最適分割の三体問題について

岩本, 誠一
九州大学経済学部 : 教授

https://doi.org/10.15017/4369984

出版情報：經濟學研究. 64 (5/6), pp.165-176, 1998-06-30. 九州大学経済学会
バージョン：
権利関係：

最適分割の三体問題について

岩　本　誠　一

1．はじめに

自然数 n をいくつかの自然数の和の形に表わすことを n の**分割**(patition)という。このとき，順序を問題とせず，同じものが現れることを許して分割の仕方の数をかぞえ，$p(n)$ で表わす。$p(n)$ を n の**分割数**という。たとえば，5の分割は

$$
\begin{aligned}
5 &= 5 \\
&= 4+1 \\
&= 3+2 \\
&= 3+1+1 \\
&= 2+2+1 \\
&= 2+1+1+1 \\
&= 1+1+1+1+1
\end{aligned}
\tag{1}
$$

となるから，$p(5)=7$ である。分割数 $p(n)$ は n 次対称群の共役類数に等しく，分割関数 $p(\cdot)$ の解析的性質は初等整数論(特に加法的整数論)で研究されている([1],[2])。

しかし，本論文ではこの(**加法型**)分割に対して新しく**乗法型**評価関数を導入して，この評価を最大にする分割を求める問題を考える。これを離散型の**最適分割問題**という。たとえば，5の最適分割問題(5の分割の中でその積を最大にする問題)では

$$
\begin{aligned}
5 &= 5 \\
4\cdot 1 &= 4 \\
3\cdot 2 &= 6 \\
3\cdot 1\cdot 1 &= 3 \\
2\cdot 2\cdot 1 &= 4 \\
2\cdot 1\cdot 1\cdot 1 &= 2 \\
1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 &= 1
\end{aligned}
\tag{2}
$$

となるから，5の最適分割は $5=3+2$ で，最大値は $3\cdot 2=6$ である。

また，10は

$$10 = 3+3+2+2$$

に分けると，その積の最大値は $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$ になる。同様に，11，12の最適分割はそれぞれ

$$11 = 3+3+3+2 \longrightarrow 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 54$$
$$12 = 3+3+3+3 \longrightarrow 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

になる。

ここで，**最適分割**

$$\begin{aligned} 5 &= 3+2 \longrightarrow 3 \cdot 2 = 6 \\ 10 &= 3+3+2+2 \longrightarrow 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36 \\ 11 &= 3+3+3+2 \longrightarrow 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 54 \\ 12 &= 3+3+3+3 \longrightarrow 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81 \end{aligned} \tag{3}$$

のいずれにおいても分割（された）単位は常に2か3であることに注意しよう。しかも，**分割単位3が2よりかなり多く出現している。**そして2と3の間にはNapierの数 $e = 2.7182\cdots$ がある。「一般に，5以上の整数は2または3を含む和に分割すると，積は大きくなり，3を含む分割は2を含む分割以上になる」からである。

本論文では，分割の三体，すなわち離散，連続，連続体の各々において最適分割を求め，そこに共通する性質（オイラー分割律）を e を用いて明らかにする。

第2節では動的計画法（[3]，[9]，[10]，[14]）によって得られた最適離散分割の性質（[11]）に焦点を絞る。第3節では連続分割における最適分割を微分法によって求める。最適性の必要条件である等分割下では2変数の，さらには1変数の（主）最適化問題に帰着することを第4節で示す。この問題に対応する逆問題の最適解を第5節で求め，両問題間の最適構造を逆関係（[6]，[7]，[8]）にまとめる。第6節では連続体分割での主問題と逆問題を変分法で解く。最後に，連続分割，連続体分割においてもオイラー分割律が成り立つことを示す。

2．最適分割問題

一般に，自然数 n の最適分割問題（いわゆる最適分割問題）を考えよう。この問題は離散数理計画問題で定式化すると，次の最大化問題で表される：

$$\mathrm{P}(n) \quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & n_1 n_2 \cdots n_k \\ \text{subject to (i)} & n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n \\ \quad\quad\quad\;\; \text{(ii)} & n_1, n_2, \cdots, n_k, k \in N \end{array} \tag{4}$$

