需要曲線及供給曲線の統計的測定の可能條件

栗村，雄吉

https://doi.org/10.15017/4150425

出版情報：經濟學研究. 4 (3), pp.83-130, 1934-06-30. 九州大学経済学会
バージョン：
権利関係：

需要曲線及供給曲線の統計的測定の可能條件

栗村雄吉

目次

一　緒　言

需要曲線の統計的測定の問題は、穀價と收穫量との關係を示すものとして知らるるキングの法則の發見者グレゴリイ・キングの昔から決して新しき試ではない。併しながら統計學的研究の進步とその普及

とに基きて、最近殊に著しく斯問題の論ぜられてゐるを見る。從つて、其文献も亦汗牛充棟もただならぬ程にある。多くの文献は統計學的法式を新しき資料にあてはめ、今まで論ぜられなかつた財に就いて、所謂統計的需要曲線を發見する事に急であつて、斯問題の可能性に疑を挿狹み若しくは批判を加へんとするものは極めて稀である。私は今茲に多くの文獻に倣つて新しき資料を集め、之に統計學的操作を施して新に需要又は供給曲線を發見し、夫等多數の文獻に一を加へようとするものではない。私の目的とするところは、一、統計的測定は如何なる條件に依りて可能であるか、如何なる條件の下にては不可能であるか、二、現在多くの學者に依りて發見せられてゐる結果が果して前記の可能條件を滿し得るものであり、從つて、理論的に需要曲線供給曲線と云はるべきものであるか、を吟味することにある。唯紙面の都合上第二の問題は後の機會に讓る事とする。

私は斯問題に對して最初から私論を頭に描いてゐた。而して、數多の文獻の悉くを讀破したとはいはないが、數少い批判的のものの中に就いて、私と所見を等しくするもの二あるを發見した。一はE. J. ウアアキング[2]二はフリッシである[3]。前者からは私は何物も敎はらなかつた。唯恐ろしく見解を等しくする者のあるを發見したのみである。後者に於いては、私見と等しき見解がその所論の大なる部分ではあるが、それだけに盡きず、尚多くの點が論ぜられてゐる。敎へられるところ極めて多かつた。私は本稿に於いて、最初からの私見にフリッシに依りて敎へられたる諸點と、更に、夫を土臺として新しく考察

2) E. J. Working. What do statistical demand curves show, Quarterly Journal of economics Vol. 41. 1927. p. 213–235.

3) Ragnar Frisch Pitfalls in the statistical construction of demand and supply curves. 1933.

したるところを加へて、開陳したいと思ふ。

二　問題の性質

一定の價格にて引取らんと申出でらるる財の數量が需要數量又は單に需要と云はれ、その價格が需要價格と云はれる。從つて、需要數量又は需要は一定の需要價格を前提して成立する。一定の價格を前提せざる需要はあり得ない。供給數量又は供給とは一定の價格を以つて引渡さんと申出でられる財の數量である。供給と價格との關係も亦需要に於けると等しい。

價格が騰貴すれば需要は減少し、價格下落すれば需要は增加する。換言すれば、一財の需要は價格の減少函數であるといはれる。この關係は需要の一般法則として汎く人の知るところである。

玆に、價格といふは二樣に解せられる。一、當該財の價格のみを意味する。二、當該財は固より他の凡ての財の價格をも併せ指す。需要Yは當該財の價格Xの減少函數であるとするは部分均衡的觀察の仕方である。その典型的なるものは古典學派である。此の關係は次式にて示される。

$$Y = F(X) \qquad (1)$$

一財の需要Yは凡ての財の價格$X_1 X_2 \cdots\cdots X_N$の函數であるとするは一般均衡的觀察の仕方である。その典型的なるものはロザヌ學派並にその流をくむ數理學派である。この關係は次式にて示される。

然らば、部分均衡的觀察の仕方と一般均衡的觀察の仕方との間には如何なる關係があるか。これは次の如くに考ふることが出來ると思ふ。部分均衡的觀察の仕方にありては、一財の需要の決定に參與するところの要因には數多あり、而もその要因の需要決定に與る作用の强さも亦多様であるが、その多様の要因の中、作用の一次的にして且つ最も重要なるもののみを摘出し、作用の重要ならず副次的なるものを無視する。かくして、當該財價格を正に摘出すべき唯一のもの、他の凡ての財の價格を無視して可なるものと考へ、需要の一般法則を方程式 1 にて指示せんとする。一般均衡的考察の仕方にありては、需要の決定に參與するところの要因の中、その作用の一次的にして重要なるもののみを摘出するのではない。重要ならず副次的なるものをも凡て無視せず、需要の一般法則を樹立せんとする。かくして、方程式1を以つて需要の一般法則を表示せんとする。從つて、部分均衡的考察の仕方に依る需要の一般法則は、現實の關係に對して第一次近似的の値を持つところの表現であるに過ぎぬに反して、一般均衡的考察方法に依る需要の一般法則は、より高次の近似値を有する表現であるといふことが出來やう。從つて、部分均衡的法則と一般均衡的法則とは互に相背反するところの表現ではない。前者は後者の部分的表現又は特殊場合であり、後者は前者をその部分として包含するところの表現である。

$$Y = F(X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n) \qquad (1)$$

部分均衡的考察にありても、一般均衡的考察にありても、需要の一般法則を考察する場合には、需要

函數そのものの姿を決定するところの諸條件の不變を前提する。然るが故に需要の一般法則の表現としての方程式 1′ 又は 1′ は靜態的法則であると云はれる。

他方に於いて、需要が增加すれば價格は騰貴する。需要が減少すれば價格は下落すると云はれる。此の關係には需要の法則なる名稱が附けられる。此表現は方程式 1 又は 1′ の表現と屢々混同されるを見るところであるが、この二の表現は極めて異りたる內容を持つ。價格が騰貴すれば需要減少するといふことは、高き價格に於ける需要數量は低き價格に於ける需要數量よりも小であることを意味する。價格下落すれば需要增加するといふことは、その反對である。此の表現は唯それだけにては供給の關係と相關することはない。而して、需要函數を決定する條件の變動を俟つことなしに成立する。

然るに、需要が增加すれば、價格は騰貴する、需要が減少すれば價格は下落するといふ命題はさうではない。需要が增加すると云ふことは、同一の需要價格に於いて需要される數量が、需要函數を決定する一定の條件の下に於いては、別の條件の下に於けるより大であり、從つて、供給の關係が不變であると假定すれば、需要と供給との關係から成立する均衡價格が大となる事を意味する。從つて、斯命題に於ける需要の增加は、需要函數そのものゝ變化、換言すればその位置の變化と、その構造の變化を共に包含し得る。(此二條件に就いては後に詳述したい)。需要の法則は需要函數の變化を前提として始めて成立する。從つて、決して靜態的法則ではあり得ない。他方、供給函數の位置及構造の不變を前提して成立す

るが故に、十全なる意味に於ける動態的法則ではない。半動態的法則とも云ふべきかと思ふ。需要の一般法則と需要の法則とは斯の如く峻別すべき異りたる内容を持つ。

需要の一般法則にありては、需要函數の位置と構造を決定する條件が不變であると考へられてゐる。獨立變數と考へられてゐるものは、價格（方程式1にありては當該財の價格のみ、1′にありては凡ての財の價格）である。然るに、需要函數の位置及び構造を決定する諸條件は元來固定不動ではあり得ない、唯靜態的理論構成の便宜上固定不動と假定したるまでゞある。從つて、嚴密にいへば、靜態的法則の表現と考へられるところの方程式1又は1′には、需要函數の位置と構造とを決定する諸條件が無關係であるべきでなく、parameters として挿入せらるべく、而してそれ等が固定の値を取りたるに過ぎない。

然るに、半動態的法則ともいふべき需要の法則にありては、需要の一般法則に於いて獨立變數として取扱はれる因子が又獨立變數であるのみならず、それにありて固定の値を持つ parameters が又獨立變數として取扱はれる。從つて、需要の一般法則は需要の法則の特殊例（スペシアルケエス）と考へる事が出來る。一次のあるひはより高次の近似値を有する靜態的需要曲線又は需要函數が如何にして決定されるかに就いては、今は私見は述べぬ。機會を更めることにしたい。

部分均衡的考察方針の典型ともいふべき古典學派に於いても、一般均衡的考察方針の典型とも云ふべ

き數學派に於いても、需要曲線又は函數に就いては、その理論的抽象的性質を論ずるのみであつて、その具體的形態に就いては論じない。それは理論そのもの丶性質から來る事である。

然るに、部分均衡的乃至一般均衡的需要函數、又は供給函數に、消費、生産の統計的資料に統計學的操作を施すことに依りて、具體的形態を與へんとする試みがある。この試に依りて導出されたる結果を夫々玆に統計的需要函數又は曲線（statistical demand function or curve), 統計的供給函數又は曲線（statistical supply function or curve）と云ふ。

既に述べたる如く、部分均衡的考察の表現であるところの需要函數（方程式1）は、一般均衡的考察の表現であるところの需要函數（方程式I）の第一次近似的表現である。從つて、後者を取扱ふ事が前者を取扱ふよりも、その叙述の値はより高次に眞實の關係に近似するものであるが、かくては叙述は極めて複雜となり事象の聯關の洞見が妨げられるの嫌あるが故に、私は本稿に於いては部分均衡的考察法を採りて、一財の需要及供給Yは當該財の價格Xのみの函數であると假定して、考察を進めて行きたいと思ふ。

