbol{x}),T_1(\bar{\boldsymbol{\Phi}}|\boldsymbol{x}),T_2(\bar{\boldsymbol{\Phi}}|\boldsymbol{x}),\cdots)\end{cases} \tag{3}$$

である。つぎに，事前情報と，このようにして改良された事後情報の関係を 3 つの仮定の下で考察する。

仮定 1　マルコフ連鎖の状態が i のとき，条件付き期待値 $\boldsymbol{\mu}_i=E[\boldsymbol{X}\,|\,\boldsymbol{Y}=i]$ は有界である。ここで，$\boldsymbol{Y}$

はマルコフ連鎖の状態を表す確率変数である。

仮定 2　マルコフ連鎖の状態が i のとき，k 次元の多変量確率変数を $\boldsymbol{X}_i$ とし ($i=0,1,2,\cdots$)，その確率密度関数を $f_i(\boldsymbol{x})$ とする。このとき，

$$f_{i\wedge j}(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y})f_{i\vee j}(\boldsymbol{x}\vee\boldsymbol{y})\geq f_j(\boldsymbol{y})f_i(\boldsymbol{x}) \tag{4}$$

とする。ここで，$\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}=(\min(x_1,y_1),\cdots,\min(x_k,y_k))$ および $\boldsymbol{x}\vee\boldsymbol{y}=(\max(x_1,y_1),\cdots,\max(x_k,y_k))$ とする。

仮定 3　状態空間が $\{0,1,2,3,\cdots\}$ のマルコフ連鎖で，$\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{i,j=0,1,2,3,\cdots}$ をその推移確率行列とし，TP_2 の性質を持つとする。すなわち，任意の i と $j(i\geq j,i,j=0,1,2,\cdots)$ に対して，$p_{mj}p_{ni}\geq p_{nj}p_{mi}$ である。ただし，$m\leq n(m,n=0,1,2,\cdots)$ とする。

これらの性質をみたすとき，この部分観測可能なマルコフ連鎖は MTP_2 (multivariate totally positivity of order two) の性質を持つという。

つぎに，尤度比を用いて状態空間の上の確率分布の間に順序を導入する。

定義 2　いま，$\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{Y}$ を非負な多変量確率変数とし，それらの確率密度関数をそれぞれ f_X および f_Y とする。いま，

$$f_X(\boldsymbol{y})f_Y(\boldsymbol{x})\leq f_X(\boldsymbol{x}\vee\boldsymbol{y})f_Y(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y})$$

のとき，確率変数 $\boldsymbol{X}$ は，確率変数 $\boldsymbol{Y}$ より尤度比の意味で大きいと言い，$\boldsymbol{X}\geq_\ell\boldsymbol{Y}$ と表す。

この順序関係を MTP_2 と言い，TP_2 (totally positivity of order two) の一般化である。いま，$\boldsymbol{S}=\left\{\boldsymbol{\Phi}\middle|\boldsymbol{\Phi}=(\phi_0,\phi_1,\phi_2,\cdots),\phi_s\geq 0,\sum_{s=0}^{\infty}\phi_s=1\right\}$ を，非負整数の集合 $\{0,1,2,\cdots\}$ 上の確率分布全体を表し，この集合に尤度比を用いて，順序を導入する。

定義 3　いま，$\boldsymbol{\Phi}$ と $\boldsymbol{\Psi}$ を，$\boldsymbol{S}$ に含まれる 2 つの確率分布とする。すべての 2 つの整数の組 i と $j(i\leq j,i,j=0,1,2,\cdots)$ に対して，

$$\phi_j\psi_i\geq\phi_i\psi_j,\ i.e.,\begin{vmatrix}\phi_j & \psi_j\\ \phi_i & \psi_i\end{vmatrix}\geq 0 \tag{5}$$

とし，少なくとも 1 つの組み合わせ i と j に対して，$\phi_j\psi_i>\phi_i\psi_j$ とする。このとき，$\boldsymbol{\Phi}>_\ell\boldsymbol{\Psi}$ と表す。また，すべての $i=1,2\cdots$ に対して，$\phi_i=\psi_i$ のとき，$\boldsymbol{\Phi}=_\ell\boldsymbol{\Psi}$ とする。さらに，$\boldsymbol{\Phi}=_\ell\boldsymbol{\Psi}$ かつ $\boldsymbol{\Phi}>_\ell\boldsymbol{\Psi}$ のとき，$\boldsymbol{\Phi}\geq_\ell\boldsymbol{\Psi}$ とする。

補題 1　定義 3 で導入した順序は半順序である。

Nakai [7, 8, 10, 13, 14, 15] などで，この順序について考察されている。また，[7, 8] では状態の数が有限の場合を，[10] では可算個の場合を扱っている。

部分観測可能なマルコフ連鎖の状態について，それぞれの期で多変量確率変数から得られる標本値を用いて情報を得る。また，すべての情報は状態空間上の確率分布 $\boldsymbol{\Phi}$ によって与えられるとする ($\boldsymbol{\Phi}\in\boldsymbol{S}$)。それぞれの期で，これらの標本値をもとに，状態に関する情報を改良する。いま，$\boldsymbol{\Phi}(\in\boldsymbol{S})$ を状態に関する事前情報とする。k 次元の多変量確率変数からの標本値 $\boldsymbol{x}$ に対して，ベイズの定理によって情報を $\boldsymbol{T}(\overline{\boldsymbol{\Phi}}|\boldsymbol{x})$ とする。このとき，仮定 1，2と3のもとで，(2)式と (3)式で定義された事後情報について基本的な性質が成り立つ。

定理 1　すべての $\boldsymbol{\Phi} \in S$ に対し，$\boldsymbol{x} < \boldsymbol{y}$ ならば $\boldsymbol{T}(\bar{\boldsymbol{\Phi}}|\boldsymbol{x}) \le_\ell \boldsymbol{T}(\bar{\boldsymbol{\Phi}}|\boldsymbol{y})$ である。

補題 2　任意の $\boldsymbol{\Phi}$ と $\boldsymbol{\Psi} \in S$ に対し，$\boldsymbol{\Phi} \ge_\ell \boldsymbol{\Psi}$ ならば，$\bar{\boldsymbol{\Phi}} \ge_\ell \bar{\boldsymbol{\Psi}}$ である。

