閉路を含むネットワーク上の結合型最適経路問題の負同値法による解法

丸山, 幸宏
長崎大学経済学部 : 助教授

https://doi.org/10.15017/4362956

出版情報：經濟學研究. 66 (1), pp.7-24, 1999-06-30. 九州大学経済学会
バージョン：
権利関係：

閉路を含むネットワーク上の結合型最適経路問題の負同値法による解法

丸　山　幸　宏

1．序

閉路を含むネットワーク上の加法型最短経路問題（道の長さがその道に含まれる枝の長さの和である問題）においては，最短経路の存在を保証するためにネットワークが負閉路（負の長さをもつ閉路）を含まないことが仮定されているかまたは負閉路が存在する場合はその存在を明らかにする必要がある。また加法型問題では全ての枝の長さが非負である場合，負閉路を含まないことが保証されるが，最短路長および最短経路を求める方法としてダイクストラ法が代表的なものである。しかし，もし負の長さをもつ枝がある場合はこの方法は使えず，さらに負閉路が存在する可能性がある。その場合の（負閉路の存在も明らかにできる）解法としてはフォード法（べき乗法）が知られている([3]，[4])。

また，加法以外の２項演算を用いて道の長さが定義された，一般の非加法型の最適（最短または最長）経路問題は，閉路を含まない場合，動的計画法の再帰式や両的計画法([7])における両帰式により解かれている([1]，[5]，[6]，[8]－[12])。さらに，閉路を含む場合も加法型問題におけるフォード法に相当するアルゴリズムにより解かれている([2])。

そこで本論文では，閉路を含むネットワーク上の（非加法型）最適経路問題（主問題）から他の最適経路問題（負同値問題と呼ぶ）を構成し，その負同値問題をフォード法で解く。さらに，主問題と負同値問題との関係を用いて，負同値問題の最適解（最適経路の長さ，および最適経路）から主問題の最適解を求める。この方法を負同値法と呼ぶことにする。負同値法による解法では，主問題そのものをフォード法で解くよりも，計算回数が軽減される。

まず第２節では，様々な非加法型の問題を含む結合型最適経路問題について述べる。とくに，２パラメータ乗加法型問題や２パラメータ分数型問題を定義する。第３節では結合型問題における，最適経路の存在を保証する条件（必要十分条件）を求める。第４節では与えられた結合型最適経路問題（主問題）の負同値問題を定義し，主問題と負同値問題の間の様々な関係について述べる。さらに第５節では加法型問題におけるフォード法に相当する解法により，結合型問題における最適経路の長さおよび最適経路をもとめる。最後に第６節において，閉路を含むネットワーク上の結合型問題の解法として負同値法を提案する。

2．結合型最適経路問題

加法型問題のみならず様々な非加法型問題を含む次の問題を考える。有向グラフ $G=(V,\ A)$（ただし V は $1, 2, \dots, N$ と番号が付けられた頂点の集合であり，A は枝の全体からなる集合である）および終点 N が与えられているとする。また各枝 $(i,\ j)\in A$ には，枝長 t_{ij} が与えられている。頂点 $i\in V$ から頂点 $n\in V$ への道 $p_{in}=(i,\ j,\ k,\ \dots,\ m,\ n)$ の長さを

$$w(p_{in})=t_{ij}\circ t_{jk}\circ\cdots\circ t_{mn}$$

で定義する。ただし $\circ: R^1\times R^1\to R^1$ は結合法則：$(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$ をみたす2項演算である。このとき次のような問題を考える：

$$\operatorname*{Opt}_{p_{iN}}[w(p_{iN})],\ p_{iN}=(i,j,k,\dots,m,N),\ i=1,2,\dots,N-1. \tag{1}$$

ただし Opt＝min かまたは Opt＝Max である。この問題を結合型最適経路問題と呼ぶ。さらに以下に述べる仮定をみたす結合型最適経路問題を

$$\mathbf{AOP}=(\mathrm{Opt},\{t_{ij}\},S,\circ)$$

と表す：

仮定1：集合 $S\subset R^1$ と2項演算 $\circ$ の対 $(S,\ \circ)$ は半群であり（$\circ: S\times S\to S$），
各 $i, j\in V$ にたいして $t_{ij}\in S$ とする；

仮定2：2項演算 $\circ$ は交換法則：$a\circ b=b\circ a,\ \forall a, b\in S$ をみたす；

仮定3：半群 $(S,\ \circ)$ は単位元 $R(\circ)\in S$ をもつ；

仮定4：各 $a\in S$ にたいして

$$a_1, a_2\in S,\ a_1<a_2\Rightarrow a\circ a_1<a\circ a_2$$

が成り立つ；

仮定5：

$$a\circ I(\mathrm{Opt})=\lim_{b\to I(\mathrm{Opt})}[a\circ b]=I(\mathrm{Opt}),\ \forall\,\mathrm{a}\in\mathrm{S},$$

ただし

$$S\not\ni I(\mathrm{Opt})=\begin{cases}\sup S, & \mathrm{Opt}=\min,\\ \inf S, & \mathrm{Opt}=\mathrm{Max}.\end{cases}$$

結合型問題 **AOP** には以下のように様々な型の問題が含まれる。

[加法型] $\circ=+$ の場合，$t_{ij}\in S=R^1$，$R(+)=0\in S$ にたいして仮定1～仮定3をみたす。また仮定4は明らかにみたす。さらに仮定5は，Opt=min, Opt=Max いずれの場合も

$$a\circ I(\min)=\lim_{b\to\infty}[a+b]=+\infty=\sup R^1=I(\min),$$

$$a\circ I(\mathrm{Max})=\lim_{b\to-\infty}[a+b]=-\infty=\inf R^1=I(\mathrm{Max})$$

なので，みたす。

［乗法型］$\circ=\times$ の場合，$t_{ij}\in S=(0,+\infty)$，$R(\times)=1\in S$ にたいして仮定１～仮定３をみたす。また仮定４は，$a>0$ にたいして，明らかにみたす。さらに仮定５は，Opt=min, Opt=Max いずれの場合も

$$a\circ I(\min)=\lim_{b\to\infty}[a\times b]=+\infty=\sup S=I(\min),$$

$$a\circ I(\mathrm{Max})=\lim_{b\to 0}[a\times b]=0=\inf S=I(\mathrm{Max})$$

なので，みたす。

［２パラメータ乗加法型］加法，乗法を統合するものとして次のような２パラメータを含む２項演算を定義する：

$$a\circ b=f(s,t;a,b)=(a+b+s)(1+st)+tab,\ a,b\in R^1,$$

ただし $s,\ t\in R^1$ である。この演算は結合法則をみたすことに注意する。パラメータ $s,\ t$ の各値にたいして $\circ$ は次のような２項演算である：

$$f(0,0;a,b)=a+b,\ f(-1,1;a,b)=ab,\ f(0,1;a,b)=a+b+ab,$$

$$f(0,-1;a,b)=a+b-ab,\ f(-1,-1;a,b)=2(a+b-1)-ab.$$

上記演算で道の長さが定義された問題は

$$t_{ij}\in S=\begin{cases}(-(1+st)/t,+\infty),\ t>0,\\ (-\infty,-(1+st)/t),\ t<0,\\ R^1,\ t=0,\end{cases}\quad R(\circ)=-s$$

