シムプレックス法に関する若干の考察

栗村，雄吉

https://doi.org/10.15017/4362464

出版情報：經濟學研究. 24 (2), pp.19-49, 1958-11-30. 九州大学経済学会

シムプレックス法に関する若干の考察

栗村雄吉

線型計画 Linear Programming（以下 LP と略号する）は、次のように要約することが出来る。

㈠ m 個の変数 x_1 x_2 … x_m と常数 a_{i1} a_{i2} … a_{im} との夫々の積の和が一定の常数 b_i よりも大きくないと云う条件に結ばれる k 個の不等組織

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j \leqq b_i \quad (i=1,2,\dots,k) \quad \cdots\cdots(1)$$

がある。但し $k \neq m$。

㈡ それら変数は非負、即ち、

$$x_1 \geqq 0,\quad x_2 \geqq 0, \cdots\cdots x_m \geqq 0 \quad \cdots\cdots(2)$$

㈢ それら変数の一次函数 Z、即ち

$$Z=\sum_{j=1}^{m} v_j x_j. \quad \cdots\cdots(3)$$

が極大である。但し、係数 a_{ij}、常数 b_i、及び v_i は凡て非負で且つ所与である。Z を目的函数と呼ぼう。

LP は種々なる経済問題の解決に応用出来、論者の中には、これに大きな比重をおこうとする者もあるが、経済理論としては、それほど大きな射程距離をもつものとは考えられない。精々ある種の問題についての特に短期観察での解決に有効である位のものであると思はれる。併しながら、本稿ではそのような問題は取扱はない。

LP の問題を解くには種々の方法があるが、玆には Simplex method（シムプレックス法）と呼ばれるものについて考察する。この方法は可成りに知れ亘っていると思はれるが、私の論述の順序として、解法を一般的に極めて概略的に述べておくことが、論議の進行に取って好都合である。

まず式 (1) は不等式のままでは取扱い難いから、それに加工を施す。各式に一個数の変数 x_{m+i} 加える。これを slack variable（仮りに、不働変数と訳しておこう）と呼ぶ。若し、常数項 b_i が生産設備であれば、不働変数は休閑に附せられた部分乃至時間であるし、又 b_i が原料の如き生産財であるのならば、不働変数は在庫量と解することが出来る。不働変数に対して、そうでない変数を activity variable 活働変数と呼ぼう。かくて、不等式 (1) は次の如き $m+k$ 個の変数を含む k 個の等式となる。

$$\sum_{j=1}^{m+k} a_{ij}x_j = b_i \qquad i=1, 2, \cdots, \cdots k \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1')$$

但し、係数について、　$a_{ij} > 0 \qquad (i=1, 2, \cdots, k \qquad j=1, 2, \cdots, m)$

$a_{i,m+i} = 1 \qquad (i=i)$

$$a_{i,m+l}=0 \quad (i\neq l)$$

それに応じて式 (2) 及び (3) がそれぞれ書替えられるべきである。

$$x_j \geqq 0 \quad (j=1,2,\cdots m, m+1,\cdots,m+k) \quad \cdots\cdots (2')$$

$$Z=\sum_{j=1}^{m+k} v_j x_j \quad \begin{pmatrix} v_j=\text{const.}>0 & j=1,2,\cdots,m \\ v_j=0 & j=m+1,m+2,\cdots m+k \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (3')$$

LP の問題について、変数の解が非負の値を取るためには如何なる条件が必要であるかと云ふことは、極めて重要な事柄であるが、玆ではその問題は取扱はない。後の機会に譲りたい。玆では変数の解は非負の値でなくてはならないと云うことを与えられた条件としておく。

若し、(1′) 及び (3′) 式について、変数の数が k 個あり、従って、(1′) 式が方程式の数に等しいだけの変数をもつならば、問題は、一の制限条件をもつ聯立一次方程式の解の問題に帰着する。従って、別に取立てて論ずる必要のない簡単な問題となる。併しながら、玆では、(1′) において、変数の数は方程式の数と一致せぬ。活動変動 m は方程式の数に対して不足又は超過するが、m 個の活動変数と k 個の不働変数との合計は必ず、方程式の数に超過する。そこに、一の制限方程式をもつ多元一次聯立方程式における極大の問題の解法よりも複雑な問題がひそむわけである。

併しながら、LP の問題を解くことは、複雑な問題はあるにしても $m+k$ 個の変数の中から、問題の性質の要求するところに従って、k 個の変数を取上げて、これを k 個の方程式の左辺におき、(これを包含された変数 included variables と

呼ぼう）残余の m 個の変数を右辺に移し（これらの変数を除外変数 excluded variables と呼ぼう）そして、それらを零とおいて、k 個の変数と k 個の方程式とをもつ多元一次聯立方程式組織につくり上げて、これから (2′) の条件をみたし、Z を極大にするところの包含変数の値を求めることに帰着する。従つて、聯立方程式が解かれるために必要なる条件は、LP の問題が解かれるための必要条件となる。唯、LP の問題は方程式の数よりも多くの変数をもつために、若干複雑になる。

一般に、k 個の変数を含む k 個の多元一次聯立方程式が一義的に解けるための必要条件は、変数の係数をもつて形成された k^2 の正方行列と変数の係数に常数項 b_1 b_2……b_k を加えてつくられた k 行 $k+1$ 列の所謂拡張された行列との階が k であることである。このことが LP の問題にもあてはまる。即ち、k 個の包含変数の係数にて形成される k^2 の正方行列の階が k であり、又 k 個の包含変数の係数と常数項 b_1 b_2 … b_k とにて形成せられる k 行 $k+1$ 列の行列の階が k でなくては LP の問題は解けない。ところが、$m+k$ 個の変数の中から k 個の包含変数を選び出すには組合せは少くとも ${}_{m+k}C_k$ 個あり、常数項が加えられて拡張された行列の形成せられる変数の組合せも、同様に ${}_{m+1+k}C_k$ 個あるから、LP の問題の解が非負であらうとなからうと、非零に決定せられるがための条件は、次のようになる。

(一) 式 (1′) における $m+k$ 個の変数の中から、任意に選ばれる k 個の変数の係数にて形成せられる k^2 の正方行列の階が k であること。これは次の如くに表現することが出来る。式 (2′) の変数 x_j の各式の係数 a_{1j} a_{2j} … a_{kj} を要素とする列ベクトルを p_j とする。そうすると同様のベクトル p_1 p_2 … P_m p_{m+k} … p_{m+k} の中から任意に選ばれた k 個の列べ

クトル p_i p_j … p_k が一次独立である。即ち、凡てが零でない係数 c_i c_j … c_k について

$$p_i c_i + p_j c_j + \cdots + p_k c_k \neq 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