定理 2　任意の $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^k$ で $\boldsymbol{\Phi} \ge_\ell \boldsymbol{\Psi}$ とすれば $\boldsymbol{T}(\bar{\boldsymbol{\Phi}}|\boldsymbol{x}) \ge_\ell \boldsymbol{T}(\bar{\boldsymbol{\Psi}}|\boldsymbol{x})$ である。

これらの性質は，Nakai[13]で用いたものと同様の手法を用いて示すことができる。また，それぞれの期で観測できる標本が，k 個の独立な確率変数の場合にはつぎの方法で表すことが出来る。

いま，$x_{(1)},\cdots,x_{(k)}$ を，k 個の独立な確率変数から得られる標本 $x_1,\cdots,x_k$ の順序統計量とする（$x_{(1)} \ge \cdots \ge x_{(k)}$）。ここでは，便宜上，標本を値の大きなものから小さいものへ並べる。このとき，k 個の標本の間につぎの順序を導入し，つぎの補題を示すことができる。

定義 4　2つの k 個の標本 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in R^k$ に対して，$x_{(i)} \le y_{(i)} (i=1,2,\cdots,k)$ のとき，$\boldsymbol{x} < \boldsymbol{y}$ とする。

補題 3　任意の $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ に対し，$\boldsymbol{x} < \boldsymbol{y}$ ならば $f_j(\boldsymbol{y})f_i(\boldsymbol{x}) \ge f_i(\boldsymbol{y})f_j(\boldsymbol{x}), i<j (i,j=1,2,\cdots)$ である。

Nakai[13]では，k 個の独立な確率変数から標本が得られる場合にも，事前情報と事後情報のあいだに成り立つ3つの性質が得られている。また，$n=1$ のときについては，[7, 8] に詳しい。

ここで，仮定2はつぎのように表すことができる。$i \le j (i,j=0,1,2,\cdots,n)$ ならば，

$$f_i(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y})f_j(\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}) \ge f_j(\boldsymbol{y})f_i(\boldsymbol{x}) \quad \text{かつ} \quad f_i(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y})f_j(\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}) \ge f_i(\boldsymbol{y})f_j(\boldsymbol{x}) \tag{6}$$

である。標本 $\boldsymbol{x}$ が得られたとき，事後情報はつぎの性質を持つ。

定理 3　すべての $\boldsymbol{\Phi} \in S$ に対して，$\boldsymbol{T}(\bar{\boldsymbol{\Phi}}|\boldsymbol{x})$ は MTP_2 の性質を持つ。

証明　MTP_2 の定義より，任意の $s<s' (s,s'=0,1,2,\cdots)$ について，

$$T_s(\bar{\boldsymbol{\Phi}}|\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y})\,T_{s'}(\bar{\boldsymbol{\Phi}}|\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}) \ge T_{s'}(\bar{\boldsymbol{\Phi}}|\boldsymbol{x})\,T_s(\bar{\boldsymbol{\Phi}}|\boldsymbol{y})$$

が示されれば良い。すなわち，不等式

$$T_s(\bar{\boldsymbol{\Phi}}|\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y})\,T_{s'}(\bar{\boldsymbol{\Phi}}|\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}) - T_{s'}(\bar{\boldsymbol{\Phi}}|\boldsymbol{x})\,T_s(\bar{\boldsymbol{\Phi}}|\boldsymbol{y}) \ge 0$$

が成り立つことが示される。この不等式の分母を払えば，

$$\begin{aligned}&\bar{\phi}_s f_s(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y})\bar{\phi}_{s'} f_{s'}(\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}) - \bar{\phi}_{s'} f_{s'}(\boldsymbol{x})\bar{\phi}_s f_s(\boldsymbol{y}) \\ &\qquad = \bar{\phi}_s \bar{\phi}_{s'}(f_s(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y})f_{s'}(\boldsymbol{x} \vee (\boldsymbol{y}) - f_{s'}(\boldsymbol{x})f_s(\boldsymbol{y})) \ge 0\end{aligned}$$

となる。この最後の不等式は，仮定2から導かれる。□

定理1と2は，この場合にも成り立つ。$\boldsymbol{x} < \boldsymbol{y}$ とすれば $\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ および $\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}$ が成り立つから，つぎの性質は明らである。

補題 4　$f_i(\boldsymbol{x})$ が仮定2を満たすとする。いま，$\boldsymbol{x} < \boldsymbol{y}$ ならば

$$f_j(\boldsymbol{y})f_i(\boldsymbol{x}) \ge f_i(\boldsymbol{y})f_j(\boldsymbol{x}) \tag{7}$$

が，任意の $i<j (i,j=1,2,\cdots)$ に対して成り立つ。すなわち，すべての $i=0,1,2,\cdots$ に対して $f_i(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}$ に関して MTP_2 の性質を持つ。

この補題から，定理1と同様の性質が導かれる。また，$X_1,\cdots,X_k$ が互いに独立なときには，補題3より $\boldsymbol{x} < \boldsymbol{y}$ かつ $i<j (i,j=1,2,\cdots)$ となるすべての $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ に対して(7)式が導かれる。このことは，MTP_2 の性質に他ならない。一方，(7)式と，$\boldsymbol{x}$ に対して $f_i(\boldsymbol{x}) (i=0,1,2,\cdots)$ が MTP_2 の性質を持つことを仮定する。このとき，簡単な計算から補題5が得られる。

補題 5　任意の $i<j(i,j=1,2,\cdots)$ に対して，(7) 式を仮定する。また，$f_i(\boldsymbol{x})\,(i=0,1,2,\cdots)$ は $\boldsymbol{x}$ に関して MTP_2 の性質を持つとする。このとき，仮定 2 が成り立つ。

補題 6　$X_1,\cdots,X_k$ が独立のとき，(7) 式から仮定 2 が導かれる。

証明　$i\leq j(i,j=0,1,2,\cdots)$ とする。このとき，つぎの式を示せば良い。

$$f_i(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y})f_j(\boldsymbol{x}\vee\boldsymbol{y})\geq f_j(\boldsymbol{y})f_i(\boldsymbol{x}) \tag{8}$$

ここで，$1\leq\ell<m$ のとき $x_\ell\geq y_\ell$ であり，$m<\ell\leq k$ のとき $x_\ell<y_\ell$ とする。

$$\prod_{\ell=1}^{m}f_i(y_\ell)\prod_{\ell=1}^{m}f_j(x_\ell)\geq\prod_{\ell=1}^{m}f_j(y_\ell)\prod_{\ell=1}^{m}f_i(x_\ell)$$