既に述べたる如く、一財の需要Yはその財の價格Xの函數である。これは方程式1にて示される表現である。併しながら、此の表現はその理論的性質として、需要數量と價格との關係の理論的抽象的叙述に過ぎぬ。從つて、需要曲線の位置即ち此函數の常數u及曲線の構造又は傾斜係數即ち此の函數の第一微分係數が如何なる具體的數値を取るかに就いては、何事も語られてゐない。理論的にはそれ等を決定し得べ

き欲望の心的大さが與へられざる限り何事も語り得ない。理論に於いて論斷し得る事は、傾斜係數及常數uの具體的數値ではなくして、需要函數の理論的抽象的性質、換言すれば、需要函數YのXに關する第一微分係數$\frac{dY}{dX}$が負數である事だけである。

それだけの事からは、變數Xの係數αが如何なる値及符號を取るべきかさへ不明である。變數Xの係數αの符號を決定するだけに就いても、更に一段の假定を必要とする。例へば、「需要Yと價格Xとの關係が直線的關係であるとすれば、變數Xの係數αは負數でなくてはならぬ、又兩者の關係が双曲線的關係であるならば、αは正號を取らねばならぬ等の條件である。

飜りて思ふに、理論經濟學に於いて、方程式1の變數Xに關する第一微分係數即ち方程式1の代表する曲線の傾斜係數が問題であるのは、需要の伸縮度の問題に關してゞある。[4] 需要の伸縮度とは、マアシヤルに依れば[5]、需要數量の變化率と價格の變化率との比であつて、後者が infinitesimal なる變化をなしたる時の値である。從つて需要伸縮度ηは

$$\eta = \frac{dX}{Y} \div \frac{dY}{X} = \frac{dY}{dX} \times \frac{X}{Y}. \qquad (2)$$

である。需要伸縮度は價格が有限なる變化をなし、從つて、需要函數を連續的のものと假定して、需要數量も亦有限なる變化をなすとすれば、その時に於ける需要の變化率と價格の變化率との比即ち arc elasticity

4) 需要伸縮度の問題に就いては獨立の論文を捧げて論ずべき多くの問題がある。今の問題に對しては直接の關係なきが故に深く立入らぬ。

5) A, Marshall. Principles of economics

と、數量と價格とが共に infinitesimal なる變化をなす時に於ける兩變化率の比即ち point elasticity とは必ずしも一致しない。[6] 茲で必ずしもと云ふは、需要Yと價格Xとの關係が直線的である場合に就いてだけは此の命題があてはまらぬからである。從つて、斯特殊例を除いては、需要曲線の統計的測定に重要なる役割を持つところの伸縮度 η は arc elasticity であるべきか point elasticity であるべきかの問題が起るであらう。然るに、現實の變化は決して infinitesimal な變化ではない。從つて統計的に伸縮度といへば arc elasticity を指示すべきであらうが、YとXとの値に變化なしとしても、Xの變化の刻みを如何に取るかに依つて伸縮度 η の數値に差異を生ずる。然るに、その刻を如何に取るべきかを決定すべき何等の理論的根據はない。かくて、伸縮度の統計的測定に重大なる困難を生ずるであらう。

併しながら、方程式2より次式が生れる。

$$\eta = \frac{dY}{Y} \Big/ \frac{dX}{X} = \frac{d\log Y}{d\log X} \qquad (2')$$

方程式1にありてはYは需要數量Xは價格を指示する。從つて、現實とは可成遠いとしても曖昧さのない point elasticity をとるとしても、その算出には相當の煩雜さがある。然るに、從屬變數Yを以つて代表するに需要量とせずして需要量の對數とし、獨立變數Xを以て代表するに價格とせずして價格の對數とするならば、方程式2より明なる如く、point elasticity の算出は極めて簡單となるのみならず、次

6) H. Dalton. Some aspect of the inequality of incomes in modern commumities, 1925. p. 192—197.

の便宜が得られる。（一）point elasticity と需要曲線の傾斜係數とが互に等しくなる。蓋し、方程式2の最右邊項の示すところの需要函數の第一微分係數は解析幾何學的には需要曲線の傾斜係數を表示するからである。（二）point elasticity と arc elasticity とが互に等しく從つて兩者を區別する必要のなき範圍が廣くなる。蓋し、此の範圍は從屬變數獨立變數を夫々單純なる需要量價格とするならば、前の二者の關係が直線的の場合のみに限られてゐたのであるが、前二者を夫々需要量の對數價格の對數とすれば、その範圍は需要量と價格との關係が双曲線的のものにまで及ぶからである。シュルツ[7]に依れば二變數を對數とする事に依りて、二者の區別が如何なる場合にも消失すると考へられてゐるかに見ゆるが、それは正しくない。その範圍が少く取擴げられたるにすぎない。（三）若し、需要數量の對數を表示するところの從屬變數と、價格の對數を表示するところの獨立變數との關係が直線的のものと假定するならば、需要伸縮度と需要曲線の傾斜係數と、具體的需要函數を論ずる場合に最も重要なる獨立變數の係數αとが互に等しくなる。

從つて、それらの重要なる便宜のために、以下の論述に於いては需要の一般法則を示すに、需要數量と價格との關係を以つてせずして、需要の對數yと價格の對數xとの關係を以つてする。これを次式にて示す。

$$y = f(x) \qquad y = \log_{\cdot} Y \qquad x = \log X. \qquad (1'')$$

7) H. Schultz, The statistical law of demand as illustrated by the demand for sugar, Journal of political economy 1925. vol. 33. P. 489.

若し此の關係が具體的形態を採るものとすれば、方程式1″は次式とならねばならぬ。

$$y = u + \alpha x^{a} \qquad (3)$$

次に供給曲線の代數的表示は

$$Y = G(X)$$

方程式1を使用せずして方程式1″を使用すると同じ理由に依りて、

$$y = g(x) \qquad y = \log Y. \qquad x = \log X.$$

其の具體的形態は

$$y = v + \beta x^{b} \qquad (4)$$

現實の社會に成立するところの市場價格は、理論的均衡價格に一致するものであるか否かに就いては次の點から考へられる。（一）現實の社會に於いては摩擦の作用を無視することは出來ぬ。（二）各需要者と各供給者とは市場關係を知悉するものとは考へ難い。又非經濟的要因に作用せられずとも保證し難い。短言すれば完全なる經濟人ではない。從つて、競爭が制限せられずとしても、完全なる自由競爭は行はれず、價格に關する費用法則は支配するとは斷定し難い。（三）資料測定に誤差の介入する餘地も十分にある。從つて、現實の市場價格は、消極的に或は積極的に理論的均衡價格と乖離し、費用法則は市場價格を支配する力を持たざるかに見ゆる。然しながら、決してさうとも考へられない。資料の度數を十

分に多くするならば、大數の法則の支配に依りて、一一の誤差偏差は相殺せられ、市場價格は均衡價格に近いものとなる。今假りに、現實に於いて成立する價格が理論的均衡價格と乖離せざるものとする。

既に述べたる如く、靜態法則としての需要の一般法則にありては、需要曲線の位置即ち方程式3に於ける常數uとその構造即ち傾斜係數從つて同じく變數xの係數α及その冪aとを決定する諸條件が、從つて、u α及aの値が固定してゐる。uを決定する條件として、經濟組織を與へられたるものとして、社會經濟を構成する人口の總數、所得層形成の姿をあげる事が出來る。α及aを決定するものとして、趣味流行などの消費行爲の基礎をなすところの心的要素をあげる事が出來る。前の要因を需要函數に於ける量的要因、後の要因を同じく質的要因と呼ばう。

需要曲線の統計的測定のために、資料の集められてゐる社會に於いては、不斷に量的並に質的要因は變動しつゝある。從つて、u・α・及aは不斷に變化してゐる。

更に、需要のそれに於けると等しく、供給の一般法則に於いても、供給曲線の位置即ち方程式4に於ける常數v及その構造即ち傾斜係數從つてxの係數β冪bを決定する諸條件は固定してゐる。從つて、v・β及bは生產物の價格が不變なりとすれば一定の値をとる。vを決定するものは、暫らく中間的供給者を無視すれば、一社會に於いて當該財の生產に從事する數多の生產者の中にて最有利の生產方法を採用せる生產者に於ける最能限點の大さである。これを決定するものは生產方法と之を選擇せしめる資本

の大さである。β及bを決定するものは、より不利なる生産方法を採用する生産者に於ける最能限點の分散狀態、即ち各生産者の支配する資本の大さの分散狀態と生産方法の技術的性質である。[8] 供給曲線の位置及構造を決定するところの前記諸要因は現實の社會に於いては不斷に變化しつゝある。從つて、供給曲線もその位置に於いて、その構造に於いて不斷に變化してゐる。