ただし，N は自然数の集合である：

$$N = \{1, 2, \ldots\}$$

問題 $\mathrm{P}(n)$ の最大値を $v(n)$，最適分割を $(n_1^*(n), n_2^*(n), \cdots, n_{k^*}^*(n))$，最適分割数を $k^*(n)$ とする。この問題は動的計画法によって解かれ（[4]，[5]，[11]），逆問題が解析されている（[10]，[11]）。事実，$n \geq 3$ のとき，分割問題 $\mathrm{P}(n)$ の最適解は次のようになる：

$$v(n)=\begin{cases}3^m\\4\cdot 3^{m-1}\\2\cdot 3^m\end{cases}\qquad k^*(n)=\begin{cases}m\\m,\ m+1\\m+1\end{cases}\qquad n=\begin{cases}3m\\3m+1\\3m+2\end{cases}\text{のとき}\tag{5}$$

$$(n_1^*(n),\ n_2^*(n),\ \cdots,\ n_{k^*}^*(n))=\begin{cases}(3,3,\cdots,3)\\(3,3,\cdots,3,4),\ (3,\cdots,3,2,2)\\(3,3,\cdots,3,2)\end{cases}\qquad n=\begin{cases}3m\\3m+1\\3m+2\end{cases}\text{のとき。}\tag{6}$$

従って，次が成り立つ。

定理 2.1（離散型オイラー分割律）被分割数の最適分割数に対する割合は究極的に 3 に収束する：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{k^*(n)}=3.\tag{7}$$

この比の極限値 3 を**離散型オイラー分割比**という。

3．非負実数の有限分割

この節では，非負実数 c の有限個の非負実数への分割に対してその積を最大にする問題を考えよう。これは次の数理計画問題で表わされる：

$$\mathrm{CP}(c)\qquad\begin{array}{lll}\text{Maximize} & x_1x_2\cdots x_t & \\ \text{subject to} & \text{(i)} & x_1+x_2+\cdots+x_t=c\\ & \text{(ii)} & x_m\geq 0\quad 1\leq m\leq t\\ & \text{(iii)} & t\geq 1\end{array}\tag{8}$$

ただし，各 x_m は連続量(非負実数)，t は離散量(自然数)である。共に可変量(変数)である。問題 CP(c)の最大値を $v(c)$，最適分割を $(x_1^*(c), x_2^*(c), \cdots, x_{t^*}^*(c))$，最適分割数を $t^*(c)$ とする。

補題 3.1　最適分割は等分割である。

証明　まず，$c>0$ のとき，最適分割の各値は正値であることに注意する。最適分割 $(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_t^*)$ が等分割でなければ，この分割より大きい値を与える分割 $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_t)$ を構成できるからである。たとえば，$x_1^*\neq x_2^*$ ならば，$\hat{x}_1=\hat{x}_2=\dfrac{x_1^*+x_2^*}{2}$ となる分割 $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, x_3^*, \cdots, x_t^*)$ は元の分割より大きな値を生む。　□

以下，

$$0^0=1,\quad a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\quad n=1,2,\ldots,\quad b_n=\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\quad n=0,1,\ldots$$

とする。このとき，次が成り立つ：

補題 3.2

$$\text{(i)} \quad b_n < b_{n+1} \qquad n = 0, 1, \dots \tag{9}$$

$$\text{(ii)} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \infty. \tag{10}$$

証明　自然数 n を連続化して，連続変数 x の正値関数

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x (x+1) \qquad x > 1$$

を考える。このとき

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \log\left(1+\frac{1}{x}\right) > 0$$

より，$f'(x) > 0$. 従って，$f(x)$ は狭義増加だから，$f(n) < f(n+1)$. また，$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ より，(ii)は明らかである。　□

