経済動学とカオス制御

時永, 祥三
九州大学経済学部 : 教授

https://doi.org/10.15017/4362847

出版情報：經濟學研究. 66 (2), pp.1-15, 1999-09-30. 九州大学経済学会

経済動学とカオス制御

時　永　祥　三

1．はじめに

観測される時系列やシステムの挙動に見られる不規則な変動は，従来より確率過程を用いてモデル化されることが多かった。これに対してカオス理論は，これらを決定論的な方程式により定式化する方法であり，異なる角度からのアプローチであるとして注目されている[1]~[6]。カオス理論では，一見不規則と思われる現象が方程式により解明されるため，予測や推定の適用，あるいは挙動のダイナミックナ特性を検討するのに好都合となっている。経済モデル分析においても，不均衡の動学モデルを前提とした場合の定式化に利用され，多くの興味ある性質が導出されている。

しかしながら，カオスはもともと予期しない変動に属するものであり，工学分野においても除去すべき対象として見なされてきた。従って，経済動学においても，カオス理論が適用されはじめた当初から，不安定な周期変動から安定的な挙動へと移行するための入力やシステムの変更について議論がなされてきている。このようなことから，カオス的な性質があるかを分析することや，カオス経済動学によりシステムを解析する手法などと同様に，カオスを制御する方法を検討することは興味あることがらである。

本論文では，カオス的な性質を含む経済動学において，システムへの制御入力により不安定周期変動を安定化するカオスの制御法を述べるとともに，代表的なカオス経済動学への応用を示す。このことは，一見，不規則とも思える経済の挙動を，政策的に制御して，ある目的にレベルに移行することができる手段を提供できることを示している。

すなわち，効率的市場などにより説明されている均衡点に注目した政策が存在する一方で，あるいは規制や制御により常に均衡点へと移行されている経済が存在しうること，あるいは，変動がある，いわゆる不均衡経済での政策において，証券市場や資本市場でのボラティリティの発生と，これをもとにした有能なトレーダ戦略の存在しうることを裏付ける１つの例題ともなっている。

以下，2. ではカオス研究におけるカオス制御の位置について概要を述べ，3. では経済動学モデルを中心としてカオスの理論と応用に関して整理する。4. では，カオス制御の方法を用いて，カオスにより発生された不均衡経済モデルの経路を，ある安定な不動点に移行する方法について述べ，5. では実際的な応用例を与える。

2．カオス理論の基礎と応用について

2.1 カオス研究の意義

現在では，カオス理論は工学分野だけでなく，

各種の研究分野でとりあげられるようになっている。従って，その研究の意義について，改めて多くを述べる必要はないので，以下では，研究の応用やその活用に関して簡単に整理しておく。

カオス研究には，次の３つの分野があると言われている。

(1) カオス発生のメカニズム解明

システムを記述する方程式やシミュレーション結果をもとにして，システム挙動にカオス性が見られるかを検証する。カオスが発生することにより不都合な状況が生じる場合には特に有効である。

(2) カオス制御

カオス制御とは，いったん発生したカオス的な挙動を，システム制御理論を用いて安定な挙動に移行させる方法である。工学分野では運動体の安定化のほかに流体の安定化などへも応用されている。経済分野では経済システムを安定化させる財政投入などをモデル化することができる。

(3) カオス応用

システムが発生するカオスを積極的に応用する研究は少ないのが現状であり，実際にはカオスを抑制する，あるいは除去するための条件を探すことが目的となっている。しかし，カオスにより変動する現象へといったん変換し，あとでこれを戻す操作を利用する暗号化の理論が示されている。また，カオスが決定論的な方程式で記述されることを用いて時系列を予測する手法が展開され，証券市場，資本市場などカオス的な動きを応用して予測をする可能性など有用な分野も残っている。

本論文では，(2)カオス制御の応用として，変動する市場，景気動向などを，どのレベルで制御することができるかを議論している。政策的な財政の投入などによる周期変動の抑制などがモデル化できる可能性がある。(3)のカオス応用に関して，カオス的な市場を仮定することにより，通常の定常的な仮定のもとでの結果と比較して高い利益，効用が得られることが示されている。このことは，証券市場，資本市場などの変動する環境をうまく説明できるとともに，不安定性を積極的に活用する政策の可能性を開いている。しかし，このことは別に論じたい。

2.2 カオスと決定論的方程式

経済時系列に代表される経済データは，現在まで不確実現象であるとの前提で解析が進められており，例えば時系列を確率過程であると見なして ARMA(自己回帰移動平均)モデルなどをあてはめて，種々の方法でモデルのパラメータを推定することが行われている。カオス理論は，これらの確率過程のモデルとは異なり，いわゆる決定論的方程式によりデータが生成されるとするものであり，基本的な差異がある。従って，カオスとして発生された時系列も，一見すると確率過程のように思えるが，解析を行うとカオスであることを確認することができる。

この確認の方法としてはいくつか存在するが，アトラクタの形状をもとにした方法であると言える。アトラクタは時刻 t と $t+1$ における変数(関数)値を２次元の横軸と縦軸にとって描いたものであり，このアトラクタの形状がはっきると見えるのがカオスの特徴である。

例えば，良く知られているカオス発生のモデルとして次を考える。

$$y(t+1)=ay(t)(1-y(t)) \qquad (1)$$

このモデルの経済学的な解釈としては，次のようなものがある。変数 $y(t)$ を広告宣伝費用とした場合，今期 t における売上 $R(t)$ は宣伝費用

に比例するが，反面，これを増やしすぎると減少に転じるので，$R(t)=by(t)(1-y(t))$となる。この利益に比例して来期の宣伝をするので，式(1)で来期の宣伝費用を決めている。これをロジスティックマップ(logisitc map)とよんでいる。

このとき，変数$y(t)$の変化を調べるために，パラメータaを横軸にとり変化させながら$y(t)$を縦軸に描いたものが図１である。図１，図２が示すように，変数 $y(t)$の形状は，パラメータaが３をこえるあたりから不規則な変動となることがわかる。いわゆるカオス領域に入ったことを示す。図２は，$y(t)$を横軸に，縦軸には$y(t+1)$をとり描いたものである。図２に示すように，時刻 $t, t+1$ における変数の値は１つの方程式で結ばれているので，その軌跡（アトラクタ）は明確な形状をしている。もし，ARMAモデルにより時系列を発生させて相図を描いても，ばらばらな点の集まりになる。カオスは，このように決定論的な方程式により生成され，パラメータの微妙な変化によりカオス領域に入る。