を示せば，(8) 式が成立する。このことは，補題 3 より明かである。$j\leq i$ の場合も $(i,j=0,1,2,\cdots)$，同様にしてこの補題が示される。□

定義 5　k 変数関数 $\varphi:\boldsymbol{R}_+^k\rightarrow\boldsymbol{R}$ が，$\boldsymbol{x}<\boldsymbol{y}$ のとき $\varphi(\boldsymbol{x})\leq\varphi(\boldsymbol{y})\,(\varphi(\boldsymbol{x})\geq\varphi(\boldsymbol{y}))$ ならば，この関数は $\boldsymbol{x}$ に関して非減少（非増加）関数という。

Holley [2]，Kemperman [5]，Preston [16]，Karlin and Rinott [3, 4] において，性質 1 と 2 が得られている。

性質 1　$f_i(x)$ を $\boldsymbol{R}^k$ 上の確率密度関数とし $(i=1,2)$,

$$f_1(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y})f_2(\boldsymbol{x}\vee\boldsymbol{y})\geq f_1(\boldsymbol{x})f_2(\boldsymbol{y}) \tag{9}$$

とする。このとき，$\boldsymbol{x}$ に関して増加する非負可測関数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ に対して

$$\int\varphi(\boldsymbol{x})f_1(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\leq\int\varphi(\boldsymbol{x})f_2(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \tag{10}$$

となる。

補題 7

$$f_i(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y})f_j(\boldsymbol{x}\vee\boldsymbol{y})\geq f_j(\boldsymbol{y})f_i(\boldsymbol{x})$$

とする。ただし，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^k$ かつ $i\leq j\ (i,j=0,1,2,\cdots)$ である。このとき，$\boldsymbol{x}$ に関して増加する任意の関数 $\varphi(\cdot)$ に対して

$$\int\varphi(\boldsymbol{x})f_i(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\leq\int\varphi(\boldsymbol{x})f_j(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

となる。

補題 8　S に含まれるすべての $\boldsymbol{\Phi}$ と $\boldsymbol{\Psi}$ に対して，$\boldsymbol{\Phi}\geq_\ell\boldsymbol{\Psi}$ ならば，$\boldsymbol{x}$ に関して増加する任意の関数 $\varphi(\cdot)$ に対して

$$\mathrm{E}_{\boldsymbol{\Psi}}[\varphi(\boldsymbol{X})]=\sum_{i=0}^{\infty}\psi_i\int\varphi(\boldsymbol{x})f_i(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\leq\sum_{i=0}^{\infty}\phi_i\int\varphi(\boldsymbol{x})f_i(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}=\mathrm{E}_{\boldsymbol{\Phi}}[\varphi(\boldsymbol{X})]$$

となる。

性質 2　$f(x_1,\cdots,x_k)$ を，k 次元の多変量確率変数 $\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_k)$ の同時確率密度関数とする。この関数が MTP_2 の性質を持てば，周辺確率密度関数 $f(x_{i_1},\cdots,x_{i_m})$ もまた，MTP_2 の性質を持つ $(i_1<\cdots<i_m,\ \{i_1,\cdots,i_m\}\subset\{1,2,\cdots,k\})$。

補題 9　$f(x_1,\cdots,x_k)$ を k 次元の多変量確率変数 $\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_k)$ の同時確率密度関数とする。この関数

が MTP_2 の性質を持てば，周辺確率密度関数 $f(x_m)$ は TP_2 の性質を持つ ($m=1,2,\cdots,k$)。

3　部分観測可能なマルコフ連鎖での最適停止モデル

3.1　最適停止モデル

前節までで扱った部分観測可能なマルコフ連鎖での最適決定モデルを考える。まず始めに簡単な例として，n 期間の最適停止モデルを考える。それぞれの期で，k 次元の多変量確率変数から得られる標本 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_k)$ を観測して，この期で停止するかどうかを決定する。この多変量確率変数は，部分観測可能なマルコフ連鎖の状態に依存し，状態に関する情報はすべて状態空間上の確率分布で表されている。このとき，停止すれば標本の大きさに依存する利得 $\varphi(\boldsymbol{x})$ を得る。停止しなければ，この標本から状態についての情報を得て，つぎの期に進み，新たな標本を観測する。利得関数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}$ に関して増加する関数とする。例えば，$\varphi(\boldsymbol{x})=\max_{1\le i\le k}x_i$ とすればよい。

このマルコフ連鎖の状態についての情報が $\boldsymbol{\Phi}$ のとき，n 期間のあいだ最適政策にしたがったときに得られる総期待利得を $v_n(\boldsymbol{\Phi})$ とすれば，最適性の原理より，つぎの最適方程式が得られる。(Ross[17])

$$v_n(\boldsymbol{\Phi})=\mathrm{E}_{\Phi}[v_n(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{X})] \tag{11}$$

$$v_n(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})=\max\{\varphi(\boldsymbol{x}),v_{n-1}(T(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x}))\}. \tag{12}$$

これらの関数と，前節で得られた性質よりつぎの結果が得られる。

補題10　$v_n(\boldsymbol{\Phi})$ は $\boldsymbol{\Phi}$ に関して増加する。すなわち，$\boldsymbol{\Phi}\le\boldsymbol{\Psi}$ ならば $v_n(\boldsymbol{\Phi})\le v_n(\boldsymbol{\Psi})$ である。

補題11　$v_n(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{\Phi}$ と $\boldsymbol{x}$ に関して増加する関数である。

これらの性質は n に関する帰納法を用いて示される。$n=1$ の場合は明かである。これらの性質が $n-1$ 以下の場合に成り立つとする。定理2より，$\boldsymbol{\Phi}\ge_\ell\boldsymbol{\Psi}$ ならば $\boldsymbol{T}(\bar{\boldsymbol{\Phi}}|\boldsymbol{x})\ge_\ell\boldsymbol{T}(\bar{\boldsymbol{\Psi}}|\boldsymbol{x})$ である。このことから，$v_n(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{\Phi}$ について増加する関数である。一方，補題4より定理1が成り立つから，$\boldsymbol{x}<\boldsymbol{y}$ ならば $\boldsymbol{T}(\bar{\boldsymbol{\Phi}}|\boldsymbol{x})\le_\ell\boldsymbol{T}(\bar{\boldsymbol{\Phi}}|\boldsymbol{y})$ である。帰納法の仮定より，$v_n(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}$ に関する増加関数である。補題8と11より，補題10が得られる。