定理 3.1 (最適分割律とその漸近性) 任意に非負実数 c を与えたとき，

$$b_{n-1} \leq c \leq b_n \tag{11}$$

となる自然数 n を選び，$n(c)$ で表わす。このとき，次が成り立つ。

1．最適分割は c の n 等分である：

$$\text{(i)} \quad v(c) = \left(\frac{c}{n}\right)^n \tag{12}$$

$$\text{(ii)} \quad x_1^*(c) = x_2^*(c) = \cdots = x_{t^*}^*(c) = \frac{c}{n} \tag{13}$$

$$\text{(iii)} \quad t^*(c) = n(c), \tag{14}$$

2．$n:[0,\infty) \to N$ は非減少で，c が ∞ に近づくとき，$n(c)$ は ∞ に近づく：

$$\lim_{n\to\infty} n(c) = \infty. \tag{15}$$

3．c が ∞ に近づくとき，c の $n(c)$ に対する比は e に近づく：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c}{n(c)} = e. \tag{16}$$

証明　条件式(11)は次の一連の不等式に同値である：

$$c < \left(\frac{c}{2}\right)^2 < \cdots < \left(\frac{c}{n-1}\right)^{n-1} \leq \left(\frac{c}{n}\right)^n \geq \left(\frac{c}{n+1}\right)^{n+1} > \left(\frac{c}{n+2}\right)^{n+2} > \cdots \tag{17}$$

従って，補題3.1より，n 等分が最適分割である。すなわち，式(12)，(13)，(14)が成り立つ。(15)は明らか。また，このとき

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \leq \frac{c}{n} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \tag{18}$$

だから，式(16)が成立する。　□

したがって，e を**連続型オイラー分割比**という。

ここでは以下最適解の性質を抽出しよう。まず，Napierの数 e は次の不等式を満たすことに注意する。

補題 3.3

$$(n+1)e < (n+2)a_{n+1} \quad n = 0, 1, \dots \tag{19}$$

証明　まず，不等式(19)は

$$e < \frac{n+2}{n+1}a_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \quad n = 0, 1, \ldots \tag{20}$$

に同値であることに注意する。従って，自然数 n を連続化して

$$e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} \quad x \geq 2 \tag{21}$$

を示す。正値関数

$$g(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} \quad x \geq 2 \tag{22}$$

の狭義減少性が示されれば，$\lim_{x\to\infty} g(x) = e$，$g(2) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 > e$ より，$g(x) > e$ が従う。

事実，関数 g の狭義減少性は次のようにしてわかる。g は関数

$$h(x) = \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \quad x \geq 2 \tag{23}$$

を通して，

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = h(x) \tag{24}$$

の関係にある。また h は

$$h'(x) = \frac{1}{x^2}\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} > 0$$

$$h(2) = \log\frac{3}{2} - \frac{1}{2} < 0$$

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = 0$$

である。従って，$h(x) < 0$ より，$g'(x) < 0$ である。ゆえに，g の狭義減少性が示された。　□

定理 3.2（連続型オイラー分割律）任意の非負実数 c を与えたとき，

$$\frac{c}{n+1} < e < \frac{c}{n} \tag{25}$$

となる自然数 n を選ぶ。このとき，

1．$c \leq (n+1)a_n$ ならば，c の n 等分が最適分割である。

2．$(n+1)a_n < c$ ならば，c の $(n+1)$ 等分が最適分割である。

証明　条件式(25)は

$$ne < c < (n+1)e \tag{26}$$

に同値である。まず，$c \leq (n+1)a_n$ とする。このとき，$ne < c < (n+1)a_n$. また，$a_{n-1} < e$ より，$na_{n-1} < c \leq (n+1)a_n$. すなわち，$b_{n-1} < c \leq b_n$. 従って，定理 3.1より，$n$ 等分が最適である。

次に，$(n+1)a_n < c$ とする。このとき，$c < (n+2)a_{n+1}$ である。なぜなら，$c \geq (n+2)a_{n+1}$ とすると，補題 3.3より，$(n+1)e < (n+2)a_{n+1}$ だから，$(n+1)e < c$. これは条件式(26)に矛盾。すなわ