カオスのもう１つの大きな特徴は，初期値への依存性である。式(1)に示した方程式において，変数$x(t)$の最初の値(初期値)がわずかに異なる２つのケース(例えば，1.0000と1.0005)を考えた場合に，時間の経過とともに，これら２つのケースでの変数$x(t)$の値(挙動)は大きくずれてしまうことが理論的に証明できる。カオスの発生は決定論的な方程式によりなされるが，その微妙な変化が大きな差異をもたらるという意味で，従来の確率過程に基づく不規則変動とは異なる側面を与えている。

2.3 カオス発生メカニズム

カオス理論が気象学において微分方程式を解く場合に見られる異常な現象の発見から発展したように，現在まで自然科学の分野において理論的な展開や応用がなされている[7]~[9]。しかし，すでに述べたように，システムを記述している方程式をもとにして，簡単な計算によりカオスが発生するかどうかを検証することは困難である。そのため，現実には，次のような方法によりカオスとなるかどうかの判断が行われる。

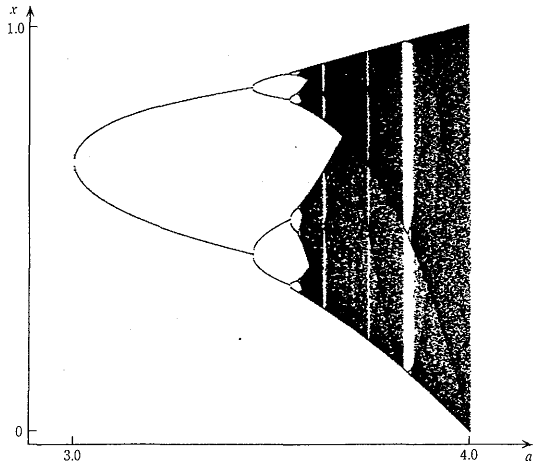

図１　y(t)のａによる分岐

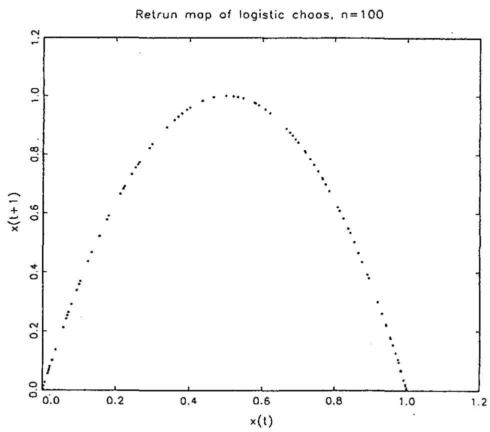

図２　ロジスティックマップのアトラクタ

(1) 分岐状況から判断する

システムのパラメータを変化させながら無作為に挙動をチェックしてもカオス発生を確認できないため，システムの分岐条件からカオスとなっているかどうかを判断することが行われる。

(2) 既知のシステムへ帰着させる

カオス発生に限らないが，システムを記述する方程式を変換していき，すでにカオスを発生することが分かっている方程式と同じであれば，カオス発生が確認できる。

(3) 形式的カオスの判定

形式的カオスの発生とは，一般にリー・ヨーク定理とよばれているものを用いる方法であり，周期的な軌道が発生する条件が満足されていればカオスとなる可能性がある(全部ではないので形式的とよばれる)。

従って，一般的にシステムがカオスとなりうるか，あるいはカオスを発生するかどうかは，簡単には求められない。特に，工学分野と同様に，経済学の場合にも，多くの制約条件を含みながらシステムを記述する方程式体系が得られており，その構成を任意に変更することはできない。

あとでの議論の都合上，ここでリー・ヨーク(Li and York)の定理について整理しておく[10]。

(リー・ヨークの定理)

B を区間 $I=[a,b]$ から同じ区間への連続な写像とする。このとき

$$B(q_2)\leq q_0<B(q_0)<B(q_1) \tag{2}$$

または

$$B(q_2)\geq q_0<B(q_0)<B(q_1) \tag{3}$$

を満足する点 q_0 が区間 I に存在すれば，次のことが言える。

(1) B はすべての正の整数 k に対して k 周期点をもつ。

(2) $S\subset I$ なる非加算集合が存在し，S はどのような周期点も含まない。

3．経済動学モデルとカオス

3.1 経済動学でのカオス研究

一般にカオスが発生するには3次元以上の空間が必要であるとされており，2次元自律系の場合にはアトラクタは単なるリミットサイクルになる。しかし，時間を加えると3次元システムと等価となることが知られており，更に，無駄時間をシステムに取り込むと，次元は無限となりカオス発生の可能性が生まれてくる。すでに述べたリー・ヨークの定理や，後で述べる世代重複モデルはこのような条件を保証する1つの方法となっている。

1990年ごろから経済学においても積極的にカオス理論を適用する試みがなされており，従来とは異なる新しい結果や解釈を生んでいる。これを具体的に言えば, 1)カオス時系列の応用, 2)不均衡経済モデルの導入，3)動学モデルにおけるカオスである。以下では，これらの概要について述べるとともに，カオス理論を適用する意義について整理する。

(1) 経済時系列のモデル化

カオスが不規則な変動をモデル化する方法として展開されている1つの背景として，時系列解析への応用があげらる。すなわち，時系列をカオスによりモデル化することが可能なら，確率過程の理論ではなく確定的な式で時系列の予測が可能となることが期待される。このような理由で, カオスを時系列解析に応用する研究は，現在まで比較的多数行われている。

経済分野に限定すれば，その範囲は為替レート変動，株価，TB など債券価格などから各国

の GDP の成長率まで及んでいる。これらの研究の多くが，アトラクタの描画，相関次元の計算，リアプノフ指数の計算により，時系列がカオスであるかどうかを判断するものである[11]~[13]。工学分野では，アトラクタを推定したのち，これを外挿する方法により時系列を予測しており，ARMA モデルのようなモデル推定，予測に類似した方法が適用されている。