つぎに，$\boldsymbol{R}^k_+$ に含まれる領域 $S_n(\boldsymbol{\Phi})$ を $S_n(\boldsymbol{\Phi})=\{\boldsymbol{x}|\varphi(\boldsymbol{x})\ge v_{n-1}(T(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x}))\}$ とする。この領域は，このモデルの停止領域を示し，したがって最適政策を定めるものである。この領域に関して，つぎの性質が得られる。

補題12　領域 $S_n(\boldsymbol{\Phi})$ に対して，$\boldsymbol{\Phi}\le\boldsymbol{\Psi}$ ならば $S_n(\boldsymbol{\Psi})\subset S_n(\boldsymbol{\Phi})$ である。

補題11より，$v_n(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{\Phi}$ に関して増加することがわかる。さらに，$\boldsymbol{\Phi}\le\boldsymbol{\Psi}$ ならば，$\varphi(\boldsymbol{x})\ge v_{n-1}(T(\bar{\boldsymbol{\Psi}},\boldsymbol{x}))\ge v_{n-1}(T(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x}))$ も示される。したがって，この補題が導かれる。

3.2　最適選択モデル

つぎに，Nakai [7, 8, 13, 14] で考えられたモデルと同様の，最適選択モデルとして知られる多段決定モデルを考える。このモデルは，n 期間の決定モデルで，それぞれの期で，k 次元の多変量確率変数から得られる標本値を観測し，それらの中から m 個を選択して総期待利得を最大にするモデルであ

る。部分観測可能なマルコフ連鎖の状態に関する情報が $\boldsymbol{\Phi}$ のとき，$v_n^m(\boldsymbol{\Phi})$ を最適政策にしたがったときに得られる総期待利得とする。このとき，(11)式と(12)式と同じように，最適性の原理よりつぎの再帰方程式が得られる。

$$v_n^m(\boldsymbol{\Phi})=\mathrm{E}_{\Phi}[v_n^m(\boldsymbol{\Phi}|X)] \tag{13}$$

$$v_n^m(\boldsymbol{\Phi}|X)=\max\{\varphi(\boldsymbol{x})+v_{n-1}^{m-1}(T(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x})),v_{n-1}^m(T(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x}))\}. \tag{14}$$

これらの再帰方程式と，前節で得られた性質を用いてつぎの結果が得られる。

補題13　$v_n^m(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})$ は m に関する増加関数である。

補題14　$v_n^m(\boldsymbol{\Phi})$ は $\boldsymbol{\Phi}$ に関する増加関数である。すなわち，$\boldsymbol{\Phi}\leq\boldsymbol{\Psi}$ ならば $v_n^m(\boldsymbol{\Phi})\leq v_n^m(\boldsymbol{\Psi})$ である。

補題15　$v_n^m(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}$ に関する増加関数である。

補題13は定義から明らかであり，残りの性質は n に関する帰納法で示される。

補題14と15の証明　$n=1$ のときは，仮定から明らかである。一般のときはつぎのようになる。

$n\geq2$ のとき，m に関する帰納法を用いる。$m=1$ の場合は，補題10と11から補題14と15は明かである。$m\geq2$ のときは

$$v_{n-1}^{m-1}(T(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x}))\leq v_{n-1}^{m-1}(T(\bar{\boldsymbol{\Psi}},\boldsymbol{x}))\quad \text{かつ}\quad v_{n-1}^{m}(T(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x}))\leq v_{n-1}^{m}(T(\bar{\boldsymbol{\Psi}},\boldsymbol{x}))$$

だから，(13)式と(14)式より補題14が導かれる。同様に，$\boldsymbol{x}\leq\boldsymbol{y}$ のとき，

$$v_{n-1}^{m-1}(T(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x}))\leq v_{n-1}^{m-1}(T(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{y}))\quad \text{かつ}\quad v_{n-1}^{m}(T(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x}))\leq v_{n-1}^{m}(T(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{y}))$$

だから，(13)式と(14)式から補題15が得られる。□

つぎに，関数 $h_n^m(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})$ を

$$h_n^m(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})=v_{n-1}^m(T(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x}))-v_{n-1}^{m-1}(T(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x})) \tag{15}$$

とする。このとき，つぎの性質が得られる。

補題16　$h_n^m(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})$ は m と $\boldsymbol{x}$ に関する増加関数である。

また，$\boldsymbol{R}_+^k$ の領域 $S_n^m(\boldsymbol{\Phi})$ を $S_n^m(\boldsymbol{\Phi})=\{\boldsymbol{x}|\varphi(\boldsymbol{x})\geq h_n^m(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})\}$ で定義する。この領域は，前にも述べたと同じように，この最適選択モデルの選択領域を示し，このモデルの最適政策を表す。この領域に関して，つぎの性質が成り立つ。

補題17　領域 $S_n^m(\boldsymbol{\Phi})$ に対して，$\boldsymbol{\Phi}\leq\boldsymbol{\Psi}$ ならば，$S_n^m(\boldsymbol{\Psi})\subset S_n^m(\boldsymbol{\Phi})$である。

補題16が示されれば，補題17が成り立つことは明らかだから，補題16を示す。これらの性質も n に関する帰納法で示され，$n=1$ のときは，明らかであり，$n\geq2$ に対しては，m に関する帰納法を用いる。$m=1$ の場合は，補題12から補題17が導かれることに注意する。また，$h_n^m(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})$ が(14)式で定義されているから，つぎのことは明かである。

定理 4　最適政策にしたがったときに得られる総期待利得 $v_n^m(T(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x}))$ はつぎの関係式を満足する。

$$v_n^m(T(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x}))=\sum_{i=1}^m h_n^i(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})$$

これらの性質を示すためには，$h_n^m(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})$ がどのような関数であるかを知る必要があり，この関数について詳しくみる。そのために，つぎの準備をする。

まず始めに，2つの非負な可測関数 $u(\boldsymbol{x})$ と $v(\boldsymbol{x})$ に対して，2つの関数 $U_F(u(\boldsymbol{x}),g(\boldsymbol{x}))$ と $V_F(u(\boldsymbol{x}),g(\boldsymbol{x}))$ をつぎのように定義する。

$$U_F(u(\boldsymbol{x}),g(\boldsymbol{x}))=\int_0^\infty (u(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{x}))^+ dF(\boldsymbol{x}) \tag{16}$$

$$V_F(u(\boldsymbol{x}),g(\boldsymbol{x}))=\int_0^\infty g(\boldsymbol{x})dF(\boldsymbol{x})+U_F(u(\boldsymbol{x}),g(\boldsymbol{x})) \tag{17}$$