從つて、需要及供給の關係を夫々時tの函數として考ふるところの論者も決して尠くない。併しながら嚴密に云へば、時の經過と需要又は供給の關係を決定するところの前述諸要因の變化との間には何等必然の聯關はない。時の經過と諸要因の變化とは互に獨立に存在し得る。從つて、需給の關係を夫々時の函數とする見解は正しくないであらう。需要及供給の動態的關係を考慮するには、曩に需給の靜態的關係の考察に於いて parameters として取扱はれたる數多の要因を獨立の變數として取扱はねばならぬ。併しながら、かくては叙述極めて複雜化するが故に、多少不正確ではあるが、需要及供給の夫々の動態的關係を價格及時tの函數として取扱ひたい。

時の經過と共に市場に於いて成立するところの價格及取引數量は、既に述べたる如く、その位置に於いてもその構造に於いても時の經過と共に變化するところの、而して、時が一定の値を取れば、その位置に於いてもその構造に於いても一定の値をとるところの、需要曲線と供給曲線との交點に依りて決定される。從つて、それらの數量價格系列(正しくは前述の假定により數量對數價格對數系列であるが簡單の

8) 拙稿供給函數論本誌第二卷第二號參照

ためにかく呼ぶ）を考察するにあたりては、需給兩曲線の夫々の常數及傾斜係數とが極めて重要なる要因である。

兩曲線の常數に就いては問題はかうである。それは、前述諸要因の具體的大さを知らざる理論的考察にありては、測定するに何の根據もない。又統計的資料として與へられるものでもない。蓋し、統計的資料として與へられるものは數量對數 y と價格對數 x とであるから常數の値は能ふべくんば此の資料を基礎として測定さるべきもの、問題の求むべき一結果である。兩曲線の傾斜係數に就いてはかうである。前述の理由より、問題に立入る前には未知ではあるが、統計的資料を基礎として測定さるべきもの、問題の最重大なる所求の解である。傾斜係數に就いては尙考慮すべき點がある。靜態的需要曲線に就いていへば、その傾斜係數即ち伸縮度は x の凡ての値に對して必ずしも一定ではない。多くの財に就いていへば、傾斜係數は亦 x の函數である。而して大體から云へば絕對値にて x の小なる値に對して大、x の大なる値に對して小である。時 t を parameter とする動態的需要曲線に就いて云へば、t が一の値を取る場合に於ける一靜態的需要曲線の傾斜係數の變化の樣態と t が別値を取る場合に於ける別の靜態的需要曲線の傾斜係數の變化の樣態は一樣ではない。同樣のことは供給曲線に就いてもいふ事が出來る。需要曲線の傾斜係數は x の函數であると共に t の函數である事は、ある場合には、需要曲線の統計的測定を全然不可能ならしむる。それは後に證明するところである。併しながら、多くの論者がさうで

私も暫らく、傾斜係數はｔに無關係である、換言すれば、ｔと共に變化する需要曲線はその位置に就いてのみ變化し構造に於いて變化せずと假定する。此の假定に依りて、動態的需要曲線に於けるｘの係數α並に羃ａに夫々一定の固定値が與へられる。更に、次の點は統計的測定の理論的構成には無關係であり得るが、各の靜態的需要曲線の傾斜係數がｘに無關係である。換言すれは、ｙ即ち數量對數とｘ即ち價格對數との關係が直線的であると假定する。此假定に依りて、方程式3に於ける羃ａに＋1なる値が與へられる。此假定を設ける理由は、double logarithmic scale を假定する今の場合、此假定を加へる事に依りて、需要伸縮度と需要曲線の傾斜係數と變數ｘの係數αとの三者が互に等しくなり、事柄が極めて簡單化するからである。需要曲線の傾斜係數に關して設けた此二假定に準じて、供給曲線のそれにも同様の二假定を設ける。かくて、理論的需要曲線及供給曲線の假想的ではあるが具體的方程式は夫々次式にて示される。

$$y = u + \alpha x \qquad (5)$$

$$y = v + \beta . x \qquad (6)$$

これだけの準備工作を經て本論に立入らう。統計的資料に依りて與へられたる數量價格點の系列 y_1x_1 y_2x_2 ……… y_nx_n はその時に於ける需要曲線供給曲線の上にある。即ち次式を滿足する。

$$
\begin{aligned}
y_1 &= u_1 + \alpha x_1 & y_1 &= v_1 + \beta x_1 \\
y_2 &= u_2 + \alpha x_2 & y_2 &= v_2 + \beta x_2 \\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots \\
y_n &= u_n + \alpha x_n & y_n &= u_n + \beta x_n
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

夫等の需及給曲線の夫々の平均曲線を見る。それには常數 $u_1 \cdots\cdots u_2 \, u_n$. $v_1 \, v_2 \cdots\cdots v_n$ の夫々の算術平均値を求め、それを常數とし、α 及 β を變數 x の係數とする方程式を求むれば足る。即ち、

$$\frac{\Sigma u_i}{n} = \bar{u} \qquad y = \bar{u} + \alpha x$$

$$\frac{\Sigma v_i}{n} = \bar{v} \qquad y = \bar{v} + \beta x$$

斯兩曲線の交點の上には、凡ての數量價格系列點の算術平均値即ち

$$\frac{\Sigma yi}{n} = \bar{y} \qquad \frac{\Sigma xi}{n} = \bar{x}$$

がなければならぬ。從つて、兩平均曲線の交點$\bar{y}$の値は

$$\bar{y} = \bar{u} + \alpha \bar{x} \qquad (8.1)$$

$$\bar{y} = \bar{v} + \beta \bar{x}. \qquad (8.2)$$

にて示される。從つて、各點のyと平均値$\bar{y}$との垂直差を求むれば

$$(y_i-\bar{y})-\alpha(x_i-\bar{x})=(\bar{r}_i-\bar{u}) \tag{9.1}$$

$$(y_i-\bar{y})-\beta(x_i-\bar{x})=(u_i-\bar{u}) \tag{9.2}$$

を得る。(9.1)に(9.2)を乗じ、各點に就いて總和を求むれば、次式を得る。

$$\Sigma(y_i-\bar{y})^2-(\alpha+\beta)\Sigma(y_i-\bar{y})(x_i-\bar{x})+\alpha\beta(x_i-\bar{x})^2=\Sigma(u_i-\bar{u})(v_i-\bar{v}) \tag{10.1}$$

次に、(9.2)と(9.1)とを夫々自乘し、各點に就いて總和を求むれば夫々次式を得る。

$$\Sigma(y_i-\bar{y})^2-2\beta\Sigma(y_i-\bar{y})(x_i-\bar{x})+\beta^2\Sigma(x_i-\bar{x})_2=\Sigma(vi-\bar{v})^2 \tag{10.2}$$

$$\Sigma(y_i-\bar{y})^2-2\alpha\Sigma(y_i-\bar{y})(x_i-\bar{x})+\alpha^2\Sigma(x_i-\bar{x})^2=\Sigma(u_i-\bar{u})^2 \tag{10.3}$$

複雜を避けるために次の諸項に對して略號を用ふる。

$$\Sigma(y_i-\bar{y})^2=\mathrm{Myy} \qquad \Sigma(u_i-\bar{u})^2=\mathrm{Muu}$$

$$\Sigma(y_i-\bar{y})(xi-\bar{x})=\mathrm{Myx} \qquad \Sigma(u_i-\bar{u})(v_i-\bar{v})=\mathrm{Muv} \tag{11}$$

$$\Sigma(x_i-\bar{x})^2=\mathrm{Mxx} \qquad \Sigma(v_i-\bar{v})^2=\mathrm{Mvv}$$

方程式10.1と10.2との比を求める。

$$\frac{\mathrm{Myy}-(\alpha+\beta)\mathrm{Myx}+\alpha\beta\mathrm{Mxx}}{\mathrm{Myy}-2\beta\mathrm{Myx}+\beta^2\mathrm{Mxx}}=\frac{\mathrm{Muv}}{\mathrm{Mvv}}$$

兩邊の分母子を夫々乘じ合せ變形して

$$(\alpha\beta M_{vv}-\beta^2 M_{uv})M_{xx}-\left[(\alpha+\beta)M_{vv}-2\beta M_{uv}\right]M_{yx}+(M_{vv}-M_{uv})M_{yy}=0$$

本式をMxxMvvにて除すれば

$$\left(\alpha\beta-\beta^2\frac{M_{uv}}{M_{vv}}\right)-\left(\alpha+\beta-2\beta\frac{M_{uv}}{M_{vv}}\right)\frac{M_{yx}}{M_{xx}}+\left(1-\frac{M_{uv}}{M_{vv}}\right)\frac{M_{yy}}{M_{xx}}=0 \qquad (12.1)$$

を得る。

方程式10.2と10.3との比を求める。

$$\frac{M_{yy}-2\beta M_{yx}+\beta^2 M_{xx}}{M_{yy}-2\alpha M_{yx}+\alpha^2 M_{xx}}=\frac{M_{vv}}{M_{uu}}$$

兩邊の分母子を夫々乘じ合せ變形すれば

$$(\alpha^2 M_{vv}-\beta^2 M_{uu})M_{xx}-2(\alpha M_{vv}-\beta M_{uu})M_{yx}+(M_{vv}-M_{uu})M_{yy}=0$$

