2企業間の開発投資計画ゲーム

寺岡, 義伸
大阪府立大学総合科学部 : 教授

北條 , 仁志
大阪府立大学総合科学部 : 助手

https://doi.org/10.15017/4363001

出版情報：經濟學研究. 66 (1), pp.25-30, 1999-06-30. 九州大学経済学会

2企業間の開発投資計画ゲーム

寺　岡　義　伸
北　條　仁　志

1．問題の設定

ここで扱う問題は，２個の動物がある縄張りの独占をめぐって対立する現象の理論的説明づけから示唆されたゲームであり[3]，ある製品の開発と生産をめぐって競争する２企業間の対立を扱ったものである。

２つの企業（*Player* IとII）がある製品の市場独占をめぐって対立している。この製品はパソコンのように，常に新しい機種の開発といった努力投入を続けなければならず，その努力投入をどれぐらいまで維持できるかで市場の独占が決まってしまう。すなわち，$[0,\infty)$の中で長く努力投入を維持できたプレーヤがその市場を独占できる。*Player* i の時刻 $t\in[0,\infty)$におけるその製品市場の価値は $v_i(t)\geq 0$ であり，もし市場が独占できれば勝者は独占できた時点以後の価値の総和を入手できる。しかしながら，*Player* i が時刻tまで努力投入を維持するためには$H_i(t)$の累積費用を使わなければならない。各プレーヤは，独占できた時に生ずる利益と独占に失敗した時に失う費用，および相手プレーヤの行動を考えに入れて，どの時点まで努力投入をすべきか，すなわち開発投資計画を立てるべきかを考えなければならない。

この種の問題にあっては，プレーヤにとって利用できる情報様式に２つの型がある。各プレーヤが相手プレーヤの行動を常に観測でき，どの時刻においても相手がまだ努力投入を続けているのかもう既に断念してしまったのかが情報として知らされる場合をNoisy型とよび，反対に相手が情報防護を行い，相手がもう断念してしまったのかまだ頑張っているのかについては，市場を独占できた時点ではじめて知らされる場合をSilent型とよぶ。

後の議論のため，以下のような仮定を設ける。

(1) 各プレーヤにとって許される行動区間は$[0,\infty)$。

(2) *Player* i にとっての縄張りの価値は，上に有界な連続関数であって，

$$0\leqq v_i(t)<\infty,\ t\in(0,\infty),\ \text{かつ}\int_0^\infty v_i(t)dt<\infty。$$

(3) $V_i(x)=\int_x^\infty v_i(t)dt$ とおく。したがって $V_i(x)$ は$(0,\infty)$上で連続的微分可能，

(4) *Player* i の累積費用関数 $H_i(t)$ は $[0,\infty)$ 上で連続的微分可能で，$H_i(0)=0$ かつ $h_i(t)=H_i'(t)<0, \in[0,\infty)$，さらに $H_i(t)\to\infty$ as $t\to\infty$ としておく。

次に $[0,\infty)\times[0,\infty)$ 上の実数値関数 $M_i(x,y)$ に対して *Player* I と II が混合戦略として $[0,\infty)$ 上の *cdfs* $F(x)$ と $G(y)$ を用いるときの期待値として

$$M_i(F,y)=\int_0^\infty M_i(x,y)dF(x) \quad ; \quad M_i(x,G)=\int_0^\infty M_i(x,y)dG(y),$$

$$M_i(F,G)=\int_0^\infty\int_0^\infty M_i(x,y)dF(x)dG(x)$$

という記法を使用する。

さらに，後の議論のため

$$r_i=\sup\{t\,|\,V_i(t)>0\},\quad \theta_i(z)=\exp[-\int_0^z\{h_i(t)/V_i(t)\}dt]$$

とおく。

本論文に関係していくつか興味ある文献を紹介する。この種の無限ゲームに関しては，Dresher[1]と Karlin[2]による古典的大著が有名である。しかし扱っている内容は0和ゲームであり，本論文で扱ったような非0和については全く触れられていない。開発投資計画や縄張りを扱った論文としては，Teraoka and Yamada [4]があるが，そこでは市場を獲得した時の価値関数や努力投入での累積費用関数が両プレーヤにとって共通であると仮定されていた。