ただし，$h(\boldsymbol{x})^+=\max\{h(\boldsymbol{x}),0\}$ とする。

これらの関数を用いて，非負関数の列 $\{g_n^m(\boldsymbol{\Phi})\}$ $(\boldsymbol{\Phi}\in \boldsymbol{S},1\leq m\leq n)$ を帰納的に定義する。

$$g_n^m(\boldsymbol{\Phi})=V_{F_\Phi}(\varphi(\boldsymbol{x}),g_{n-1}^m(T(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x})))-U_{F_\Phi}(\varphi(\boldsymbol{x}),g_{n-1}^{m-1}(T(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x}))) \tag{18}$$

$$g_n^0(\boldsymbol{\Phi})=\infty \quad かつ \quad g_n^{n+1}(\boldsymbol{\Phi})=0\ (n\geq 0)$$

とする。つぎに，つぎの集合を考える。

$$M_n^m(\boldsymbol{\Phi})=\{\boldsymbol{x}|g_{n-1}^m(T(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x}))\leq\varphi(\boldsymbol{x})<g_{n-1}^{m-1}(T(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x}))\} \tag{19}$$

$$U_n^m(\boldsymbol{\Phi})=\bigcup_{j=1}^{m-1}M_n^j(\boldsymbol{\Phi}) \quad かつ \quad L_n^m(\boldsymbol{\Phi})=\boldsymbol{R}_+^k-U_n^{m+1}(\boldsymbol{\Phi})$$

ただし，$U_n^1(\boldsymbol{\Phi})=L_n^n(\boldsymbol{\Phi})=\emptyset$ かつ $U_n^{n+1}(\boldsymbol{\Phi})=\boldsymbol{R}_+^k$ とする。

一方

$$g_1^1(\boldsymbol{\Phi})=\sum_{j=1}^m p_j\int_0^\infty \varphi(\boldsymbol{x})dF_j(\boldsymbol{x})$$

だから，(18)式で生成した関数列は定義できる。この関数列に関してつぎの性質が成り立つ。関数 $\hat{h}_{n+1}^m(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})$ を

$$\begin{aligned}\hat{h}_{n+1}^m(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})=&g_n^{m-1}(T(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x}))I_{U_{n+1}^m(\Phi)}(\boldsymbol{x})+\varphi(\boldsymbol{x})I_{M_{n+1}^m}\\&+g_n^m(T(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{x}))I_{L_{n+1}^m(\Phi)}(\boldsymbol{x})\end{aligned} \tag{20}$$

とおく。このとき，以下の性質が成り立つことを示す。

補題18　$g_n^m(\boldsymbol{\Phi})$ と $\hat{h}_{n+1}^m(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})$ は任意の整数 n と m に対して，$\boldsymbol{\Phi}$ に関して増加する関数となる。

補題19　$g_n^m(\boldsymbol{\Phi})$ と $\hat{h}_{n+1}^m(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})$ は任意の $\boldsymbol{\Phi}\in S$ と整数 n に対して，m に関して減少する関数となる。

補題20　$g_n^m(\boldsymbol{\Phi})$ と $\hat{h}_{n+1}^m(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})$ は任意の $\boldsymbol{\Phi}\in S$ と整数 m に対して，n に関して増加する関数となる。

系1　3つの集合 $M_{n+1}^m(\boldsymbol{\Phi})$，$U_{n+1}^m(\boldsymbol{\Phi})$ と $L_{n+1}^m(\boldsymbol{\Phi})$ は互いに素で，
$M_{n+1}^m(\boldsymbol{\Phi})\cup U_{n+1}^m(\boldsymbol{\Phi})\cup L_{n+1}^m(\boldsymbol{\Phi})=R_+^k$ となる。

系2　$g_{n+1}^m(\boldsymbol{\Phi})$ は，

$$g_{n+1}^m(\boldsymbol{\Phi})=\int_0^\infty \hat{h}_{n+1}^m(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})dF_\Phi(\boldsymbol{x}) \tag{21}$$

となる。すなわち，関数 $\hat{h}_{n+1}^m(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})$ は関数 $g_{n+1}^m(\boldsymbol{\Phi})$ の被積分関数である。

補題21　任意の $\boldsymbol{\Phi}\in S$ と $m\ (1\leqq m\leqq n)$ に対して

$$U_{n+1}^m(\boldsymbol{\Phi})\subset U_n^m(\boldsymbol{\Phi})$$

となる。

補題22　もし，$\boldsymbol{\Phi}\geq_\ell\boldsymbol{\Psi}$ $(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Psi}\in S)$ で，$1\leqq m\leqq n+1$ ならば，

$$U_{n+1}^m(\boldsymbol{\Phi})\subset U_{n+1}^m(\boldsymbol{\Psi})$$

となる。

これらの性質も n に関する帰納法で示される。$n=1$ のときは，仮定から明らかである。$n\geq 2$ に対しては，m に関する帰納法を用いる。$m=1$ の場合は，補題12から補題17が導かれる。

ここで，n に関する帰納法を用いて，これらの性質を証明する。$n=1$ の場合は

$$g_1^1(\boldsymbol{\Phi})=\sum_{j=1}^{\infty}\phi_j\int_0^{\infty}\varphi(\boldsymbol{x})dF_j(\boldsymbol{x})$$

であり，$g_1^0(\boldsymbol{\Phi})=\infty$ となる。一方，関数

$$v_i(\boldsymbol{\Phi})=\int_0^{\infty}\varphi(\boldsymbol{x})dF_i(\boldsymbol{x})$$

は，$\boldsymbol{\Phi}$ に関して増加する関数で，$v_j(\boldsymbol{\Phi})\leq v_i(\boldsymbol{\Phi})$ ($j\leq i$ かつ $i,j=0,1,2,\cdots$) だから，定理18が示される。$n=1$ のときの残りの性質は定義から求められる。

補題18の証明　帰納法の仮定から，関数 $g_{n-1}^{m-1}(T(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x}))$ と $g_{n-1}^{m}(T(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x}))$ は $\boldsymbol{\Phi}$ に関する増加関数となる。ここで，$\boldsymbol{\Phi}\geq_t\boldsymbol{\Psi}$ のとき 2 つの関数 $g_n^m(\boldsymbol{\Phi})$ と $g_n^m(\boldsymbol{\Psi})$ を比較する。