(2) 不均衡経済モデル

現在まで，マクロ経済学を中心として経済の諸要素のバランスを前提とした，いわゆる均衡モデルが展開されてきている。これは，例えば，予算制約のもとで便益を最大化するような条件と，その場合の解をもとめる方法であり，経済の均衡を解明する問題である。従って，応用一般均衡（AGE: Applied General Equilibrium）などのような数値解析の方法においても，完全に均衡したあとの経済状況を求める問題に帰着されている。

しかし，現実には証券市場や資本市場における激しい変動，あるいは，そのような変動を積極的に利用する投資家の存在など，不均衡経済モデルを前提とした政策や行動が見られる。経済均衡にいたるまでの十分な時間経過を仮定すると，確かに均衡点は意味をもつが，その途中の段階における投資行動などの解明は，これらに比較しても意味のある情報を与える。従って，経済が変動することを前提とした不均衡モデルを積極的に活用し，決定論的なモデルとして記述手段としてカオス理論が用いられている。

(3) 動学モデル

経済学における動学モデルとは，１つの世代だけのモデルだけではなく，次の世代までを考慮したモデルである。一般にこれを拡張すると，複数の世代にまたがった解析が可能となるので，通常は２世代にわたる解析が行われる。マクロモデルなど，構造方程式で記述されるモデルでは，１つの世代にまたがった経済構造が記述され，いわばクロスセクション分析が行われる。もちろん，資本ストックのように，１つ前に期における変数が関連づけられることもあるが，あくまでも静的な関係式である。

これに対して，老年世代と青年世代の２つの世代を同時にモデルに組み込む方法(人は青年と老年の２期間だけ生存して消費する)により，カオス性が生まれることが Grandmont と Geanakoplos により独立に理論的に証明され，これを用いた分析方法が提案されることになっている。これを世代重複モデル(overlapping generations model)とよんでいる。次にその定理とその意味を示す。これは青年世代と老年世代との間の賃借関係が存在し，その利子率を介して消費決定と資産投資決定の間でバランスを取ろうとする傾向が形式的カオスを生むと解釈されている。(Grandmont(1985)，Geanakoplos (1989)[14]

世代重複モデルの１財定常的経済においては，均衡価格について k 周期点をもつ均衡循環が存在し，また無数の周期点がある。すなわち，形式的なカオスが存在する例を多数作れる。

この定理は，直観的に言えば工学分野における時間関数とその微分の導入に相当すると考えられる。このような時間の導入はダイナミックスとも呼ばれ，時間の経過によってシステムの挙動が変化していくことに対応している。従って，１つの期だけを前提としたモデルでは発生しなかった時間的に変動する要素の出現や，不規則な変動をモデルにとり入れることが可能となる。

3.2 レスラー方程式を基本として

経済分野へのカオス理論の導入は，さまざまな形で行われているが，特に，工学分野での研究者との共同作業で新しい方向が見いだされていることは興味深い。このようなモデル導出の過程を系統的に分析するのは意義のあることであるが，本論文では論文の後半において，カオス制御法の適用による不均衡経済モデルの均衡点への移動や，カオス導入による利益，効用の増加を議論するので，ここでは代表的なモデルを対象としておく。

経済動学の分野でカオス発生のモデルとして良く知られているものに，次のようなものがある。

(1) ロジスティック・マップ

すでに述べた広告宣伝費の推移の式である。

$$y(t+1)=ay(t)(1-y(t)) \tag{4}$$

これにより説明される経済動学は同様な性質をもつ対象について可能である。

例えば，時刻 t における資本 $k(t)$ についてなりたち，次の式で表現される。

$$k(t+1)=jk(t)(1-k(t)/c) \tag{5}$$

あるいは，微分形では

$$dk(t)/dt=jk(t)(1-k(t)/c) \tag{6}$$

ここで，$k(t)\leq c$ の間，資本蓄積が進行する。

(2) フォン・ノイマン・モデル[3]

フォン・ノイマン・モデル（von Neumann model）とは，次の方程式で記述される離散システムを指しており，パラメータ a の選択の方法によりカオスが発生することが知られている。$y(t), u(t), w(t), \nu(t)$ は，それぞれ，産出，単位労働費用，賃金，雇用比率である。

$$y(t+1)=y(t)/(a+u(t+1)) \tag{7}$$

$$u(t+1)=a_L(t+1)w(t+1) \tag{8}$$

$$\nu(t)=L(t)/N(t)=a_Ly(t)/N(t) \tag{9}$$

このとき，パラメータ a の選び方により，$u(t)$ と $\nu(t)$ とを描いた相図がカオス的となるケースが生じる。

(3) 非線形加速度原理[3]

資本能力を K，産出する複合財を Y とするとき，Y を生産する必要な生産能力を R とする。このとき，資本・産出比率 r を用いて

$$Y=R/v \tag{10}$$

とする。資本能力の増加分は

$$dK/dt=(1/r)(vY-K) \tag{11}$$

として捉えるとができる。Y の需要は消費 C と投資 K からなるとすると

$$Y=C+dK/dt \tag{12}$$

消費は Y に比例して決まるので

$$C=\alpha Y+\beta,\ 0<\alpha<1, \beta<C \tag{13}$$

投資をある水準にあると仮定すると，Y の均衡値 Y_* は

$$Y_*=(\beta+dK/dt)/(1-\alpha) \tag{14}$$

これは K の増加により Y_* は乗数 $(1/(1-\alpha)$ をさす) の大きさ分だけ増加する，いわゆる乗数原理である。このままではカオスは生じないが，資本の増加減少 dK/dt に関して非線形性区分線形性を導入することにより，異なる挙動が生じる。資本能力の不足，剰余に応じて資本の増強，廃棄が行われると仮定する。

このとき，$K, dK/dt$ を横軸，縦軸とする図（相図）を描くと，リミットサイクルが現れる。

(4) ビジネスサイクルと振動[3]

工学分野では，最初の実験的に観測できるカオス現象として，電子回路により模擬されるファン・デル・ポールの非線形方程式が良く知られている。経済学者のグットウイン（Goodwin）は，このファン・デル・ポール方程式にヒントを得て，ビジネスサイクルをモデル化する方法を提案している。その方程式は，1つの変数について次のように書かれている。産