が成立する。

㈢ 式 $(1')$ について、任意に選ばれた $k-1$ 個の変数の係数と常数項とにて形成せられた k^2 の正方行列の階が k であること。これは又次の如くに表現することが出来る。即ち $(2')$ の常数項 b_1 b_2 … b_k をもつて形成する列のベクトルを p_o とすれば、p_o は列ベクトル p_1 p_2 … p_m p_{m+1} … p_{m+k} の中から任意に選ばれた $k-1$ の列ベクトル p_i p_j … p_{k-1} の一次函数として表現することが出来る。それは次式にて表現される。

$$p_o = \lambda_i p_i + \lambda_j p_j + \cdots + \lambda_{k-1} p_{k-1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

これら㈠及び㈢の条件が同時に成立することが、LP 問題の解が、非負であらうとなからうと、非零に決定せられるための必要条件である。そうして、これら二の条件が変数のあらゆる組合せに就いて成立するならば、凡ての変数は非零に決定され得る。

これら二の条件は、変数の解が、或は凡ての変数の解が非零であることを保証するが、更に進んで、非負であることをも証明しない。それがためには尚ほ別の条件を必要とするが、それは本稿では取扱はない。後の機会に譲りたい。ここでは、非負であるための条件がみたされているものとして論歩を進める。

今、仮りに式 $(1')$ の変数の中から k 個を任意に選び、これをそのまま左辺におき、残余の変数 m 個を右辺に移す。

左辺にそのまま止められた変数が包含変数であり、右辺に移された変数が除外変数であるわけである。これらの選択は固より任意であるから、変数の解が条件式(2′)及び(3′)を満すとは限らない。そこで、このような選択の結果(1′)式は次の式に書替えられる。

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_j = b_i - \sum_{l=k+1}^{m+k} a_{il}x_l \qquad (i=1,2,\cdots,\cdots,\cdots,k) \quad \cdots\cdots\cdots(6)$$

但し、式(6)について、左辺に残された変数は、式(1′)について、必ずしも、順序が１２…kまで選ばれてはいない。そのような場合には式(6)について番号を入れ替えて　１２…k　とする。右辺に移された変数についても同様である。

式(6)をベクトルの形にて書替えると、

$$p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_kx_k=p_0-(p_{k+1}x_{k+1}+\cdots+p_{k+m}x_{k+m}) \quad \cdots\cdots\cdots(7)$$

更に行ベクトル $[p_1,p_2,\cdots,p_k]=A_1$, $[x_1,x_2,\cdots,x_k]=X_1$, $[p_{k+1},p_{k+2},\cdots,p_{k+m}]=A_2$, $[x_{k+1},x_{k+2},\cdots x_{k+m}]=X_2$ とおくと、式(7)は

$$A_1X_1=P_0-A_2X_2 \quad \cdots\cdots\cdots(8)$$

に書替えられる。

然るに、行ベクトル $[p_1,p_2,\cdots,p_k]$ の各要素は、それぞれ k 個の要素からなる列ベクトルであるから、ベクトル A_1 は k^2 の正方行列に等価である。そこで、A_1 を k^2 の正方行列が非零であると仮定し得ると、次式が導出される。

$$X_1 = A_1^{-1}P_0 - A_1^{-1}A_2X_2 \qquad \cdots\cdots (9)$$

但し A_1^{-1} は正方行列 A_1 の逆行列である。

他面、式 (3′) についても、式 (7) について変数を二分したことに相応して、係数 v_1 v_2 … v_{m+k} を二分する。それらを行ベクトル V_1、V_2 にて示せば、式 (3′) は次の形に書替えられる。

$$Z = V_1X_1 + V_2X_2 \qquad \cdots\cdots (10)$$

この式に式 (9) により X_1 を代入して整理すると、

$$Z = V_1(A_1^{-1}P_0 - A_1^{-1}A_2X_2) + V_2X_2$$
$$= V_1A_1^{-1}P_0 + (V_2 - V_1A_1^{-1}A_2)X_2 \qquad \cdots\cdots (11)$$

この式 (11) から、所謂 Simplex Criterion が導出される。即ち、右辺括弧内が零であると、変数のベクトル X_2 を構成している要素 x_{k+1} x_{k+2} … x_{k+m} を変化させることによつて、Z の値は増加も減少もさせることは出来ない。併しながら、括弧の中が丁度零であると云うような場合は寧ろ稀有であらう。従つて、括弧内が非零である場合を考うべきである。この場合に二ある。一は正である場合。ここにあつては、X_2 の構成要素の何れかを増加させることによつて、Z の値を増加させることが出来る。二は負の場合である。ここにあつては、X_2 の要素を増加させことによつて、Z の値が減少する。従つて、正から負に変化する場合が、Z の値の極大である時である。かくして、

$$V_2 - V_1A_1^{-1}A_2 < 0 \qquad \cdots\cdots (12)$$

の条件の満される時、Z の値が極大となる。そこで、この不等式をシムプレックス判別基準 Simplex Criterion と云う。

かくして、$m+k$ 個の変数の中から任意に方程式の数に等しいだけの変数 k 個を選び出し、これを包含変数として左辺におく。これらの変数の行のベクトルが X_1 である。残余の変数の行ベクトルが X_2 であるわけであるが、かかる組合せについて、ベクトル V_2、V_1、行列式 A_1^{-1} 及び A_2 を計算して、それら諸要素の計算の結果が判別基準に合うか否かを検する。

若し合うならばかくの如き X_1 の解即ち、

$$X_1 = A_1^{-1}P_0$$

が問題の最適解である。併しながら、一回の選択で、たまたま、それらの選択が判別基準に合うようなことは、稀有であらう。若し合はないならば、かくの如き X_1 は最適解でないから、X_1 の組合せの中からあるものを選んで、これを除外変数となし、その代りに除外変数の中から何れかを包含変数に組入れる。かくすることによつて、包含変数を構成する項が変化を受けるから、判別基準式に合うか否かを更に検する。かくして、同じ手続を繰返して、判別基準に適合する変数の組合せを発見するわけである。

併しながら、判別基準式(12)を見るに、そこには多数の要素と多数の項とがある。まず V_2 と V_1。それらはそれぞれ目的函数 Z（式(3')）における除外変数 x_{k+1} x_{k+2} $\vdots$ x_{k+m} の係数 v_{k+1} v_{k+2} $\vdots$ v_{k+m} の列ベクトル、包含変数 x_1 x_2 $\vdots$ x_k の係数 v_1 v^2 $\vdots$ v_k の列ベクトルである。これらの取扱いは比較的容易である。A_1^{-1} 及び A_2 はそれぞれ式(6)における包含変数の係数に関する k^2 の正方行列の逆行列及び除外変数 x_{k+1} x_{k+2} $\vdots$ x_{k+m} の係数の k 行 m 列の行列である。これらの取扱

