九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

経済時系列解析とカオス一時系列予測への応用

時永，祥三
九州大学経済学部 : 教授

https://doi.org/10.15017/4363007

出版情報：經濟學研究. 66 (1), pp.101-116, 1999-06-30. 九州大学経済学会
バージョン：
権利関係：

経済時系列解析とカオス — 時系列予測への応用

時　永　祥　三

1．はじめに

カオス理論は経済学の分野において，決定論的な方程式により不安定な現象を解明する手段として注目されている[1]－[6]。特に，経済時系列解析の分野においては，線形あるいは非線形の確率過程モデルを用いて時系列の特徴づけや予測が行われており，カオス理論により新しい方法論が見いだせる可能性がある。カオス理論では決定論的なモデルを用いているので，いったん，この方程式が推定されると，将来の値の予測は簡単な計算により実行できることになる。しかし，現在までカオス理論を時系列予測に用いた方法は極めて少ないため，その能力を正しく検討する必要がある。

本論文では，カオスアトラクタの性質に注目して，経済時系列の将来値を予測する方法を提案するとともに，応用例をもとにしてその性能を評価する。すなわち，与えられた時系列がカオスとなるかどうかを判定する方法として相関次元，リアプノフ数を用いると同時に，計算より求めたカオスアトラクタの形状に注目し，現在の時刻以降のシステムの挙動をアトラクタ上で再構成し，このアトラクタの上で時系列を予測する手法を展開する。このような方法を用いることにより，時間域での時系列の予測とは異なり，非線形性を間接的に反映することができること，時間域における急激な変化も，アトラクタ上のゆるやかな変化に置き換えることができ，予測には有利であることを利用している。特に，経済時系列にはカオスと見なされる例が少なくないことから，経済分野での応用が期待できる。

以下，2. では Takens の定理，相関次元，リアプノフ数を用いてカオス時系列を検証する方法についてまとめる。3. では，代表的な経済時系列についてカオス性を検証するとともに，その検証方法の課題などについて述べる。4. では，カオスアトラクタを再構成する方法により時系列を予測する手法を提案し，シミュレーションにより性能を比較検討する。

2．カオス時系列の検証

2.1　埋め込みとアトラクタ

カオス時系列は見た目には確率過程により生成される時系列のような不規則な変動を含んでいる[1]－[6]。すなわち，時系列は周期的な波に収束もしないかわりに，明確な不規則振動を示さないで，これらの中間的な動きをして，やや不規則な変動を繰り返す。従って，カオス理論が展開される以前には，やっかいな雑音（ノイズ）と見なされたり，ARMA モデルなどの確率過程のモデルを当てはめて分析することが行われている。しかし，カオスと確率過程の基

本的な違いは，前者が非線形方程式により記述されるシステムにより生成されるのに対して，後者はシステムを駆動する入力やノイズを前提としていることである。カオスは，いわゆる決定論的な方程式により生成され，その中にはノイズなどの不確実な要素が含まれない。

以上の事実は，カオス時系列の2つの時刻を同時に図として描くことにより明確になる。例えば，logistic map とよばれるカオスでは，時刻 t の値 $x(t)$ を用いて時刻 $t+1$ の値 $x(t+1)$ が生成されるので，$x(t)$，$x(t+1)$ は方程式により結ばれている[7][8]。

$$x(t+1)=4x(t)(1-x(t)) \tag{1}$$

従って，2次元平面に $x(t)$ を横軸，$x(t+1)$ を縦軸に描くと，この方程式に対応する1つの閉じた曲線になる。これをアトラクタとよぶ。これに対して，確率過程のモデルにより発生された時系列では，$x(t)$，$x(t+1)$ は一般には相関がないので，2次元平面には明確な図形は現れない。

図1，図2には logistic map の時系列とアトラクタを示している。

更に，変数の数が多くなった場合でも3次元平面，4次元平面に，生成されるメカニズム（正確にいえば n 次元多様体）に対応するアトラクタが描かれることになる。良く知られている例として Rossler 方程式系がある[9]。しかし，変数が x，y，z などのように増加した場合には，それぞれの変数に注目する必要があるので，このような多様体を簡単に取り扱うことはできないので，何らかの簡便な検証方法が必要となる。

1981年に Takens により示された定理は，現在，このような簡単化のための有力な方法となっている[10]。

Takens の定理の詳細は省略するが，その原理は次のようなことである。例えば，x，y，z の3次元空間の上をアトラクタが走っている場合に，変数 x について過去の m 個の値を組にして m 次元ベクトル $x=(x(t),\ x(t-L),\ x(t-2L),\ldots,\ x(t-(m-1)L))$ を求め，これを m 次元空間にプロットする。これをリターンマップ(return map)という。ここで，L は時系列のサンプリングのための時間間隔である。このとき，m を十分に大きくとっておけば（具体的には，$m\geqq 2n+1$ であること），もとの3次元空間にあったアトラクタと同じ性質をたもったアトラクタが m 次元空間に再現できる。つまり，もとのアトラクタを m 次元空間に埋め込むことができる（m を埋め込み次元とよぶ）。

ここで，同じ性質とは，具体的にはアトラクタのトポロジー的な性質（つながり）であり，形状の伸縮が行われてもかまわないが，次元や

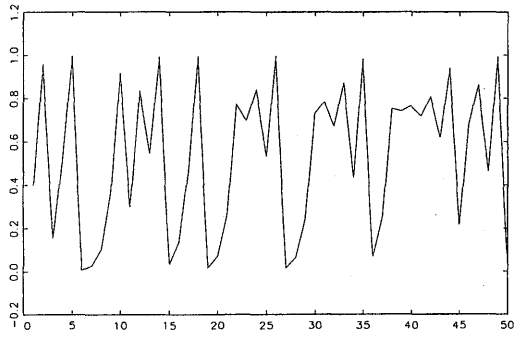

図1　logistic map の時系列

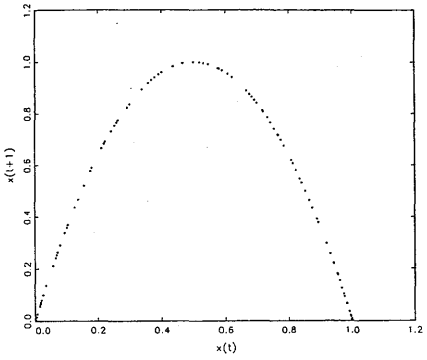

図2　logistic map のアトラクタ

つながりかたが維持されていることを指している。このようなトポロジー的な性質が維持されていれば，あとで述べるカオス性検証の指数における影響は無くなる。

図３には良く知られている，次に示す３次元の Rossler（レスラー）方程式のアトラクタを示しており，図４には Takens の定理に基づいて作成したリターンマップを示している。

$$dx/dt=-y+z \tag{2a}$$

$$dy/dt=x+0.2z \tag{2b}$$

$$dz/dt=0.2+y(x-c) \tag{2c}$$

トポロジー的な性質が保存されていることが良く分かる。

この方法は簡単であるため，現在でもカオス性検証の有力な手段とされている。しかし，カオスにアトラクタが存在する場合にしか適用できないことは明らかであり，エネルギーが保存されるようなシステムには適用できない。