出を $y(t), \psi(.)$ を区分線形の非線形関数とするとき，次で与えられる。

$$\varepsilon d^2y/dt^2(\tau+\theta)+(1-a)y(\tau+\theta) -\psi(dy/dt))=\beta \quad (15)$$

これは，しばしば，グットウインの２工程振動子とよばれている。

(5) レスラー方程式とシュンペーターの問題[8][9]

３次元微分方程式のシステムでカオスを生成するものとしてローレンス系とレスラー系が良く知られている。特に，レスラー方程式は１つの非線形性だけでカオスを発生する興味ある性質をもっている。これは，次のように示される。

$$dv/dt=-u-z \quad (16)$$

$$du/dt=v+au \quad (17)$$

$$dz/dt=b+z(v-c) \quad (18)$$

レスラー系を経済動学で解釈する場合，v, u に対して，それぞれ，雇用比率，労働のシェアを対応させる。変数 z はシステムを制御するための変数として取り扱われれる。

(6) 不均衡モデルと区分線形システム[15]

不均衡モデルにより経済動学における説明力をたかめることが行われているが，そのモデルにおいてカオスを発生させるメカニズムを組み込む試みが行われている。文献[16]により導入された従来の不均衡モデルのカオス導入は１つの興味ある結果を与えている。２つの主体と２つの市場（２部門モデル）であり，システムは次のように記述される。

$$Y^D(t)=a+bL(t), L^S(t)=d,$$

$$Y^S(t)=I(t-1)+\delta L(t) \quad (19)$$

$$L^D(t)=max[0, (S^e(t)+(I^d(t)-I(t-1))\delta] \quad (20)$$

$$I(t)=max[0, Y^S(t)-Y^D(t)] \quad (21)$$

ここで，$L^D(t)$，$L^S(t)$ は時刻 t における労働力の需要と供給であり，$Y^D(t), Y^S(t)$ は時刻 t における消費財の需要と供給である。また，$L(t)$ は時刻 t における労働力需要であり，$I^d(t), S^e(t)$ は時刻 t における在庫需要要求と期待販売量である。

$$L(t)=Min(L^D(t), L^S(t)), Y(t)= min(Y^D(t), Y^S(t)) \quad (22)$$

であるので，労働需要 L(t)=L(I(t))は

$$L(I(t))=max(0, Min(d, ds)) \quad (23)$$

$$ds=(1+\beta)a-I(t)/(\delta-(1+\beta))b \quad (24)$$

として記述される。これは，区分的に線形の関係式ではあるが，全体では非線形となる，いわゆる区分線形システムとなっている。最初の方程式系の第３番目，あるいは，これを代入した式(22)にカオス性が含まれている。

文献[15]では，企業の利益関数および労働者のユーティリティ関数を定義して，これらを最大化するメカニズムを仮定した場合に，均衡モデルにおける平均値に比較して，不均衡モデルで動学にカオスが含まれるケースでは，利益(return)および効用(utility)のどちらも相対的に大きくできることを示している。このことは，経済の変動が企業，労働者に有利となることを示す点で興味ある。

４．カオス制御による均衡点への移動

4.1 カオス制御

カオスは1950年代に研究が開始された動的制御理論の分野においても見いだされており，当時はシステムの特性や挙動にとって好ましくないものとして考えれられていた。しかし，すでに見てきたように，現在ではこのような不規則なカオスの性質を積極的にシステム記述にとりいれることがなされている。ここで述べるカオ

ス制御の課題は，実はカオス理論の研究が開始された時期の議論にこたえる内容のものとなっている。すなわち，カオス的な挙動をするシステムを，外部から制御することにより，カオス的ではない状態に移行させる方法を示すことにある[17][18]。

このような，カオスから抜け出すための制御方法を，一般にカオス制御とよんでいる。カオス制御が必要とされる分野やその意義については次のように整理される。

(1) 不規則変動を止める

不均衡経済モデルに見られるように，カオス的な状況のもとでは経済モデルに変動要因が含まれ,システムはいつまでたっても安定しない。しかし，課題として，ある経済政策をとることにより，不規則に変動する経済モデルから，安定した挙動へと移行させる方法を見いだす必要があったとする。例えば，混乱する市場や経済環境を，政府の政策で鎮静化するなどの例が考えらる。カオス動学では，カオスでない状態へ移行させる場合，最初に選ばれるのが不動点である。経済動学における不動点がこのようなカオス制御により達成される。通常は市場は不規則に変動し，それぞれの投資家に利益をもたらしても構わないが，特定の時期に政府などが介入して安定化できる可能性があるかなどを検討する理論的基礎を与える。

(2) 周期振動へ均衡させる

カオス制御により不動点に移行させるほかに，周期的な振動に対応するアトラクタを目標とする場合もある。もちろん，アトラクタにこのような周期振動が含まれている必要がある。周期振動へのシステムの移行は，経済動学では季節的な変動を許した上での経済の安定化などとして解釈できるであろう。

(3) 特定の時系列成分を取り出す

カオスをネットワークとして結合した機構を利用した時系列記憶のシステムでは，複数の時系列パターンを同時に記憶させる構造を作ることができる。しかし，システムがカオス的な変動をしている限りは，このようなパターンが繰り返し出現するだけであり，特定の時間，時刻で目的とする時系列を取り出すことができない。このような場合に，カオス動学において，特定のパラメータを調整することにより，記憶された時系列パターンを取り出すことができる。正確には，このような動作を連想記憶とよんでいる。

4.2 カオス制御の簡単な例

以下では，カオス経済動学における制御対象として，カオス性をもつ代表例であるレスラー方程式系を考察する。以下で述べるように，システム制御理論により，カオス制御の方法が導出されているが，この前に経験的に発見された制御法を述べておく。この方法の基本は，システムの動作の途中で，システムのパラメータを変更する方法であり，システムの構造こそ変わらないが，システム挙動が変更されてしまう問題がある。以下では，グットウインにより示された方法を例にとって説明する。あらためてレスラー系を示す。

$$dx/dt=-y-z \tag{25}$$

$$dy/dt=x+\alpha y \tag{26}$$

$$dz/dt=\beta-\gamma z+xz \tag{27}$$

この不動点は $x=y=z=0$ である。グットウインは，システムのパラメータである c を現在の値から数段階にわたり，より小さな値に設定することにより，システムの挙動を不動点に移行できることを示している。図3には，簡単シミュ