にたいして仮定１～仮定３をみたす。また

$$\frac{\partial f}{\partial b}=1+t(a+s)>0,\ a\in S$$

なので仮定４をみたすことがわかる。さらに仮定５は，Opt=min, Opt=Max いずれの場合も

$$a\circ I(\min)=\lim_{b\to I(\min)}[f(s,t;a,b)]=\begin{cases}+\infty,\ t\geq 0,\\ -(1+st)/t,\ t<0\end{cases}=I(\min),$$

$$a\circ I(\mathrm{Max})=\lim_{b\to I(\mathrm{Max})}[f(s,t;a,b)]=\begin{cases}-(1+st)/t,\ t>0,\\ -\infty,\ t\leq 0\end{cases}=I(\mathrm{Max})$$

なので，みたす。

さらに結合型問題 **AOP** には，次のような問題も含まれる：

［２パラメータ分数型］

$$a\circ b=g(s,t;a,b)=\frac{a+b+2t}{1+s^2(a+t)(b+t)}-t,$$

ただし $s>0,\ t\in R^1$ である。この演算は結合法則をみたすことに注意する。パラメータ $s,\ t$ の各値にたいして $\circ$ は次のような２項演算である：

$$g(1,0;a,b)=\frac{a+b}{1+ab},\ g(1,-1;a,b)=\frac{ab}{1+(1-a)(1-b)},$$

$$g\left(\frac{1}{2},0;a,b\right)=\frac{4(a+b)}{4+ab},\ f\left(\frac{1}{2},2;a,b\right)=\frac{-2ab}{4+(2+a)(2+b)}.$$

上記演算で道の長さが定義された問題は

$$t_{ij}\in S=\left[-t-\frac{1}{s},-t+\frac{1}{s}\right],\ R(\circ)=-t$$

にたいして仮定１～仮定３をみたす。また

$$\frac{\partial g}{\partial b}=\frac{(1-st-as)(1+st+as)}{\{1+s^2(a+t)(b+t)\}^2}>0,\ a\in S$$

なので仮定４をみたすことがわかる。さらに仮定５は，Opt=min，Opt=Max いずれの場合も

$$a\circ I(\min)=\lim_{b\to I(\min)}[g(s,t;a,b)]=-t+\frac{1}{s}=I(\min),$$

$$a\circ I(\mathrm{Max})=\lim_{b\to I(\mathrm{Max})}[g(s,t;a,b)]=-t-\frac{1}{s}=I(\mathrm{Max})$$

なので，みたす。

３．基本路が最適経路であるための必要十分条件

同じ頂点を２度以上通らない道を基本路（elementary path）と呼び，頂点 i から終点 N への基本路の全体を E_{iN} と表すことにする。このとき問題 **AOP** において Opt=min(Max)のとき

$$w(p_{iN})\geq(\leq)w(p^*_{iN}),\ \forall p_{iN}\in E_{iN}$$

をみたす基本路 $p^*_{iN}(\in E_{iN})$を i から N へのトラック（track）と呼び，その路長 $w(p^*_{iN})$を $a^*_{iN}(A^*_{iN})$と表す。

また始点と終点が一致する道を閉路（cycle）と呼び，始点と終点が一致する以外は同じ頂点を２度以上通らない閉路を基本閉路（elementary cycle）と呼ぶ。

そこで，頂点 i から終点 N への道 $p_{iN}=(i,j,\ldots,j,k,\ldots,k,\ldots,N)$が閉路 $\gamma_1=(j,j(1),j(2),\ldots,j(s),j)$，$\gamma_2=(k,k(1),k(2),\ldots,k(t),k)$，...，$\gamma_r$を含んでいるとき，道 p_{iN} からすべての閉路 $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_r$を取り除いてできる基本路を $p'_{iN}=(i,j,k,\ldots,N)$とすると，仮定２より

$$w(p_{iN})=w(p'_{iN})\circ w(\gamma_1)\circ w(\gamma_2)\circ\cdots\circ w(\gamma_r) \tag{2}$$

が成り立つ。ここで，$\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_r$ は基本閉路であると仮定しても一般性を失わない。なぜなら，任意の閉路 γ の長さは，それに含まれる基本閉路 γ'_i の長さを用いて

$$w(\gamma)=w(\gamma'_1)\circ\cdots\circ w(\gamma'_l)$$

と表せるからである。そこで，この(2)の式および仮定４より，次のような，基本路（トラック）が最適経路であるための必要十分条件を得る（証明は Carré[2]参照）。

命題 1

問題 **AOP** において Opt=min(Max)のとき，各頂点 i から終点 N への，任意の基本路でない道 p_{iN} にたいして

$$w(p_{iN}) \geq a^*_{iN} (\leq A^*_{iN}) \tag{3}$$

となるための必要十分条件は，ネットワーク G が

$$w(\gamma) < (>) R(\circ) \tag{4}$$

をみたす基本閉路 γ を含まないことである。

注意 1

ネットワークが(4)をみたす基本閉路を含まないことは問題 **AOP** の最適解が存在するための必要十分条件でもある。実際，十分性は命題1より明らかである。そこで必要性を以下に示す。基本閉路 γ が不等式(4)をみたすとし，γ 上の一つの頂点を i とする。このとき i から N への任意の道 $p_{iN}=(i, j, \ldots, N)$ にたいして，その道と $\gamma=(i, k, \ldots, i)$ を結ぶ道を $\bar{p}_{iN}=(i, k, \ldots, i, j, \ldots, N)$ とすると，仮定2および仮定4より

$$w(\bar{p}_{iN}) = w(p_{iN}) \circ w(\gamma) < (>) w(p_{iN})$$

が成り立つ。すなわち問題 **AOP** の最適解が存在しない。

各型の問題において，Opt=min(Max)のとき，基本路（トラック）が最適経路となる（最適解が存在する）ための必要十分条件は以下の通りである：

［加法型］ $w(\gamma) < (>) 0$ をみたす基本閉路 γ は含まない；

［乗法型］ $w(\gamma) < (>) 1$ をみたす基本閉路 γ は含まない；

［２パラメータ乗加法型］ $w(\gamma) < (>) -s$ をみたす基本閉路 γ は含まない；

［２パラメータ分数型］ $w(\gamma) < (>) -t$ をみたす基本閉路 γ は含まない。

4．負同値性定理（negative-equivalency theorem）

本節では，与えられた問題 **AOP** からその負同値問題 **NAOP** を構成し，もとの問題（主問題）と負同値問題との関係を調べる。

4.1　負同値問題（negative-equivalent problem）

結合型最適経路問題 **AOP**$=(\mathrm{Opt}, \{t_{ij}\}, S, \circ)$ の負同値問題 **NAOP** は，任意の実数 u が与えられたとき，次のように定義される：

$$\mathbf{NAOP} = (\overline{\mathrm{Opt}}, \{\bar{t}_{ij}\}, \bar{S}, \bullet),$$