もし，

$$\hat{h}_n^m(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})\geq\hat{h}_n^m(\boldsymbol{\Psi}|\boldsymbol{x})\tag{22}$$

が $\boldsymbol{R}_+^k$ に含まれる任意の $\boldsymbol{x}$ に対して成り立てば，$n=1$ に対する系 2 からこの補題は求められる。いま $n=1$ に対する系 2 から，2 つの関数 $\hat{h}_n^m(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})$ と $\hat{h}_n^m(\boldsymbol{\Psi}|\boldsymbol{x})$ を，$(a)U_n^m(\boldsymbol{\Phi})\cap U_n^m(\boldsymbol{\Psi})$，$(b)U_n^m(\boldsymbol{\Phi})\cap M_n^m(\boldsymbol{\Psi})$，$(c)U_n^m(\boldsymbol{\Phi})\cap L_n^m(\boldsymbol{\Psi})$，$(d)M_n^m(\boldsymbol{\Phi})\cap U_n^m(\boldsymbol{\Psi})$，$(e)M_n^m(\boldsymbol{\Phi})\cap M_n^m(\boldsymbol{\Psi})$，$(f)M_n^m(\boldsymbol{\Phi})\cap L_n^m(\boldsymbol{\Psi})$，$(g)L_n^m(\boldsymbol{\Phi})\cap U_n^m(\boldsymbol{\Psi})$，$(h)L_n^m(\boldsymbol{\Phi})\cap M_n^m(\boldsymbol{\Psi})$，$(i)L_n^m(\boldsymbol{\Phi})\cap L_n^m(\boldsymbol{\Psi})$ の 9 つの場合に分けて考える。

これらの集合は明らかに互いに素であり，(22)式は簡単に示される。例えば，(d) の場合を考えると，$\boldsymbol{x}\in M_n^m(\boldsymbol{\Phi})\cap U_n^m(\boldsymbol{\Psi})$ だから，

$$g_{n-1}^m(T(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x}))\leq\varphi(\boldsymbol{x})<g_{n-1}^{m-1}(T(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x}))$$

かつ

$$g_{n-1}^{m-1}(T(\bar{\boldsymbol{\Psi}},\boldsymbol{x}))\leq\varphi(\boldsymbol{x})$$

となる。一方，$\boldsymbol{x}\in M_n^m(\boldsymbol{\Phi})\cap U_n^m(\boldsymbol{\Psi})$ から，

$$\hat{h}_n^m(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})=\varphi(\boldsymbol{x})\quad\text{かつ}\quad\hat{h}_n^m(\boldsymbol{\Psi}|\boldsymbol{x})=g_{n-1}^{m-1}(T(\bar{\boldsymbol{\Psi}},\boldsymbol{x}))$$

となる。したがって

$$\hat{h}_n^m(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})=\varphi(\boldsymbol{x})\geq g_{n-1}^{m-1}(T(\bar{\boldsymbol{\Psi}},\boldsymbol{x}))=\hat{h}_n^m(\boldsymbol{\Psi}|\boldsymbol{x})$$

となる。

つぎに，(h) の場合を考えると，$\boldsymbol{x}\in L_n^m(\boldsymbol{\Phi})\cap M_n^m(\boldsymbol{\Psi})$ だから，

$$\varphi(\boldsymbol{x})<g_{n-1}^m(T(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x}))\quad\text{かつ}\quad g_{n-1}^m(T(\bar{\boldsymbol{\Psi}},\boldsymbol{x}))\leq\varphi(\boldsymbol{x})<g_{n-1}^{m-1}(T(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x}))$$

となる。さらに，

$$\hat{h}_n^m(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})=g_{n-1}^m(T(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x})),\quad\hat{h}_n^m(\boldsymbol{\Psi}|\boldsymbol{x})=\varphi(\boldsymbol{x})$$

となる。よって

$$\hat{h}_n^m(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})=g_{n-1}^m(T(\bar{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x}))\geq\varphi(\boldsymbol{x})=\hat{h}_n^m(\boldsymbol{\Psi}|\boldsymbol{x})$$

が示される。残りの場合も同様にして導かれる。□

補題19の証明　補題18の場合と同様に，$M_n^m(\boldsymbol{\Phi})\cap M_n^{m-1}(\boldsymbol{\Phi})=\emptyset$ だから，2つの関数 $\hat{h}_n^m(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})$ と $\hat{h}_n^{m-1}(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})$ を，$(a)L_n^m(\boldsymbol{\Phi})$，$(b)M_n^m(\boldsymbol{\Phi})$，$(c)M_n^{m-1}(\boldsymbol{\Phi})$，$(d)U_n^{m-1}(\boldsymbol{\Phi})$ の4つの場合に分けて比較する。$(\boldsymbol{\Phi}\in \boldsymbol{S})$

これらの集合は互いに素であり，これら4つの集合の和集合は $\boldsymbol{R}_+^k$ となる。

(c) の場合を考えると，$\boldsymbol{x}\in M_n^{m-1}(\boldsymbol{\Phi})$ だから

$$g_{n-1}^{m-1}(T(\boldsymbol{\bar{\Phi}},\boldsymbol{x}))\leq\varphi(\boldsymbol{x})<g_{n-1}^{m-2}(T(\boldsymbol{\bar{\Phi}},\boldsymbol{x}))$$

となる。一方，$M_n^{m-1}(\boldsymbol{\Phi})\subset U_n^m(\boldsymbol{\Phi})$ だから

$$\hat{h}_n^{m-1}(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})=\varphi(\boldsymbol{x})\quad かつ\quad \hat{h}_n^m(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})=g_{n-1}^{m-1}(T(\boldsymbol{\bar{\Phi}},\boldsymbol{x}))$$

となる。従って，不等式 $\hat{h}_n^m(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})\leq\hat{h}_n^{m-1}(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})$ が求まり，残りの場合も同様に得られる。□

補題20の証明　前の2つの補題と同様に，2つの関数 $\hat{h}_n^m(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})$ と $\hat{h}_{n-1}^m(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})$ を，$(a)L_{n-1}^m(\boldsymbol{\Phi})$，$(b)$ $M_{n-1}^m(\boldsymbol{\Phi})\cap L_n^m(\boldsymbol{\Phi})$，$(c)$ $(M_{n-1}^m(\boldsymbol{\Phi})\cup M_n^m(\boldsymbol{\Phi}))\cap(L_{n-1}^m(\boldsymbol{\Phi})\cup L_n^m(\boldsymbol{\Phi}))$，$(d)$ $U_{n-1}^m(\boldsymbol{\Phi})\cap M_n^m(\boldsymbol{\Phi})$，$(e)$ $U_n^m(\boldsymbol{\Phi})$ の5つの領域に分けて比較する。