レーションによる結果を示している。図3では，最初の段階（初期値）は次のようになっている。

$g=50, c=0.05, d=0.5, f=0.15, e=0.3, h=0.5$

$b=0.01, \nu(0)=0.02, u(0)=0.03, z(0)=0.02$

このあと，ステージ1では $g=85$，$c=0.01$ に設定しなおし，更にステージ2では $g=85$，$c=0.01$ に移行している。その結果，最終的には，安定化されている。

このように，変数の動きを観測しながら，その大きさに比例，もしくは傾向的な数値に比例してパラメータを変動させることにより，振動を制御できることを示している。このことは，政府による政策が，市場での行き過ぎを是正する方向に働くこととして説明されている。

しかし，文献［3］でも述べられているように，システムのパラメータを変更することは，現実との対応があまり鮮明ではなく，人為的なシミュレーションに過ぎない考えられる。

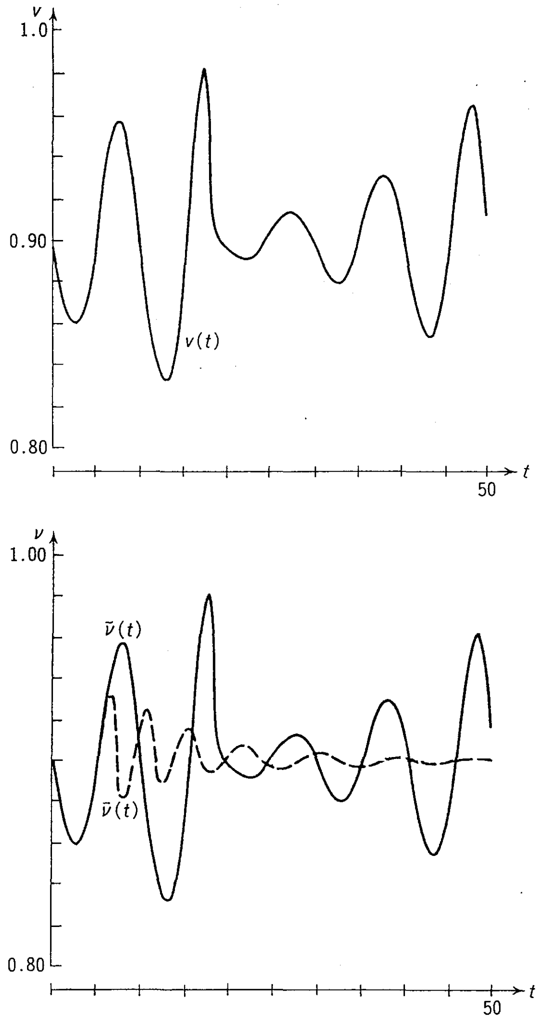

図3　レスラー系のカオス制御の例

4.3 OGY 法によるカオス制御

カオス制御の方法に関しては制御工学を中心として研究がすすめられ，現在ではその方法は次の2つの方法に集約されている[19][20]。第1番目はフィードバック制御による方法であり，古くから用いられているシステム安定化手法である。しかし，この方法は工学的には振動の発生を抑制したりシステムが発散するのを防止する意義があるが，システム構成が変化するため，経済モデルなどの挙動を見ながら制御する場合には適していない。

第2番目は OGY 法とよばれる方法であり，OGY は手法の開発者の頭文字（Ott, Grebogi, Yorke）に由来している[19]。OGY 法は，カオスアトラクタに埋め込まれた多くの不安定軌道が存在する場合，局所安定化が達成できる近傍に近づいたときに，適切な制御入力を加えることにより安定化された周期軌道へと導く方法である。この方法では，システムの構造を変形させることなく，必要とされる短時間にシステムへの入力を加えるだけで安定化を達成できるメリットがある。ただし，一方では，システムに対する即応性がないことや，制御入力をすべき時間が初期値に依存するなどの問題ももっている。以下，文献［19］をもとにして OGY 法の概要を述べる。

いま，例として3次元空間における連続系のダイナミカルシステムを考え，システムパラメータ p を含んで次のように書かれているとする。

$$dx/dt=F(x,p) \tag{28}$$

ここで，システムを記述する方程式は未知であり，時系列 $x(t)$ が観測されているとする。このとき，

$$X(t)=(x(t),x(t-T),x(t-2T),\ldots,x(t-mT)) \tag{29}$$

とする。

これが，いわゆる Takens の埋め込み定理であり，もとの観測データがカオスであるかを判断する場合に，この観測データから m 次元空間に写像(変換)されたシステム(これをアトラクタという)の挙動から，カオスであるかどうかを判断できることを意味している。この m の大きさについては，もとの観測されたシステムの次元を d とすると

$$m\geq 2d+1 \tag{30}$$

であることが必要である。

この $X(t)$ を用いて部分的な表面(surface of section)において周期的な軌道を安定化させる方法を求める。この表面においては，連続系の軌道が，1つの有限な点を回る軌道として現れることになる。従って，これらの近傍の点に注目して安定化の方法を求める。

2次元のアトラクタの場合の例を図4に示している。一般にはカオスは周期的な変動と不規則な変動の両方を含んでいるので，アトラクタは1つの曲線ではなく，複数の曲線の集合として記述される。この中には，図4に示すように点 x_f に収束する方向に進む線分がある一方で，これから離れていく線分，あるいは x_f に近づきながら，結局は x_f には至らない線分から成り立っている。このような，x_f としては，後述する不動点がある。不動点に収束するアトラクタを安定多様体とよび，不動点には至らない，あるいは離れていく線分を不安定多様体とよんでいる。