2.2　相関次元

Takens の定理により，m 次元空間に埋め込まれたデータに対して，明らかな形状（アトラクタ）が存在していれば，もとのデータがカオスであることが結論づけられる。しかし，この作業を人間の目で視覚的に行えるのは３次元が限界であり，しかも定量的に処理できない可能性がある。そのため，空間内の図形の次元を測定する方法として相関次元(correlation dimension)を計算する方法が良く利用される。相関次元は少ないデータ数でも計算可能である。

例として，２次元空間にアトラクタが埋め込まれている場合を考察する。空間内にある１点をとり，そこを中心として半径 r の円を描き，この円の中にプロットされたデータ点がいくつ含まれるかを数える。その個数を C とする。個数 C は r の増加関数であり，$C(r)$ とする。

もし，データ点が一様に分布していれば，２次元の場合には，$C(r)$ は r^2 に比例する。

$$C(r)\sim ar^2 \tag{3}$$

これに対して，埋め込んだ図形が直線や曲線など線分の上に分布していれば，

$$C(r)\sim br \tag{4}$$

となるであろう。このようにして計算される $C(r)$ を $\log C(r)$ を縦軸，$\log r$ を横軸として描いて，その傾きを推定すれば，これがプロットした点（埋め込まれたアトラクタ）の次元を与え

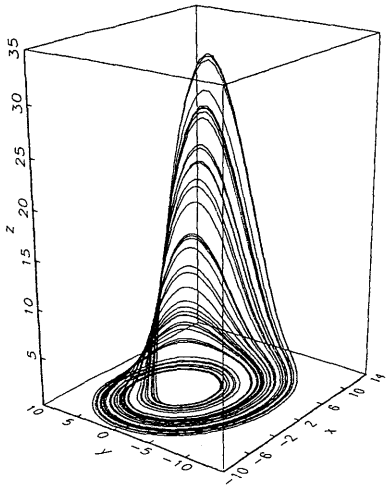

図３　レスラー方程式のアトラクタ

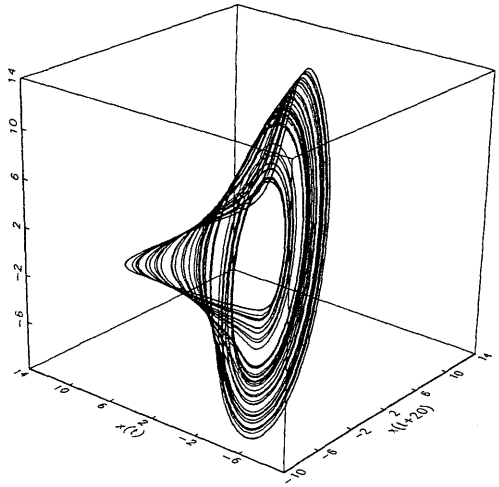

図４　作成されたリターンマップ

る。これを相関次元とよんでいる。

原理的には以上の方法で相関次元が計算できるが，$C(r)$をどの点を基準として行うか，mをどのように選択するかなどの問題がある。これを1つのアルゴリズムとしてまとめたものがGrassberger-Procaccia 法とよばれるものである[11]。以下，これを示す。

step 1

埋め込み次元 $m=1$ でスタートする。時系列$x(t)$をm個サンプルして作成したベクトル

$$xt=(x(t),x(t+L),)\ldots x(t+(m-1)L)) \quad (5)$$

を T 個作成する（$t=1,2,\ldots,T$）。すなわち，m次元空間にもとの系列を埋め込む。

step 2

異なる x_t の間のベクトルの距離を計算し，この距離が r 以下となるケース数をカウントする。すなわち

$$D=dist(x_i,\ x_j) \quad (6)$$

を距離とするとき，

$$D<r \quad (7)$$

となる i, j の組合せを，i, j の変化する T の範囲で求める。これを $Cm(r)$とする。実際には全部の組合せでなく，$i<j$ の範囲で十分とされている。距離 $dist$ としては，通常，ユークリッド距離を用いている。$C_m(r)$を T^2 により割ることで正規化する。

step 3

上の計算を，r を変化させながら求める。最後に，縦軸を $log\ Cm(r)$，横軸を $log\ r$ とするグラフを描く。このグラフが直線であれば，カオス性が示される。グラフに回帰直線を当てはめると，

$$log\ Cm(r)=const+d\ log\ r \quad (8)$$

となるので，この傾きから次元 d を推定する。同時に，回帰直線の当てはめの良さも計算しておく（グラフと回帰直線との2乗誤差など）。

step 4

上の m を変化させながら，次元 d を計算していく。すなわち，m を1つずつ増加させて，step 2 から繰り返す。その結果，次元 d は m の関数の形で，$d(m)$のように得られるが，この $d(m)$が一定の値に飽和するときの m の値が求める埋め込み次元である。もし，$d(m)$が飽和しないで，いつまでも増加するならば，$x(t)$はカオスではないと言える。

図5，6には logistic map の相関次元を示している。サンプル数により漸近的に相関次元が得られることが分かる。

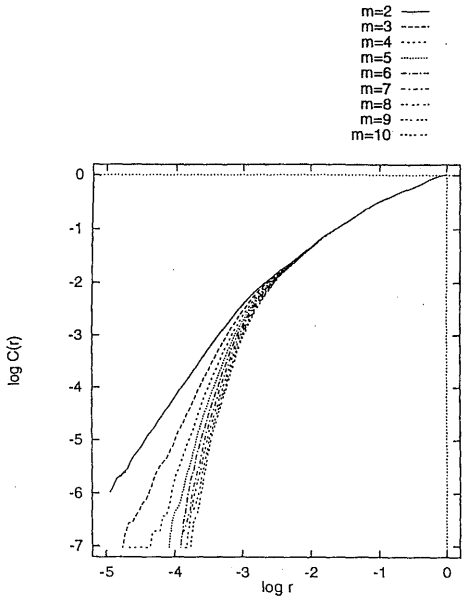

図5　$Cm(r)$-$log\ r$の計算例

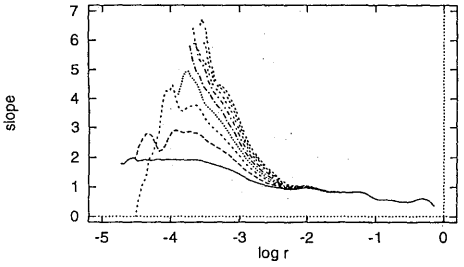

図6　相関次元 d と m の関係（飽和）

2.3 リヤプノフ数

リヤプノフ数は相関次元とならんでカオス性を検証するもう１つの数値であり，カオス系のもつ初期値に対する敏感性を示すものである。カオスの著しい性質として，初期値をわずかに違えるだけで，時間の経過とともにこれらの異なる初期値に対する軌道が指数関数的に増加していくことをさしている。このような現象はLorenz（ローレンツ）により気象予測の分野で最初に発見され，システムの誤差ではなく，システムそのものに乖離を生じる原因があることが初めて解き明かされた。