2. Silent Game

本節では，両プレーヤとも互いに相手の行動が観察できない状態にあり，$[0,\infty)$ のどの時点まで努力投入をするかをあらかじめ決定し，自分の決めた計画時刻が実現されてみてはじめて，自分が勝者となり得たかそうでないのかが知らされる場合を扱う。*Player* I と II の純戦略をそれぞれ $x\in[0,\infty)$ と $y\in[0,\infty)$ とする。そうするとこの場合の *Player* i への期待利得を $M_i(x,y)$ とすると次のようになる：

$$M_1(x,y)=\begin{cases}-H_1(x), & x\geq y\\ V_1(x)-H_1(x), & x\geq y\end{cases} \quad ; \quad M_2(x,y)=\begin{cases}-H_2(y), & y\geq x\\ V_2(y)-H_2(y), & y\geq x\,。\end{cases}$$

上記の非0和無限ゲームに対しては，純戦略の中で平衡戦略は存在しない。そこで，I と II はそれぞれ次のようなクラスの *cdfs* $F(x)$ と $G(y)$ を混合戦略として用いるものとする：

$F(x)$ はある区間 $(0,u)\subset(0,r)$ 上の *density part* $f(x)>0$ と点 $x=0$ での *mass part* $\alpha_1\geq 0$ および点 $x=u$ での *mass part* $\beta_1\geq 0$ から構成される。他方 $G(y)$ は同じ区間 $(0,u)$ 上の *density part* $g(y)>0$ と点 $y=0$ での *mass part* $\alpha_2\geq 0$ および点 $y=u$ での *mass part* $\beta_2\geq 0$ から構成される。

そうすると，次のような関係を得る：

$$M_2(F,y)=\begin{cases}\alpha_1\cdot 0, & y=0\\ V_2(y)-H_2(y), & 0<y<u\\ (1-\beta_1)V_2(u)-H_2(u), & y=u\\ V_2(y)-H_2(y), & y>u\end{cases};$$

$$M_1(x,G)=\begin{cases}\alpha_2\cdot 0, & x=0\\ V_1(x)G(x)-H_1(x), & 0<x<u\\ (1-\beta_2)V_1(u)-H_1(u), & x=u\\ V_1(x)-H_1(x), & x>u\end{cases}。$$

u_iを方程式 $V_i(t)-H_i(t)=0$ の$(0,\infty)$における唯一根とし，今 $u_1\leq u_2$とする。そこで，$u=u_1$とおき，$\alpha_1=\alpha_2=0$ および $\beta_1=\{V_2(u)-H_2(u)\}/V_2(u)$; $\beta_2=0$ として

$$F^0(x)=\begin{cases}H_2(x)/V_2(x), & 0<x<u\\ 1, & x\geq u\end{cases}\quad;\quad G^0(y)=\begin{cases}H_1(y)/V_1(y), & 0<y<u\\ 1, & y\geq u\end{cases}$$

で与えられる２つの混合戦略を選ぶと，次式が成立する。

$$M_2(F,y)=\begin{cases}0, & 0\geq y\geq u\\ V_2(y)-H_2(y), & y>u\end{cases}\quad;\quad M_1(x,G)=\begin{cases}0, & 0\geq x\geq u\\ V_1(x)-H_1(x), & x>u\end{cases}。$$

以上をまとめると次の定理を得る。

定理１． u_i を方程式 $V_i(t)-H_i(t)=0$ の$(0,\infty)$における唯一の根とし，$u=\min(u_1,u_2)$とする。また２つの混合戦略$F^0(x)$と$G^0(y)$を下記のように選ぶ：

$$F^0(x)=\begin{cases}H_2(x)/V_2(x), & 0<x<u\\ 1, & x\geq u\end{cases}\quad;\quad G^0(y)=\begin{cases}H_1(y)/V_1(y), & 0<y<u\\ 1, & y\geq u\end{cases},$$