一方

$$g_{n-1}^{m-1}(T(\boldsymbol{\bar{\Phi}},\boldsymbol{x}))\geq g_{n-2}^{m-1}(T(\boldsymbol{\bar{\Phi}},\boldsymbol{x}))\quad かつ\quad g_n^m(T(\boldsymbol{\bar{\Phi}},\boldsymbol{x}))\geq g_{n-1}^m(T(\boldsymbol{\bar{\Phi}},\boldsymbol{x}))$$

だから，不等式 $\hat{h}_n^m(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})\geq\hat{h}_{n-1}^m(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})$ は，前の補題と同様に求められる。例えば (b) の場合，$\boldsymbol{x}\in M_{n-1}^m(\boldsymbol{\Phi})\cap L_n^m(\boldsymbol{\Phi})$ だから

$$g_{n-2}^m(T(\boldsymbol{\bar{\Phi}},\boldsymbol{x}))\leq\varphi(\boldsymbol{x})<g_{n-1}^m(T(\boldsymbol{\bar{\Phi}},\boldsymbol{x}))$$

となる。一方，

$$\hat{h}_n^m(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})=g_{n-1}^m(T(\boldsymbol{\bar{\Phi}},\boldsymbol{x}))\quad かつ\quad \hat{h}_{n-1}^m(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})=\varphi(\boldsymbol{x})$$

から，この補題の性質が成り立つ。(c) の場合にはさらに4つの場合に分け，それぞれ同様となり，残りの場合も同じように求められる。□

系2の証明　補題18，補題20と(18)式からつぎのことが示される。もし，$\boldsymbol{x}\in M_{n+1}^m(\boldsymbol{\Phi})$ ならば，

$$g_n^m(T(\boldsymbol{\bar{\Phi}},\boldsymbol{x}))+(\varphi(\boldsymbol{x})-g_n^m(T(\boldsymbol{\bar{\Phi}},\boldsymbol{x})))^+-(\varphi(\boldsymbol{x})-g_n^{m-1}(T(\boldsymbol{\bar{\Phi}},\boldsymbol{x})))^+=\varphi(\boldsymbol{x})$$

となり，$\boldsymbol{x}\in U_{n+1}^m(\boldsymbol{\Phi})$ ならば

$$g_n^m(T(\boldsymbol{\bar{\Phi}},\boldsymbol{x}))+(\varphi(\boldsymbol{x})-g_n^m(T(\boldsymbol{\bar{\Phi}},\boldsymbol{x})))^+-(\varphi(\boldsymbol{x})-g_n^{m-1}(T(\boldsymbol{\bar{\Phi}},\boldsymbol{x})))^+=g_n^{m-1}(T(\boldsymbol{\bar{\Phi}},\boldsymbol{x}))$$

となる。また，$\boldsymbol{x}\in L_{n+1}^m(\boldsymbol{\Phi})$ のときは

$$g_n^m(T(\boldsymbol{\bar{\Phi}},\boldsymbol{x}))+(\varphi(\boldsymbol{x})-g_n^m(T(\boldsymbol{\bar{\Phi}},\boldsymbol{x})))^+-(\varphi(\boldsymbol{x})-g_n^{m-1}(T(\boldsymbol{\bar{\Phi}},\boldsymbol{x})))^+=g_n^m(T(\boldsymbol{\bar{\Phi}},\boldsymbol{x}))$$

だから，この系は成り立つ。□

補題19と(19)式から系1が導かれる。また，(21)式から，$g_{n+1}^m(T(\boldsymbol{\bar{\Phi}},\boldsymbol{x}))\geq 0$ となる。

補題21の証明　始めに

$$U_n^m(\boldsymbol{\Phi})=\bigcup_{j=1}^{m-1}M_n^j(\boldsymbol{\Phi})=\{\boldsymbol{x}|g_{n-1}^{m-1}(T(\boldsymbol{\bar{\Phi}},\boldsymbol{x}))\leq\varphi(\boldsymbol{x})\}$$

に注意する。もし，$\boldsymbol{x}\in U_{n+1}^{m}(\boldsymbol{\Phi})$ ならば，$g_n^{m-1}(T(\overline{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x}))\leq\varphi(\boldsymbol{x})$ となる。また，補題20から，

$$g_n^{m-1}(T(\overline{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x}))\geq g_{n-1}^{m-1}(T(\overline{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x}))$$

が示される。従って，$g_{n-1}^{m-1}(T(\overline{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x}))\leq\varphi(\boldsymbol{x})$ すなわち $\boldsymbol{x}\in U_n^m(\boldsymbol{\Phi})$ が成り立つ。□

補題22の証明　$\boldsymbol{x}\in U_{n+1}^{m}(\boldsymbol{\Phi})$ のとき，$g_n^{m-1}(T(\overline{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x}))\leq\varphi(\boldsymbol{x})$ となる。一方，補題18から

$$g_n^{m-1}(T(\overline{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x}))\geq g_n^{m-1}(T(\overline{\boldsymbol{\Psi}},\boldsymbol{x}))$$

となる。従って，$g_n^{m-1}(T(\overline{\boldsymbol{\Psi}},\boldsymbol{x}))\leq\varphi(\boldsymbol{x})$ が成り立ち，$\boldsymbol{x}\in U_{n+1}^{m}(T(\overline{\boldsymbol{\Psi}},\boldsymbol{x}))$ となる。□

このとき，部分観測可能なマルコフ連鎖の上での最適選択モデルの最適政策と，その最適政策を用いたときの総期待利得はつぎのように表される。

定理 5　最適選択モデルで，$v_n^m(\boldsymbol{\Phi})$ はつぎのようになる。

(1)　$v_n^m(\boldsymbol{\Phi})=\sum_{i=1}^{m}g_n^i(\boldsymbol{\Phi})$

(2)　もし，観測される標本値 $\boldsymbol{x}$ が，$\boldsymbol{x}\in U_n^m(\boldsymbol{\Phi})$ のとき，この値 $\boldsymbol{x}$ を選択することが最適となる。

証明　この定理を n に関する帰納法を用いて証明する。$n=1$ の場合は，$g_1^1(\boldsymbol{\Phi})=\sum_{i=1}^{\infty}\phi_iE_i[\varphi(\boldsymbol{X})]$ となり，この定理は成り立つ。

