SUR

LES RÉSIDUS DES INTÉGRALES DOUBLES

Acta mathematica, t. 9, p. 321-380 (1887).

C'est à Cauchy que revient la gloire d'avoir fondé la théorie des intégrales prises entre des limites imaginaires; cette théorie a pour ainsi dire doublé la puissance de l'Analyse mathématique et a été le point de départ de tous les travaux qui ont suivi, dans tous les pays où l'on cultive les sciences exactes, et en particulier en Allemagne et en France.

Il semblait qu'il n'y avait plus qu'un pas à faire pour étendre cette théorie aux intégrales doubles et qu'on pouvait se promettre de cette extension d'aussi belles conquêtes que de la considération des intégrales simples. Il y avait là de quoi tenter l'ambition des géomètres et cependant, au bout de quarante ans, nous sommes à peine plus avancés qu'au premier jour.

La plupart des tentatives qui ont été faites n'ont été que des échecs ou des demi-succès.

On croit pourtant que Jacobi possédait à ce sujet plusieurs résultats importants; mais ces résultats n'ont pas été publiés et ont été perdus pour la Science.

M. Maximilien Marie a entrepris de résoudre la question et écrit, peu de temps après la découverte de Cauchy, plusieurs mémoires qui ont été publiés longtemps après dans le 44ᵉ Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*. Ses efforts néanmoins n'ont pas été heureux. Je ne parlerai pas ici de l'insuffisance de certains raisonnements fondés sur des considérations infinitésimales. Bien que toutes les démonstrations soient à refaire, la formule à laquelle l'auteur parvient est exacte si on l'interprète convenablement, mais elle exigerait pour pouvoir être appliquée sans crainte d'erreur une discussion délicate que M. Marie n'a pas faite.

Pour faire comprendre la nécessité de cette discussion, je ne citerai qu'un

seul exemple. L'auteur donne (*loc. cit.*, p. 58) la formule suivante :

$$\frac{a^2}{2}\int\int\frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{4}{3}\pi a^2\sqrt{-1}.$$

Cette formule est manifestement fausse; car on a dans le premier membre a^2 et dans le second le facteur a^3. En réalité l'intégrale du premier membre est nulle.

Comment la formule de M. Marie se trouve-t-elle en défaut? Il est aisé de le voir; dans cette formule entre le volume limité par une surface qui, dans l'espace, a pour équation

$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$

C'est une sphère, et l'auteur écrit que ce volume est $\frac{4}{3}\pi a^3$. Mais pour appliquer correctement la formule, il aurait fallu regarder cette surface non comme une sphère, mais comme un tore dégénéré dont la section méridienne aurait son centre sur l'axe de révolution. Le volume aurait alors été nul, et l'on aurait trouvé :

$$\frac{a^2}{2}\int\int\frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

On voit quels pièges aurait à redouter l'analyste inexpérimenté qui voudrait faire usage de la formule de M. Marie.

Les premières recherches de M. Picard présentent beaucoup plus d'intérêt, comme tout ce qui sort de la plume de cet auteur. Mais elles ne se rapportent qu'indirectement à la question.

Dans deux Notes insérées aux *Comptes rendus* le 29 janvier 1883 et le 1ᵉʳ février 1886, M. Picard étudie des intégrales, définies comme il suit :

Soit $F(x,y)$ une fonction uniforme de x et de y; introduisons deux variables auxiliaires u et v, en posant :

$$x=\varphi(u,v),\qquad y=\psi(u,v).$$

Je supposerai que les fonctions φ et ψ sont uniformes et de plus que

$$F(x,y)=\Phi(u,v)$$

est une fonction uniforme de u et de v.

Cela posé, soient u_0, v_0 et u_1, v_1 deux systèmes de valeurs de u et de v. Imaginons que ces deux systèmes de valeurs correspondent à un même système de valeurs de x et de y.