このような初期値敏感性を指数関数で表現したものがリヤプノフ数であり，初期状態から開始された軌道が指数関数的に相互に乖離していく状況を数値として表現する。いま，アトラクタが３次元空間に埋め込まれたケース（レスラー系など）を考えた場合に，軌道の初期状態の集合が，一辺が a である立方体に含まれていると仮定する。このとき，一定時間が経過したあとには，この立方体の各辺 a, b, c は，広がっていき次のように表現される。

$$l = a\ exp(\lambda_1 t) \tag{9a}$$

$$m = a\ exp(\lambda_2 t) \tag{9b}$$

$$n = a\ exp(\lambda_3 t) \tag{9c}$$

このときの λ_1, λ_2, λ_3 がリヤプノフ数である。どの初期値から出発しても，最終的にはアトラクタに近づいていく（立方体のすべての点は平面的なアトラクタに吸収されてしまう）ので，初期値が含まれた立方体は体積がゼロになる。従って，このように引き延ばされる方向へはリヤプノフ数は正であるが，その他は負となる。

このように，少なくとも１つのリヤプノフ数が正ならアトラクタに近づくので，初期値敏感性が生じるには，少なくとも１つのリヤプノフ数が正であればよい。これを観測されたデータから推定する方法として Wolf の方法がある[12]。以下，これについて概要を示す。

step 1

埋め込み次元を m と仮定して，埋め込んだ点の初期値を１つ選ぶ。これを x_1 とする。この x_1 に最も近い点 x_t を計算により求める。

$$d_1 = dist(x_1, x_t) \tag{10}$$

更に，時刻 q たったときの，これら２点の距離を計算する。

$$d_1' = dist(x_{1+q}, x_{t+q}) \tag{11}$$

このときの比率を計算しておく。

$$g_1(q) = d_1'/d_1 \tag{12}$$

step 2

この q 時刻あとの点から再度スタートして，同じ計算をする。しかし，一般には，限られた観測データしかないので，x_{t+q} の延長上に更に点が見いだせるか不明であるので，再度，x_{1+q} に近い点 x_2 を次の方法で計算する。

$$dist(x_{1+q}, x_2) + w \cdot \theta\ (x_{1+q}, x_2) \tag{13}$$

ここで，$\theta(x_{1+q}, x_2)$ は空間でベクトル x_{1+q}, x_2 のなす角度であり，w は適当な重みである。この概要を図７に図示している。すなわち，もとの線分に位置することが望ましいが，その線分からはずれる分をペナルティとして角度で加算している。

step 3

このような計算を繰り返し，特定の q について，以上の操作で計算された $g_i(q)$ の値を平均

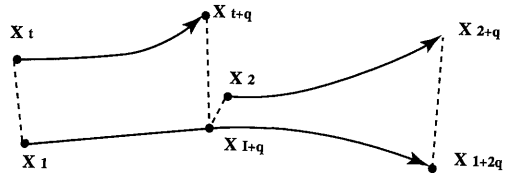

図７ リヤプノフ数の計算の概要

する。すなわち

$$\lambda(q) = \Sigma\, log(g_i(q))/(qI) \qquad (14)$$

Iはケースの総数である。

step 4

上の操作を q の値を増加させながら計算する。この過程で，q のある範囲で，$\lambda(q)$が安定して正になる場合，その値を該当する範囲で平均したものがリアプノフ数である。図８には，Henon map の場合について，この計算の様子をしめす。

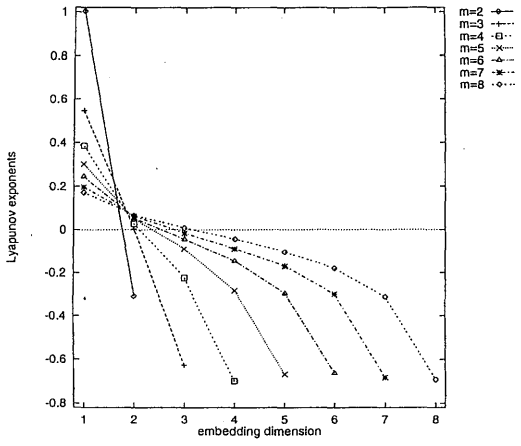

図８　リアプノフ指数の例

３．経済時系列のカオス性

3.1　カオス性検証の目的

経済分野でデータ処理の対象となる時系列としては，国民経済計算における GDP の変化や各種の経済指標の変化のほか，株価や為替レート変動などの市場から得られるデータなどがあり，更に個別企業が管理する商品の需要データなども含めると極めて多数にのぼると言える。従って，まず，経済時系列のカオス性を検証しようとする場合に，その目的が何であるかを明確にしておかないと，単にカオスであるかどうかを分析することが自己目的化されてしまうことになる。

従って，カオス性を検証することにより，どのような応用が考えられるかについて，最初にまとめておく。工学分野では，文献[1][2]に述べているように，カオス抑制が主たる目的であり，カオスを発生させることよりは，その発生原因の分析，および発生に先んじてシステムを調整することが目的とされている。経済分野では，このようなシステムの制御とは直接的な関連性はないが，カオス性検証の目的として，1)規則性あるいは非線形性の検出，2)変動の大きさの測定，3)予測可能性などに整理されるであろう[3]－[5]。もちろん，これ以外にも存在するかもしれないが，工学分野でカオス理論が盛んである反面，その応用に関しては極めて少数であることも考慮する必要があろう。以下，これらの目的がカオス検証により行えるかを述べる。

(1) 規則性，非線形性の検出

カオスが決定論的な方程式により発生できることが分かれば，確率過程によるモデル化ではなく，より進んだ段階でのモデル化が可能なことを示唆している。もちろん，このようなカオスを記述する方程式を推定する問題は残されている。また，非線形性が検出されれば，少なくとも線形モデルでの当てはめには限界があることが判明する。