ただし

(i)　主問題 **AOP** と同じ有向グラフ $G=(V, A)$ 上の各枝 (i, j) に実数 $\bar{t}_{ij}=u-t_{ij}$ が付されている；

(ii) 各枝長 $\bar{t}_{ij}$ は R^1 の部分集合 $\bar{S}=u-S$ の元である；

(iii) 2 項演算 $\bullet$: $\overline{S} \times \overline{S} \to \overline{S}$ を次で定義する：

$$a \bullet b = \overline{\overline{a} \circ \overline{b}} = u - (u-a) \circ (u-b),\ a, b \in \overline{S}; \tag{5}$$

(iv) $\overline{\mathrm{Opt}}$ を

$$\overline{\mathrm{Opt}} = \begin{cases} \mathrm{Max},\ \mathrm{Opt} = \min, \\ \min,\ \mathrm{Opt} = \mathrm{Max} \end{cases}$$

と定義するとき，負同値問題 **NAOP** では

$$\overline{\mathrm{Opt}}_{p_{iN}} [\overline{w}(p_{iN})],\ p_{iN} = (i, j, k, \dots, m, N),\ i = 1, 2, \dots, N-1 \tag{6}$$

を解く。ただし

$$\overline{w}(p_{iN}) = \overline{t}_{ij} \bullet \overline{t}_{jk} \bullet \cdots \bullet \overline{t}_{mN}$$

である。

注意 2

負同値問題 **NAOP** における 2 項演算 $\bullet$ について

$$a \circ b = \overline{\overline{a} \bullet \overline{b}} = u - (u-a) \bullet (u-b),\ a, b \in S \tag{7}$$

が成り立つ（この関係は(5)とともにド・モルガン律と呼ばれる）。さらに(5)で特に $u=0$ の場合

$$a \bullet b = -\{(-a) \circ (-b)\}$$

であり，この式から

$$(-a) \circ (-b) = -(a \bullet b),\ (-a) \bullet (-b) = -(a \circ b)$$

という関係が成り立つことがわかる。その上，数学的帰納法を用いて次の関係が成り立つことを示せる：

$$\overline{a}_1 \bullet \overline{a}_2 \bullet \cdots \bullet \overline{a}_n = u - (a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n), \tag{8}$$

ただし $a_1, a_2, \dots, a_n \in S$, $\overline{a}_i = u - a_i \in u - S = \overline{S}$ である。

注意 3

各結合型最適経路問題の負同値問題における集合 $\overline{S}$ および 2 項演算 $\bullet$ は以下の通りである。

［2 パラメータ乗加法型問題の負同値問題］

$$\overline{S} = u - S = \begin{cases} (-\infty, (1+st)/t + u),\ t > 0, \\ ((1+st)/t + u, +\infty),\ t < 0, \\ \qquad\qquad R^1,\ t = 0, \end{cases} \tag{9}$$

$$a \bullet b = \overline{f}(s, t, u; a, b) = (a+b-s-u)(st+tu+1) - abt. \tag{10}$$

とくに乗法型問題（$f(-1, 1; a, b) = a \times b$）の負同値問題における 2 項演算は，各 u の値にたいして

$$\begin{aligned} u=1 &\Rightarrow \overline{f}(-1, 1, 1; a, b) = a + b - ab, \\ u=0 &\Rightarrow \overline{f}(-1, 1, 0; a, b) = -ab, \\ u=-1 &\Rightarrow \overline{f}(-1, 1, -1; a, b) = -(a + b + ab + 2) \end{aligned}$$

である。

とくに乗加法型問題（$f(0,-1;a,b)=a+b-ab$）の負同値問題における２項演算は，各 u の値にたいして

$$u=1 \Rightarrow \bar{f}(0,-1,1;a,b)=ab,$$
$$u=0 \Rightarrow \bar{f}(0,-1,0;a,b)=a+b+ab,$$
$$u=-1 \Rightarrow \bar{f}(0,-1,-1;a,b)=2(a+b+1)+ab$$

である。

［２パラメータ分数型問題の負同値問題］

$$\bar{S}=u-S=\left[-\frac{1}{s}+t+u,\ \frac{1}{s}+t+u\right], \tag{11}$$

$$a\bullet b=\bar{g}(s,t,u;a,b)=t+u-\frac{2(t+u)-(a+b)}{1+s^2(t+u-a)(t+u-b)} \tag{12}$$

とくに分数型問題（$g(1,0;a,b)=\frac{a+b}{1+ab}$）の負同値問題における２項演算は，各 u の値にたいして

$$u=1 \Rightarrow \bar{g}(1,0,1;a,b)=\frac{ab}{1+(1-a)(1-b)},$$

$$u=0 \Rightarrow \bar{g}(1,0,0;a,b)=\frac{a+b}{1+ab},$$

$$u=-1 \Rightarrow \bar{g}(1,0,-1;a,b)=\frac{-ab}{1+(1+a)(1+b)}$$

である。

とくに分数型問題（$g(1,-1;a,b)=\frac{ab}{1+(1-a)(1-b)}$）の負同値問題における２項演算は，各 u の値にたいして

$$u=1 \Rightarrow \bar{g}(1,-1,1;a,b)=\frac{a+b}{1+ab},$$

$$u=0 \Rightarrow \bar{g}(1,-1,0;a,b)=\frac{-ab}{1+(1+a)(1+b)},$$

$$u=-1 \Rightarrow \bar{g}(1,-1,-1;a,b)=-\frac{2ab+3(a+b)+6}{1+(2+a)(2+b)}$$

である。

4.2 主問題と負同値問題との関係（負同値性定理）

まず，与えられた問題 **AOP**（主問題）から構成した負同値問題 **NAOP** が，主問題と同じ仮定１～５をみたすことを示す。

集合 $\bar{S}$ と２項演算 $\bullet$ の対 $(\bar{S},\ \bullet)$ も半群となり，仮定１をみたすことがわかる。さらに $a,\ b\in\bar{S}$ にたいして

$$a\bullet b=u-(u-a)\circ(u-b)=u-(u-b)\circ(u-a)=b\bullet a,$$

すなわち，２項演算$\bullet$について交換法則が成り立つので，問題 **NAOP** は仮定２をみたす。さらに問題 **NAOP** は，半群$(\overline{S}, \bullet)$が単位元$R(\bullet)=u-R(\circ)$をもつので，仮定３をみたし，その上$a, b_1, b_2 \in \overline{S}$, $b_1<b_2$にたいして

$$a \bullet b_1=u-(u-a)\circ(u-b_1)<u-(u-a)\circ(u-b_2)=a \bullet b_2$$

なので，仮定４もみたす。負同値問題 **NAOP** が仮定５をみたすことは

$$\overline{S} \not\ni \overline{I(\mathrm{Opt})}=u-I(\mathrm{Opt})=\begin{cases}\sup\overline{S}, & \overline{\mathrm{Opt}}=\min,\\ \inf\overline{S}, & \overline{\mathrm{Opt}}=\mathrm{Max}\end{cases}=I(\overline{\mathrm{Opt}})$$