いは、特に要素の数が多くなればなるほど、たとい、電気計算機を使用するとしても、可成りに複雑である。

そこで、計算を簡単にすることが考えられなくてはならない。今、式 (1′) から k 個の包含変数を取上げて (6) を作ることを考えるに、$m+k$ 個の変数の中から k 個を選出するには、${}_{m+k}C_k$ だけの組合せがある筈である。併しながら、式 (1′) の左辺の最後の k 個の変数を包含変数として作つた式 (6) を見るに、玆に特別な様相のあることに気がつくであらう。即ち、x_{m+1} x_{m+2} $\vdots$ x_{m+k} の変数の各式の係数は、$[1,0,0,\cdots,0],[0,1,0,\cdots,0]\cdots[0,0,\cdots,0,1,0,\cdots,0]\cdots[0,0,\cdots,0,1]$ 即ち単位ベクトルである。従つて、それらの要素をもつて構成せられた k^2 正方行列は、対角行列にほかならぬ。しかも、かくの如き対角行列の値は1であり、叉その逆行列は本行列に等しく、従つて、その逆行列の値も亦1である。かくして B を対角行列とし、B^{-1} をその逆行列とするならば、両者の間には次の関係が成立する。

$$BB^{-1}=1,\quad B=B^{-1}=1 \qquad\cdots\cdots(13)$$

この性質を利用することによつて、判別基準の計算が極度に簡単になる。即ち、判別基準式 (12) から逆行列 A_1^{-1} を除去することが出来るからである。併しながら、式 (6) において、(1′) の左辺の左から数へて最後の k 個の変数即ち不働変数の凡を包含変数とすれば、それらの係数で形成せられる正方行列は正に対角行列になるのであるが、このような選び出し方は意味をなさぬ。そうすると、極大にすべき目的函数 Z におけるそれら変数の係数 v_{m+1} v_{m+2} $\vdots$ v_{m+k} は悉く零であり、Z も亦そうであるからである。

そこで、少くとも凡てが不働変数でなく、しかも、その変数の行列を容易に対角行列に換算し得るような k 個の変数

の組合せを選出することが必要である。かくの如き変数の組合せは多数あり得るのであるが、最初に手掛けるべきものは不働変数を $k-1$ 個と活動変数を 1 個とを含む組合せである。こう云う組合せも亦多数あり得るわけであるが、何れにしても、そのような変数の組合せをもつところの式 (8) に相当する聯立方程式は、次の如き構成となる。即ち、k 個の方程式の中の何れかの一式においては、その左辺にある変数、即ち包含変数の中の一つだけは、係数は非零、他の悉くは係数が零である。このような方程式を基準程式と呼ぼう。残余の $k-1$ 個の方程式においては 2 個の変数の係数が非零であり、その一は必ず1である。又残余の $k-2$ 個の変数の係数は零である。

右の如き方程式組織をつくるために、如何なる変数を選ぶべきか。まず k 個の不働変数の中から $k-1$ 個を選ぶには方法が k 個だけあるわけであるが、今、(1′) 式について、x_{m+2}, x_{m+3}, $\vdots$, x_{m+k} を選び、それに加えられる一の活動変数を選ぶにも多数あるのであるが、それらをどう選ぶかは後に詳論するとして、m 個の活動変数中から x_1 を選んだとする。そうすると、かくの如き方程式組織は次のものとなる。

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11}x_1+0x_{m+2}+0x_{m+3}+\cdots+0x_{m+k}=b_1-a_{12}x_2-a_{13}x_3-\cdots-\ \ x_{m+1}\\
a_{21}x_1+\ \ x_{m+2}+0x_{m+3}+\cdots+0x_{m+k}=b_2-a_{22}x_2-a_{23}x_3-\cdots-0x_{m+1}\\
a_{31}x_1+0x_{m+2}+\ \ x_{m+3}+\cdots+0x_{m+k}=b_3-a_{32}x_2-a_{33}x_3-\cdots-0x_{m+1}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{k1}x_1+0x_{m+2}+0x_{m+3}+\cdots+\ \ x_{m+k}=b_k-a_{k2}x_2-a_{k3}x_3-\cdots-0x_{m+1}
\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

右式群の第一式が基準方程式である。基準方程式と云うわけは、式 (14) の左辺の変数の係数にて形成せられる非対角行列

を対角行列になほすために重要な役割をもつからである。

次に、第一式即ち基準方程式を包含変数の唯一の非零の係数 a_{11} にて両辺を割る。かくして変形しても元の式と等価である。変形された基準方程式に a_{21} を乗じて、第二式から差引き、第二式が変形される。同様に、第 i 番目の式は、基準方程式に a_{i1} を乗じて、i 番目の式から差引いて変形する。かくして、式 (14) の変形は次の如くになる。

$$
\left.
\begin{aligned}
&x_1+0x_{m+2}+0x_{m+3}+\cdots+0x_{m+k}=\frac{b_1}{a_{11}}-\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2-\frac{a_{13}}{a_{11}}x_3-\cdots\qquad-\frac{1}{a_{11}}x_{m+1}\\
&0x_1+\ \ x_{m+2}+0x_{m+3}+\cdots+0x_{m+k}\\
&\qquad=\left(b_2-\frac{b_1}{a_{11}}a_{21}\right)-\left(a_{22}-\frac{b_1}{a_{11}}a_{21}\right)x_2-\left(a_{23}-\frac{b_1}{a_{11}}a_{21}\right)x_3-\cdots-\left(0-\frac{1}{a_{11}}a_{21}\right)x_{m+1}\\
&0x_1+0x_{m+2}+\ \ x_{m+3}+\cdots+0x_{m+k}\\
&\qquad=\left(b_3-\frac{b_1}{a_{11}}a_{31}\right)-\left(a_{32}-\frac{b_1}{a_{11}}a_{31}\right)x_2-\left(a_{33}-\frac{b_1}{a_{11}}a_{31}\right)x_3-\cdots-\left(0-\frac{1}{a_{11}}a_{31}\right)x_{m+1}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&0x_1+o\,x_{m+2}+0x_{m+3}+\cdots+\ \ x_{m+k}\\
&\qquad=\left(b_k-\frac{b_1}{a_{11}}a_{k1}\right)-\left(a_{k2}-\frac{b_1}{a_{11}}a_{k1}\right)x_2-\left(a_{k3}-\frac{b_1}{a_{11}}a_{k1}\right)x_3-\cdots-\left(0-\frac{1}{a_{11}}a_{k1}\right)x_{m+1}
\end{aligned}
\right\}\cdots\cdots\cdots(15)
$$