本式を Mxx Mvv にて除すれば

$$\left(\alpha^2-\beta^2\frac{M_{uu}}{M_{vv}}\right)-2\left(\alpha-\beta\frac{M_{uu}}{M_{vv}}\right)\frac{M_{yx}}{M_{xx}}+\left(1-\frac{M_{uu}}{M_{vv}}\right)\frac{M_{yy}}{M_{xx}}=0 \qquad (12.2)$$

を得る。

是等の操作は資料の統計學的取扱に於いて極めて重要なる要因、相關係數、標準偏差、回歸線又はそ

の傾斜係數と聯絡を求めんがためである。

數量對數yと價格對數xとの相關係數r、常數uとvとの相關係ρとは夫々次式にて示される。[9]

$$r=\frac{\Sigma(y_i-\bar{y})(x_i-\bar{x})}{\sqrt{\Sigma(y_i-\bar{y})^2\,\Sigma(x_i-\bar{x})^2}}\qquad \rho=\frac{\Sigma(u_i-\bar{u})(v_i-\bar{v})}{\sqrt{\Sigma(u_i-\bar{u})^2\,\Sigma(v_i-\bar{v})^2}}$$

11の略號を以て表せば、

$$r=\frac{M_{yx}}{\sqrt{M_{yy}M_{xx}}} \tag{13.1}$$

$$\rho=\frac{M_{uv}}{\sqrt{M_{uu}M_{vv}}} \tag{13.2}$$

y. x. u. v. の夫々の標準偏差は、[10]

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{\Sigma(y_i-\bar{y})^2}{n}}=\sqrt{\frac{M_{yy}}{n}}$$

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{n}}=\sqrt{\frac{M_{xx}}{n}}$$

$$\sigma_u=\sqrt{\frac{\Sigma(u_i-\bar{u})^2}{n}}=\sqrt{\frac{M_{uu}}{n}}$$

9) H. L. Rietz, Handbook of mathematical statistics 1924, p. 122.
Davies and Crowder, Methods of statistical analysis 1933, p.239.
M. Ezekiel, Methods of correlation analysis 1930, p. 127.
E. E. Day, Statistical analysis 1925. p. 195.

10) H. L. Rietz, Handbook of mathematical statistics p. 28.
Davies and Crowder ibid, p. 70.
小倉金之助統計的研究法 114頁. M. Ezekiel, ibid, p. 7.
Day. ibid., p. 163. T. Kelley, Statistical method, 1924 p. 77.

$$\sigma v = \sqrt{\frac{\Sigma(vi-\bar{v})^2}{n}} = \sqrt{\frac{Mvv}{n}}$$

yとxとの標準偏差の比uとvとの標準偏差の比は夫々yとx・uとvとの撒布度の比であり、今の場合に就いて見れば、yとx・uとvとの夫々の變化率の比である。これらの比を夫々yx・uvの相對的變度（the relative violence in set (yx) and (uv)）と呼び、夫々l λにて示せばl λは夫々次式にて示される。

$$l = \frac{\sigma y}{\sigma x} = \sqrt{\frac{Myy}{n}} \Big/ \sqrt{\frac{Mxx}{n}} = \sqrt{\frac{Myy}{Mxx}} \qquad (14.1)$$

$$\lambda = \frac{\sigma u}{\sigma v} = \sqrt{\frac{Muu}{n}} \Big/ \sqrt{\frac{Mvv}{n}} = \sqrt{\frac{Muu}{Mvv}} \qquad (14.2)$$

併し根號を有するこれ等二表現を用ふる事は煩雜なるために其の自乘を次式にて示す。

$$l^2 = \frac{Myy}{Mxx} = K \qquad (15.1)$$

$$\lambda^2 = \frac{Muu}{Mvv} = k \qquad (15.2)$$

yのxに對する回歸線（line of regression of y on x）の傾斜係數をHにて示せば、Hは次式にて與へ

られる。[11]

$$H = r\frac{\sigma y}{\sigma x}$$

之に13.1、14.1を代入して

$$H = rl = \frac{M y x}{\sqrt{MyyMxx}} \times \sqrt{\frac{Myy}{Mxx}} = \frac{Myx}{Mxx} \qquad (16.1)$$

uのvに對する回歸線の傾斜係數をhにて示せばhは次式にて與へられる。

$$h = \rho\frac{\rho u}{\rho v}$$

之に13.2、14.2を代入すれば

$$h = \rho\lambda = \frac{Muv}{\sqrt{Muu\ Mvv}} \times \sqrt{\frac{Muu}{Mvv}} = \frac{Muv}{Mvv} \qquad (16.2)$$

14.1 14.2 15.1 15.2 16.1 16.2 を 12.1 12.2 に夫々代入すれば、次式を得る。

$$(\alpha\beta - \beta^2 h) - (\alpha + \beta - 2\beta h)H + (1 - h)K = 0 \qquad (17.1)$$

$$(\alpha^2 - \beta^2 k) - 2(\alpha - \beta k)H + (1 - k)K = 0 \qquad (17.2)$$

11) Rietz, ibid, p. 126.
Davies ibid, p. 249.
小倉金之助、前掲書、447頁

この二方程式はフリッシ[12]の根本方程式と名付くるものである。

是等二根本方程式は需要曲線の構造即ち伸縮度を示すところの係數 $\alpha\beta$・y の x に・u の v に對する回歸線の傾斜係數 H h・y x・u v に關する夫々の相對的變度 K h を parameters としてゐる。是等 parameters に關する根本方程式の解を求める。

先づ、y の x に對する回歸線の傾斜係數 H は。17.1 に (1－k) を、17.2 に (1－h) を乘じ、K を消去すれば、

$$(\alpha\beta-\beta^2 h)(1-k)-(\alpha^2-\beta^2 k)(1-h)=\{(\alpha+\beta-2\beta h)(1-k)-2(\alpha-\beta k)(1-h)\}H$$

本式を整理すれば

$$(\beta-\alpha)\{\alpha-(\alpha+\beta)h+\beta k\}=(\beta-\alpha)(1-2h+k)H.$$

從つて、

$$H=\frac{\alpha-(\alpha+\beta)h+\beta k}{1-2h+k} \tag{18.1}$$

u の v に對する回歸線の傾斜係數 h は 17.1 より

$$h=\frac{\alpha\beta-(\alpha+\beta)H+K}{\beta^2-2\beta H+K} \tag{18.2}$$

12) Frisch ibid., p. 12.

yxの相對的變度Kは。17.1に$2(\alpha-\beta k)$を、17.2に$(\alpha+\beta-2\beta h)$を乘じ、Hを消去して、

$$2(\alpha\beta-\beta^2 h)(\alpha-\beta k)-(\alpha^2-\beta^2 k)(\alpha+\beta-2\beta h)$$
$$=\{(1-k)(\alpha+\beta-2\beta h)-2(1-h)(\alpha-\beta k)\}K$$

整理して

$$(\beta-\alpha)(\alpha^2-2\alpha\beta h+\beta^2 k)=(\beta-\alpha)(1-2h+k)K$$

從つて、

$$K=\frac{\alpha^2-2\alpha\beta h+\beta^2 k}{1-2h+k} \qquad (19.1)$$

uvの相對的變度kは17.2より直に

$$k=\frac{\alpha^2-2\alpha H+K}{\beta^2-2\beta H+K} \qquad (19.2)$$

yxの相關係數rは16.1. 15.1. 18.1 19.1より

$$r=\frac{H}{l}=\frac{H}{\sqrt{K}}$$

$$=\frac{\alpha-(\alpha+\beta)h+k}{1-2h+k}\div\sqrt{\frac{\alpha^2-2\alpha\beta h+\beta^2 k}{1-2h+k}}=\frac{\alpha-(\alpha+\beta)h+k}{\sqrt{(1-2h+k)(\alpha^2-2\alpha\beta h+\beta^2 k)}} \qquad (20.1)$$

uvの相關係數ρは16.2 15.2 18.2 19.2より

$$\rho = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\sqrt{k}}$$

$$= \frac{\alpha\beta - (\alpha+\beta)H + K}{\beta^2 - 2\beta H + K} \div \sqrt{\frac{\alpha^2 - 2\alpha H + K}{\beta^2 - 2\beta H + K}} = \frac{\alpha\beta - (\alpha+\beta)H + K}{\sqrt{(\beta^2 - 2\beta H + K)(\alpha^2 - 2\alpha H + K)}} \qquad (20.2)$$

次に需給函數の變數 x の係數であり、需給曲線の傾斜係數であり、且需給の伸縮度であるところの $\alpha\ \beta$ は、先づ、16.1 18.1 より

$$H = rl = \frac{\alpha - (\alpha+\beta)h + \beta k}{1 - 2h + k}$$

15.2 16.2 の値を代入して、

$$rl = \frac{\alpha - (\alpha+\beta)\rho\lambda + \beta\lambda^2}{1 - 2\rho\lambda + \lambda^2} \qquad (イ)$$

15.1 19.1 より

$$K = l^2 = \frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta h + \beta^2 k}{1 - 2h + k}$$

15.2 16.2 の値を代入して、

$$l^2 = \frac{\alpha^2 - 2\alpha\beta\rho\lambda + \beta^2\lambda^2}{1 - 2\rho\lambda + \lambda^2} \qquad (ロ)$$