カオス制御とは，x_f の近傍に近づいたときに，外力を加えることにより不動点 x_f へと収束させる方法であると言える。簡単のために，入力を含む2次元非線形離散時間システムを考える。

$$x(t+1)=f(x(t),u(t)) \tag{31}$$

ただし，$x(n)$ は時刻 n でのシステムの状態，$u(t)$ は制御入力であるとする。x_f を $u(t)=0$ であるときのシステムの不動点であるとする。

$$x_f=f(x_f,0) \tag{32}$$

従って，この不動点での線形化システムは，次のようになる。

$$x(t+1)-x_f=A(x(t)-x_f)+bu(t) \tag{33}$$

ただし，

$$A=D_xf(x_f,0),\ b=D_uf(x_f,0) \tag{34}$$

である。いま，不動点 x_f がこのカオスアトラクタに埋め込まれており，双曲形不安定不動点であるとする。すなわち，A の固有値はともに実数であり

$$|\lambda_u|>1>|\lambda_s|>0 \tag{35}$$

これらの固有値に対する長さ1の固有ベクトルを e_u, e_s とする。これらのベクトルは不動点 x_f の局所不安定および安定の方向を表わしている。すなわち，図5に示すように，安定多様体，不安定多様体のそれぞれに接する接ベクトルとなる。

これらのベクトルを1列目，2列目とする行列 P を考え，この逆行列 P^{-1} の行ベクトルを v_u, v_s とする。これらを反変ベクトル(contravariant vector)とよぶ。このとき，$PP^{-1}=I$ となること

より

$$v_u e_s = v_s e_u = 0, \; v_u e_u = v_s e_s = 1 \tag{36}$$

また，

$$A = PP^{-1} \tag{37}$$

を計算すると

$$A = \lambda_u e_u v_u + \lambda_s e_s v_s \tag{38}$$

となる。ここで，ベクトル $x(k+1)-x_f$ はベクトル e_s と並行になるので，直交の条件に代入すると

$$v_u x(t+1) = 0 \tag{39}$$

となる。従って，$x(t)$ が x_f の近傍にあり，式(39)が成り立つならば，$x(t+1)$ は x_f の局所安定多様体に収束する。この条件を書き直すと，次のようになる。

$$v_u \delta x(t+1) = 0, \; \delta x(t) = x(t) - x_f \tag{40}$$

これと式(36)(38)を組み合わせると，次のような入力を印加することにより安定化できることがわかる。

$$u(t) = -\lambda v_u \delta x(t) / (v_u b) \tag{41}$$

$u(n)$ はシステムの状態が不動点の近くまで接近するまでゼロにしておき，不動点の近傍にきたときに式(41)の入力をシステムに加える。

文献［19］ではエノン写像を用いた例題が示されている。エノン写像では，

$$x(t+1) = -x(t)^2 + 0.3y(t) + 1.4 + u(t) \tag{42}$$

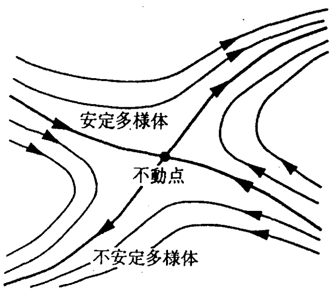

図４　安定と不安定多様体

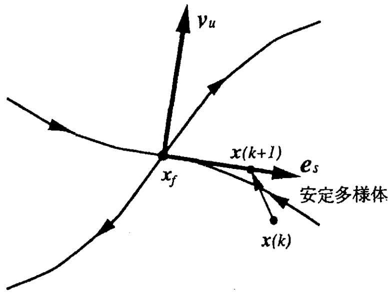

図５　安定化のプロセス

$$y(t+1) = x(t) \tag{43}$$

$u(n)=0$ とすれば，上にあげた不動点 (x_f, y_f) は

$$(x_f, y_f) = \alpha[1, 1] \tag{44}$$

$$\alpha = -0.35 + \sqrt{1.5225} \tag{45}$$

となり，カオスアトラクタに埋め込まれていることが分かる。この不動点のまわりでの線形化システムは次のようになる。

$$[\delta x(t+1), \delta y(t+1)]^t = B[\delta x(t), \delta y(t)]^t + [1, 0]^t u(t) \tag{46}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2a & 0.3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{47}$$

従って，印加する入力 $u(t)$ は

$$u(t) = -\lambda_u [\lambda_s][\delta x(t), \delta y(t)]^t \tag{48}$$

このように，小さな入力を適時に短時間印加することによりシステムを安定化できるが，OGY 法の適用にあたっては次のようなことに留意する必要があることが指摘されている。すなわち，最終的には安定化したい周期軌道の線形化システムを求め，更にその局所不安定および安定多様体を求めておく必要がある。このような安定化軌道を解析的に求めることは不可能である。従って，あらかじめ数値計算によって，システムの振る舞いからカオスアトラクタ上の安定周期軌道とその安定性を求めておくことが必要である。

もちろん，OGY 法は万能ではなく，システ

ムの状態のみに依存して入力を印加しているので，安定化できないケースも存在することが指摘されている。しかし，このような問題についても，新しい手法が開発されている。

4.4 連続系の場合への適用

OGY 法は離散系について導出されたのであるため，これを連続系に使用する場合には，一般的なケースと同様にポアンカレ写像を用いて離散化する必要がある。しかし，その方程式は解析的には求まらないなどの問題がある。従って，時系列解析などを用いて近似的な線形システムを推定するなどの方法も開発されているが，操作が面倒である。

ここでは，OGY 法と同様な入力を適切に加えることにより，連続系のカオスを安定化する方法(Pyragas の方法)を用いることにする[20]。いま，n 次元連続時間システムを考え，y を出力，x を内部状態とする。

$$dy/dt=f(y(t),x(t),t)+u(t) \tag{49}$$

$$dx/dt=g(y(t),x(t),t) \tag{50}$$

目的として，アトラクタ内に存在する周期 τ の不安定軌道を安定化する場合を考える。周期軌道の上では，周期 τ ごとに状態は近くなるので，この差に相当する量を，入力 $u(t)$ として加えることにより，システムを安定の方向に制御することができる。

$$u(t)=K(y(t-\tau)-y(t)) \tag{51}$$

ただし，K がゲイン定数である。

OGY 法と同様に，周期的な信号の差 $y(t-\tau)-y(t)$ がある程度小さくなるケースだけに外力を加えることが，安定化の条件である。そのような操作をしない場合には，システムは不安定化する危険性がある。例として，次のようなダフィング方程式系への適用が示されている。

$$dy(t)/dt=-0.05x(t)-y(t)^3+0.045+cos(t)+u(t) \tag{52}$$

$$dx(t)/dt=y(t) \tag{53}$$

このとき，$u(t)=0$ ならシステムはカオスとなる。システムを安定化させるための外力として次を用いる。

$$u(t)=0.5(y(t-2\pi)-y(t)) \tag{54}$$

シミュレーションにより，$y(t)$が周期的な軌道に移行することが確認できる。

5．経済動学へのカオス制御応用

5.1 レスラー方程式の安定化

すでに述べたように，経済動学モデルにはレスラー方程式で記述されるものが含まれることが分かっている。以下では，3.3でとりあげたレスラー方程式の体系について，4.2のフィードバック(Pyragas)法を適用して，安定化させる方法と，その経済学的な意義について述べる。