この定理が，n 以下の全ての値に対して成り立つとする。帰納法の仮定から，(14)式はつぎのように表せる。

$$v_n^m(\boldsymbol{\Phi})=\max\{\varphi(\boldsymbol{x})+\sum_{k=1}^{m-1}g_{n-1}^k(T(\overline{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x})),\sum_{k=1}^{m}g_{n-1}^k(T(\overline{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x}))\}\tag{23}$$

ここで，もし $\boldsymbol{x}\in U_n^m(\boldsymbol{\Phi})$ ならば

$$g_{n-1}^m(T(\overline{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x}))\leq\varphi(\boldsymbol{x})$$

となり，

$$v_n^m(\boldsymbol{\Phi})=\varphi(\boldsymbol{x})+\sum_{k=1}^{m-1}g_{n-1}^k(T(\overline{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x}))$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}v_n^m(\boldsymbol{\Phi})&=\int_{U_n^m(\boldsymbol{\Phi})}\{\varphi(\boldsymbol{x})+\sum_{k=1}^{m-1}g_{n-1}^k(T(\overline{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x}))\}dF_{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{x})\\&\quad+\int_{L_n^m(\boldsymbol{\Phi})}\sum_{j=1}^{m}g_{n-1}^j(T(\overline{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x}))dF_{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{x})\\&=\sum_{j=1}^{m}g_n^j(T(\overline{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x}))\end{aligned}$$

となり，(1)が成り立つ。ただし，ここで

$$\begin{aligned}g_n^m(T(\overline{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x}))&=\int_{M_n^m(\boldsymbol{\Phi})}\varphi(\boldsymbol{x})dF_{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{x})+\int_{U_n^m(\boldsymbol{\Phi})}g_{n-1}^{m-1}(T(\overline{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x}))dF_{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{x})\\&\quad+\int_{L_n^m(\boldsymbol{\Phi})}g_{n-1}^m(T(\overline{\boldsymbol{\Phi}},\boldsymbol{x}))dF_{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

を用いた。また，このことから(2)も成り立つ。□

したがって，この定理より $h_n^m(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})=\hat{h}_n^m(\boldsymbol{\Phi}|\boldsymbol{x})$ となり補題16が導かれる。また，$S_n^m(\boldsymbol{\Phi})=U_{n+1}^m(\boldsymbol{\Phi})$ だ

から，補題22より補題17が導かれる。

注１　定理５から最適政策に従ったときに得られる総期待利得が，$\sum_{i=1}^{k} g_n^i(\boldsymbol{\Phi})$ となる。したがって，$g_n^k(\boldsymbol{\Phi})$ は情報が $\boldsymbol{\Phi}$ のとき n 期間のあいだに $k-1$ 個を選択するモデルで，選択できる機会が１回増えることによって，決定者が最適に振る舞うことにより増加する期待利得を表していると考えられる。すなわち，情報が $\boldsymbol{\Phi}$ のとき n 期間のあいだに k 個を選択するモデルで，最後につけ加えた選択する機会のこのモデルに対する寄与を表すと考えられる。

参考文献

[1] M. Brown and H. Solomon, Optimal Issuing Policies under Stochastic Field Lives, *Journal of Applied Probability*, vol. 10, 761-768, 1973.

[2] R. Holley, Remarks on the FKG Inequaliteis, *Communications in Mathematical Physics*, vol. 36, 227-231, 1974.

[3] S. Karlin and Y. Rinott, Class of Orderings of Measures and Related Correlation Inequalities I: Multivariate Totally Positive Distributions, *Journal of Multivariate Analysis*, vol. 10, 467-498, 1980.

[4] S. Karlin and Y. Rinott, Total Positivity Properties of Absolute Value Multinomial Variables with Applications to Confidence Interval Estimates and Related Probabilistic Inequalities, *The Annals of Statistics*, vol. 9, 1035-1049, 1981.

[5] J. H. B. Kemperman, On the FKG-Inequality for Measures on a Partially Ordered Space, *Indagationes Mathematicae,* vol. 39, 313-331, 1977.

[6] T. Nakai, Optimal Stopping Problem in a Finite State Partially Observable Markov Chain, *Journal of Information & Optimization Sciences*, vol. 4, 159-176, 1983.

[7] T. Nakai, The Problem of Optimal Stopping in a Partially Observable Markov Chain, *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 45, 425-442, 1985.

[8] T. Nakai, A Sequential Stochastic Assignment Problem in a Partially Observable Markov Chain, *Mathematics of Operations Research,* vol. 11, 230-240, 1986.

[9] 中井　達，ある部分観測可能なマルコフ過程における最適停止問題について，京都大学数理解析研究所講究録「計画数学とその周辺」，vol. 611, 69-89, 1987.

[10] T. Nakai, A Stochastic Ordering and Related Sequential Decision Problems, *Journal of Information & Optimization Sciences*, vol. 11, 49-65, 1990.

[11] 中井　達，尤度比を用いた二つの順序と不完備情報の多段決定問題の性質について，經濟學研究（九州大学経済学会），vol. 57, 251-280, 1991.

[12] 中井　達，一度に複数の値を観測することのできる確率的逐次割当問題について，經濟學研究（九州大学経済学会），vol. 58, 161-192, 1992.

[13] T. Nakai, A Partially Observable Decision Problem under a Shifted Likelihood Ratio Ordering, *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 22, 237-246, 1995.

[14] T. Nakai, An Optimal Selection Problem on a Partially Observable Markov Chain, *Stochastic Modelling in Innovative Manufacturing* (Eds. A. H. Christer, S. Osaki and L. C. Thomas), Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems vol. 445, Springer-Verlag, Berlin, 140-154, 1996.

[15] T. Nakai, A Learning Procedure for Sequential Decision Problem with Multiple Observations per Period, Proceedings for 'The First International Conference on Operational and Quantitative Management' Jaipur, vol. 1, 127-134, 1997.

[16] C. J. Preston, A Generalization of the FKG Inequaliteis, *Communications in Mathematical Physics*, vol. 36, 233-241, 1974.

[17] S. M. Ross, *Applied Probability Models with Optimization Applications*, Holden-Day, San Francisco, California, 1970.

[18] D. Stoyan, *Comparison Methods for Queues and Other Stochastic Models*, John Wiley & Sons, New York, New York, 1983.

〔九州大学経済学部教授〕