（イ）より

$$\mathrm{r}\,l(1-2\rho\lambda+\lambda^2)=\alpha-(\alpha+\beta)\rho\lambda+\beta\lambda^2$$

$$\alpha=\frac{\beta(\rho\lambda-\lambda^2)+\mathrm{r}\,l(1-2\rho\lambda+\lambda^2)}{1-\rho\lambda} \qquad (\text{ハ})$$

（ロ）より

$$l^2(1-2\rho\lambda+\lambda^2)=\alpha^2-2\alpha\beta\rho\lambda+\beta^2\lambda^2$$

本式に（ハ）を代入して

$$l^2(1-2\rho\lambda+\lambda^2)=\left\{\frac{\beta(\rho\lambda-\lambda^2)+\mathrm{r}l(1-2\rho\lambda+\lambda^2)}{1-\rho\lambda}\right\}^2-2\,\frac{\beta(\rho\lambda-\lambda^2)+\mathrm{r}l(1-2\rho\lambda+\lambda^2)}{1-\rho\lambda}\beta\rho\lambda+\beta^2\lambda^2$$

本式の分母を掃ひβの降冪に整理する。

$$\beta^2\{(\rho\lambda-\lambda^2)^2-2(\rho\lambda-\lambda^2)\rho\lambda(1-\rho\lambda)+\lambda^2(1-\rho\lambda)^2\}$$

$$2\beta\{\mathrm{r}\,l\rho^2\lambda^2(1-2\rho\lambda+\lambda^2)-\mathrm{r}\,l\lambda^2(1-2\rho\lambda+\lambda^2)\}$$

$$+\mathrm{r}^2l^2(1-2\rho^2\lambda+\lambda^2)-l^2(1-2\rho\lambda+\lambda^2)\;(1-\rho\lambda)^2=0$$

$$(1-2\rho\lambda+\lambda^2)\;[\beta^2(1-\rho^2)\lambda^2-2\beta\mathrm{r}l\;(1-\rho^2)\lambda^2+l^2\{\mathrm{r}^2(1-2\rho\lambda+\lambda^2)-(1-\rho\lambda)^2\}]=0$$

故に

$$\beta^2(1-\rho^2)\lambda^2-2\beta\mathrm{r}l(1-\rho^2)\lambda^2+l^2\{\mathrm{r}^2(1-2\rho\lambda+\lambda^2)-(1-\rho\lambda)^2\}=0$$

故に

$$\beta=\frac{\mathrm{r}l(1-\rho^2)\lambda^2\pm\sqrt{\mathrm{r}^2l^2(1-\rho^2)^2\lambda^4-l^2(1-\rho^2)l^2\{\lambda^2(1-2\rho\lambda+\lambda^2)-(1-\rho\lambda)^2\}}}{(1-\rho^2)\lambda^2}$$

$$=\mathrm{r}l\pm\frac{\sqrt{l^2(1-\rho^2)\lambda^2(\rho\lambda-1)^2(1-\mathrm{r}^2)}}{(1-\rho^2)\lambda^2}=\mathrm{r}l\pm\frac{l(\rho\lambda-1)\lambda}{\lambda^2}\sqrt{\frac{1-\mathrm{r}^2}{1-\rho^2}}$$

$$=l\left\{\mathrm{r}\mp\left(\frac{1}{\lambda}-\rho\right)\sqrt{\frac{1-\mathrm{r}^2}{1-\rho^2}}\right\}\qquad(21.1)$$

（ハ）に本式を代入する。

$$\alpha=\left[l\left\{\mathrm{r}\mp\left(\frac{1}{\lambda}-\rho\right)\sqrt{\frac{1-\mathrm{r}^2}{1-\rho^2}}\right\}(\rho\lambda-\lambda^2)+\mathrm{r}l(1-2\rho\lambda+\lambda^2)\right]\frac{1}{1-\rho\lambda}$$

$$=\left\{\mp l(1-\rho\lambda)\frac{1}{\lambda}(\rho\lambda-\lambda^2)\sqrt{\frac{1-\mathrm{r}^2}{1-\rho^2}}+\mathrm{r}l(1-\rho\lambda)\right\}\frac{1}{1-\rho\lambda}$$

$$=\mathrm{r}l\mp\frac{l}{\lambda}(\rho\lambda-\lambda^2)\sqrt{\frac{1-\mathrm{r}^2}{1-\rho^2}}$$

$$=l\left\{\mathrm{r}\pm(\lambda-\rho)\sqrt{\frac{1-\mathrm{r}^2}{1-\rho^2}}\right\}\qquad(21.2)$$

根本方程式 17.1 17.2 より前述の操作に依りて、18.1 より 21.2 までの方程式が示すところの諸々

の parameters が求められる。其の中最も重要なるは y x の回歸線の傾斜係數 H 18.1、需要曲線の傾斜係數 α 21.1 及供給曲線の傾斜係數 β 21.2 である。H は 18.1 に就いて見れば、α β h k なる因數を持つ。而して、α β に就いては論ぜずとするも、h は 16.2 に依りて、k は 15.2 に依りて明なる如く、需給曲線の常數 u 及 v より導出される。然るに、統計的資料はそれ等の値に關して何の手懸りも與へない。從つて、計算不能であるかに思はれる。併しながらさうではない。H は別に計算の方法を持つ。それは方程式 16.1 に依りて示される。

α 及 β は方程式 21.1 及 21.2 に依りて明なる如く r l ρ λ の四因數を持つ。r 即ち y x の相關係數は方程式 13.1 に依りて、l 即ち y x の相對的變度は方程式 14.1 に依りて、集められたる數量價格に關する統計的資料から計算せらるゝ。ρ 即ち u v の相關係數は 13.2 に依りて、λ 即ち u v の相對的變度は 14.2 に依りて知らるゝ如く、時 t と共に變化するところの各時點に於ける靜態的需給兩曲線の常數 u v から計算される。併しながら、それは、既に述べたる如く、數量價格に關する統計的資料からは計算され得ぬ。その他には現在の處統計的に算定する何の手懸りもない。而も、それ等 ρ 及 λ の正確なる數値なくしては、α β を計算する事は出來ぬ。α β を知らずしては統計的需給曲線の測定は不可能である。尤も、最小自乘法に依る Curve fitting に於ける常數の算出の方法がある。[13] 併しながら、それに於いても、常數は變數の係數が見出されて後に初めて算出せられる。然るに、今の場合即ち、變數の係數

13) Eyekiel ibid. 全卷が此の此問題に關與する。

算出のために常數の値を必要とする場合にありては、最小自乘法に依る Curve fitting に於ける常數値の算出は役立たぬ。更に、それには尙問題がある。かゝる方法に依りて計算せられたる常數が今問題としてゐるところの常數であるか否かは別に吟味を必要とする。私は後に簡單に試みるであらう。

常數u及vの數値に關して、なし得る事は、常數u及vの分布の性質に就きて何等かの假定又は推察をなす事である。その典型的なる場合は次の四であらう。一、需要曲線の不變なる場合。二、供給曲線の不變なる場合。三、需給兩曲線共に變動してその變動が無關係なる場合。四、需給兩曲線共に變動し、其の變動に高相關のある場合。是等の假定がなされるとして、果して、需要曲線又は供給曲線の統計的測定は可能なるか。次に吟味を要する事柄である。

三　種々なる場合に於ける可能條件

（一）需要曲線の不變なる場合。

需要曲線が時tの變化にも拘はらず其の構造に於いて更に其の位置に於いて不變である。從つて、凡ての數量價格點に相應するところの需要曲線の常數u_iは悉く互に等しい。夫故、その算術平均値も亦u_iに等しい。從つて、

$$M_{uu} = 0 \qquad M_{uv} = 0$$

是等の値を 14.2 15.2 16.2 に代入すれば

$$\lambda = 0 \qquad k = 0 \qquad h = 0$$

これらの値を根本方程式 17.1 17.2 に代入すれば、次式になる。

$$\alpha\beta - (\alpha + \beta) H + K = 0 \qquad (22.1)$$

$$\alpha^2 - 2\alpha H + K = 0 \qquad (22.2)$$

22.2 より

$$\alpha = H \pm \sqrt{H^2 - K} = lr \pm \sqrt{l^2r^2 - l^2} = l(r \pm \sqrt{r^2 - 1}) \qquad (23.)$$

然るに、相關係數の大さは -1 と $+1$ との間にあつてそれ以外の値ではあり得ない。[14] 從つて、α 即ち需要伸縮度=需要曲線の傾斜係數=變數 x の係數が意味を持つためには、α は實數でなければならぬ。α が實數となるためには

$$r^2 - 1 = 0 \qquad \therefore \quad r = \pm 1$$

即ち y と x との相關が完全でなければならぬ。[15] 此の條件が滿されるならば方程式 23 は次式となる。

$$\alpha = H = \pm\, l = \pm \sqrt{\frac{M\,y\,y}{M\,x\,x}} \qquad (23')$$

然るに、l は正の値を取るところの標準偏差の比なるが故に正の數、α は負の數でなければならないか

14）小倉金之助.前掲書. 450頁
15）Q. J. Working ibid. の條件

ら $r = -1$ 即ち、yとxとは逆完全相關をなさねばならぬ。

$$H = \alpha \qquad \alpha = -1$$

となり、需要曲線の傾斜係數αとyのxに對する回歸線の傾斜係數と等しい事が證明される。

かくして、需要曲線の位置に於いて構造に於いて不變であり、yとxとの相關關係rが-1であると云ふ二の條件が滿されるならば、需要曲線の傾斜係數即ちxの係數は23′によりて計算される。方程式23′の右邊項はyのxに對する回歸線の傾斜係數である。これは方程式16.1に依りてyxに關する統計的資料より計算される。而して、供給曲線の傾斜係數βに關して何等の假定をも必要とせずして可能である。