ここに，点uでの *mass parts* β_1とβ_2はそれぞれ

$$\beta_1=\max\left[0,\frac{V_2(u)-H_2(u)}{V_2(u)}\right];\beta_2=\max\left[0,\frac{V_1(u)-H_1(u)}{V_1(u)}\right]$$

によって与えられる。

そうすると混合戦略の対$(F^0(x),G^0(y))$は

$$M_1(F,G^0)\leq M_1(F^0,G^0),\ M_2(F^0,G^0)=0$$

を満足する。

３．Noisy Game

本節では，両プレーヤとも互いに相手の行動が観察できる状態にあり，一方のプレーヤが断念した瞬間に他方の独占が確定する場合を扱う。ここでも前節と同様に両者が同時にあきらめた場合は両者ともこの縄張りを放棄したものと仮定する。

Player Ⅰ とⅡの純戦略をそれぞれ$x\in[0,\infty)$，$y\in[0,\infty)$とし，$M_i(x,y)$を *Player* i への期待利得と

すると

$$M_1(x, y)=\begin{cases} -H_1(x), & x \geq y \\ \sup_{x>y}\{V_1(x)-H_1(x)\}=V_1(y)-H_1(y), & x>y \end{cases};$$

$$M_2(x, y)=\begin{cases} -H_2(y), & x \geq y \\ \sup_{x>y}\{V_2(y)-H_2(y)\}=V_2(x)-H_2(x), & y>x \end{cases}。$$

このゲームにおいても純戦略の中に平衡戦略は存在しない。そこで，ⅠとⅡはそれぞれ以下のクラスの *cdfs* $F(x)$，$G(y)$を混合戦略として用いることにする。

$F(x)$は点$x=0$での *mass part* $\alpha_1 \geq 0$，$(0, r)$上の *density part* $f(x)>0$，そして点$x=r$での *mass part* $\beta_1 \geq 0$より構成され，他方$G(y)$は点$y=0$での *mass part* $\alpha_2 \geq 0$，同じ区間$(0, r)$上の *density part* $g(y)>0$，そして点$y=r$での *mass part* $\beta_2 \geq 0$より構成される。

そうすると，次のような関係が成立する；

$$M_2(F, y)=\begin{cases} \alpha_1 \cdot 0, & y=0 \\ \alpha_1 V_2(0)+\int_0^y \{V_2(x)-H_2(x)\} f(x) d(x)-H_2(y)\{1-F(y)\}, & 0<y<r \\ \alpha_1 V_2(0)+\int_0^r \{V_2(x)-H_2(x)\} f(x) d(x)-\beta_1 H_2(r), & y=r \\ \alpha_1 V_2(0)+\int_0^r \{V_2(x)-H_2(x)\} f(x) d(x)+\beta_1\{V_2(r)-H_2(r)\}, & y>r \end{cases};$$

$$M_1(x, G)=\begin{cases} \alpha_2 \cdot 0, & x=0 \\ \alpha_2 V_1(0)+\int_0^x \{V_1(y)-H_1(y)\} g(y) d(y)-H_1(x)\{1-G(x)\}, & 0<x<r \\ \alpha_2 V_1(0)+\int_0^r \{V_1(y)-H_1(y)\} g(y) d(y)-\beta_2 H_1(r), & x=r \\ \alpha_2 V_1(0)+\int_0^r \{V_1(y)-H_1(y)\} g(y) d(y)+\beta_2\{V_1(r)-H_1(r)\}, & x>r \end{cases}。$$