ち，このとき，$b_n < c < b_{n+1}$. 従って，定理3.1より，$(n+1)$等分が最適である。 □

注意　条件式(25)の下では，$m \geq n+2$ に対して m 等分が最適となることはない。すなわち，オイラー分割律は**可能な限りe単位に等分割することが最適である**と主張している。

例 1　$c=50$ の最適分割は次のように求められる。まず，$\dfrac{50}{e}=18.3939\cdots$ より，$\dfrac{50}{19}<e<\dfrac{50}{18}$. 次に，$18a_{17}=47.5634\cdots$，$19a_{18}=50.2820\cdots$. よって，$50<19a_{18}$. ゆえに，50の最適分割は18等分割である。

例 2　$c=271$ の最適分割を求める。$\dfrac{271}{e}=99.5953\cdots$ より，$\dfrac{271}{100}<e<\dfrac{271}{99}$. また，$99a_{98}=267.7496\cdots$，$100a_{99}=270.4679\cdots$. したがって，$100a_{99}<271$. ゆえに，271 の最適分割は100等分割である。

4．単一連続変数問題

この節では，主分割問題(8)において最適分割が満たす条件「等分割」を考える。すなわち，追加制約条件

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_t = x \tag{27}$$

を考慮して，分割数の問題と分割単位の問題をそれぞれ連続変数で考える。

さて，等分割条件(27)の下では，問題(8)は2変数主問題(Main Problem)：

$$\mathrm{MP}(c) \qquad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & x^t \\ \text{subject to} & \text{(i)}\ \ xt = c \\ & \text{(ii)}\ \ x \geq 0 \\ & \text{(iii)}\ \ t = 1, 2, \ldots \end{array} \tag{28}$$

になる。ただし，$c \geq 0$ は与えられた実定数である。x は連続量(非負実数)，t は離散量(自然数)である。共に可変量(変数)である。この問題の t も連続量(非負実数)にみなすと，連続2変数主問題(Continuous Main Problem)：

$$\mathrm{CMP}(c) \qquad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & x^t \\ \text{subject to} & \text{(i)}\ \ xt = c \\ & \text{(ii)}\ \ x \geq 0 \\ & \text{(iii)}\ t \geq 0 \end{array} \tag{29}$$

が得られる。これは $x^*(c)=e,\ t^*(c)=c/e$ のとき，最大値 $F(c)=e^{c/e}$ をもつ(図1参照)。

2変数主問題 MP(c) は，xを消去すると，分割数の問題 (Main ‘How Many’ Problem)：

$$\mathrm{DMHMP}(c) \qquad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & \left(\dfrac{c}{t}\right)^t \\ \text{subject to} & \text{(i)}\ \ t = 1, 2, \ldots \end{array} \tag{30}$$