かくて、αが求めらるれば、常數uを求める事は容易である。[16] 即ち、各數量價格點は次式を滿さねばならぬ。

$$y_i = u + \alpha x_i$$

本式を各點に就いて邊々の總和を求める。

$$\Sigma y_i = nu + \alpha \Sigma x_i$$

$$u = \frac{\Sigma y_i}{n} - \alpha \frac{\Sigma x_i}{n} = \bar{y} - \bar{x}\sqrt{\frac{Myy}{Mxx}} \qquad (24)$$

供給曲線の傾斜係數βに關しては。22.1より

16) Ezekiel, ibid. p. 57.
Rietz, ibid, p. 126.

$$\beta = \frac{\alpha H - K}{\alpha - H}$$

これに、H K α の値を代入すれば

$$\beta = \frac{l^2 - l^2}{l - l} = 不\ 定$$

となる。即ち前述の二假定の下に於いては、供給曲線の傾斜係數の統計的測定は不可能である。

エチエキイル[17]の研究は需要曲線の不變なる場合に於ける統計的測定の可能の問題に關する。

(二) 供給曲線の位置及構造の不變なる場合、(一)の場合に於いて $u_1 = u_2 = \cdots\cdots = u_n = \bar{u}$ であつたと同じ理由に依りて

$$v_1 = v_2 = \cdots\cdots = v_n = \bar{v}$$

である。故に、

$$M\,v\,v = 0 \qquad M\,u\,v = 0$$

從つて、

$$\lambda = \infty \qquad k = \infty$$

然るに根本方程式 17.2 の變形

$$\alpha^2 - 2\alpha H + K - (\beta^2 - 2\beta H + K)\,k = 0$$

17) M. Ezekiel, Statistical analysis and the laws of price, Quarterly Journal of economics Vol 42. 1928.

に於いて、これが成立するためには先づ

$$\beta^2 - 2\beta H + K = 0 \qquad (25)$$

でなければならぬ。25 より

$$\beta = H \pm \sqrt{H^2 - K}$$

（一）の場合αに就いて述べたる理由より

$$r^2 - 1 = 0 \qquad r = \pm 1$$

$$\beta = H = rl = \pm l$$

然るに、lは正の數、βは正の數、從つて、$r = +1$即ち、yとxとは順完全相關であらねばならぬ。此の條件が滿されるならば、供給曲線の傾斜係數とyのxに對する回歸線の傾斜係數は等しくなるが故に、供給曲線の統計的測定は可能である。而して、需要曲線の傾斜係數に關しては何の假定も必要ではない。供給曲線の常數も（一）の場合に準じて考へる事が出來る。

これに反して、βの値を 17.1 に代入すれば

$$\alpha = \frac{\beta^2 - l^2}{l - l}$$

となりて不定となる。即ち需要曲線の統計的測定は不能である。

（三）需給兩曲線共に變動してその變動が無關係である場合。

需給兩曲線共に變動するが故に、u_iが互に悉く異り、v_iも亦さうであるが故に、

$$M uu \neq 0 \qquad M vv \neq 0$$

從つて、uとvとの相對的變度λは零ではなくて有限である。

需要供給曲線の變動の間に相關關係がないと假定するが故に

$$\rho = 0 \quad \therefore \quad h = 0$$

此の値をyのxに對する回歸線の傾斜係數 H 18.1、y x の相關係數 r 20.1. 需給曲線の傾斜係數 α 21.2 β 21.1 に代入すれば、次式を得る。

$$H = \frac{\alpha + \beta k}{1 + k} \tag{26.1}$$

$$r = \frac{\alpha + \beta k}{\sqrt{(1+k)(\alpha^2 + \beta^2 k)}} \tag{26.2}$$

$$\alpha = l\{r \pm \lambda \sqrt{1 - r^2}\} \tag{26.3}$$

$$\beta = l\{r \mp \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - r^2}\} \tag{26.4}$$

若し、$\alpha = \beta$と假定する事が出來るならば、26.2 より、k の値に關せず

$$r = \pm 1$$

此の値を 26.1 26.3 26.4 に代入すれば、

$$H = \alpha \text{ or } \beta$$

$$\alpha = \pm l$$

$$\beta = \pm l$$

となりて、Hとα及βとが等しくなり、從つて、需給曲線の統計的測定が可能であるかに思はれる。併しながら、此の表見的可能を成立せしめた假定は $\alpha = \beta$ であるが、αとβとはその絶對値に於いて等しい事は何等かの偶然から起り得ないことではないとしても、其の固有の値に於いて等しい事は絶對にあり得ない。蓋し、αは負の數βは正の數であるからである。從つてその假定は許されない。

$\alpha \neq \beta$ であるから、yxの相關係數rはuvの相對的變度λ又はその自乘kの函數である。即ち $r = \varphi(k)$ である。rとkとの依存關係を見よう。それには、函數rのkに關する第一微分係數の値を檢すればよい。

$$\frac{dr}{dk} = \frac{d}{dk}\,\frac{(\alpha+\beta k)}{\sqrt{(1+k)(\alpha^2+\beta^2 k)}}$$

$$= \frac{2\beta(1+k)(\alpha^2+\beta^2 k)+\beta^2(\alpha+\beta k)(1+k)-(\alpha+\beta k)(\alpha^2+\beta^2 k)}{2\,(1+k)^{\frac{3}{2}}\,(\alpha^2+\beta^2 k)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{(\alpha-\beta)^2\,(-\alpha+\beta k)}{2\{\alpha^2+(\alpha^2+\beta^2)k+\beta^2 k^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

本式に於いて、分母は凡て自乘項を持つが故に正、分子は、αは負、βは正、外に自乘項を持つが故に正從つて、全體として正である。即ちkの函數であるところのrはkの單調增加函數である。而して、極限 $k\to o$ $k\to\infty$ に於けるrの値を見る。$k\to o$ ならば $r=\pm1$、もし、需要伸縮度を負の數とすれば、$r=-1$ となる。$k\to\infty$ にありては、26.2 の分母子にkを含み、そのまゝでは不定型となるが故に次の操作をなす。

$$r^2=\frac{(\alpha+\beta k)^2}{(1+k)(\alpha^2+\beta^2 k)}$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{(\alpha+\beta k)^2}{(1+k)(\alpha^2+\beta^2 k)}=\frac{\frac{d}{dk}(\alpha+\beta k)^2}{\frac{d}{dk}(1+k)(\alpha^2+\beta^2 k)}=\frac{2\beta(\alpha+\beta k}{\alpha^2+\beta^2+2\beta^2 k}$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{2\beta(\alpha+\beta k)}{\alpha^2+\beta^2+2\beta^2 k}=\frac{\frac{d}{dk}2\beta(\alpha+\beta k)}{\frac{d}{dk}(\alpha^2+\beta^2+\beta^2 k)}=\frac{2\beta^2}{2\beta^2}=1$$

即ち、kの函數であるrは $k=o$ に於いて、$r=-1$ となり、kの値の增加と共に單調に增加して、$k\to\infty$ となる時に $r=+1$ となる。

さて $k=o$ に於いて $r=-1$ となり、$k=o$ の値を 26.1 に代入すれば、

$$H = \alpha$$

となり、需要曲線の統計的測定は可能なるかに思はれる。併しながら $k = 0$ を假定する事は需要曲線の不變を意味する。從つて、今の場合の假定に反する。

又 $k \to \infty$ の場合に於いては $r = +1$ となり、$k = \infty$ の値を 26.2 に代入すれば、

$$H = \beta$$

となり、供給曲線の統計的測定は可能であるかに思はれる。併しながら、$k \to \infty$ を假定する事は供給曲線の不動を假定する事であり、今の場合の假定に反する。

從つて、今の場合にありては $k \neq 0$　$k \neq \infty$ である、此の條件に於いては、方程式 26.1 26.3 26.4 より明なる如く、y の x に對する回歸曲線の傾斜係數 H は需要曲線の傾斜係數 α 及供給曲線の傾斜係數 β とは必然的に異りたる値を取る。從つて、y の x に對する曲歸線の傾斜係數 H より α 又は β を導出す事は不可能である。

α 又は β を測定するには夫々 26.3 26.4 より明かなる如く、その構成するところの因數、r l λ の値を知らねばならぬ。γ l は共に y 及 x に關する統計的資料より計算せられる事が出來る。然るに、最後の因數 λ は u v に關する相對的變度である。それは 14.2 の示す如く、數量價格點に相應する u_i v_i の値を知らずしては計算は不可能である。而も、u v は統計的資料に依りては與へられぬ。從つて、需要供給兩