にたいして

$$a \bullet I(\overline{\mathrm{Opt}})=u-(u-a)\circ I(\mathrm{Opt})=u-I(\mathrm{Opt})=I(\overline{\mathrm{Opt}}), \forall a \in \overline{S}$$

が成り立つことからわかる。

以上より，負同値問題 **NAOP** も結合型最適経路問題 **AOP** の一つと考えられる。したがって負同値問題 **NAOP** の負同値問題が定義できる。その上，ド・モルガン律(7)より，負同値問題 **NAOP** の負同値問題は主問題 **AOP** と一致することがわかる。

次に，主問題 **AOP** におけるトラックが最適解であるための必要十分条件と負同値問題 **NAOP** におけるそれとの関係を述べる。

命題２

問題 **AOP** において Opt=min(Max)のとき，次の(i)～(iv)は同値である。

(i)各頂点iから終点Nへの，任意の基本路でない道p_{iN}にたいして

$$w(p_{iN}) \geq a^*_{iN}(\leq A^*_{iN}).$$

(ii)ネットワークGが

$$w(\gamma)<(>)R(\circ)$$

をみたす基本閉路γを含まない。

(iii)各頂点iから終点Nへの，任意の基本路でない道p_{iN}にたいして

$$\overline{w}(p_{iN}) \leq \overline{A}^*_{iN}(\geq \overline{a}^*_{iN}),$$

ただし$\overline{A}^*_{iN}(\overline{a}^*_{iN})$は問題 **NAOP** におけるトラックの長さである。

(iv)ネットワークGが

$$\overline{w}(\gamma)>(<)R(\bullet)$$

をみたす基本閉路γを含まない。

証明　(i)と(ii)の同値性は，命題１よりわかる。さらに(iii)と(iv)の同値性は，負同値問題も結合型最適経路問題 **AOP** の一つと考えられることおよび命題１よりわかるので，(ii)と(iv)が同値であることを示せばよい。

そこでγを

$$w(\gamma)<(>)R(\circ)$$

をみたす基本閉路とすると同閉路は，(8)より

$$\overline{w}(\gamma)=u-w(\gamma)>(<)u-R(\circ)=R(\bullet)$$

をたみたす。逆も同様である。したがって，(ii)と(iv)の同値性が示された。

命題2から，主問題 **AOP** において基本路（トラック）が最適経路であれば，その負同値問題 **NAOP** においても基本路（トラック）が最適経路になり，またその逆も成り立つことがわかる。

その上，注意1および命題2の(ii)と(iv)の同値性から，主問題において最適解が存在する（しない）ことと負同値問題において最適解が存在する（しない）ことは同値であることがわかる。

さらに主問題の最適解（最適経路の長さ，最適経路）と負同値問題の最適解の間には次のような関係がある（関係式(8)を用いて，参考文献[10]における定理1と同様に証明できる）。

定理1（負同値性定理）

問題 **AOP** において Opt=min(Max)のとき，ネットワーク G が $w(\gamma)<(>)R(\circ)$ をみたす基本閉路 γ を含まないとする（したがって，負同値問題では $\overline{w}(\gamma)>(<)R(\bullet)$ をみたす基本閉路 γ を含まない)。このとき問題 **AOP** における，i から N への最短経路（最長経路）の長さ（トラックの長さ）を $a^*_{iN}(A^*_{iN})$ とし，その負同値問題 **NAOP** における最長経路（最短経路）の長さ（トラックの長さ）を $\overline{A}^*_{iN}(\overline{a}^*_{iN})$ とすると

$$a^*_{iN}+\overline{A}^*_{iN}=u,\ A^*_{iN}+\overline{a}^*_{iN}=u \tag{13}$$

が成り立つ。特に，$u=0$ のとき，**負同値性**

$$a^*_{iN}=-\overline{A}^*_{iN},\ A^*_{iN}=-\overline{a}^*_{iN} \tag{14}$$

が成り立つ。

さらに，主問題 **AOP** の最短（最長）経路と負同値問題 **NAOP** の最長（最短）経路は一致する。

5．逐次列の構成（フォード法）

第3節で述べたように，問題 **AOP** において Opt=min(Max)のとき，ネットワーク G が $w(\gamma)<(>)R(\circ)$ をみたす基本閉路 γ を含まないと仮定すると，トラックが最適経路になり，最適経路の存在が保証される。もし任意の枝 (i,j) にたいして $t_{ij}\geq(\leq)R(\circ)$ が成り立てば上記仮定はみたされる。加法型最短経路問題の場合で言えば $t_{ij}\geq 0,\ \forall(i,j)\in \boldsymbol{A}$ が成り立てばよい。この場合，最短経路を求めるアルゴリズムとしてダイクストラ法が代表的なものである。しかし $t_{ij}<0$ をみたす枝がある場合は，この方法は使えないし，負閉路が存在して最短経路が存在しない可能性がある。その場合は，最短経路を求めるアルゴリズムの一つとしてフォード法（べき乗法）が知られている。本研究でも $t_{ij}<(>)R(\circ)$ をみたす枝を含むネットワークを扱うので，フォード法により結合型問題 **AOP** を解く。フォード法は，もし $w(\gamma)<(>)R(\circ)$ をみたす基本閉路が存在する場合，その存在を明らかにできる。

フォードのアルゴリズム

ステップ1（初期化）：

$$f_i^{(0)}=\begin{cases} t_{iN} & i\in I(N),\\ I(\mathrm{Opt}), & i\notin I(N),\end{cases}\ i\neq N,\ f_N^{(0)}=R(\circ) \tag{15}$$

とおく。ただし $I(N)=\{i\in V|(i,N)\in A\}$ である。

ステップ2（反復）：

$$f_i^{(k)}=\mathop{\mathrm{Opt}}_{j\in D(i)}[t_{ij}\circ f_j^{(k-1)}],\ i\neq N,\ f_N^{(k)}=R(\circ) \tag{16}$$

とする。ただし $D(i)=\{j\in V|(i,j)\in A\}$ である。

ステップ3（終了判定）：

$$f_i^{(k)}=f_i^{(k-1)},\ i=1,2,\dots,N \tag{17}$$

ならば終了する。このとき，$f_i^{(k)}$ が頂点 i から終点 N への最適経路の長さである。そうでない場合，$k=k+1$ とおき，ステップ2にもどる。

上記アルゴリズムの(15)より，各 i にたいして

$$f_i^{(0)}=I(\mathrm{Opt})\notin S \text{ かまたは } f_i^{(0)}=t_{iN}\in S$$

であることがわかるが，数学的帰納法を用いれば，任意の自然数 n にたいしても

$$f_i^{(n)}=I(\mathrm{Opt})\notin S \text{ かまたは } f_i^{(n)}\in S \tag{18}$$

が成り立つことを示すことが出来る。

さらに，$f_i^{(n)}\in S$ となるための必要十分条件が頂点 i から終点 N への道で $n+1$ 個以下の枝を含むものが存在することであること，また $f_i^{(n)}\in S$ の場合は

$$f_i^{(n)}=\mathop{\mathrm{Opt}}_{p,l\leq n}[t_{ij_1}\circ t_{j_1j_2}\circ\cdots\circ t_{j_lN}],\ p=(i,j_1,j_2,\dots,j_l,N) \tag{19}$$