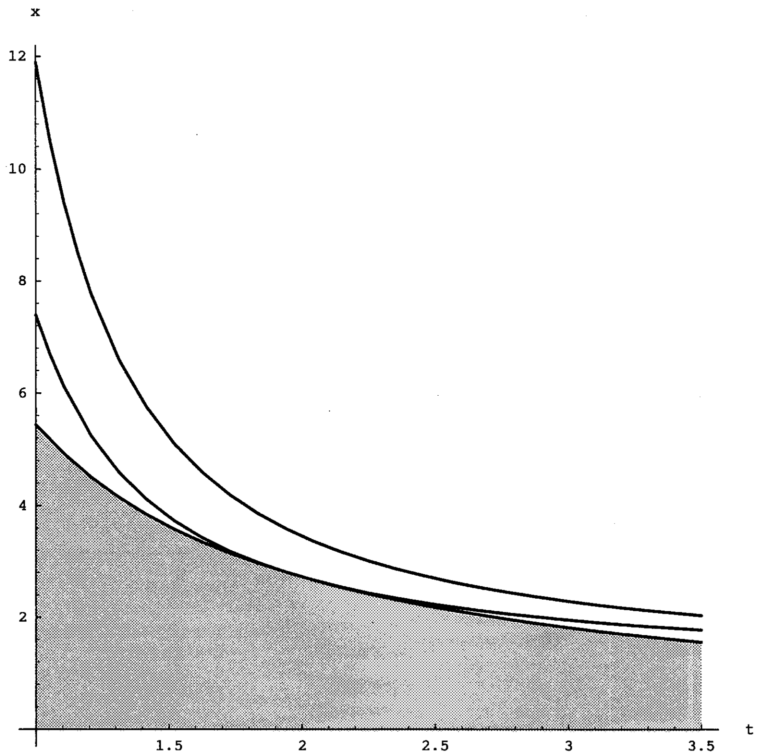

図 1　連続 2 変数主問題：$xt \leq 2e$；$x^t = e^2,\ e^2+4.5$

になる。この問題は連続変数 t の問題

$$\mathrm{CMHMP}(c) \qquad \begin{array}{l} \text{Maximize} \quad \left(\dfrac{c}{t}\right)^t \\ \text{subject to (i)} \quad t > 0 \end{array} \tag{31}$$

に埋め込まれる。これは連続 2 変数主問題 CMP(c) で x を消去した問題である。この問題は $t^*(c) = c/e$ のとき，最大値 $f(c) = e^{c/e}$ をもつ(図 2 参照)。

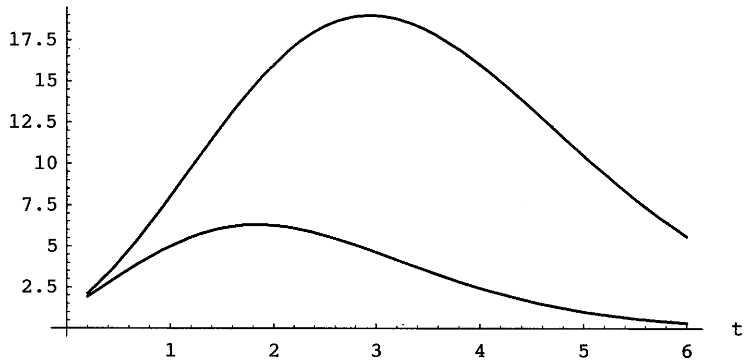

図 2　主分割数問題：$\left(\dfrac{c}{t}\right)^t$；$c=5.0,\ 8.0$

他方，t を消去すると，分割単位の問題(Main 'What Amount' Problem)

$$\text{CMHMP(c)} \qquad \begin{array}{l} \text{Maximize} \quad x^{c/x} \\ \text{subject to (i)} \quad x > 0 \end{array} \tag{32}$$

になる。これは $x^*(c) = e$ のとき，最大値 $F(c) = e^{c/e}$ をもつ(図3参照)。

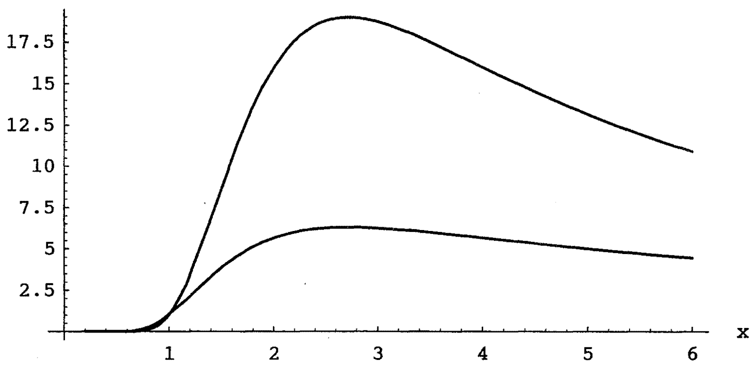

図 3　主分割単位問題：$x^{c/x}$; c=5.0, 8.0

5．逆分割

この節では逆分割問題を考える。非負実数値 c に対してある有限個の非負実数値の積が c 以上になるとき，実数の組みを c の**乗法型連続分割**という。さて，非負実数 c の乗法型連続分割に対してその和を最小にする問題を考えよう。これは次の数理計画問題(逆分割問題)で表わされる：

$$\text{IP}(c) \qquad \begin{array}{ll} \text{minimize} & x_1 + x_2 + \cdots + x_t \\ \text{subject to} & \text{(i)} \quad x_1 x_2 \cdots x_t \geq c \\ & \text{(ii)} \quad x_m \geq 0 \quad 1 \leq m \leq t \\ & \text{(iii)} \ t \geq 1 \end{array} \tag{33}$$