L'intégrale envisagée par M. Picard est alors :

$$\int_{u_0}^{u_1} du \int_{v_0}^{v_1} \Phi(u, v)\left(\frac{d\xi}{du}\frac{d\eta}{dv} - \frac{d\xi}{dv}\frac{d\eta}{du}\right) dv.$$

M. Picard a donné à ces intégrales le nom de *périodes;* je ne saurais l'en blâmer puisque cette dénomination lui a permis d'exprimer dans un langage plus concis les intéressants résultats auxquels il est parvenu. Mais je crois qu'il serait fâcheux qu'elle s'introduisît définitivement dans la Science et qu'elle serait propre à engendrer de nombreuses confusions.

Et cela pour deux raisons :

D'abord ces intégrales ne sont pas des constantes, comme le fait fort bien observer M. Picard.

En second lieu, il y a une infinité de systèmes de variables auxiliaires u et v qui satisfont aux conditions énoncées. Chacun de ces systèmes donne pour l'intégrale une valeur différente. Il en résulterait que, si l'on voulait donner à cette intégrale le nom de période, cette période ne dépendrait pas uniquement de la fonction $F(x, y)$ à laquelle elle appartient, mais bien de ces variables soi-disant auxiliaires qui joueraient ainsi un rôle prépondérant.

M. Stieltjes a adressé à M. Hermite un travail fort remarquable où il cherchait à généraliser diverses formules de Cauchy et de Lagrange. Malheureusement quelques points restaient obscurs et l'auteur ne put les éclaircir de façon à se mettre à l'abri de toute objection. C'est ce qui le détermina à ne pas publier son mémoire, mais je tiens à lui rendre ici justice. Je chercherai plus loin à expliquer quels sont les points qui avaient arrêté M. Stieltjes et à montrer comment ses démonstrations peuvent être rendues parfaitement rigoureuses.

Le 25 janvier 1886, j'eus l'honneur de communiquer à l'Académie des Sciences une Note où j'étudiais à un point de vue nouveau les périodes des intégrales doubles, et en particulier celles qui sont analogues aux périodes polaires des intégrales simples. Ce sont les résultats de cette Note que je veux développer dans le présent travail.

Peu de temps après, M. Picard (*Comptes rendus*, 15 et 26 février 1886) se plaçant au même point de vue que moi, a obtenu un grand nombre de résultats remarquables. Le savant géomètre emploie dans ces deux Notes le mot de *période* avec la signification que nous lui donnerons dans la suite. Les périodes qu'il étudie n'ont donc aucun rapport avec les intégrales qu'il avait primitivement

désignées sous ce nom. Je crois devoir insister sur ce point afin de rendre toute confusion impossible.

I. — Modes de représentation.

Les difficultés auxquelles les géomètres se sont heurtés si souvent dans la théorie qui nous occupe n'ont rien d'essentiel et ne sont pour ainsi dire qu'une question de langage.

Dans l'étude des intégrales simples, on emploie un mode de représentation géométrique très commode et dont il semble qu'on pourrait difficilement se passer. On ne peut le transporter sans changement dans la théorie des intégrales doubles, pour une raison qu'il est aisé d'apercevoir.

Soient ξ et η deux variables complexes; si nous posons

$$\xi = x + iy, \qquad \eta = z + it$$

en séparant les parties réelle et imaginaire, nous aurons quatre variables x, y, z et t. Nous ne pouvons les regarder comme les coordonnées d'un point dans l'espace, à moins de nous résigner à admettre un espace à quatre dimensions.

On se trouve donc en présence du dilemme suivant : il faut, ou renoncer à toute représentation ou employer l'*hypergéométrie;* mais, dans ce dernier cas, on est exposé à rebuter la plupart des lecteurs, et de plus on ne possède que l'avantage d'un langage commode, mais incapable de parler aux sens.

Comme cette langue hypergéométrique répugne encore à beaucoup de bons esprits, je n'en ferai qu'un usage peu fréquent; je crois néanmoins nécessaire de préciser ici le sens des termes que je lui emprunterai.

Un point est un système de valeurs des quatre variables x, y, z et t.

L'ensemble des points qui satisfont à une seule relation entre x, y, z et t est une « multiplicité à trois dimensions » que l'on appelle *hypersurface*.