(2) 変動の大きさの測定

時系列の変動の大きさを推定する必要性としては，例えば，最近の資産管理における VaR (Value at Risk)分析，あるいは株価におけるボラティリティ（１つの分散）の推定問題など

がある。投資におけるリスクは時系列の変動の大きさに関連しており，この度合いを予測することがリスク分析に大きく寄与する。

(3) 予測可能性

通常，時系列の予測においては，観測されたデータをもとにして，種々の確率過程のモデルをあてはめ，更に，将来の値を予測することにより実行される。この場合，予測誤差の問題やシステムをドライブする乱数などが問題となる。カオスを用いた予測では，アトラクタの上で将来時点の場所を推定し，これを逆に時間域の写像しなおして時系列を予測している。アトラクタの形状は時系列の変動に比べて小さくなることが期待できること，決定論的な予測であることなどの利点がある。

以上のような点が，カオスを経済時系列解析に用いる目的あるいは利点であると考えられる。本論文では，主として(1)，(3)の課題について4. で展開している。

3.2 カオス性検証の注意点

シミュレーションにより発生された時系列と異なり，現実社会から観測された時系列を分析する場合には，多くの点に留意する必要がある。工学分野での時系列解析では，背景に物理モデルが存在することが仮定できるので，基本的な手順をカバーしていれば十分である場合が多い。これに対して，経済時系列では，物理モデルも通常は存在しないし，短期的な変動などが含まれる可能性も高くなるため，注意深い前処理が必要となる。しかし，一方では，モデルに当てはまらないことだけを強調することは，使用可能なツールの幅を狭めることになるので，解析の条件を重視しながらも，可能なカオス解析手法を適用することも必要であろう。

以上のような前提にたちながら，以下ではカオスにより経済時系列を解析する場合の注意点とされていることを整理しておく。これらは，大きく分けて，1)トレンド，突発的な変動の存在，2)定常性，3)サンプリング間隔，4)相関次元の飽和，5)サンプル数，6)ノイズ除去，である。以下，これらについて簡単に述べていく。

(1) トレンド，突発的な変動の存在

経済時系列の場合には，時間の経過とともに変化する傾向（トレンド）の存在を仮定することが多い。カオスは決定論に従うモデルであるので，式で記述可能であるトレンドが存在することは，アトラクタが現れることになるので不都合である。同様に，突発的な変動が存在する場合にも，この変化を記述する式が成り立つとみなされ，相対的にカオス変動とみなしてしまう。突発的な変動ではなく，繰り返す場合にはカオスである可能性があるが，１回だけの大きな変動ではカオスとは言えない。

(2) 定常性

トレンドの存在と関連しているが，時系列のスペクトルを求めた場合に，低周波部分が大きい場合にはトレンドが残っていると言える。経験的には，スプクトルが周波数 f に対して $1/f$ より緩やかに変化している場合には定常であると見なすことができる。

(3) サンプリング間隔

カオスが発生する可能性のあるシステムの１つとして，むだ時間を含む系がある。これから予測されるように，データのサンプリング間隔あるいはシステム記述におけるラグを適切に選

ぶ必要がある。また，相関次元を計算する場合の埋め込みにおいて，ラグ L をどのように選ぶかが問題となる。小さな L ではリターンマップは直線になるため，カオスでないケースでもアトラクタを検出してしまう。逆に，大きな L では，$x(t)$ と $x(t+L)$ とが無相関であるように見えるため，カオスが検出できなくなる。従って，リターンマップを見ながら作業する必要がある。

(4) 相関次元の飽和

相関次元を求めるときに，$log\ C(r)$ を $log\ r$ に対して描いた場合に，最後は一定値に収束することが必要である。しかし，収束するかどうかの判定が微妙となるケースが，1次の AR モデルのような簡単な例でも存在することが示されている。従って，現在では，AR モデルなどを時系列にあてはめ，その残差について相関次元を用いたカオス性の検証を行う方法がとられている。これには，カオス時系列の線形変換もまたカオスであることの証明を用いている。

(5) データ数

経済時系列では，限られた数のデータしか収集できないケースも少なくない。データ数がいくらあれば相関次元などが正しく求まるかの理論的な証明はないが，経験的には，1000サンプル以上のデータが必要であるとされていが，その収集方法にも依存する。しかし，解析方法をうまく選択すれば，少ないサンプル数（例えば100程度）でも計測可能であるとされている。簡単に言えば，大まかな周期性が見られる場合には，少なくともその周期を数個含む長さのサンプルが必要である。

(6) ノイズ除去

工学分野での時系列データではノイズ(雑音)の定義は明確であり，例えば緩やかに変化する波に極めて細かく変動する小さな振幅の波形が重なっている場合，後者は観測機器の電気的な性質に起因する望ましくない，あるいは除去されるべき成分である。これに対して経済時系列の場合，このような物理的な観測モデルはないので，ノイズも本来なら定義できない。しかし，例えばフラクタル時系列であるという仮定を置いた場合などは，フラクタルからの乖離がノイズとして定義できるであろう。この場合，ノイズは相関次元を増加させる作用をするので，ノイズを除去することは意味がある。

3.3 経済時系列のカオス性検証への応用

以下では，2.2，2.3に述べた相関次元およびリアプノフ数を計算することにより，いくつかの代表的な経済時系列のカオス性を検証する。この場合，3.2で述べたカオス検証の注意事項を考慮しながら進めている。なお，ここでの目的は，4.で展開するカオスを用いた時系列予測の準備段階として，時系列によってカオス性がどの程度含まれているかの目安を求めることにあるので，網羅的に調べてカオス性をすべて検証することではない。また，カオス性の検証が経済事象の不確実性を証明することに役立つが，本来は決定論的な数理モデルを見いだすことにあるので，カオスであるかないかを微妙な数値レベルをもとにして議論することは適切ではない。

現在まで，次のような経済時系列についてカオス性の検証がなされている。

(1) GNP：年次データとして観測されたものを20年程度記録など

(2) 株価指数：日々の株価変動を１年間記録など

(3) 為替レート：日々の各国通貨の対ドル為替レートを１年間記録など

(4) マネーサプライ：月次データを10年間記録など

(5) インターネットトラヒック：10分ごとの通信量を４日間記録など

(6) 消費財の販売動向：１日ごとの販売量を５年間記録など

しかし，その結論についてはかなりの幅が存在しており，同じ時系列についても，選択したパラメータにより肯定的，否定的どちらもが主張されている例も存在する。表１には現在までの研究で主張されているカオス性について，簡単にまとめている。