この最小解は等式制約下の等分割条件

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_t = x \tag{34}$$

を満たすので，2変数逆問題：

$$\text{IP}(c) \qquad \begin{array}{ll} \text{minimize} & xt \\ \text{subject to} & \text{(i)} \quad x^t = c \\ & \text{(ii)} \ x \geq 0 \\ & \text{(iii)} \ t = 1, 2, \ldots \end{array} \tag{35}$$

で表わされる。ただし，ここでは $c \geq 1$ とする。この t を連続変数に見なした連続2変数逆問題は

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & xt \\ \text{subject to} & \text{(i)} \quad x^t = c \end{array}$$

$$\mathrm{CIP}(c) \qquad \begin{array}{l} \text{(ii)}\ x \geq 0 \\ \text{(iii)}\ t \geq 0 \end{array} \tag{36}$$

になる。これは $\hat{x}(c) = e, \hat{t}(c) = \log c$ のとき，最小値 $G(c) = e\log c$をもつ(図4参照)。

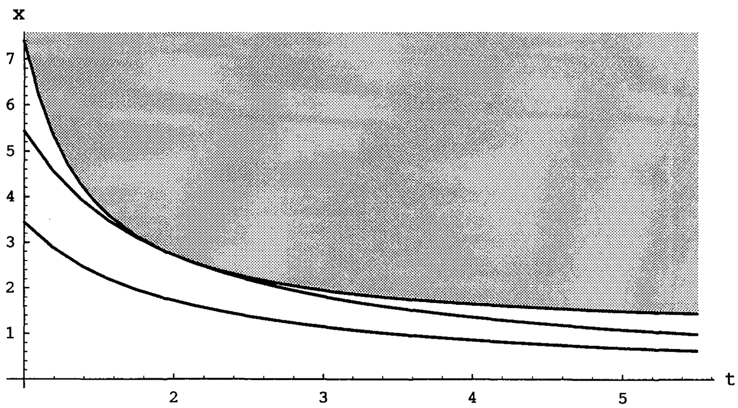

図 4　連続 2 変数逆問題：$xt = 2e,\ 2e-2\ ;\ x^t \geq e^2$

さらに，x を消去すると，分割数の問題(Inverse ‘How Many’ Problem)

$$\mathrm{DIHMP}(c) \qquad \begin{array}{ll} \text{minimize} & tc^{1/t} \\ \text{subject to (i)} & t = 1, 2, \ldots \end{array} \tag{37}$$

になる。この連続変数問題は

$$\mathrm{CIHMP}(c) \qquad \begin{array}{ll} \text{minimize} & tc^{1/t} \\ \text{subject to (i)} & t > 0 \end{array} \tag{38}$$

になる。これは $\mathrm{CIP}(c)$ の x を消去した問題でもある。この問題は $\hat{t}(c) = \log c$ のとき，最小値 $g(c) = e\log c$ をもつ(図5参照)。

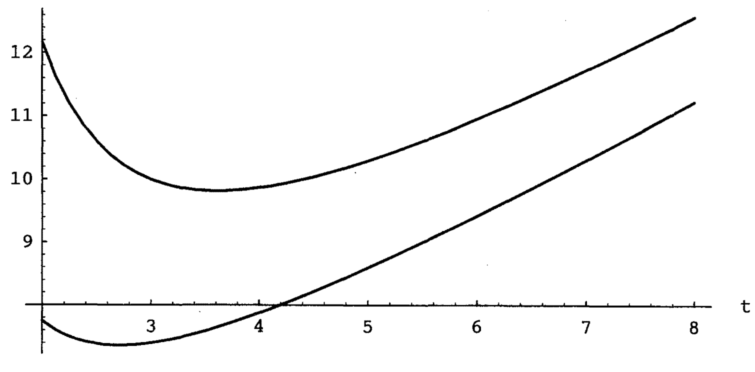

図 5　逆分割数問題：$tc^{1/t}$; $c = 15.0,\ 37.0$

他方, t を消去すると, 分割単位の逆問題 (Inverse 'What Amount' Problem)

$$\text{CIWAP}(c) \quad \begin{array}{l} \text{minimize} \quad \dfrac{x\log c}{\log x} \\ \text{subject to (i)} \quad x > 1 \end{array} \tag{39}$$