式 (15) について、左辺の変数の係数にて形成せられる k^2 の正方行列は正に対角行列である。従つて、判別基準式を今の場合にフルに書けば、次の如くになる。

$$V_2 - V_1A_2 = [v_2, v_3, \cdots, v_m, 0] - [v_1, 0, \cdots, 0]\begin{bmatrix} a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a_{1m}' & a'_{1\,m+1} \\ a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2m} & a'_{2\,m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{k2} & a'_{k3} & \cdots & a'_{km} & a'_{k\,m+1} \end{bmatrix}$$

$$= [v_2, v_3, \cdots, v_m, 0] - [v_1a'_{12}, v_1a'_{13}, \cdots v_1a'_{1\,m+1}]$$

$$= [v_2 - v_1a'_{12}, v_3 - v_1a'_{13}, \cdots v_m - v_1a'_{1m}, \quad 0 - a'_{1\,m+1}] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

但し、a'_{ij} は (15) の i 番目の式の右辺の第 j 番目の変数の係数である。云うまでもなく、判別基準式 (16) が負でなくてはならぬ。かくして、判別基準の計算は、係数の行列を対角行列にすることによつて、極度に容易になるわけである。

式 (16) の最後の辺(最後の行ベクトル)について、凡ての要素が非正であるならば、かくの如き包含変数の組合せは、正に Z を極大にするところの最適解である。併しながら、それらの要素の中に正があれば、それらの要素の除外変数を包含変数として、方程式の左辺に移し、その代りに、包含変数として今まで左辺におかれていた変数を除外変数として右辺に移すことによつて、Z を更に大きくすることが出来る。唯、左右辺々転換の作業は一度に一づつしか行えない。一回に複数個転換すると、対角行列をもつところの方程式組織に換算することが不可能になるからである。左右両辺一個づつの変数転換作業について問題が二起り得る。

(一) 判別基準がある段階の計算結果によつて、一つではなくて複数の変数が正の値をもつ場合、何れの変数をまず左辺に移すか。(正の値をもつ変数が唯一つの場合は、この問題は起らない)。(二) 除外変数の中から包含変数に転換さるべきも

のが一つ定まつたとしても、それがために、前の段階の計算において包含変数であつたものの中から、一つが除外変数になされねばならぬわけであるが、その一つを k 個ある包含変数の中のどれにするか。この第二の問題と同じ性質の問題は、実は最初の計算段階にもあらはれたのである。こう云う二つの問題に対して、それを解くための基準を備えておくことが必要である。そうでないと、さなきだに煩雑なる LP 問題の解決を更に煩雑にするからである。

LP の問題の解を求めようとして計算したことある人は何人も経験するように、一の段階で包含変数に組入れられたものが、次の段階で除外変数になり、更に後の段階で同じ変数が又包含変数になることが屢々あらはれる。併しながら、それは計算の徒労でしかない。尤も、避けられない徒労はいたし方ないとしても避けられる徒労は避けるべきである。かうして、何れの計算段階においても包含変数の選択に関して多数の可能なる入口がある。それら複数の可能なる入口を入ると、同じ目的地に到達し得るにしても、通過すべき道筋、即ち、判別基準計算の繰返しの回数の異なることは当然である。一の入口から入る通路においては、例えば、二回の繰返しで目的地に到達出来るのに、他の入口を入る通路においては四回の繰返しをしなくてはならないと云うようなことがあり得る。そう云う場合にはどの通路を通つたら、同じ変数が計算の諸段階で除外変数になされたり包含変数になされたりする避けられる無駄を出来るだけ避け、計算の繰返へしが出来るだけ少くて、最も早く簡単に目的に到達し得るかについて、これを決定するための何等かの道標がなくてはならぬ。本稿は、それらの問題を解くことについての一の試論である。

まず、第一の問題から考察する。除外変数の中から一を取上げて、之を包含変数に廻す。そのために今までの包含変数

の中から一を除外変数におとさなくてはならない。我々の例について云えば、k 個の包変数の中から一を除外変数に転換する場合、どれを選ぶべきか。この問題については、今まである程度の解決がなされている。

今、(16) によつて、x_2 が右辺から左辺に移さるべきことが判つたとしよう。その代りに左辺にある変数 x_1 x_{m+2} x_{m+3} $\cdots$ x_{m+k} の中から何れが右辺に移さるべきであるか。この問題は、k 個の包含変数の中から、何れの一個を捨てることによつて、Z の増大に貢献することが最も大きいかと云うことによつて、決定せらるべきである。我らの問題は次のようになる。

x_1 x_{m+2} $\cdots$ x_{m+k} が包含変数に選ばれている時の Z を Z_1 にて示す。x_2 を取り入れて、何れかを捨てるわけであるが、その際捨てらるべきものは変数 x_1 x_{m+2} $\cdots$ x_{m+2} の中の何れでもよいわけであるけれども、ここに一の制限がある。それは、捨てらるべきものは x_{m+2} x_{m+3} $\cdots$ x_{m+k} の $k-1$ 個の中から選ぶべきであると云うことである。何となれば、それら包含変数の中から x_1 を捨てて、その代りに x_2 を入れると、それは $k-1$ 個の不働変数に加えられる活動変数が x_1 でなくて x_2 となり、x_1 を結び着けたがよいか、x_2 を結びつけたがよいかと云う問題になり、これは寧ろ、私が解決を後に考察しようとして譲つた、そうして、最初の段階において逢着する問題となる。ここでは、暫らくその問題に触れないで進むがよいであろう。x_2 の代りに、x_1 ではなしに $k-1$ 個の不働変数の中から何れを選ぶべきかの問題を考える。即ち任意に x_{m+2} を捨てるとしよう。そうすると Z が変化する。それを Z_{12} にて表わそう。

一体、ある変数を k 個だけ包含変数に選んだと云うことは 残余の m 個を除外変数に選んだことであり、m 個の変数を除外変数に選んだと云うことは、それらの変数を経済的活動の外におくこと、換言すれば、それらの変数を零とおくこと

である。従つて、k 個の包含変数の解は、$\begin{matrix} x_1 \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_{m+k} \end{matrix}$ を包含変数にした場合について云うならば、式 (15) の右辺の変数を凡て零として左辺と常数項だけで解かける値であることになる。そして、この方程式群の各式にては、ただ一つの変数の係数が 1 であつて、残余の変数の係数は凡て零であるから、非零の係数をもつ唯一の変数の解は当該方程式の常数項である。かうして、変数の解を求めることが極めて容易になることも対角行列をもつような方程式に換算することの効果の一である。かくして、包含変数のこの組合せの解は次の通りである。

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} \equiv b_1' \qquad x_{m+2} = b_2 - \frac{b_1}{a_{11}} a_{21} \equiv b_2'$$

$$\cdots\cdots \; x_{m+i} = b_i - \frac{b_1}{a_1} a_{i1} \equiv b_i' \; \cdots\cdots$$