が成立することを(18)および数学的帰納法を用いて示せる。

この(19)式および命題1より，次のことが成立する：

定理2

問題 **AOP** において Opt=min(Max) のとき，ネットワーク G が $w(\gamma)<(>)R(\circ)$ をみたす基本閉路 γ を含まないならば，上記のフォードのアルゴリズムは高々 $N-1$ 回の反復で終了し，各頂点 i から終点 N への最短（最長）経路の長さ（トラックの長さ）$a_{iN}^*(A_{iN}^*)$ が求まる。

証明　命題1より，基本路（トラック）が各頂点 i から終点 N への最短（最長）経路となる。ところが，各頂点 i から終点 N への全ての基本路は高々 $N-1$ 個の枝しか含まないので，(19) 式より

$$f_i^{(N-2)}=a_{iN}^*(A_{iN}^*)=f_i^{(N-1)},\ i=1,2,\dots,N$$

を得る。すなわち，フォードのアルゴリズムは高々 $N-1$ 回の反復で終了し，最適経路の長さ（トラックの長さ）を得る。

この定理より，もしフォードのアルゴリズムが $N-1$ 回の反復で終了しない場合は，ネットワーク G が $w(\gamma)<(>)R(\circ)$ をみたす基本閉路 γ を含むことがわかる（例1参照）。

最適決定関数列 $\pi^{(k)}(\cdot)$ を

$$f_i^{(k)}=\mathop{\mathrm{Opt}}_{j\in D(i)}[t_{ij}\circ f_j^{(k-1)}]=t_{i\pi^{(k)}(i)}\circ f_{\pi^{(k)}(i)}^{(k-1)}$$

で定義する。そこで

$$\hat{j}=\pi^{(N-1)}(i),\ \hat{k}=\pi^{(N-2)}(\hat{j}),\dots,N=\pi^{(l)}(\hat{m})$$

とおくと

$$(i, \hat{j}, \hat{k}, \dots, \hat{m}, N)$$

が頂点 i から終点 N への最適経路である。

以下，具体例を述べる。

例1． 図1のようなネットワーク上で，乗法型問題$(\min, \{t_{ij}\}, (0, +\infty), \times)$を考える。表1を見ると $f_3^{(4)} \neq f_3^{(5)}$であり，アルゴリズムは5 $(=N-1)$回の反復で終了していない。したがって定理2より $w(\gamma)$ <1 をみたす閉路がネットワーク上に存在していることがわかる（$w(\gamma)<1$ をみたす閉路の存在が明らかにされた）。実際，閉路 $\gamma=(3,5,4,3)$の長さ $w(\gamma)$は $\frac{3}{4}$ で1より小さい。

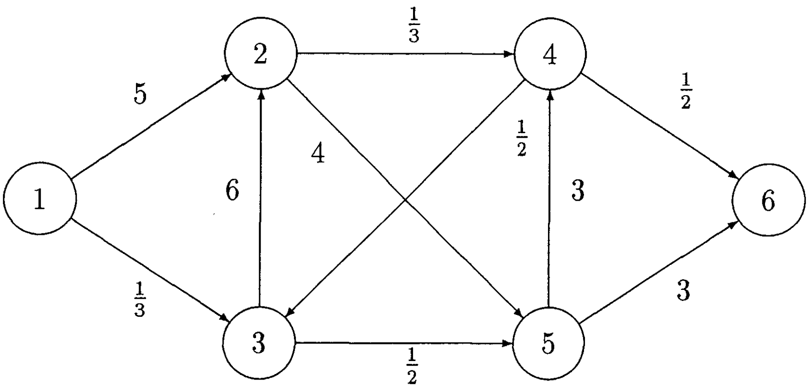

図1　Opt=min, $a \circ b = a \times b$, $S=(0,+\infty)$, $\exists \gamma$ $s.t.$ $\omega(\gamma)<1$

表1：乗法型問題（$a \circ b = a \times b$）における逐次列

Node	$f_i^{(0)}$	$f_i^{(1)}$	$f_i^{(2)}$	$f_i^{(3)}$	$f_i^{(4)}$	$f_i^{(5)}$	$\cdots$
1	∞	∞	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
2	∞	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\cdots$
3	∞	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{16}$	$\cdots$
4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\cdots$
5	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\cdots$
6	1	1	1	1	1	1	$\cdots$

例2． 図2のようなネットワーク上で，道の長さが2項演算 $a \circ b = a+b+ab$ を用いて定義された問題$(\mathrm{Max}, \{t_{ij}\}, (-1, +\infty), \circ)$（2パラメータ乗加法型問題の1つ）を考える。このネットワークには $w(\gamma)>0$ をみたす閉路は存在していない。そこで表2からわかるように，アルゴリズムは4回の反復で終了し，各頂点 i から終点6への最長路長は $f_i^{(4)}$ $(=A_{i6}^*)$である。また各頂点 i から終点への最長経路は，表3より

$$(1, \pi^{(5)}(1), \pi^{(4)}(3), \pi^{(3)}(2), \pi^{(2)}(4)) = (1, 3, 2, 4, 6),$$
$$(2, 4, 6), (3, 2, 4, 6), (4, 6), (5, 4, 6)$$

であることがわかる。

例3． 図3のようなネットワーク上で，道の長さが2項演算 $a \circ b = \frac{ab}{1+(1-a)(1-b)}$ を用いて定義され

た問題$(\min, \{t_{ij}\}, (0, 2), \circ)$（２パラメータ分数型問題の１つ）を考える。このネットワークには$w(\gamma) < 1$をみたす閉路は存在していない。そこで表４からわかるように，アルゴリズムは４回の反復で終了し，各頂点 i から終点6への最短路長は$f_i^{(4)}(=a_{i6}^*)$である。また表５より，各頂点 i から終点への最短経路は