ここで，

$$\frac{d}{dy} M_2(F, y)=0 \quad \text{for} \quad y \in (0, r)$$

とおくと

$$f(y)/\{1-F(y)\}=h_2(y)/V_2(y) \quad \text{for} \quad y \in (0, r)$$

が得られ，したがって

$$f(x)=k\{h_2(x)/V_2(X)\}\theta_2(x) \quad \text{for} \quad x \in (0, r)$$

を得る。ここにkは積分定数である。また

$$\alpha_1+\int_0^r f(x) d(x)+\beta_1=1$$

であるから，次式で与えられる混合戦略を得る。

$$F^0(x)=\begin{cases}\alpha_1, & x=0\\ 1-(1-\alpha_1)\theta_2(x), & 0<x<r\\ 1, & x\geq r\end{cases},$$

ここに

$$\beta_1=1-F(r-0),\quad \theta_2(x)=\exp\left[-\int_0^x\{h_2(t)/V_2(t)\}d(t)\right]。$$

この時，次のような関係式が成立する。

$$M_2(F^0,y)\begin{cases}=0, & y=0\\ =\alpha_1V_2(0), & 0<y<r\\ <\alpha_1V_2(0) & y\geq r\end{cases},$$

$G(x)$についてもまったく同様の議論が成り立つので，定理2を得る。

定理2． 方程式 $V_1(z)=0, V_2(z)=0$ の$(0,\infty)$における唯一の根をそれぞれ r_1, r_2 とし，$r=\min(r_1,r_2)$ とする。*Player* IとIIの混合戦略 *cdfs* $F^0(x)$と$G^0(y)$を

$$F^0(x)=\begin{cases}1-\theta_2(x), & 0<x<r\\ 1, & x\geq r\end{cases};\quad G^0(y)=\begin{cases}1-\theta_1(y), & 0<y<r\\ 1, & y\geq r\end{cases};$$

とすると，次の関係が成立する：

$$\begin{cases}M_1(F,G^0)\geq M_1(F^0,G^0)=0, & \forall F\\ M_2(F^0,G)\geq M_2(F^0,G^0)=0, & \forall G。\end{cases}$$

注：上の定理は一つの結果である。しかしこのゲームは Noisy 型である。そこで $V_1(t)-H_1(t)=0$ の根をu_1, $V_2(t)-H_2(t)=0$ の根をu_2とし，さらに$u_1>u_2$であると仮定して，Player Iが常に$y+\varepsilon$まで待つという戦略を用いるとすると

$$\begin{cases}M_1(y+\varepsilon,y)=V_1(y+\varepsilon)-H_1(y+\varepsilon)\\ M_2(y+\varepsilon,y)=-H_2(y)<0\end{cases}$$

が成立する。また$u_2<t<u_1$を満たすtに対して

$$\begin{cases}V_1(t)-H_1(t)>0\\ V_2(t)-H_2(t)<0\end{cases}$$

も得られる。従って *Player* IIにとってみれば，自分の利得を最大にしようとするなら，たとえ独占競争には勝ってもu_2以後まで待つのは良い選択とはいえない。その上，Iが常に$y+\varepsilon$なる戦略を用いるとIIは勝つことが不可能となり$H_2(y)$を失う。結局，Iは$x^0=y+0$；IIは$y^0=0$なる戦略を選ぶと

$$\begin{cases}M_1(x,y^0)=M_1(x^0,y^0)=V_1(0)\\ M_2(x^0,y)=-H_2(y)\quad M_2(x^0,y^0)=0\end{cases}$$

という結果を得る。Player IIにとっては面白くない戦略となってくる。

Teraoka and Yamada [4]では$V_1(t)=V_2(t)$かつ$H_1(t)=H_2(t)$と仮定されていた為，上記の注のような議論は出てこなかった。

参 考 文 献

[1] M. Dresher, *Games of Strategy: Theory and Applications,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1954.
[2] S. Karlin, *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming, and Economics,* Vol. 2, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1959.
[3] J. M. Smith, *Evolution and the Theory of Games,* Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
[4] Y. Teraoka, and Y. Yamada, "Games of production development in manufacturing", *Lecture Note in Economics and Mathematical Systems 445, Stochastic Modelling in Innovative Manufacturing,* Springer, Berlin, pp.58-67, 1997.

寺岡〔大阪府立大学総合科学部教授〕
北條〔大阪府立大学総合科学部助手〕