以下では２つの代表的な経済時系列をとりあげ，カオス性を検証する。ここで，カオス性を検証する場合に，モデルに起因する直観的なことを整理しておく。特に，確率モデルであるARMA モデルによる時系列あるいはフラクタル時系列との大きな違いは，「緩やかな規則性」にあると言える。

やや，あいまいな言葉であるが，カオスがもともと「規則性と無規則性との中間」である，あるいは「初期値により将来の値が大きく変化する」という性質であるので，「まったく乱雑な変動」には適合しない可能性が高いと言える。従って，上にあげた経済時系列も，インターネットトラヒックを除いては，本来は規則性が発生する根拠を持たないものである。

一方，強い周期性もカオス性の存在を否定する要素となっている。電力需要に代表されるエネルギー，サービス，商品の需要などは，季節や月，時間による変動に特徴的なパターンがあり，これが周期性を生み出している。カオスがもともと決定論によるデータ生成であるので，例えば電力需要がカオスであるのか，周期性を基本としたデータに，瞬時的なはずれ値やノイズが重畳したものであるのかの解釈は微妙である。

このようなことを考慮して，以下では株価と商品売上高の２つの対照的な時系列をとりあげ，カオス性を検証する。図９には，それぞれの時系列の相関次元の変化を，図10にはリアプノフ指数の変化を描いている。これらの結果を表２にまとめている。

表１　カオス性検証の現在までの例

対　　象	研究者 (発表年)	結　　果
米国マネーサプライ	Barnett and Chen(1988)	週単位データ,m=5 でカオス性
米国マネーサプライ	Decoster and Mitchell(1991)	週単位データ,m=5 でカオス
金銀の価格変動	Frank and Stengo(1989)	カオス性検出
米国証券指標	Scheinkman and LeBaron(1989)	カオス性検出
英国金融指標 FTSE	Abhyankar(1995)	分刻みの収益率にカオス性
為替レート	Dechert and Gencay(1993)	カオス性検出
GDP4 半期データ	Brock and Sayers(1988)	カオス性に否定的
日本の GDP 長期変動	田中ら (1993)	カオス性検出
株価, 証券価格	Abhyankar(1995)	カオス性に否定的

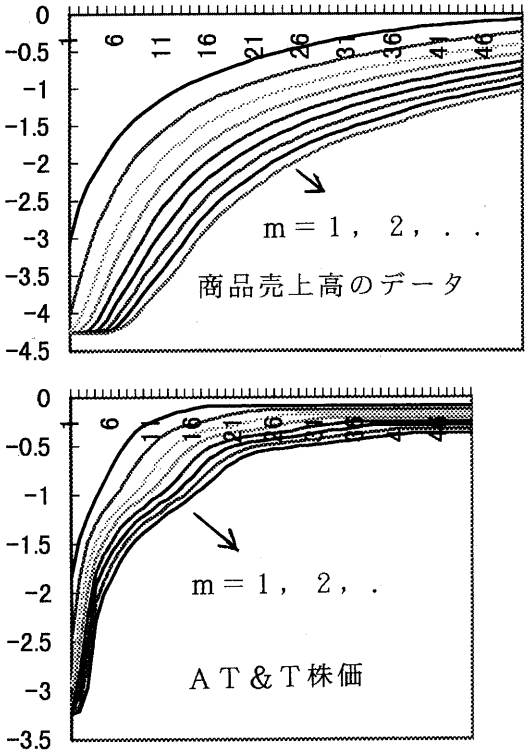

図９　株価，電力需要の相関次元

４．アトラクタ再構成による時系列予測

4.1　アトラクタ再構成による予測

時系列がカオス的な性質をもっている場合には，不規則な変動があることや初期値に対してシステム応答が敏感であるなどの理由により，長期的な時系列の予測は困難である。しかし，システムの方程式は決定論的に求められるので，短期的にはこの特性を生かして精度のよい予測が可能となるとの期待から，時系列予測の手法が開発されている。また，短期的予測だけでなく，長期的予測に関しても，ダイナミックスが決定論的に求まるので，より精度の良い予測が得られることが期待される。

その基本的な考えかたはアトラクタの上での将来の時刻における値（位置）を近似的に求め，これを逆に時間域に写像してこのアトラクタ軌

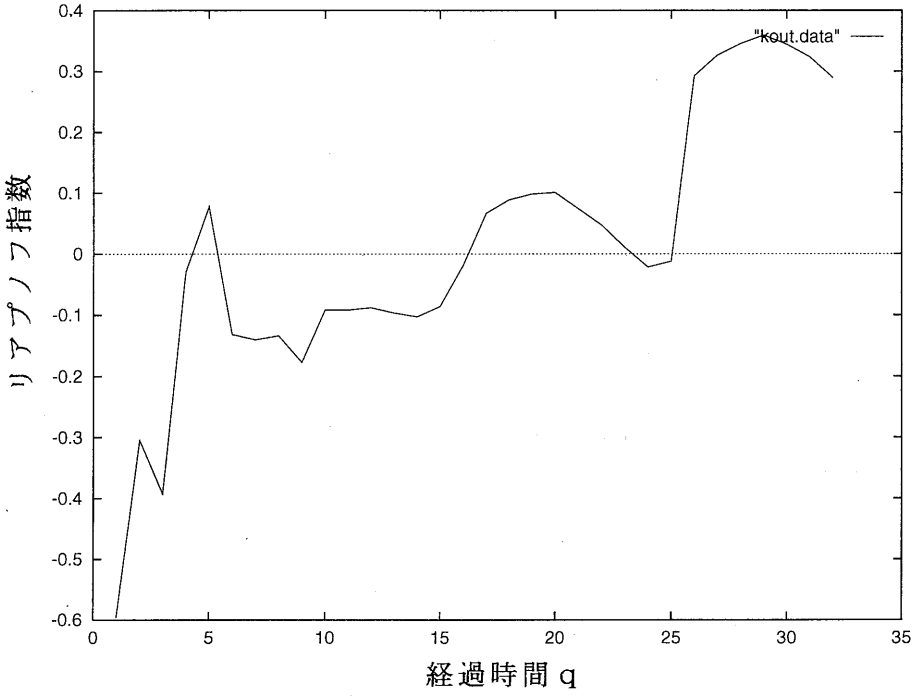

図10　商品売上高データのリアプノフ指数

表2　カオス性検証の結果（相関次元）

対　　象	推定次元 (概数)
AT&T 株価	0.89
商品販売データ	1.02
製品出荷高	1.20
太陽黒点数	1.62
オゾン濃度	1.22

道を生成する力学モデルを推定することにより予測を行う方法である。これにより，時系列の急激な変動もアトラクタ上の緩やかな変化に置き換えることができる，アトラクタの性質を利用できるなどの利点がある。このような方法をアトラクタ再構成による時系列予測手法とよんでおく。現在まで，次のような研究がなされている[13]－[19]。また，ロボット制御などへの応用も行われている[21]－[23]。