併しながら、これら包含変数の解は LP 問題の (2') の条件に従つて、非負でなくてはならない。若し、これら変数の解の中に負が含まれるならば、そのような組合せは、中途の計算段階であつても捨てらるべきである。かくして、それらの変数の値が解かれたから、Z_1 は次の如くである。

$$Z_1 = v_1 b_1' + v_{m+2} b_2' + v_{m+3} b_3' + \cdots + v_{m+i} b_i' + \cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

次に、x_2 を包含変数として左辺に移し、その代りに x_{m+2} を除外変数として右辺に移すと、方程式組織 (15) は次の如くに変はる。この際、そうした変数の組合せの解を求めるだけが目的であるから、方程式組織をフルに書く必要はない。

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + a'_{12}x_2 = b'_1 \\ a'_{22}x_2 = b'_2 \\ a'_{32}x_2 + x_{m+3} = b'_3 \\ a'_{42}x_2 + x_{m+4} = b'_4 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a'_{k2}x_2 + x_{m+k} = b'_k \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots(17)$$

但し、$a'_{12}=\dfrac{a_{12}}{a_{11}}$，　$a'_{22}=a_{22}-\dfrac{b_1}{a_{11}}a_{21}$，　$a'_{32}=a_{32}-\dfrac{b_1}{a_{11}}a_{31}$，

$\cdots\cdots a'_{i2}=a_{i2}-\dfrac{b_1}{a_{11}}a_{i1}, \cdots, a'_{k2}=a_{k2}-\dfrac{b_1}{a_{11}}a_{k1}$

基準方程式は第二式である。この式を a'_{22} にて割る。この変形基準方程式に a'_{12} をかけて第一式から差引く。前者に a'_{32} をかけて第三式から引く。かくの如き手続を (17) 式の凡てに施せば式 (17) の変形せられて、変数の係数が対角行列となる方程式組織は、次の如くになる。

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = b'_1 - \dfrac{b'_2}{a'_{22}}a'_{12} \\ x_2 = \dfrac{b'_2}{a'_{22}} \\ x_{m+3} = b'_3 - \dfrac{b'_2}{a'_{22}}a'_{32} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots(17')$$

⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯

$$x_{m+k} \quad = b'_k - \frac{b'_2}{a'_{22}} a'_{k2}$$

そして、それは又同時に変数の解をも示す。ここにおいても、解は非負でなくてはならぬ。それらの解によつて計算されるZは、次の如くである。

$$Z_{12} = v_1\left(b'_1 - \frac{b'_2}{a'_{22}} a'_{12}\right) + v_2\left(\frac{b'_2}{a'_{22}}\right) + v_{m+3}\left(b'_3 - \frac{b'_2}{a'_{22}} a'_{32}\right) + \cdots$$
$$\cdots + v_{m+i}\left(b'_i - \frac{b'_2}{a'_{22}} a'_{i2}\right) + \cdots + v_{m+k}\left(b'_k - \frac{b'_2}{a'_{22}} a'_{k2}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

従つて、包含変数 x_1 x_{m+2} x_{m+3} $\cdots$ x_{m+k} について、x_{m+2} を x_2 と取替えることによつて、Z がどれだけ増加したかと云うに、それは云うまでもなく Z_{12} と Z_1 との差だけである。即ち式(18)と(17)とから、

$$Z_{12} - Z_1 = \left(v_2 \frac{b'_2}{a'_{22}} - v_{m+2} b'_2\right) - \frac{b'_2}{a'_{22}}\left(v_1 a'_{12} + v_{m+3} a'_{32} + \cdots + v_{m+i} a'_{i2} \cdots\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

右式を見る。第二の括弧の中。この中の各項は、前の計算段階からこのまま包含変数として持越された変数の要素である。今の場合、x_1 x_{m+3} 以下の $k-2$ 個の変数に関する。そして、v_1 v_{m+3} $\cdots$ は所与不変、a'_{12} a'_{32} 以下は x_2 が除外変数から包含変数に転換される限り、不変の大さである。従つて、第二の括弧の中は次の関係を除いて不変に保たれる。その関係と云うのは、x_2 が包含変数に組み入れられたために x_{m+2} が除外変数にまわされたので括弧の中は a'_{12} a'_{32} $\cdots$ とのその係数

$\begin{matrix} v_1 \\ v_{m+3} \\ \vdots \end{matrix}$ であるのであるが、x_{m+2} でなしに x_{m+3} が除外変数にまわされると、この括弧の中に入る要素に変化が起る。即ち $v_{m+3}a'_{32}$ が入らなくて $v_{m+2}a'_{22}$ が入る。この変化は、他の要素に非零のものが多くあればなるほど、全体の値に及ぼす影響は小さい。今仮りに、この影響は常に無視し得ると仮定すると、第二の括弧とその係数との積は、その係数の値によつて大きくもなり小さくもなる。そこで、第一の括弧の値を不変とすると、x_2 の代りに除外変数にまわされる変数として何を選ぶかと云うに、式(19)の差を最大にするもの、即ち、常数と仮定された第一の括弧から差引かるべき第二項を最少にするような x_2 と他の変数との組合せである。差引かるべき第二項は不変と仮定された括弧の中の値と $\frac{b'_2}{a'_{22}}$ との積である。そこで、第二項を最小にするためには係数 $\frac{b'_2}{a'_{22}}$ を最少にすればよい。そうして、この係数は x_2 の代りに如何なるものを除外変数とするかによつて変る。x_2 の代りに左辺の第二番目におかれた変数 x_{m+2} を除外変数としたから、この係数は $\frac{b'_2}{a'_{22}}$ となつたのであるが、x_2 の代りに三番目におかれた変数 x_{m+3} を除外変数にまわすと、その係数は $\frac{b'_3}{a'_{32}}$ となる。かくて、この係数を最小にするためには、式(15)の左辺における x_2 の係数 $\begin{matrix} a'_{12} \\ a'_{22} \\ a'_{32} \\ \vdots \\ a'_{k2} \end{matrix}$ をもつて、それぞれ右辺の常数項 $\begin{matrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ \vdots \\ b'_k \end{matrix}$ を割つて、その値の最小なるものを選べばよい。若し、j 番目の値が最小であるとすれば、j 番目の方程式において非零の係数を有する変数が正に x_2 と取替えらるべき変数であることになる。これが、多くの論者によつて認められるところの、包含変数に選ばれたる変数の代りに、除外変数を選ぶ標準である。この標準には、前述の如く二の前提があることを忘れてはならぬ。即ち、㈠ 第二の括弧の中の数値がどの変数が除外変数にまわされようとも不変であること。㈡ 第一の括弧の中の値が不変であることとであつた。