L'ensemble des points qui satisfont à deux relations simultanées est une « multiplicité à deux dimensions » que l'on appellera *surface*.

L'ensemble des points qui satisfont à trois relations simultanées est une « multiplicité à une dimension » à laquelle on conservera le nom de *ligne*.

Deux surfaces quelconques ont au point de vue analytique un certain nombre de points communs; mais il peut arriver que tous ces points deviennent imaginaires; comme nous ne considérons que des points réels, nous dirons alors que ces deux surfaces n'ont aucun point commun.

Une intégrale double doit être étendue à tous les points d'une surface. Nous aurons donc une *surface d'intégration* de même qu'on a, dans la théorie des intégrales simples, un chemin d'intégration.

De plus l'ensemble des *points singuliers* formera une surface.

Supposons en effet que la fonction sous le signe $\int\int$ soit le quotient de deux polynomes entiers $P(\xi, \eta)$ et $Q(\xi, \eta)$. Pour que cette fonction devienne infinie, il faut que

$$Q(\xi, \eta) = 0. \tag{1}$$

Mais on a, en séparant les parties réelle et imaginaire,

$$Q(\xi, \eta) = Q_1(x, y, z, t) + iQ_2(x, y, z, t),$$

de sorte que la relation (1) se décompose en deux :

$$Q_1(x, y, z, t) = 0,$$
$$Q_2(x, y, z, t) = 0.$$

Elle représente donc une surface.

Il faudra alors que la surface d'intégration et les surfaces singulières n'aient aucun point commun.

Si la fonction sous le signe $\int\int$ est algébrique, les surfaces singulières seront algébriques. Au contraire la surface d'intégration étant purement arbitraire ne sera pas forcément algébrique; elle pourra être transcendante ou se composer de portions appartenant à diverses surfaces algébriques.

Je vais maintenant exposer les artifices à l'aide desquels je compte m'affranchir de la nécessité de considérations hypergéométriques.

Soient λ, μ, ν trois quantités que je regarderai comme les coordonnées d'un point dans l'espace ordinaire, et considérons une surface algébrique ou portion de surface algébrique S sur laquelle se trouve le point λ, μ, ν. Écrivons :

$$x = \varphi_1(\lambda, \mu, \nu), \qquad y = \varphi_2(\lambda, \mu, \nu), \qquad z = \varphi_3(\lambda, \mu, \nu), \qquad t = \varphi_4(\lambda, \mu, \nu),$$

où φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 sont des fonctions rationnelles de λ, μ, ν dont le dénominateur ne s'annule pour aucune valeur réelle de ces variables. Il est clair que quand le point λ, μ, ν décrira dans l'espace ordinaire la surface ou portion de surface S, le point x, y, z, t décrira dans l'hyperespace une certaine surface ou portion de surface S'; de telle sorte que la surface S' est définie par la surface S et par les quatre *fonctions fondamentales* φ_1, φ_2, φ_3 et φ_4.

Si la surface S est fermée, nous dirons aussi que la surface S' est fermée.

La notion des surfaces d'intégration fermées qui va jouer un si grand rôle dans ce qui va suivre se trouve ainsi nettement définie.

Le genre de la surface S (au point de vue de la géométrie de situation) sera aussi le même que le genre de la surface S', à moins que le point x, y, z, t ne décrive deux ou plusieurs fois la surface S', ce que nous ne supposerons pas.

Lorsque l'on donnera à λ, μ, ν toutes les valeurs réelles possibles, le point λ, μ, ν décrira l'espace tout entier, et le point x, y, z, t décrira dans l'hyperespace une certaine hypersurface unicursale.

Tant donc que le point x, y, z, t restera sur cette hypersurface, nous pourrons le représenter par un point de l'espace ordinaire et nous serons affranchis de l'hypergéométrie.

Dans certaines questions nous n'envisagerons que des surfaces d'intégration situées sur une même hypersurface unicursale et nous pourrons nous servir de ce mode de représentation.