$$(1, 3, 2, 5, 6),\ (2, 5, 6),\ (3, 2, 5, 6),\ (4, 6),\ (5, 6)$$

であることがわかる。

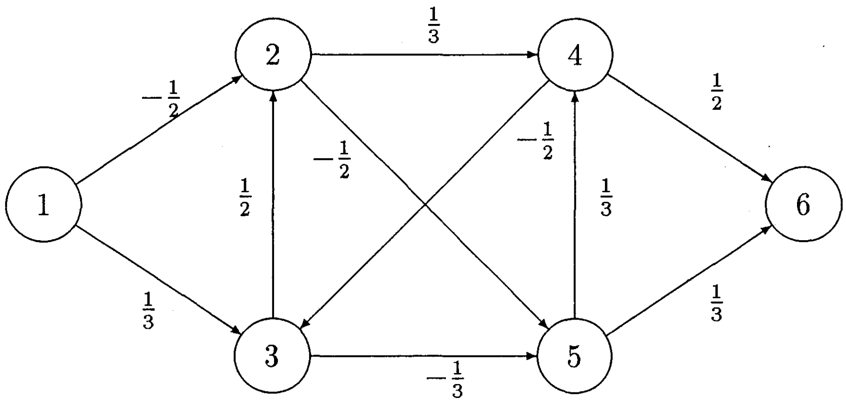

図２　Opt=Max, $a \circ b = a+b+ab$, $S=(-1,+\infty) \ni 0 = R(\circ)$

表２：乗加法型問題（$a \circ b = a+b+ab$）における逐次列

Node	$f_i^{(0)}$	$f_i^{(1)}$	$f_i^{(2)}$	$f_i^{(3)}$	$f_i^{(4)} = A_{i6}^*$
1	-1	-1	$\frac{5}{27}$	3	3
2	-1	1	1	1	1
3	-1	$-\frac{1}{9}$	2	2	2
4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
5	$\frac{1}{3}$	1	1	1	1
6	0	0	0	0	0

表３：乗加法型問題（$a \circ b = a+b+ab$）における最適決定関数列

Node	$\pi^{(1)}(i)$	$\pi^{(2)}(i)$	$\pi^{(3)}(i) = \pi^{(4)}(i) = \pi^{(5)}(i)$
1	2 or 3	3	3
2	4	4	4
3	5	2	2
4	6	6	6
5	4	4	4

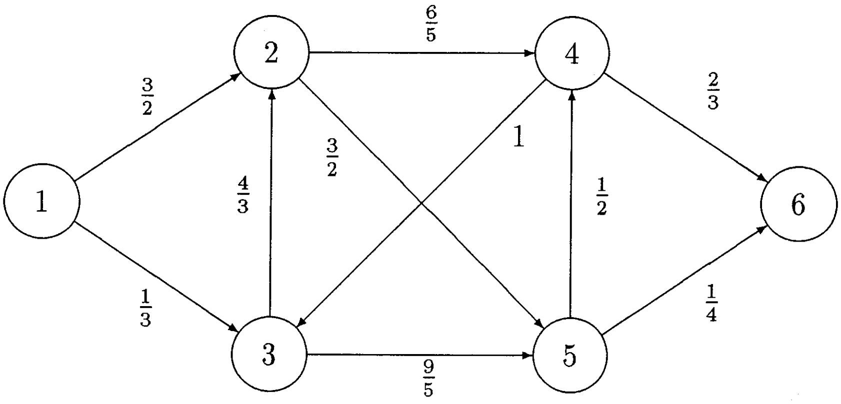

図 3　Opt=min, $a \circ b=\frac{ab}{1+(1-a)(1-b)}$, $S=(0, 2) \ni 1=R(\circ)$

表 4 ：分数型問題($\frac{ab}{1+(1-a)(1-b)}$)における逐次列

Node	$f_i^{(0)}$	$f_i^{(1)}$	$f_i^{(2)}$	$f_i^{(3)}$	$f_i^{(4)} = a_{i6}^*$
1	2	2	$\frac{9}{22}$	$\frac{12}{41}$	$\frac{12}{41}$
2	2	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$
3	2	$\frac{9}{8}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{12}{13}$
4	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
5	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
6	1	1	1	1	1

表 5 ：分数型問題($\frac{ab}{1+(1-a)(1-b)}$)における最適決定関数列

Node	$\pi^{(1)}(i)$	$\pi^{(2)}(i)$	$\pi^{(3)}(i)$
1	2 or 3	3	3
2	5	5	5
3	5	2	2
4	6	6	6
5	6	6	6

6．負同値法（negative-equivalent method）

負同値問題 **NAOP** も結合型最適経路問題 **AOP** の 1 つなので，前節で述べたフォードのアルゴリズムを用いて解ける。さらに定理 1 （負同値性定理）を用いると，負同値問題 **NAOP** の解（最適経路およびその長さ）から主問題 **AOP** の解を構成することができる。そこで与えられた問題 **AOP**=(Opt, $\{t_{ij}\}$, S, $\circ$)を次に述べる負同値法で解くことができる。

負同値法

手順1　与えられた問題 **AOP** の負同値問題 **NAOP** を構成する。

手順2　負同値問題を次のアルゴリズムを用いて解く：

負同値問題におけるフォードのアルゴリズム

ステップ1（初期化）：

$$\bar{f}_i^{(0)}=\begin{cases}\bar{t}_{iN} & i\in I(N),\\ I(\overline{\mathrm{Opt}}), & i\notin I(N),\end{cases} i\neq N,\ \bar{f}_N^{(0)}=R(\bullet) \tag{20}$$

とおく。

ステップ2（反復）：

$$\bar{f}_i^{(k)}=\overline{\mathop{\mathrm{Opt}}_{j\in D(i)}}\left[\bar{t}_{ij}\bullet\bar{f}_j^{(k-1)}\right],\ \bar{f}_N^{(k)}=R(\bullet) \tag{21}$$

とする。

ステップ3（終了判定）：

$$\bar{f}_i^{(k)}=\bar{f}_i^{(k-1)},\ i=1,2,\dots,N \tag{22}$$

ならば終了する。このとき，$\bar{f}_i^{(k)}$が頂点 i から終点 N への最適経路の長さである。そうでない場合，$k=k+1$ とおき，ステップ2にもどる。

手順3　負同値問題における最適経路を求める：

$$\bar{f}_i^{(k)}=\overline{\mathop{\mathrm{Opt}}_{j\in D(i)}}\left[\bar{t}_{ij}\bullet\bar{f}_j^{(k-1)}\right]=\bar{t}_{i\pi^{(k)}(i)}\bullet\bar{f}^{(k-1)}_{\pi^{(k)}(i)},$$

$$\hat{j}=\pi^{(N-1)}(i),\ \hat{k}=\pi^{(N-2)}(\hat{j}),\dots,N=\pi^{(l)}(\hat{m})$$

とおくとき

$$(i,\hat{j},\hat{k},\dots,\hat{m},N)$$

が頂点 i から終点 N への最適経路である。

手順4　手順2，手順3で求めた負同値問題における最適解から，主問題における最適解を次のように構成する：

最適経路

$$(i,\hat{j},\hat{k},\dots,\hat{m},N),\ i=1,2,\dots,N-1;$$

最短（長）経路の長さ $a_{iN}^*(A_{iN}^*)$

$$a_{iN}^*=u-\bar{A}_{iN}^*,\ A_{iN}^*=u-\bar{a}_{iN}^*,\ i=1,2,\dots,N,$$

ただし $\overline{A}_{iN}^*(\bar{a}_{iN}^*)$ は負同値問題における最長（最短）経路の長さである。

注意4

主問題 **AOP** および負同値問題 **NAOP** にフォード法を適用したとき，最適路長を求めるための手間を，大小比較と加減乗除の回数（の最大値）で評価し，比較検討する。