併しながら、これら二の仮定は是証され難い。第二の括弧の中の要素について。x_2 が包含変数に加えられることが確定するならば、右における各式の係数 $a'_{12}\ a'_{22}\ a'_{32}\ \vdots\ a'_{k2}$ は不変であるが、括弧の中に入る項は何が除外変数に選ばれるかによつて異なつて来る。x_{m+2} の代りに x_{m+3} が選ばれると、この中に入るものは $v_{m+3}\,a'_{32}$ ではなしに $v_{m+2}\,a'_{22}$ となる。我々の計算段階においては、それらの変数は共に不働変数であるからそれらの積は共に零であるが、計算段階の進むつれて、取替えられる変数が活動変数である可能が多くなり、それらの変化を無視することは大きな誤りを冒す可能が盛々大きくなる。最初の段階においては第二の括弧の中の各項は凡て零であるが、段階の進むにつれて、それらの項にして零でないものが益々多くなる。従つて、段階が大きく進んだところでは、非零の項の数が多く、括弧の中を常数と見做すことが左まで大きな誤りでない可能が生ずるであらうが、計算段階が初めのところでは、そう云う可能は少い。

第一の括弧の中について。これは包含変数となつたものに関する要素と除外変数となつたものに関する要素とからなる。今の場合、前者は x_2、後者は x_{m+2} であつた。若し後者が x_{m+3} になると、この括弧の中の要素は $v_2\dfrac{b'_3}{a'_{32}} - v_{m+3}\,b'_3$ となる。従つて、x_2 の代りに除外変数となるものが何であるかによつて、その値が変化する。

かくして、第二括弧と括弧にかけられた項との積が最小であつても、第一括弧の中の値が最大でないならば、式(19)の右辺頃の値は最大とならぬ。かくして、新たに包含変数となるものの各式の係数をもつて、それぞれ各式の常数項をわつて最小となる方程式の変数が除外変数にまわされると云う原則は正しくない。それが何であらうと、式(19)の差を最大にする如きものが選ばるるべきである。

論述の順序が逆になつたが、第一の問題に立ち帰える。即ち、$k-1$ の不働変数に 1 個の活動変数を加えて、k 個の包含変数を作るのに、m 個の活動変数の中から、何れの 1 個を選ぶべきか。この問題には今一の問題を内含する。それは k 個ある不働変動の中で何れの $k-1$ 個を包含変数にするかの問題である。

まず、k 個の不働変数の中から任意に $k-1$ 個を選び出したとする。それを x_{m+2} x_{m+3} $\vdots$ x_{m+k} とする。即ち、式 (1′) の左辺より、これらの変数だけそのままにしておいて、残余の $m+1$ 個の変数を一応右辺に移す。そうして、右辺に移された $m+1$ 個の除外変数の中から何れか一個、例えば x_i を左辺に差戻して、k 個の包含変数を作る。そうすると、k 個の方程式は凡て、その左辺において $k-1$ 個の不働変数と一個の活動変数とをもつのであるが、k 個の方程式の何れか一個の方程式にあつては、$k-1$ 個の不動変数の係数が悉く零であり、残余の $k-1$ 個の方程式にあつては、$k-1$ 個の不働変数の中で 1 個宛が係数が 1 で他は零であると云う構造になつている。前の特別の方程式 i が基準方程式である。我々の今の例においては第一式が基準方程式である。このような構造をもつ方程式群を、その包含変数の係数で作られる k^2 の正方行列が対角行列になるように変形する。それら変形された方程式の右辺の常数項は、第一式 第二式……第 j 式……において、それぞれ $\frac{b_1}{a_{i1}}$, $b_2-\frac{b_1}{a_{i1}}a_{21}$, … $b_j-\frac{b_1}{a_{i1}}a_{j1}$, … となり、それらがそれぞれ x_i、x_{m+2} … x_{m+j} … の解である。それらの解の中には負値を取るものもあるであらう。若し、そうであるならば、それらの解は、計算の中途段階においてであるとしても、LP の制限条件即ち変数は非負でなければならぬと云うことに適合しないから、そのような組合せは捨てらるべきである。即ち、前掲の $k-1$ の不働変数に加えらるべき包含変数としては x_i は不適当であるわけである。又若し、x_i を加えた k 個の包

含変数の解が凡て非負であるとする。そうすると、そのような解が、目的函数 Z に代入せられることになる。ところが $k-1$ 個の包含変数は不働変数であるから、それらの変数に関する目的函数 Z における係数 v は凡て零である。従って、今の場合、Z は次の如くに計算される。

$$Z = v_i \frac{b_i}{a_{i1}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

そこで前掲の $k-1$ 個の不働変数に m 個の活動変数の中から何れを選んで一つ加えるかと云うことは、条件制限式 (2′) をみたし、式 (20) の右辺を最大になすものでなくてはならぬ。式 (20) を見るに三の要素からなる。その一 b_1 は第一式の右辺常数項そうして、これは第一式が基準方程式である限り不変である。他の二要素 v_i a_{i1} はそれぞれ、x_i の目的函数と式 (1′) とにおける係数であり、それらは m 個の活動変数の中から選び出される包含変数によつて変る。x_j が選ばれるならば v_j a_{j1} となる。そこで、Z を最大にするには $\frac{v_i}{a_{i1}}$ を最大にするところの変数を、m 個の中から選ぶべきであることになる。即ち、基準方程式（今の場合第一式）における除外変数の係数にて、当該変数の v を除して、その商の最大なものを選ぶ。我々の例にては

$$\frac{v_1}{a_{11}}, \frac{v_2}{a_{21}}, \cdots \frac{v_i}{a_{i1}} \cdots$$

の中で最大なものを選ぶことにある。尤も、ある変数を選んだ場合、包含変数の解に、負が混合する場合には、そう云う変数を右の数列の中から除くことは既に述べた通りである。

同様にして、不働変数の中から x_{m+1} x_{m+3} … x_{m+i} … を選び出して包含変数となす時には、基準方程式となるものは第二式である。従つて、m 個の活動変数の中から何れを選んで包含変数になすかと云うに、解に負を含むようなものを除き、第二式の活動変数の係数 a_{21} a_{22} … a_{i2} … にて、目的函数 Z における係数 v_1 v_2 … v_i を割り最大なものを選ぶ。かくして、k 個の中から選ばれる $k-1$ 個の不働変数に組合さるべき活動変数が一つ宛定まるから、それらの中で Z を最大になるような組合せが、正に出発点として取上げらるべき包含変数である。