曲線の傾斜係數α及βを正確に計算する道はない。

今、假りにλの値を正確ではないが近似値を推測するに道ありとするならば、傾斜係數α βの値を不正確ではあるが近似的に推知する事は出來るであらう。

併しながら、それだけを知つたのみでは、統計的測定には充分でない。u及vの値を知らねばならぬ。uとvとは假定に依りて t と共に變化してゐる。 t と共に變化してゐる u及vを如何にして知り得るか。それには道がない。從つ此の場合には測定は伸縮度α βのみに止まる。

更に考察を進める、玆まで來るのに我々は重要なる假定から出發してゐる事を忘却してはならぬ。即ち、需給兩曲線はその構造即ち夫々α βは不變であつて、その位置即ち u v に於いてのみ變動すると假定した。第一の場合にありては供給曲線の位置及構造の變動が如何にあれ、前述の條件さへ滿されるならば、需要曲線の統計的測定は可能である。第二の場合にありては、需要曲線の位置及構造の變動は如何にあれ、同じく、供給曲線の統計的測定は可能である。蓋し、對應する曲線の位置及構造の變動に拘はらず、それ等の場合の固有の假定のみから夫々、根本方程式 22.2' 25 だけは成立するからである。然るに、今の場合にありてはさうではない。今まで述べ來りたる事が成立するためには、其の根底となる根本方程式 17.1 17.2 が成立してゐなければならぬ。此の方程式が成立するためにはα及βが t の變化に對して不變である事を必要條件とする。若し此の條件滿されず、α及βが t の變動と共に變

化するならば、根本方程式 17.1 17.2 は成立し得ない。此の方程式の成立せずしては、他の如何なる假定推測を許すとも、需要、及、又は供給曲線の統計的測定は不可能といはねばならぬ。

（四）需給兩曲線共に變動し、その變動の間に高相關のある場合、

需給兩曲線共に變動するが故に、

$$M_{uu} \neq 0$$ 從つて

$$\lambda \neq \delta_{10}$$

u と v との間に高相關關係があるが故に、

$$\rho = \pm 1$$

此の高相關は季節的關係に依るもあらう、趨勢的關係（トレンドリレエション）に依るもあらう。今は趨勢的關係に依る場合のみを考察の對象とする。假定に依り、$\rho = \pm 1$ 從つて $h = \pm\lambda$ であるから、これを 20.1 に代入すれば

$$r = \frac{(1\mp\lambda)(\lambda\mp\beta\lambda)}{\sqrt{(1\mp\lambda)^2(\alpha\mp\beta\lambda)^2}}$$

$\lambda = \pm 1$ 又は $\lambda = \pm\dfrac{\alpha}{\beta}$ でない限り

$$r = \pm 1 \qquad (27)$$

即ち本式に依りて、u と v との間の高相關々係の存在は、y x の間の高相關を招來する事を示す。此

のyxの高相關の存在は、uvの相對的變度 $\lambda \neq 0$ $\lambda \neq \infty$ が假定せられてゐるが故に、需要曲線又は供給曲線の不動の故であり得ない。此の高相關々係は趨勢的影響(トレンドエフェクト)である。從つて、yのxに對する回歸線の傾斜係數Hは需要曲線又は供給曲線の傾斜係數ではあり得ない。蓋し、18.1 に $\rho = \pm 1$ $r = \pm 1$ を代入すると、$\lambda \neq 0$ $\lambda \neq \infty$ であるから

$$H = \frac{\alpha \mp (\alpha+\beta)\lambda + \beta\lambda^2}{1 \mp 2\lambda + \lambda^2} = \frac{(\alpha \mp \beta\lambda)(1 \mp \lambda)}{(1 \mp \lambda)^2} = \frac{\alpha \mp \beta\lambda}{1 \mp \lambda} \qquad (28)$$

となり、Hは α 又は β とも異る。

他方、前述の値を方程式 21.2 及 21.1 に代入すれば、α 及 β を示す式は共に不定の項を含み、α も β も共に不定となる。λ を推測しても此の不定性は去らない。

Hの示すものは、需要曲線の傾斜係數 α でもなく、又供給曲線の傾斜係數 β でもなく、yxの歷史的趨勢關係(ヒストリカルトレンドリレション)にすぎない。[18] アモロオソの curva storica [19] と云ふものも、此の歷史的趨勢關係である。

若し、uvの高相關に加ふるに、u及vの變度(標準偏差)が互の他の變度よりも著しく大である、換言すれば $\lambda \fallingdotseq 0$ 又は $\lambda \fallingdotseq \infty$ であると推測し得るならば、歷史的趨勢關係を示すところのHは、$\lambda \fallingdotseq 0$ ならば需要曲線の傾斜係數 α に、$\lambda \fallingdotseq \infty$ ならば供給曲線の傾斜係數 β に、殆んど等しくなる。蓋し $\lambda \fallingdotseq 0$ ならば、方程式28は

$$H \fallingdotseq \alpha$$

18) E. J. Working も統計的需要曲線を眞の需要曲線ではなくて此の歷史的趨勢關係であるとしてゐる。(ibid)

19) L. Amoroso, Le equationi differenziali della dinamica economica Giornale degli economisti e rivista di statistica 1929. p. 73.

となり、$\lambda \doteqdot \infty$ ならば

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\alpha\mp\beta\lambda}{1\mp\lambda}=\beta=H$$

となるからである。常數 u v の近似値の測定も亦可能である。かくして、此の條件の下にては近似的需要曲線又は供給曲線の統計的測定は可能である。これに反し、前の場合にありては供給曲線、後の場合にありては需要曲線の統計的測定は不能である。併しながら、$\lambda \doteqdot \infty$ なる場合は需要曲線の殆んど不動を意味し、$\lambda \doteqdot \infty$ は供給曲線の殆んど不動を意味する。從つて、前者は（一）の場合に、後者は（二）の場合に還元される。

今の場合に就いて、こゝまで吟味して來たのであるが、その敍述は根本方程式の成立が可能であるとの假定に基く。而も、それが成立可能なるがためには、t と共に變化するところの需要及供給曲線の α 及 β が不變である事が前提されてゐる。此の前提が若し許されずとするならば、根本方程式は成立せず、從つて、今までの敍述吟味も意義を失ふであろう。而して、その他に就いて如何なる假定を許すとしても、需要又は供給曲線の統計的測定は可能とはなり得ないことは、(三)の場合に於けると等しい。

（五）價格が需要曲線と生産數量とにて決定される場合。

今までの吟味は價格及取引量が需要と供給との關係から定まる、換言すれば、價格及取引量は需要曲

線及供給曲線の交點に依りて決定せられる場合に關する。勿論、現實の經濟社會には無摩擦の條件は滿されない。從つて、如何なる商品と雖、經濟純理論に於いて想定するが如き嚴密なる意味に於いて、その價格及數量が需給兩曲線の交點に依りて定まると云ふものは極めて稀である。需給の關係から一定の價格が需要側より競上げられて費用以上に落着く場合、供給の側より競下げられて費用以下に落着く場合がある。從つて、現實の價格と理論的價格とは多くは乖離する。併しながら、費用價格を中心として、現實の價格が上に又は下に乖離する範圍の廣さに就いて二種のものを區別する事が出來よう。(一)は摩擦がありながら、需要の變動に對して供給の側から隨時に適應作用が起され、他方財も亦腐敗性(ペリシヤベリテイ)を持たないがために、供給者が不斷の而して充分の競爭をなし得る事から、乖離の範圍の極めて小であつて、大體に於いて、それを無視して可なりと考へられるもの。自由競爭の對象であるところの多くの工業製品はかくの如きものと考へ得る。(二)自由競爭は制限されてはゐないが、需要の變動に對して供給側の適應作用が、生產技術の自然的條件の故に、隨時に起される事が妨げられる。從つて現實價格の上に又は下に乖離する範圍極めて廣く、而も、製品の腐敗性のために持越が出來難い。供給者は手持品を急速に賣拂ふ事を餘儀なくせられ、爲に價格は需要の關係と生產數量との關係から決定せられると考へ得るもの。自由競爭の對象となる農業生產物の多くはかくの如きものに屬すると考へられる。第一種の財に就いては既に考察吟味を加へた。第二種の財に就いては、需給曲線の統計的測定はどうなるか。次に

考察すべき事柄である。

此の種の財に就いては供給曲線は價格の決定に參與しない。重要なるものは當該期の需要曲線と、同じく生產數量（それは取引數量に等しい）とである。但し、今の場合、獨立變數 x は數量對數、從屬變數 y は價格對數である事を忘れてはならない。

既に述べたる如くにして、方程式 10.3 を得る。

$$\Sigma(y_i-\bar{y})^2-2\alpha\Sigma(y_i-\bar{y})(x_i-\bar{x})+\alpha^2\Sigma(y_i-\bar{x})=\Sigma(u_i-\bar{u})^2$$