La plupart du temps nous supposerons simplement :

$$x = \varphi_1 = \lambda, \qquad y = \varphi_2 = \mu, \qquad z = \varphi_3 = \nu, \qquad t = \varphi_4(\lambda, \mu, \nu) = \varphi_4(x, y, z).$$

Alors le point x, y, z, t sera représenté par le point de l'espace x, y, z et la quatrième coordonnée t sera une fonction rationnelle de x, y, z.

La surface d'intégration sera alors définie par une surface S située dans l'espace ordinaire (x, y, z) et par une fonction rationnelle φ_4. On aura :

$$t = \frac{P(x, y, z)}{Q(x, y, z)},$$

P et Q étant deux polynomes entiers, et nous supposerons qu'on n'a en aucun point réel de l'espace (x, y, z)

$$Q(x, y, z) = 0.$$

Il est aisé de démontrer que toute surface d'intégration, ou bien est susceptible de ce mode de représentation, ou bien diffère très peu d'une surface qui en est susceptible, ou bien enfin peut être décomposée en plusieurs autres qui diffèrent très peu de surfaces algébriques admettant ce mode de représentation.

Ce mode de représentation est donc suffisamment général pour s'appliquer à tous les cas; cependant il sera quelquefois plus commode de le modifier un peu.

Reprenons les quatre relations fondamentales

$$x = \varphi_1(\lambda, \mu, \nu), \qquad y = \varphi_2(\lambda, \mu, \nu), \qquad z = \varphi_3(\lambda, \mu, \nu), \qquad t = \varphi_4(\lambda, \mu, \nu)$$

dont il a été question plus haut.

Nous avons supposé jusqu'ici que ces quatre fonctions étaient rationnelles ; il nous suffit qu'elles soient *uniformes* et *bien déterminées*. Il peut même suffire que sans être uniformes dans tout l'espace, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de λ, μ, ν, elles restent uniformes dans une certaine région de l'espace (λ, μ, ν) pourvu que notre surface S qui représente la surface d'intégration soit tout entière contenue dans cette région.

II. — Conditions d'intégrabilité.

On sait ce qu'on doit entendre par une *intégrale simple* :

$$\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

prise le long d'une courbe gauche quelconque dans l'espace (x, y, z). On connaît également les conditions d'intégrabilité ; c'est-à-dire les conditions pour que l'intégrale soit indépendante du chemin d'intégration et ne dépende que des deux points extrêmes de ce chemin. (On suppose bien entendu que X, Y et Z sont des fonctions données de x, y et z.) Ces conditions sont :

$$\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx}, \qquad \frac{dX}{dz} = \frac{dZ}{dx}, \qquad \frac{dY}{dz} = \frac{dZ}{dy}.$$

Ces résultats s'étendent immédiatement, comme on le sait, au cas d'un espace d'un nombre quelconque de dimensions.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n variables indépendantes et soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n fonctions de ces n variables ; il est aisé de définir l'intégrale simple

$$\int (X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots + X_n dx_n). \tag{1}$$

En effet, introduisons une variable auxiliaire et posons :

$$x_1 = \varphi_1(u), \qquad x_2 = \varphi_2(u), \qquad \ldots \qquad x_n = \varphi_n(u). \tag{2}$$

Ces équations (2) définiront le chemin d'intégration.

Nous ferons varier u depuis u_0 jusqu'à u_1. Nous poserons :

$$x_1^0 = \varphi_1(u_0), \quad \ldots, \quad x_n^0 = \varphi_n(u_0),$$
$$x_1^1 = \varphi_1(u_1), \quad \ldots \quad x_n^1 = \varphi_n(u_1).$$

Les deux systèmes de valeurs $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ et $(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$ définiront les deux points extrêmes de ce chemin d'intégration.

Alors l'intégrale (1) prise le long du chemin d'intégration (2) depuis le point $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ jusqu'au point $(x_1^1, \ldots, x_n^1)$ ne sera autre chose que l'intégrale définie

$$\int_{u_0}^{u_1} \left(X_1 \frac{dx_1}{du} + X_2 \frac{dx_2}{du} + \ldots + X_n \frac{dx_n}{du} \right) du.$$

Nous cherchons les conditions d'intégrabilité, c'est-à-dire les conditions pour que cette intégrale soit indépendante du chemin d'intégration, c'est-à-dire ne dépende que des deux points extrêmes de ce chemin $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ et $(x_1^1, \ldots, x_n^1)$.