今まで述べたことを仮設的であるが、諸係数に具体的数値を入れた例についてあてはめよう。

$$\left.\begin{array}{l} 100x_1+100x_2+100x_3+100x_4>1500 \\ 7x_1+\ \ 5x_2+\ \ 3x_3+\ \ 2x_4>100 \\ 3x_1+\ \ 5x_2+10x_3+15x_4>100 \end{array}\right\} \cdots\cdots(21)$$

$$x_1\geqq 0 \quad x_2\geqq 0 \quad x_3\geqq 0 \quad x_4\geqq 0 \cdots\cdots(22)$$

$$Z=60x_1+80x_2+90x_3+95x_4 \cdots\cdots(23)$$

を原初の関係式とする。それに不働変数として、x_5 x_6 x_7 を加える。云うまでもなく、$x_5, x_6, x_7, \geqq 0$, $v_5=v_6=v_7=0$ である。

まず、3個の不働変数の中から2個を選び、それに4個の活動変数の中の1個を加えて3個の包含変数に作るには如何なる組合せにしたらよいか。その選び方は12通りある。まず任意に x_6 x_7 を選び、それに x_1 を加えるとすれば、この組合せが適合するか否かを判別するためには この組合せにおける包含変数の解（除外変数の値を零とした時の）が非

負であるか否かを知らなくてはならない。それを検するためには次の如くする。今の場合、第一式が基準方程式であるから、x_1 の係数 100 で両辺を割る。第二式は、変形基準方程式に第二式における x_1 の係数 7 をかけて、第二式から引いて、変形する。第三式は、変形基準方程式に x_1 の係数 3 をかけて、第三式から引いて、変形する。かうして作られる変形方程式を、右辺の常数項だけを残してかくと次の通りになる。

$$x_1 + 0x_6 + 0x_7 = \frac{1500}{100}$$

$$0x_1 + \quad x_6 + 0x_7 = 100 - \frac{1500}{100} \times 7$$

$$0x_1 + 0x_6 + \quad x_7 = 100 - \frac{1500}{100} \times 3$$

ここでは第二式が負であるから、これらの組合せは不適合であることが知られる。次に、x_1 の代りに x_2 を加える。第一式は、x_1 の代りに x_2 を置き、常数項を x_2 の係数 100 にて割る。第二式は、常数項 100 から $\frac{1500}{100}$ に x_2 の係数 5 をかけて引く。第三式は、常数項 100 から $\frac{1500}{100}$ に x_2 の係数 5 をかけて引く。ここでは変形常数項に負はないから、その限りこれらの組合せは適合である。非零の係数を有する変数だけを残してかけば、次の通りになる。

$$x_2 = \frac{1500}{100}$$

$$x_6 = 100 - \frac{1500}{100} \times 5$$

$$x_7 = 100 - \frac{1500}{100} \times 5$$

x_6 x_7 にはその他の x_3 x_4 を組合せると、凡て非負の解とならないから、不適合である。

次に x_5 x_7 の組合せについて見る。この組合せにては、第二式が基準式となる。x_1 を加えると、何れの変数の解も非負となる。これを次の式が示す。

$$x_1 = \frac{100}{7}$$

$$x_5 = 1500 - \frac{100}{7} \times 7$$

$$x_7 = 100 - \frac{100}{7} \times 3$$

x_2 x_3 x_4 の何れを加えても、解に負が入るから、凡て不適合である。

最後に、x_5 x_6 の組合せ。これについて第は三式が基準式。x_1 又は x_2 を加えると、常数項は非負とならない。x_3 と x_4 とはその条件をみたす。即ち

$$x_3 = \frac{100}{10}$$

$$x_5 = 1500 - \frac{100}{10} \times 100$$

$$x_6 = 100 - \frac{100}{10} \times 3$$

$$x_4 = \frac{100}{15}$$

$$x_5 = 1500 - \frac{100}{15} \times 100$$

$$x_6 = 100 - \frac{100}{15} \times 2$$

非負の解と云う条件をみたす組合せが四つあることを知つた。それはLP問題を解くために変数の選択と計算との繰返しの道を行くにあたつて、発足点が四あることを意味する。何れの入口から入るがよいか。それは、何れの道筋を経過することがその前の段階で捨てられた変数を後の段階で取上げると云う無駄を出来るだけ少くし、計算の繰返しの回数を出来るだけ少くするような入口から入ることでしかあり得ない。それは、言換えると、第一の段階の計算でZを最大にするような組み合せを選ぶべきであると云うことである。我々の今の段階にあつては、制限条件に適する四の組合せには、唯一つだけの活動変数を含む。従つてZの計算は極めて簡単である。$x_2 \cdots Z=\frac{80\times1500}{100}$, $x_1 \cdots Z=60\times\frac{100}{7}$, $x_3 \cdots Z=90\times\frac{100}{10}$, $x_4 \cdots Z=95\times\frac{100}{15}$、即ち、$(x_2, x_6, x_7)$の組合せが、今の段階では最適である。この組合せを取上げる。第一の段階で最適するものが、果して終局的に最大のZを保証するか否かは判らない。それを検するためには、シムプレックス判別基準にあてはめて見なくてはならない。それをするためには、方程式をフルに書く。即ち

$$\left.\begin{aligned} x_2+0x_6+0x_7&=15-x_1-x_3-x_4-\frac{1}{100}x_5\\ 0x_2+x_6+0x_7&=25-2x_1+x_3+3x_4+\frac{5}{100}x_5\\ 0x_2+0x_6+x_7&=25+2x_1-5x_3-10x_4+\frac{5}{100}x_5 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(24)$$

これを判別基準式にかける。

$$V_2-V_1A_2=[60,90,95,0]-[80,0,0]\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \frac{1}{100}\\ 2 & -1 & -3 & -\frac{5}{100}\\ -2 & 5 & 10 & -\frac{5}{100}\end{bmatrix}$$

$$=[60,90,95,0]-\left[80,80,80,\frac{8}{10}\right]$$

$$=\left[-20,10,15,-\frac{8}{10}\right]$$

即ち、x_3 と x_4 とが包含変数として組入れられる資格のあることが知られる。

x_3 x_4 の中から一を入れ、x_2 x_6 x_7 の中から一を除外するわけであるが、x_2 を除外することは意味をなさぬ。そうすれば、既に検査済みの組合せに落ちてしまうからである。従って、除外すべきものは x_6 か x_7 かである。そうすると、x_3 又は x_4 を入れて作る 3 の変数の組合せは 4 ある。まず、任意の組合せ x_2 x_6 x_3 を取る。x_7 を捨てて x_3 を入れたわけである。ここにおいては式 (24) の第三式が基準式である。従って、対角行列への変形をすると、次の通りである。

$$x_2 = 15-\frac{25}{5}\times 1 = 10$$

$$x_6 = 25-\left(\frac{25}{5}\right)\times(-1) = 30$$

$$x_3 = \frac{25}{5} = 5$$

但し、フルにはかかない。この組合せにあつては、解は非負を含まない。それ故に、これは制限条件式に適合する。又 x_2 x_6 x_4 の組合についても同様に制限条件が満される。即ちここにあつても第三式が基準式である。対角行列をもつ変形方程式を示せば、次の通りである。