レスラー方程式は3次元におけるカオスを与えるので，安定化制御のためには2次元上のアトラクタを議論すればよい。上にあげた Pyragas 法による制御では連続系を取り扱っているので，レスラー方程式に適している。

まず，レスラー方程式により発生される時系列の周波数分析を行なっておき周期の分布を求めておく。これより分るように周期として約200の付近に大きな周波数が生じている。この周期の軌道に安定化させるため式(54)に示したようにフィードバックを加える。

この結果軌道は安定化され時系列は周期的な振動に移行することが分る。結果を図6に示す。図6の最初の時系列は，制御が適切であった例であり，時系列はやがてゼロ付近に収束しはじめている。この場合は制御を加える場合のゲイ

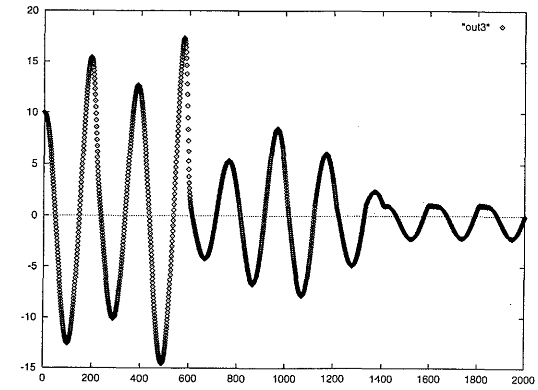

図6　レスラー系のカオスの制御(Ⅰ)

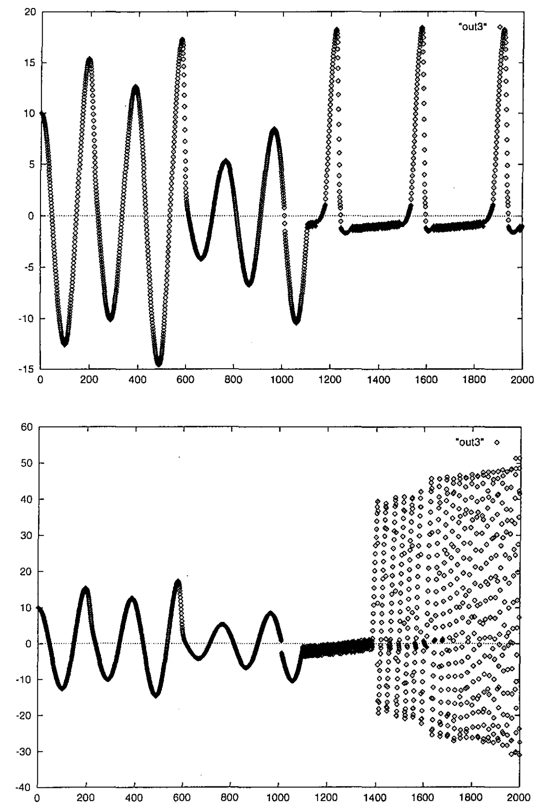

図7　レスラー系のカオスの制御(Ⅱ)

ンと，その符号が適切であったことを意味している。

これに対して，図7の2番目，3番目の例は制御が適切ではない事例である。それぞれ制御におけるゲインが，大きすぎる場合と，制御の方向が定まっていない場合とに対応している。これらの場合，収束の方向へ向かうが，そのあと，大きな発散が生じたり，周期波形の中の望ましくないピークが発生する場合に相当している。

いずれの場合も，もとものと方程式の体系は変更していないので，安定的なアトラクタのつに入ったことを意味しており，政策的にこのような変動を起こすことも可能であるが，通常は安定的な軌道とはみなされないであろう。経済学的には，例えば，経済変動にともなう失業率を，政策的な注入により，一定のレベル以内に収束させることに対応している。このことは，すでに述べたようにグットウインにより，例題として示された解釈と共通している。

5.2 システム同定とカオス制御の結合

カオス時系列が与えられたときに，それを発生するシステムの方程式を推定する問題は，現在まであまり注目されてはいない。具体的には，カオス時系列の予測問題は，カオスアトラクタを再構成することにより数値計算的に求めることができる。そのため，観測された時系列データさえあれば予測は可能となる。その1つの分野として，文献［22］において経済時系列の予測問題をとりあげている。

しかし，本論文で取り扱うようなカオス制御の問題では，システム方程式が求められていることが前提であり，数値計算的に制御を行なうことは極めて難しい課題である。従って，何らかの手段を用いて観測されたデータからシステム方程式を推定することが必要となる。

この問題に対して，我々は GP(Genetic Programming: 遺伝的プログラミング)を用いる

ことにより方程式を推定する方法を提案している[21]。ここではその詳細は省略し，すでに観測された経済時系列からシステム方程式が推定されていると仮定する。もちろん，このようにして得られる方程式は，カオス理論を用いられる挙動がはっきりしているものではないし，推定にともなう誤差がふくまれている。従って，あまり複雑なシステムには制御方法が適用できない可能性がある。

このような理由から，以下では，図８に示すような時系列が与えられた場合を考える。この時系列を発生するシステムとして，１次元および３次元のシステムが求まる。一般には，３次元のシステムによる近似の方が良好であるが，例外的なケースも存在する。