まず主問題として，乗加法型問題($a\circ b=a+b-ab$)を考える。各反復（ステップ2）において，$3(N-1)^2$ 回の演算（$(N-1)^2$ 回の加法，$(N-1)^2$ 回の減法，$(N-1)^2$ 回の乗法）および$(N-1)(N-2)$回の大小比較が必要である。定理2より高々 N−1 回の反復で最適解が求まるので，結局$(4N^2-9N+5)(N$

$-1)=4N^3-13N^2+14N-5$ 回の計算が必要である。一方，その負同値問題$(a\bullet b=ab)$にフォード法を適用すると，各反復で，$(N-1)^2$ 回の乗法および$(N-1)(N-2)$回の大小比較ですむ。また $N-1$ 回の反復で最適解が求まるので，結局$(2N^2-5N+3)(N-1)=2N^3-7N^2+8N-3$ 回の計算が必要であるが，この回数は主問題における計算回数のおよそ半数である。

次に主問題として，分数型問題$(a\circ b=ab/(1+(1-a)(1-b)))$を考える。各反復で，$6(N-1)^2$ 回の演算（$(N-1)^2$回の加法，$2(N-1)^2$回の減法，$2(N-1)^2$回の乗法，$(N-1)^2$回の除法）および$(N-1)(N-2)$回の大小比較が必要である。また N$-$1 回の反復で最適解が求まるので，結局$(7N^2-15N+8)(N-1)=7N^3-22N^2+23N-8$ 回の計算が必要である。一方，負同値問題$(a\bullet b=(a+b)/(1+ab))$では，各反復で $4(N-1)^2$回の演算（$2(N-1)^2$回の加法，$(N-1)^2$回の乗法，$(N-1)^2$回の除法）および$(N-1)(N-2)$回の大小比較ですむ。そこで $N-1$ 回のすべての反復では，$(5N^2-11N+6)(N-1)=5N^3-16N^2+17N-6$ 回の計算が必要となる。したがって，負同値問題では主問題において必要とされる計算回数のおよそ$\frac{5}{7}$の計算回数で最適解が求まる。

以上のことから，結合型最適経路問題 **AOP** を解く場合に，負同値法が計算回数の軽減に有効であることがわかる。

例４． 図４のようなネットワーク上で，道の長さが２項演算 $a\circ b=a+b-ab$ を用いて定義された問題$(\min,\{t_{ij}\},(-\infty,1),\circ)$（２パラメータ乗加法型問題の１つ）を考える。この問題を負同値法で解く。

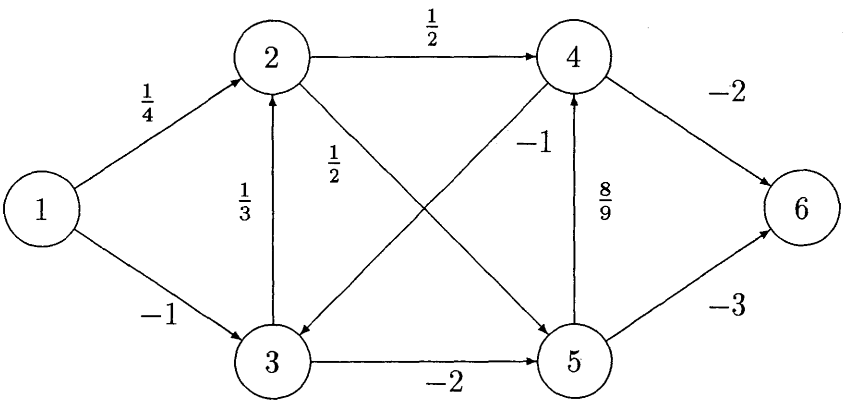

図４　AOP: Opt=min, $a\circ b=a+b-ab$, $S=(-\infty,1)\ni 0=R(\circ)$

手順１：$u=1$ とすると上記問題の負同値問題は，図５のように各枝長 $\bar{t}_{ij}$ が定義された問題であり，

$$\mathbf{NAOP}=(\mathrm{Max},\{\bar{t}_{ij}\},(0,+\infty),\times)$$

である。

手順２：表６からわかるように，負同値問題におけるフォードのアルゴリズムは４回の反復で終了し，各頂点 i から終点への最長路長は$\bar{f}_i^{(4)}(=\bar{A}_{i6}^*)$である。

手順３：表７より負同値問題における各頂点 i から終点６への最長経路は

$$(1,3,5,6),(2,4,3,5,6),(3,5,6),(4,3,5,6),(5,6)$$

であることがわかる。

手順4：手順2，手順3より，主問題における最適解は以下の通りである：

最短経路：(1, 3, 5, 6), (2, 4, 3, 5, 6), (3, 5, 6), (4, 3, 5, 6), (5, 6)

最短経路の長さ a^*_{i6}：

$$a^*_{16}=1-\bar{A}^*_{16}=-23,\ a^*_{26}=1-\bar{A}^*_{26}=-11,$$
$$a^*_{36}=1-\bar{A}^*_{36}=-11,\ a^*_{46}=1-\bar{A}^*_{46}=-23,$$
$$a^*_{56}=1-\bar{A}^*_{56}=-3,\quad a^*_{66}=1-\bar{A}^*_{66}=0.$$

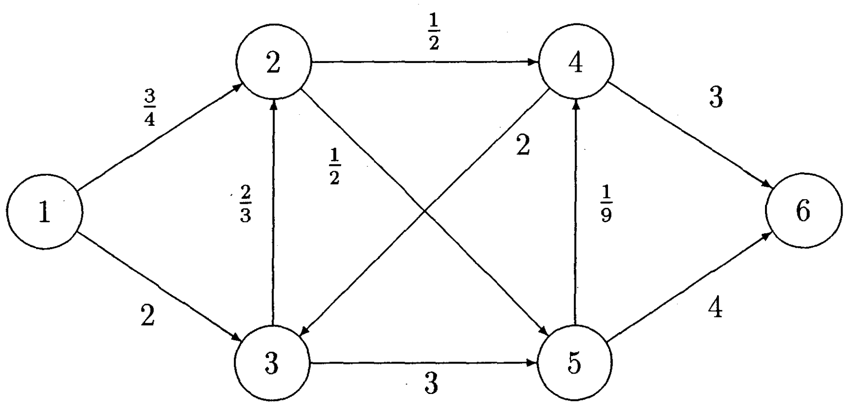

図5　**NAOP**: Opt=Max, $a \bullet b=ab$, $S=(0,+\infty)\ni 1=R(\bullet)$

表6：負同値問題：乗法型（$a \bullet b=ab$）における逐次列

Node	$\bar{f}_i^{(0)}$	$\bar{f}_i^{(1)}$	$\bar{f}_i^{(2)}$	$\bar{f}_i^{(3)}$	$\bar{f}_i^{(4)}=\bar{A}^*_{i6}$
1	0	0	24	24	24
2	0	2	2	12	12
3	0	12	12	12	12
4	3	3	24	24	24
5	4	4	4	4	4
6	1	1	1	1	1