Framer and Sindorowich (1987)：局所線形モデルによる時系列予測[13][16][17]

Casdagli (1989)：(RDF, radial basis function による非線形予測[15]

Mess (1992)：RDF による非線形予測の改良[19]

Lapedes (1993)：ニューラルネットワークによるアトラクタ予測[20]

アトラクタの将来の位置を予測する方法には，局所近似法，radial basic function 法，ニューラルネットワワーク法などがあるが，いずれもアトラクタ上での推定を用いることは共通しており，予測精度を向上させるために従来の方法との結合を行うかの違いであると言える。従って，以下では局所近似法を中心として述べていく。

いま，n 次元のアトラクタ空間（再構成状態空間）における点を v_t とし，ここのおけるヤコビ行列（微分値行列）が計算されているとする。すなわち，もとのカオスのダイナミックスを

$$x(t+1)=F(x(t)) \tag{15}$$

としたとき，変数 $x(t)$ の微小変化（摂動項）が次のように書けるとき，この最初の $D_f(x)$ がヤコビ行列である。

$$\delta x(t+1)=Df(x(t))\ \delta x(t) \tag{16}$$

新たにその将来の挙動を予測されるべき点 v_T が与えられているとき，この v_T に最も近い点を過去のデータである $v_t(t=1, 2, ..., N)$ を用いて探索して，これを v_{nn} とする。v_{nn} と v_T の間の変位ベクトル

$$y=v_T-v_{nn} \tag{17}$$

が v_{nn} におけるヤコビ行列 G_{nn} により近似的に求められると仮定する。

すなわち，y の p ステップ後の変化を

$$z=G_{nn}y \tag{18}$$

により予測する。従って

$$z=v_{T+p}-v_{nn}+p \tag{19}$$

という関係があるので

$$v_{T+p}=G_{nn}(v_T-v_{nn})+v_{nn}+p \tag{20}$$

により予測が可能となる。

以下では，この計算手順を分かりやすく示す。まず，観測された時系列 $x(t)$ が得られている場合に，Takens の定理を用いてアトラクタを構成するための系列を生成する。

$$X(t)=(x(t), x(t-L), x(t-2L), ..., x(t-(m-1)L)) \tag{21}$$

このとき，$m \geqq 2\nu+1$ であれば，この生成された m 次元空間にアトラクタの構造が保存される（Takens の定理）。

いま，時刻 t までの時系列の観測データ $x(t)$ が得られているとき，p 時刻先の値 $x(t+p)$ を予測する問題を考える。アトラクタ上での $x(t)$ に対応する点 $X(t)$ が与えられているときに，p 時

刻後のアトラクタ上での点 $X(t+p)$ を $X(t)$ を用いて予測する問題となる。

$$X(t+p)=F(X(t)) \tag{22}$$

ここで，関数 F は予測を行うための近似関数である。

いま，時間間隔 p が十分に小さい場合には，アトラクタの時間変化は，ほぼ $X(t)$ の近傍点の時間変化により近似できると考えられるので，近傍の点を複数個適当に選んで，これらの平均的な推移を最小2乗法などにより求めて，動きを推定する。

なお，再構成された空間では時間遅れ要素を用いて m 次元空間を構成するが，ここでは，時刻 $t+p$ の時系列の値だけ，すなわち，m 次元空間の第1番目の要素 $x(t+p)$ だけを予測すればよく，その他の要素は予測する必要がないので，近似的な予測式は次のようになる。

$$x(t+p)=F(X(t)) \tag{23}$$

最も簡単な予測式として次のものを用いる。

$$x(t+p)=a_0+\sum_{k=1}^{m} a_k\ x(t-(k-1)L) \tag{24}$$

この式における係数は次のように決められる。まず，$X(t)$ 除くすべての $X(i)$ についての $X(t)$ とのユークリッド距離を計算する。

$$R=dist(X(t),X(i)) \quad i\neq t \tag{25}$$

この R の小さい順に n 個の点を $X(t)$ の近傍点として採用し，

$$X_{\tau 1}, X_{\tau 2}, \ldots, X_{\tau n} \tag{26}$$

としておく。このもとで，次の式を最小にする係数を求める。

$$\sum_{i=1}^{n}(X_{\tau i+p}-F(X_{\tau i}))^2 \rightarrow min \tag{27}$$

この計算は，具体的には，$X_{\tau i+p}$ の1番目の要素 $x_{\tau i+p}$ を n 個集めたベクトル x と，$n\times(m+1)$ のヤコビ行列と，$m+1$ 個の要素からなる係数ベクトルを用いて，次の観測方程式をたてることになる。

$$x=GY \tag{28}$$

ここで

$$x=(x_{\tau 1+p}, x_{\tau 2+p}, \ldots, x_{\tau n+p}) \tag{29}$$

$$G=\begin{pmatrix} 1 & x_{\tau 1} & x_{\tau 1-L} \cdot\cdot & x_{\tau 1-(m-1)L} \\ 1 & x_{\tau 2} & x_{\tau 2-L} \cdot\cdot & x_{\tau 2-(m-1)L} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{\tau n} & x_{\tau n-L} \cdots & X_{\tau n-(m-1)L} \end{pmatrix} \tag{30}$$

$$a=(a_0, a_1, \ldots, a_n) \tag{31}$$

式(28)におけるヤコビ行列 G を Householder 法などを用いて QR 分解することにより，係数 a を計算できる。この係数 a を式(24)に代入することにより，時系列に値 $x(t+p)$ を予測することができる。

ここで，式(27)が解を持つための条件として次がある。

$$n\geqq m+1 \tag{32}$$

n の選び方のより予測精度が大きな影響を受けることが知られている。すなわち，n が小さいと最小2乗の計算過程で大きな誤差を生じることになるが，一方，大きくしすぎると，$X(t)$ からかなり離れた点までも用いて予測することになるため，予測誤差は拡大する。現実には試行錯誤的に求める場合が多いが，いくつかの研究では自動的に設定できるように工夫しているケースもある。

以下では，前にカオス性を検証した株価と商品売上高の時系列に対してアトラクタ再構成の手法を用いて予測する。予測を行うためには，過去のデータからアトラクタが形成されていることが必要であるので，時系列の後半の部分を予測することにした。