$$x_2 = 15-\frac{25}{10}\times 1 = \frac{125}{10}$$

$$x_6 = 25-\left(\frac{25}{10}\right)(-3) = \frac{325}{10}$$

$$x_4 = \frac{25}{10}$$

他方、x_6 を除外し、その代りに x_3 又は x_4 を入れた組合せでは凡て、制限条件を満たさないから、取上げるべきでないことが知られる。

そうすると、第二段階の計算において、(x_2, x_6, x_3) と (x_2, x_6, x_4) の組合せの中で、何れを選ぶべきか。それは、何れを選ぶことによつて、目的函数 Z をより大きくするかによつて決定せらるべきである。それら二組における Z は次の通りである。但し Z への添数は変数の組合せを示す。

$$Z_{2,6,3} = 80\left(15-\frac{25}{5}\times 1\right)+0\left\{25-\frac{25}{5}(-1)\right\}+90\left(\frac{25}{5}\right) = 1250$$

$$Z_{2,6,4} = 80\left(15-\frac{25}{10}\times 1\right)+0\left\{25-\frac{25}{10}(-3)\right\}+95\left(\frac{25}{10}\right) = 1237.5$$

従つて、第一の組合（x_2, x_6, x_3）が有利であることが知られる。それを我らの判別式に照し合せる。我々の判別法は元の組み合せ x_2 x_6 x_7 による Z と、その中の一つが変えられた組合せによる Z との差を最大にすると云うことであつた。

元の組合せによる $Z_{2,6,7}$ は、

$$Z_{2,6,7}=80(15)+0(25)+0(25)=1200$$

であつた。それを、より有効なる組合せから差引いた差は、それぞれ次の通り。

$$Z_{2,6,3}-Z_{2,6,7}=\frac{25}{5}(90-80)=50$$

$$Z_{2,6,4}-Z_{2,6,7}=\frac{25}{10}(95-80)=37.5$$

即ち x_2 x_6 x_3 の組合せが有利であることが判る。それは、今の最も簡単な場合について云えば、新たに取入れられる変数（x_3 又は x_4――これらは共に活動変数である。ここの計算には不働変数は関係をもたない）の目的係数と、元からあつた活動変数の係数との差と、基準方程式の変形常数との積のより大きい方が選ばるべきであることを示す。

こうして、第二の計算段階のために開かれている二の入口の中で、何れを取り何れを捨てるべきかが判定せられる。

x_2 x_6 x_3 が取り上げられる。その場合の変形方程式は、次の通り。（基準方程式は式(24)の第三である。

$$
\begin{aligned}
x_2 &= 10-\frac{7}{5}x_1+\frac{1}{5}x_7+x_4-\frac{2}{100}x_5\\
x_6 &= 35-\frac{6}{5}x_1-\frac{2}{5}x_7-x_4+\frac{7}{100}x_5\\
x_3 &= 5+\frac{2}{5}x_1-\frac{1}{5}x_7-2x_4+\frac{1}{100}x_5
\end{aligned}
$$

これを判別基準にかける。

$$
V_2-V_1A_2=[60,0,95,0]-[80,0,90]\begin{bmatrix}\frac{7}{5} & -\frac{1}{5} & -1 & \frac{2}{100}\\ \frac{6}{5} & \frac{1}{5} & 1 & -\frac{7}{100}\\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 2 & -\frac{1}{100}\end{bmatrix}
$$

$$
=[60,0,95,0]-\left[74,3,110\frac{65}{100}\right]=\left[-14\ -3,-15,-\frac{65}{100}\right]
$$

即ち x_2 x_3 x_6 が最終的に、制限条件をみたし、目的函数 Z を最大するものであることが証明せられる。

そこで、最初から我々の歩んだ道について概観する。12 個の入口がある中で、まづ、4 個を取り上げる。残された 4

個の入口の中から、更に x_2 x_6 x_7 が最適である。それで、第一段の計算がなされる。それを判別基準に照して、そこから、道は二の資格変数によつて、4 に枝分れする。その中で、x_2 x_6 x_3 が最適であつた。それを基準にてらすと、その組合せはシムプレックス基準をみたすことが知られる。従つて、この組合せ x_2 x_3 x_6 が最終段階における最適組合せであることになる。このように、各段階において最適道を選んで進めば、今の我々の例にては 2 段階の判別基準計算で、最終最適地に達し得たわけである。

若し、このような標識がないと、より多くの避けられる無駄と、より多くの計算の繰返しとを経験しなくてはならない。我々の例について見るに、まず、最初の計算段階では、12 個の組合せがある。これから何を選ぶべきかと云うことを判別する基準がないとすれば、12 の中から 1 組みを任意に選び出すよう外に道がない。今、任意に x_4 x_5 x_6、即ち活動変数を 1 個、不働変数を 2 個選んだとする。以下凡て計算の数値は記述することを略する。その結果は包含変数の解は非負である。その結果を判別基準にかけると、x_1 x_2 x_3 が共に包含変数に組み入れらるべき資格があることが判る。そこで、その中から 1 個を取つて x_4 x_5 x_6 の中から 1 個を捨てる。その際 x_4 を捨てて、それら 3 者の中から 1 個を加えると、そのような組合せは、第一段の計算において選択すべき 12 個の組合せの一つになるから、計算段階の逆戻りをすること（理論的には逆戻りをしてはならない理由はない）を避ける。そこで、x_5 x_6 の中から 1 個を捨てて x_1 x_2 x_3 の中から 1 個を取る。そのような組合せは 6 ある。この中で何を選ぶかを定める標準がないから、任意に x_5 を捨てて x_1 を取る。これで第二段階の計算を進める。包含変数の解はここでも非負である。判別基準は、$x_2>0$, $x_3>0$ であることを

知らせる。第三段階にては凡てが活動変数でなくてはならないと云うことはあり得ない。従つて、x_4 x_1 x_6 の中から 1 個を捨て、x_2 x_3 の中から 1 個を入れる組合せは 6 個ある。その中で任意に x_2 x_1 x_4 の組合せを選ぶ。その計算結果は解が凡て非負であることにならない。ここで、6 個の中の別の組合せ x_4 x_2 x_6 を選ぶ。これが第四段の計算である。その結果は解は非負ではあるが、Z が最大でない。判別基準は $x_3>0$ であることを示す。x_4 x_2 x_6 の中から 1 個を捨てて x_3 を加える組合せは 3 個ある。その中から、任意に x_3 x_2 x_6 を選ぶ。解は非負。判別基準は凡て負であることを示す。かくして、第五段階の計算によつて辛じて、Z を最大にする最終目的に達したわけである。若し第五段階において x_4 をすてて x_3 を入れる代りに x_6 を捨てて x_3 を入れていれば、計算の繰返しは更に多くなるであらう。