ケース１：１次元

$$x(t+1)=-2.85\sin(\sin(x(t))-\sqrt{ss} \tag{55}$$

$$ss=\sqrt{\cos(2x(t-7)-x(t-1)-4.92)} \tag{56}$$

ケース２：３次元

$$x(t+1)=0.136+3.41x(t)-x(t)^2 \tag{57}$$

$$y(t+1)=\sin(\sin(-x(t)-0.68)) \tag{58}$$

$$z(t+1)=1.36\sin(x(t))+3.74 \tag{59}$$

図９には制御された時系列の例を示している。不動点として一定値をとる様子が良く分る。

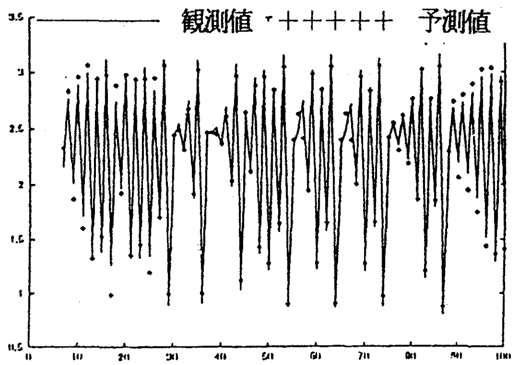

図８　カオス時系列

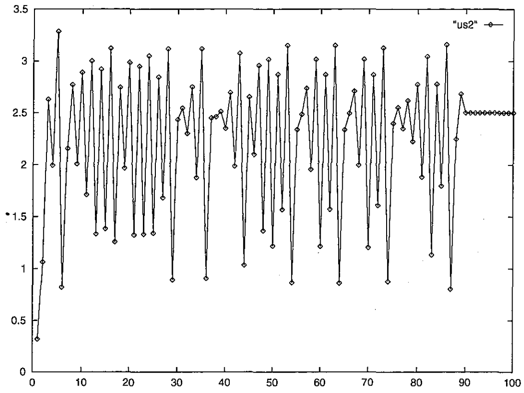

図９　制御された時系列

６．むすび

本論文では，カオスにおける不安定な周期変動から安定的な挙動へと移行するための手法として，OGY 法，連続時間におけるフィードバック制御に注目し，具体的な経済動学への応用を与えた。すなわちカオスアトラクタの形状に注目し，不安定軌道を移動している間に不動点に近づいたときに，適当な入力をシステムに加えることにより，システムの形状やパラメータを変更することなく安定な点へと移行できる方法を用いて，不均衡モデルにおける不規則振動を不動点規則的振動へと移行することができる。このことは，効率的市場などにより説明されている均衡点に注目した政策が存在する一方で，あるいは規制や制御により常に均衡点へと移行されている経済が存在しうることを裏付ける１つの例題ともなっている。

本論文は，すでに発表したカオス予測を用いた経済システムの予測に次ぐものである[22]。今後，カオス理論の経済動学への応用として，不均衡モデルによる return, utility に構造を解明することがあり検討を続けていきたい。

参 考 文 献

[1] 合原一幸編：「応用カオス」，サイエンス社(1994)
[2] 合原一幸編：「カオス」，サイエンス社(1990)
[3] E.E. Peters: Chaos and Order in the Capital Markets, John Wiley nad Sons, Inc.(1991)(邦訳：新田功訳「カオスと資本市場」，白桃書房)
[4] R.M. Goodwin: Essay in Economic Dynamics, London, Macmillan(1982)(邦訳：有賀裕二訳「非線形経済動学」，日本経済評論社)
[5] R.M. Goodwin: Chaotic Economic Dynamics,Oxfors, Oxford University Press(1990)(邦訳：有賀裕二訳「カオス経済動学」，多賀出版，
[6] 高木康順，秋山 裕，田中辰雄：「応用計量経済学Ｉ」，多賀出版，(1997)
[7] E.N. Lorenz: "Deterministic non-periodic flows", Journal of Atomos. Science, 20, pp.130-141(1963)
[8] O.E. Rossler: "An equation of continuous chaos", Physical Letters, 57A, p.397(1976)
[9] O.E. Rossler: "Continuous chaos fourprototype equations, Bifurcation theory and application in scientific disciplines", Annals of the New York Academy of Sciences, 316, pp.376-392(1979)
[10] T.Y. Lee and J.A. Yorke: "Period three implies chaos", AM. Math. Mon., Vol.82. pp.985-992(1975)
[11] F.Takens: "Detecting strange attractors in turbulance" in Dynamical Systems and Turbulance, Lecture Notes in Mathematics, No.898, D.Land and L. Young (eds), Springer-Verlag(1981)
[12] P.Grassberger and I.Procaccia: "Measuring the strangeness of strange attractors", Physica D 9, pp.23-48(1983)
[13] A.J. Wolf, J.Swift and J.Vastano: "Determining Lyapunov exponents from a time series", Physica D 16, pp.285-317(1985)
[14] Grandmont and Geanakoplos; "Determining Lyapunov exponents from a time series", Physica D 16, pp.285-317(1985)
[15] A.Matsumoto: "Preferable disequilibrium dynamics: Economic chaos is a good girl or bad boy", Proc. of NOULA '98,Vol.3, pp.1213-1216 (1998)
[16] S.Honkapohja and T.Ito: "Inventory dynamics in a simple disequilibrium macroeconomic model", Scandinavian Journal of Economics, Vol.82, pp.185-198 (1980)
[17] J.D.Framer and J.J.Sindorowich:"Controlling chaos", Physical Review Letters, 62, pp.845-848(1987)
[18] 平井一正，潮 俊光："カオスと制御"，計測と制御，Vol. 32, No. 11, pp. 944-951(1993)
[19] E.Otto, C.Gregori and J.A.Yorke:"Controlling chaos", Physical Review Letters, Vol.66, No.11, pp.1196-1199 (1990)
[20] K.Pyragas: "Continuous controll of chaos by self-controlling feedback", Physics Letters A, Vol.1700, pp. 421-428(1992)
[21] Y.Ikeda and S.Tokinaga: "Identification of system equations for the chaotic dynamics by using the genetic programming and its applications", Trans. IEICE (電子情報通信学会), E submitted
[22] 時永祥三："経済時系列解析とカオス一時系列予測の応用"，経済学研究，Vol. 66, No. 1, pp101-116 (1999)

〔九州大学経済学部教授〕