図11，12には観測値と予測値とを同時に描いたグラフを示している。これらより分かるように，商品売上高カーブの場合には比較的正確に

予測していると思われるが，株価に関しては予測誤差がやや大きくなっていることが分かる。これらの予測誤差を，予測する期間における時系列の標準偏差σに対する相対的な値として定義すると，次のようになる。

株　　価：予測誤差／σ＝0.47

商品売上高：予測誤差／σ＝0.29

4.2　予測と時系列の相関によるカオス性検証

非線形予測の理論を現実のデータに当てはめた場合，短期的予測と長期的な予測は原理的には精度良く求められることが期待できる。しかし，理想的な形式で記述できるダイナミックスにより発生させたデータではないので，短期的な予測だけが信頼できると考えたほうが無難である。この場合，真の時系列（観測された時系列）と短期予測された時系列との相関を求め，予測ステップ数pを横軸にとってプロットすると，カオス時系列であれば，右下がりの特性をもつことになる。もとの時系列がカオス以外なら，次のような特性となる。この先行研究の良く知られたものとして，Sugihara and May の研究があり，論文[24]では感染症患者の発生へと適用している。

周期データ：相関は1

周期データ＋ノイズ：相関は一定値$r(<1)$

ノイズのみ(白色ノイズ)：相関はゼロ

ブラウ運動あるいは fBm：相関はpのベキ乗で減少

なお，最後のケースで fBm (fractional Brownian Motion) はブラウン運動の非整数階積分で計算される時系列であり，この実験結果については Tsonis らにより示されている。

従って，短期予測の結果を横軸をpとしてプロットして，その変化の様子を観測することにより，観測された時系列がカオスであるかどうかを検証することができる。

このように，予測理論はカオス性を検証する

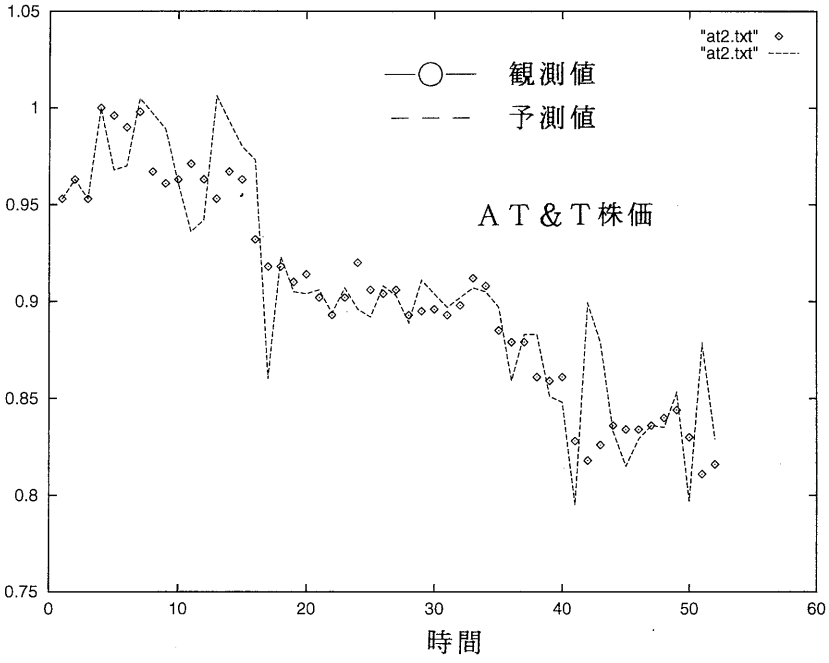

図11　株価の観測値と予測値

表3　Sugihara らによる相関関数分析の結果

対　　象	相関係数の特徴
テントマップの差分 $x_{t+1}-x_t$	ホワイトノイズのような形状 $p=6$ から急速に減少
正弦波にノイズを重畳, 差分 $x_{t+1}-x_t$	p が増加してもほぼ一定値 強い周期性がある
はしかの流行の差分 $x_{t+1}-x_t$	p が増加するに従って逓減 カオス的, 病理学的に妥当
水ぼうそうの流行の差分 $x_{t+1}-x_t$	p が増加してもほぼ一定値 強い周期性があり病理学的に妥当
海中の珪藻類の発生の差分 $x_{t+1}-x_t$	ホワイトノイズのような形状 $p=3$ から急速に減少