になる。これは $\hat{x}(c) = e$ のとき, 最小値 $G(c) = e\log c$ をもつ(図6参照)。

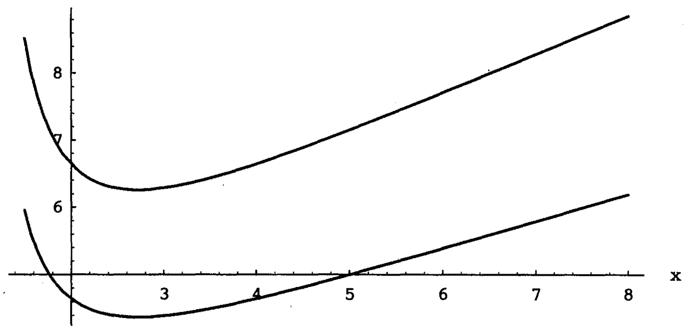

図 6　逆分割単位問題：$\dfrac{x\log c}{\log x}$; c=15.0, 37.0

四つの1変数分割問題の最適解とその間の逆関係([6],[7],[8])は表1にまとめられる。

表 1　四つの分割問題の最適解と逆関係

	分割数の問題	分割単位の問題
主分割 最大解	Max $\left(\frac{c}{t}\right)^t$ s.t. $t>0$ $t^*(c)=c/e$, $f(c)=e^{c/e}$	Max $x^{c/x}$ s.t. $x>0$ $x^*(c)=e$, $F(c)=e^{c/e}$
逆分割 最小解	min $tc^{1/t}$ s.t. $t>0$ $\hat{t}(c)=\log c$, $g(c)=e\log c$	min $\frac{x\log c}{\log x}$ s.t. $x>0$ $\hat{x}(c)=e$, $G(c)=e\log c$
逆関係	$g=f^{-1}$, $\hat{t}=t^*\circ f^{-1}$ $f=g^{-1}$, $x^*=\hat{x}\circ g^{-1}$	$G=F^{-1}$, $\hat{x}=x^*\circ F^{-1}$ $F=G^{-1}$, $x^*=\hat{x}\circ G^{-1}$

6．連続体分割

この節ではいわゆる変分法によって連続体分割問題を考える(動的計画法による方法は[12],[13],[11]参照)。正の実数値 c に対してある正値連続関数の積分値が c 以下になるとき，関数を c の**加法型連続体分割**ということにしよう。さて，正の実数 c の加法型連続体分割に対して，「連続的な積」の値を最大にするという意味で，対数値の積分値を最大にする問題を考えよう。これは次の変分問題(主分割問題)で表わされる：

$$
\text{MCP}(c)\quad
\begin{aligned}
&\text{Maximize} \quad \int_0^t \log x(s)ds\\
&\text{subject to (i)} \quad \int_0^t x(s)ds \leq c\\
&\qquad\qquad\ \ \text{(ii)} \quad x(s) > 0 \quad 0 \leq s \leq t\\
&\qquad\qquad\ \ \text{(iii)} \quad t > 0
\end{aligned}
\tag{40}
$$

ただし，$c > 0$. 求める最大値は条件(i)を等号で満たすので，この変分問題は等周問題になる。すなわち，条件(i)は等号条件として，一般性を失わない。従って，この等周問題は，ラグランジュ乗数法により，次のように解ける。まず，ラグランジュ関数

$$L(t, x, \dot{x}; \lambda) = \int_0^t \log x(s)ds + \lambda\left(c - \int_0^t x(s)ds\right) \tag{41}$$