表7：負同値問題：乗法型（$a \bullet b=ab$）における最適決定関数列

Node	$\pi^{(1)}(i)$	$\pi^{(2)}(i)$	$\pi^{(3)}(i)$	$\pi^{(4)}(i)$
1	2 or 3	3	3	3
2	5	5	4	4
3	5	5	5	5
4	6	3	3	3
5	6	6	6	6

例5．図6のようなネットワーク上で，道の長さが2項演算 $a \circ b = \frac{ab}{1+(1-a)(1-b)}$ を用いて定義された問題$(\mathrm{Max}, \{t_{ij}\}, (0,2), \circ)$（2パラメータ分数型問題の1つ）を考える。この問題を，やはり負同値法で解く。

手順1：$u=1$とすると上記問題の負同値問題は，図7のように各枝長 $\bar{t}_{ij}$ が定義された問題であり，

$$\mathbf{NAOP} = (\min, \{\bar{t}_{ij}\}, (-1,\ 1), \bullet)$$

である。ただし，$a \bullet b = \frac{a+b}{1+ab}$ である。

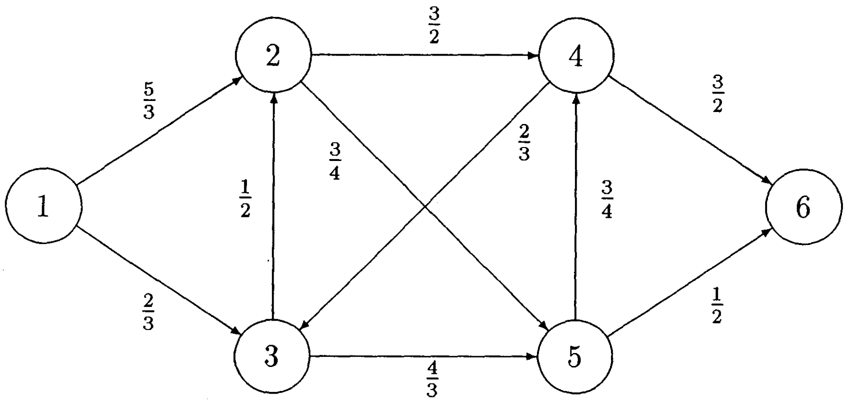

図6　**AOP**: Opt=Max, $a \circ b = \frac{ab}{1+(1-a)(1-b)}$, $S=(0,\ 2) \ni 1 = R(\circ)$

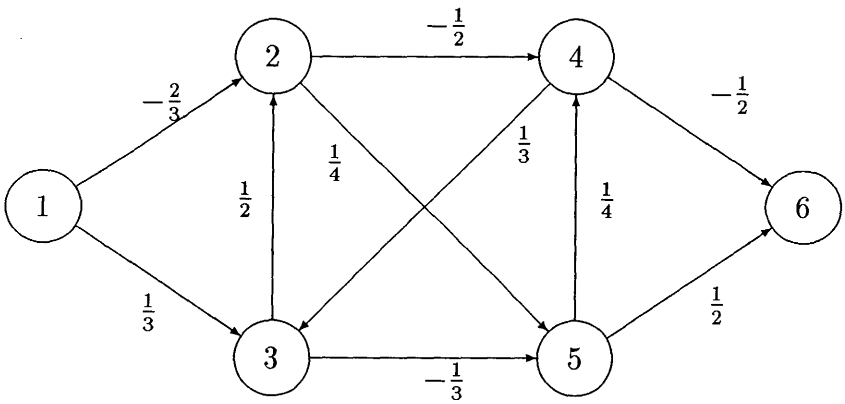

図7　**NAOP**: Opt=min, $a \bullet b = \frac{a+b}{1+ab}$, $S=(-1,\ 1) \ni 0 = R(\circ)$

手順2：表8からわかるように，負同値問題におけるフォードのアルゴリズムは3回の反復で終了し，各頂点iから終点への最短路長は$\bar{f}_i^{(3)}\,(=\bar{a}_{i6}^{*})$である。

手順3：表9より負同値問題の各頂点iから終点6への最短経路は

$$(1,2,4,6),\ (2,4,6),\ (3,5,4,6),\ (4,6),\ (5,4,6)$$

であることがわかる。

手順4：手順2，手順3より，主問題における最適解は以下の通りである：

最長経路：$(1,2,4,6),\ (2,4,6),\ (3,5,4,6),\ (4,6),\ (5,4,6)$;

最長経路の長さ A^*_{i6}：

$$A^*_{16}=1-\bar{a}^*_{16}=\frac{45}{23},\quad A^*_{26}=1-\bar{a}^*_{26}=\frac{9}{5},$$

$$A^*_{36}=1-\bar{a}^*_{36}=\frac{36}{23},\quad A^*_{46}=1-\bar{a}^*_{46}=\frac{3}{2},$$

$$A^*_{56}=1-\bar{a}^*_{56}=\frac{9}{7},\quad A^*_{66}=1-\bar{a}^*_{66}=1.$$

表8：負同値問題：分数型（$a\bullet b=\frac{a+b}{1+ab}$）における逐次列

Node	$\bar{f}_i^{(0)}$	$\bar{f}_i^{(1)}$	$\bar{f}_i^{(2)}$	$\bar{f}_i^{(3)}=\bar{a}^*_{i6}$
1	1	1	$-\frac{22}{23}$	$-\frac{22}{23}$
2	1	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}$
3	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{13}{23}$	$-\frac{13}{23}$
4	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
5	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{2}{7}$
6	0	0	0	0

表9：負同値問題：分数型（$a\bullet b=\frac{a+b}{1+ab}$）における最適決定関数列

Node	$\pi^{(1)}(i)$	$\pi^{(2)}(i)$	$\pi^{(3)}(i)$
1	2 or 3	2	2
2	4	4	4
3	5	5	5
4	6	6	6
5	4	4	4

参 考 文 献

[1] R. Bellman, Dynamic programming, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1957.

[2] B. A. Carré, An algebra for network routing problems, J. Inst. Maths. Applics. **7**(1971), 273-294.

[3] S. E. Dreyfus and A. M. Law, The art and theory of dynamic programming, Academic Press, New York, 1977.

[4] 伊理正夫，古林隆，「ネットワーク理論」，日科技連，1976年。

[5] 岩本誠一，「動的計画論」，九州大学出版会，1987年。

[6] 岩本誠一，最短ルート問題のその後について，経済学研究 **57**(1992)，199-217。

[7] S. Iwamoto, From dynamic programming to bynamic programming, J. Math. Anal. Appl. **177**(1993), 56-74.

[8] Y. Maruyama, Shortest and longest path problems, Optimization **38**(1996), 287-299.

[9] Y. Maruyama, On associative shortest path problems, Bull. Inform. Cybernet. **29**(1997), 67-81.

[10] Y. Maruyama, On a negative-equivalency theorem in associative optimal path problems, to appear in Optimization.

[11] Y. Maruyama, Associative shortest and longest path problems, submitted.

[12] M. Sniedovich, Dynamic Programming, Marcel Dekker, 1992.

〔長崎大学経済学部助教授〕