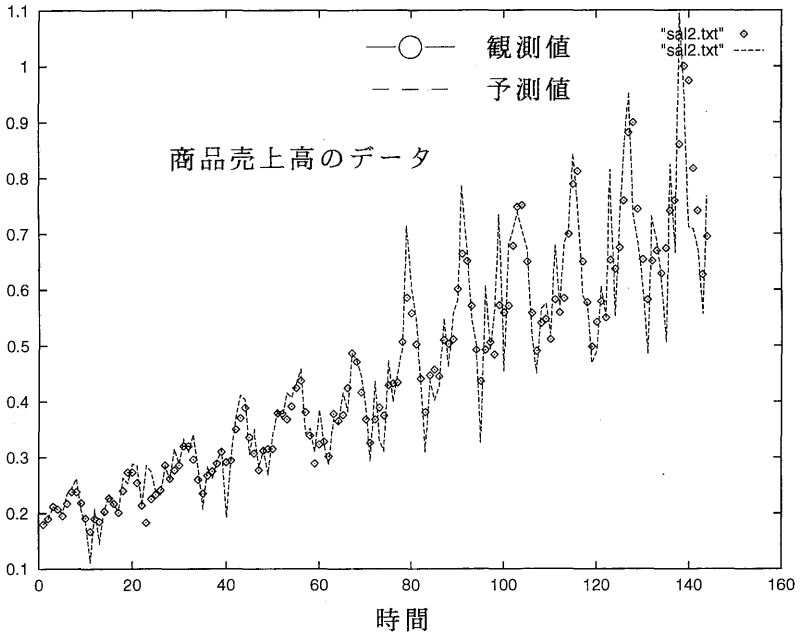

図12　商品売上高の観測値と予測値

有力な方法を提供している。これらの結果と，すでに述べた相関次元，リアプノフ数の推定などの方法と組み合わせることにより，現実的なカオス性検証ができるであろう。

表4には文献[24][25]に示された解析結果をまとめている。図13にはここで取り上げた時系列の例について，p と相関係数の関係を示している。

5．むすび

カオス理論により，経済時系列解析の分野において決定論的な方程式により不安定な現象を解明する手段として，予測問題をとりあげた。

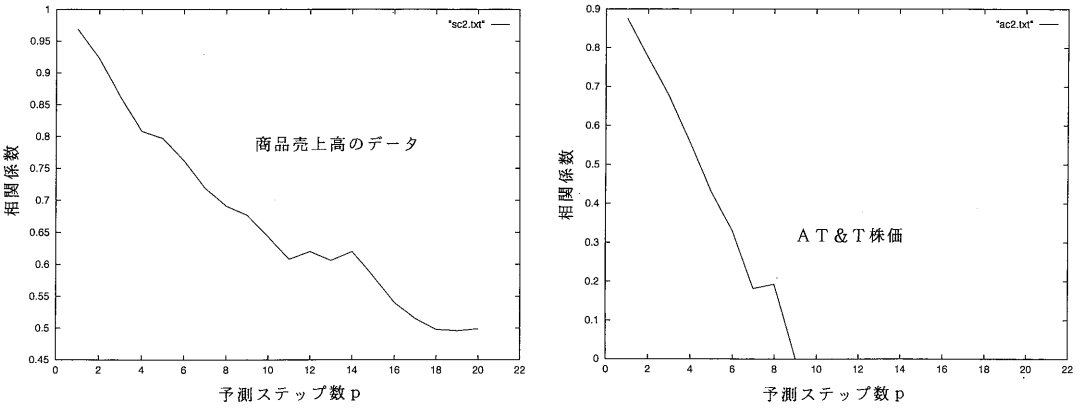

図13　相関関数の例

カオス理論では決定論的方程式が推定されると，将来の値の予測は簡単な計算により実行できることになるが，その能力を正しく検討する必要がある。

本論文では，カオスアトラクタの性質に注目して，経済時系列の将来値を予測する方法を提案し，応用例をもとにしてその性能を評価した。まず，与えられた時系列がカオスとなるかどうかを判定する方法として相関次元，リアプノフ数を用い，具体的な時系列への適用結果を示した。次に，計算より求めたカオスアトラクタの形状に注目し，現在の時刻以降のシステムの挙動をアトラクタ上で再構成し，このアトラクタの上で時系列を予測する手法を展開した。これにより，時間域における急激な変化も，アトラクタ上のゆるやかな変化に置き換えることができ，予測には有利であることを利用している。また，短期的な予測の結果ともとの時系列（観測された時系列）との相関を求めることにより，時系列のカオス性を検証する方法を論じた。

残された課題としては，カオス性の検証の分野を拡大すること，アトラクタ再構成による予測を実際に適用して評価すること，カオス制御の方法を開発することがあり，今後，検討をすすめていきたい。

参　考　文　献

[1] 合原一幸編：「応用カオス」，サイエンス社(1994)

[2] 合原一幸編：「カオス」，サイエンス社(1990)

[3] E.E.Peters: *Chaos and Order in the Capital Markets*, John Wiley nad Sons, Inc.(1991)(邦訳：新田功訳「カオスと資本市場」，白桃書房)

[4] R.M.Goodwin: *Essay in Economic Dynamics*, London, Macmillan(1982)(邦訳：有賀裕二訳「非線形経済動学」，日本経済評論社)

[5] R.M.Goodwin: *Chaotic Economic Dynamics*, Oxfors, Oxford University Press(1990)(邦訳：有賀裕二訳「カオス経済動学」，多賀出版

[6] 高木康順，秋山　裕，田中辰雄：「応用計量経済学Ｉ」，多賀出版，(1997)

[7] E.N. Lorenz: "Deterministic non-periodic flows", Journal of Atomos. Science, 20, pp.130-141 (1963)

[8] O.E. Rossler: "An equation of continuous chaos", Physical Letters, 57A, p.397 (1976)

[9] O.E. Rossler: "Continuous chaos fourprototype equations, Bifurcation theory and application in scientific disciplines", Annals of the New York Academy of Sciences, 316, pp.376-392(1979)

[10] F.Takens: "Detecting strange attractors in turbulance" in *Dynamical Systems and Turbulance*, Lecture Notes in Mathematics, No.898, D.Land and L.Young (eds), Springer-Verlag (1981)

[11] P.Grassberger and I.Procaccia: "Measuring the strangeness of strange attractors", Physica D9, pp.23-48 (1983)

[12] A.J. Wolf, J.Swift and J.Vastano: "Determining Lyapunov exponents from a time series", Physica D16, pp.285-317 (1985)

[13] J.D. Farmer and J.J. Sidorowich: "Predicting chaotic time series", Phis. Rev. Lett., Vol.59, No.8, pp.845-848 (1987)

[14] J.Jimenez, J.A. Moreno and G.J. Ruggeri: "Forecasting on chaotic time series: A local optimal linear reconsrtaction method", Phis. Rev., A, Vol.45, No. 6, pp.3553-3558 (1992)

[15] M.Casdagli: "Nonlinear prediction of chaotic time series", Phiysica, D, Vol.35, pp.335-356 (1989)

[16] J.D. Framer and J.J. Sindorowich: "Controlling chaos", Physical Review Letters, 62, pp.845-848 (1987)

[17] J.D. Farmer and J.J. Sidorowich: "Exploiting chaos to predict the future and reduce noise", in *Evolutional Learning and Cognition*, ed. Y.C. Lee, pp.277-330, World Scientific Singapore (1988)

[18] A.S. Weigend and N.A. Gershenfeld (eds), *Time Series Prediction: Forecasting the Future and Understanding the Past*, Addison Wiley (1993)

[19] A.I. Mees, M.F. Jackson and L.O. Chua: "Device modeling by radial basis functions", IEEE Trans. Circuit Syst., I, Fundam. Theory Appl., Vol.39, No.1, pp.19-27 (1992)

[20] A.Lapdes and R.Farber: "Nonlinear signal processing using neural networks: Prediction and system modeling", Los Alamos National Laboratory Report, No. LA-UR-87-2663 (1987)

[21] 池口　徹，合原一幸："非線型現象の解析手法（IV・完）－カオスと時系列解析"，電子情報通信学会誌，Vol.79，No.8，pp.814-819 (1996)

[22] 井　通暁，堀　洋一，合原一幸："アトラクタ再構成による非線形予測の高精度化・同期化と歩行ロボットへの応用"，電子情報通信学会論文誌，Vol. J80-A, No.1, pp. 126-134 (1997)

[23] 伊藤憲一："カオス時系列データの予測精度向上法"，電子情報通信学会論文誌，Vol. J80-A, No.6, pp. 986-993 (1997)

[24] G.Sugihara and M.M. May: "Nonlinear forecasting as a way of distinguishing chaos from measurement error in time series", Nature, 344, pp.734-741 (1990)

[25] T.Ikeguchi and K.Aihara: "Difference correlation can distinguish deterministic chaos from 1/f type colored noise", Physical Review E, Vol.55, No.3, pp.2531-2538 (1997)

〔九州大学経済学部教授〕