本式を $\Sigma(x_i-\bar{x})^2$ にて除すれば、

$$\alpha^2-2\alpha\frac{\Sigma(y_i-\bar{y})(x_i-\bar{x})}{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}+\frac{\Sigma(y_i-\bar{y})^2}{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}-\frac{\Sigma(u_i-\bar{u})^2}{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}=0 \qquad (29)$$

u と x との標準偏差の比を m、その自乘を M とすれば、

$$m=\frac{\sigma u}{\sigma x}=\sqrt{\frac{\Sigma(u_i-\bar{u})^2}{n}}\div\sqrt{\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{n}}=\sqrt{\frac{Muu}{Mxx}} \qquad (30.1)$$

$$m^2=\frac{Muu}{Mxx}=M \qquad (30.2)$$

29 に 16.1 15.1 30.2 を代入すれば、

$$\alpha^2-2\alpha H+K-M=0 \qquad (31)$$

本式が今の場合に於ける根本方程式である。これより、次式を得る。

$$\alpha = \mathrm{H} \pm \sqrt{\mathrm{H}^2 - \mathrm{K} + \mathrm{M}} \tag{32.1}$$

$$\mathrm{r} = \frac{\alpha^2 + l^2 - \mathrm{m}^2}{2\alpha l} \tag{32.2}$$

$$\mathrm{H} = \frac{\alpha^2 + \mathrm{K} - \mathrm{M}}{2\alpha} \tag{32.3}$$

今若し、需要曲線が不動でありとすれば、

$\mathrm{M}_{uu} = 0$　従つて、　$\mathrm{M} = 0$

此の値を 32.1 に代入すれば

$$\alpha = \mathrm{H} \pm \sqrt{\mathrm{H}^2 - \mathrm{K}} = l(\mathrm{r} \pm \sqrt{\mathrm{r}^2 - 1})$$

既に述べたる理由により

$$\mathrm{r} = -1$$

従つて

$$\alpha = \mathrm{H} = -l \quad .$$

即ち、需要曲線の傾斜係數は y の x に對する回歸線の傾斜係數に等しい。常數 u の算出は

（一）の場合に準じて考へる事が出來る。從つて、需要曲線の統計的測定は可能である。この可能性はシュルツ[20]に依りて研究されたところと一致する。

需要曲線が不動でないならば、uとxとの相對的變度m又その自乘Mは零ではない。さうするとHはαとは等しくない。需要曲線の傾斜係數αを算出するには方程式32.1に依りて、HKM・即ちr l mの値を知らねばならぬ。然るに、γ lは共にyxの統計的資料から直接に計算されるが、mは因數として$\Sigma(u_i-\bar{u})^2$を含むが故に、前述の理由から、計算するに道がない。從つて、需要曲線の統計的測定は不能である。

若し、mに就いて何等かの推測をなすに道があるならば、それから、αを算出する事が出來る。併しそれだけである。時tと共に變動するuの値を如何にして算定するか。それは不能である。從つて、需要曲線の統計的測定は不能と云はねばならぬ。シュルツ[21]の研究の主要部分はm否、$\sqrt{H'K+M}$の値に關して一定の推測を施さんとする研究である。私はその試みが充分に成功せるものとは思はぬ。それが批判は機會を更めたい。

uとxとの相對的變度mが零ならざる場合換言すれば、需要曲線が不動ならざる場合に關する叙述は根本方程式31の成立してゐる事を前提する。本式が成立するためには、需要曲線の構造αの不變である事を前提としてゐる。若し、この前提にして成立しないならば、根本方程式31は成立しない。この式成立

20）H. Schultz Der Sinn der statistishen Nachfragekurven 1930.
21）Schultz, a. a. O.

せずしては、需要曲線の統計的測定は不能である。

（六） 其の他の場合。

前述第二種の財に就いて見る。生産の開始が隨時に行はれ得ないといふ事から、需要と供給の適應が特殊の姿を取ると考へる事が出來る。假りに、一生産期 t_1 に於いて量 q_1 が生産せられたとする。價格はその時の需要曲線と q_1 とに依りて決定せられ、之を p_1 とする。此の價格は費用法則とは何の關係もない。今一部の供給者にありてはその生産費を償はないとする。從つて、次の生産期 t_2 に於いては、これ等損失を蒙りし供給者は生産を制限するであらう。それは、p と限界費用とが等しくなるところまで。かゝる制限の下にて生産せられた量を q_2 とする。t_2 に於ける價格は、斯時に於ける需要曲線と q_2 にて定まる。これを p_1 とする。此の價格は超費餘剩を齎らすものとする。これがために、次期の生産は擴張せられる。p_2 と限界費用とが等しくなる點まで。かくの如き過程に於て、需給の均衡點に達するものと考へれば、t_1 に於ける價格 p_1 と t_2 に於ける生産量 q_2・t_2 に於ける價格 p_2 と t_3 に於ける生産量 q_3 かくして、順次に、一生産期に於ける生産量及直前生産期に於ける價格との組合せは、需要曲線には關係なく、供給曲線上にあるものと考へる事が出來よう。かゝる意味の y x を統計資料として集め、前述の過程に依りて方程式 10.2 を得る。

$$\Sigma(y_i-\bar{y})^2-2\beta\Sigma(y_i-\bar{y})(x_i-\bar{x})+\beta^2\Sigma(x_i-\bar{x})^2=\Sigma(v_i-\bar{v})^2$$

但し、玆では獨立變數 x は價格の對數、從屬變數 y は數量對數である。

本式を $\Sigma(x_i-\bar{x})^2$ にて除すれば、

$$\beta^2-2\beta\frac{\Sigma(y_i-\bar{y})(x_i-\bar{x})}{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}+\frac{\Sigma(y_i-\bar{y})^2}{\Sigma(x_i-\bar{x})}-\frac{\Sigma(v_i-\bar{v})^2}{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}=0 \qquad (33)$$

v と x との標準偏差の比を s. その自乘を S. とすれば、

$$s=\frac{\sigma v}{\sigma x}=\sqrt{\frac{\Sigma(u_i-\bar{v})^2}{n}}\div\sqrt{\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{n}}=\sqrt{\frac{M\,v\,v}{M\,x\,x}} \qquad (34.1)$$

$$s^2=S=\frac{Mvv}{Mxx} \qquad (34\ 2)$$

33 に 16.1 14.2 34.2 を代入すれば

$$\beta^2-2\beta H+K-S=0 \qquad (35)$$

本式は今の場合に於ける根本方程式である。これより、

$$\beta=H\pm\sqrt{H^2-K+S} \qquad (36.1)$$

$$r=\frac{\beta^2+l^2-s^2}{2\,\beta\,l} \qquad (36.2)$$

$$H' = \frac{\beta^2 + K - S}{2\beta} \qquad (36.3)$$

(五) の場合と等しく、需要曲線が不動であるならば $s = S = 0$ 從つて、35 から前述の如くして

$$r = +1$$

從つて、

$$\beta = H = +l$$

而して、常數 v の値も算出する事が出來るが故に供給曲線の統計的測定は可能である。

供給曲線の不動ならざる場合に就いては、(五) の場合に準じて考へる事が出來る。この場合又シュルツ[22]の研究するところである。

四　結　言

今まで述べ來たる諸の場合に就いて、統計的測定の可能の條件を要約して次の表に示し緒結に代へる。

22) Schultz, O, O, A,

假定	其結果	必要條件	結論	備考	α 又及 β 變動すれば
1 需要線 不動 供給線 變動	$\lambda=0$ ∴ $k=0$ $h=0$	$r=-1$	$\alpha=H$. u 可能 $\beta=$不定、v不能		可能 不能
2 需要線 變動 供給線 不動	$\lambda=\infty$ ∴$k=\infty$ $h=\infty$	$r=+1$	$\alpha=$不定、u不能 $\beta=H$, v可能		不能 可能
3 需要線 變動 供給線 $\rho=0$	$\lambda\neq0,\infty$ ∴ $h=0$		$\alpha\neq H$ 不能 $\beta\neq H$ 不能	λを推測し得れば α可能u不能 β可能V不能	不能 不能
4 需要線 變動 供給線 $\rho=\pm1$	$\lambda\neq0,\infty$	若、$\lambda\neq1,\pm\frac{\lambda}{\beta}$ $r=\pm1$	$\alpha\neq H$ 不能 $\beta\neq H$ 不能	λを推知しても 不能 不能	不能 不能
〃 $\rho=\pm1$ $\rho\fallingdotseq0$	$k\fallingdotseq0$ $h\fallingdotseq0$	〃	$\alpha=H$, u可能 $\beta=$不定 不能		近似値 可能 不能
〃 $\rho\fallingdotseq\pm1$ $\lambda\fallingdotseq\infty$	$k\fallingdotseq\infty$ $k\fallingdotseq\infty$	〃 〃	$\alpha=$不定 不能 $\beta\fallingdotseq H$, v不能		不能 近似値 可能
5 價格に供給線干涉せず	ρ, λ, h, k 無關係	若、$m=0$ $r=-1$	$\alpha=H$, u 可能 β不定 不能		可能 不能
	〃	若、$m\neq0$	$\alpha\neq H$, 不能 β不定 不能	mを推測し得れば α可能u不能 β.V.不能	不能 不能
6 一生產期の數量が直前期の價格に依		若、$s=0$ $r=+1$	α 不定 不能 $\beta=H$, v不能		不能 可能
つて決せられる。		$s\neq0$	α 不定 不能 $\beta\neq H$ 不能	sを推測し得れば 不能 可能	不能 不能