を考える。この被積分関数 $f(t, x, \dot{x}\,; \lambda) = \log x - \lambda x$ に対するオイラー方程式

$$f_x - \frac{d}{dt}f_{\dot{x}} = 0 \tag{42}$$

より，等分割条件

$$x(s) = x\ (\text{一定}) \quad 0 \leq s \leq t \tag{43}$$

を得る。従って，等号条件(i)より，ただちに $x = \frac{c}{t}$. さらに，積分値

$$\int_0^t \log x(s)ds = t\log x = t\log\frac{c}{t}, \quad t > 0 \tag{44}$$

は，$t^*(c) = \frac{c}{e}$ のとき，最大になることがわかる。従って，x の最大点は $x^*(c) = e$ である。すなわち，主分割問題 MCP(c) は，$x^*(s) = e$，$t^*(c) = \frac{c}{e}$ のとき，最大値 $f(c) = \frac{c}{e}$ をもつ。

同様にして，**乗法型連続体分割**の下で逆分割問題

$$
\text{ICP}(c)\quad
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad \int_0^t x(s)ds\\
&\text{subject to (i)} \quad \int_0^t \log x(s)ds \geq c\\
&\qquad\qquad\ \ \text{(ii)} \quad x(s) > 0 \quad 0 \leq s \leq t\\
&\qquad\qquad\ \ \text{(iii)} \quad t > 0
\end{aligned}
\tag{45}
$$

が考えられる。これは，$\hat{x}(s) = e$，$\hat{t}(c) = c$ のとき，最小値 $g(c) = ec$ をもつことがわかる。

表 2　オイラー分割律

型＼分割	主：加法	逆：乗法
離散	$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{k^*(n)} = 3$	$\lim_{n\to\infty} n^{1/\hat{k}(n)} = 3$
連続	$\lim_{c\to\infty} \frac{c}{t^*(c)} = e$	$\lim_{c\to\infty} c^{1/\hat{t}(c)} = e$
連続体	$\frac{c}{t^*(c)} \equiv e$	$c^{1/\hat{t}(\log c)} \equiv e$

7. おわりに

最後に，離散分割，連続分割，連続体分割の最適分割をまとめると表2になる。したがって，**3体の各分割に共通して可能な限りe単位に等分割することが最適である**ことが示された。すなわち，加法型分割において乗法型評価を最適にする問題ではオイラー分割律が成り立つことがわかった。

参 考 文 献

[1] G.H. Hardy and S. Ramanujan, Asymptotic formulae in combinatory analysis, Proc. London. Math. Soc., (2) **17** (1918), 75-115.
[2] G.H. Hardy and E.M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford, 1960.
[3] R.E. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton Univ. Press, NJ, 1957.
[4] S.W. Golmb, E2118, Amer. Math. Monthly **75** (1968), 878.
[5] S.W. Golmb, Iterated binomial coefficients, Amer. Math. Monthly **87** (1980), 719-727.
[6] S. Iwamoto, Inverse theorem in dynamic programming I, *J. Math. Anal. Appl*. **58** (1977), 113-134.
[7] S. Iwamoto, Inverse theorem in dynamic programming II, *J. Math. Anal. Appl*. **58** (1977), 249-279.
[8] S. Iwamoto, Inverse theorem in dynamic programming III, *J. Math. Anal. Appl*. **58** (1977), 439-448.
[9] 岩本誠一，動的計画の理論と応用，数学**31**巻4号，1979年，331-348.
[10] 岩本誠一，「動的計画論」，九大出版会，1987.
[11] S. Iwamoto, Inverse Partition Problems, under consideration.
[12] S. Iwamoto and C.-L. Wang, Continuous dynamic programming approach to inequalities, *J. Math. Anal. Appl*. **96** (1983), 119-129.
[13] S. Iwamoto and C.-L. Wang, Continuous dynamic programming approach to inequalities II, *J. Math. Anal. Appl*. **96** (1986), 279-286.
[14] M. Sniedovich, *Dynamic Programming*, Marcel Dekker, NY, 1992.

［九州大学経済学部教授］