Ces conditions sont au nombre de $\frac{n(n-1)}{2}$ et elles s'écrivent

$$\frac{dX_i}{dx_k} = \frac{dX_k}{dx_i}.$$

Passons maintenant au cas des *intégrales doubles*, et d'abord dans l'espace ordinaire. Soit une intégrale double

$$\int\int (A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy)$$

A, B et C étant trois fonctions de x, y, z.

On sait ce qu'on doit entendre par là. La surface d'intégration peut n'être pas fermée, mais on peut toujours convenir de regarder l'un des côtés de la surface comme l'extérieur et l'autre comme l'intérieur.

Soient donc $d\omega$ un élément de cette surface et α, β, γ les cosinus directeurs de la normale à l'élément dirigée vers l'extérieur.

L'intégrale sera alors

$$\int (A\alpha + B\beta + C\gamma)\,d\omega$$

étendue à tous les éléments $d\omega$ de la surface.

On peut également la définir comme il suit, ce qui revient au même :

Exprimons x, y et z en fonctions de deux variables auxiliaires u et v,

$$x = \varphi_1(u, v), \qquad y = \varphi_2(u, v), \qquad z = \varphi_3(u, v).$$

Ces équations définiront la surface d'intégration. L'intégrale ne sera alors autre chose que l'intégrale double ordinaire

$$\int\int \left[A \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + B \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + C \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] du\,dv.$$

Nous désignons suivant la coutume par la notation $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ le déterminant fonc-

tionnel

$$\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv}-\frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}.$$

La condition d'intégrabilité (c'est-à-dire la condition pour que l'intégrale prise le long d'une surface fermée quelconque soit nulle) s'écrit alors

$$\frac{d\mathrm{A}}{dx}+\frac{d\mathrm{B}}{dy}+\frac{d\mathrm{C}}{dz}=0.$$

Tous ces points sont trop connus pour que j'y insiste davantage.

Passons maintenant au cas général.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n variables indépendantes. Désignons maintenant par la notation

$$(\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_k)$$

diverses fonctions données de ces n variables. Nous supposerons que l'on a

$$(\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_i)=0, \qquad (\mathrm{X}_k, \mathrm{X}_i)=-(\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_k). \tag{3}$$

Nous allons envisager l'intégrale double

$$\mathrm{J}=\int\int\sum(\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_k)\,dx_i\,dx_k$$

où l'on fait entrer sous le signe Σ les $\frac{n(n-1)}{2}$ combinaisons des deux indices i et k.

Pour la définir, imaginons qu'on introduise deux variables auxiliaires u et v de telle sorte que

$$x_i=\varphi_i(u, v) \qquad (i=1, 2, 3, \ldots, n). \tag{4}$$

Ces équations (4) définiront la surface d'intégration. Nous donnerons à u et à v outes les valeurs qui satisfont à une certaine inégalité

$$\psi(u, v)>0 \tag{5}$$

de sorte qu'en réalité la surface d'intégration sera complètement définie par les équations (4) d'une part et par l'inégalité (5) d'autre part. L'égalité

$$\psi(u, v)=0$$

définira ainsi la ligne qui servira de limite à la surface d'intégration.

L'intégrale proposée sera alors l'intégrale double ordinaire

$$\mathrm{J}=\int\int\sum(\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_k)\frac{\partial(x_i, x_k)}{\partial(u, v)}\,du\,dv$$

qui devra être étendue à toutes les valeurs de u et de v satisfaisant à l'inégalité (5). Quant au signe Σ, il s'appliquera aux $\frac{n(n-1)}{2}$ combinaisons des deux indices i et k.

Mais en tenant compte des relations (3), on peut écrire l'intégrale étudiée sous la forme

$$\mathrm{J}=\int\int\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_k)\frac{dx_i}{du}\frac{dx_k}{dv}\,du\,dv.$$

Il est manifeste que si l'on permute les variables u et v, l'intégrale change de signe, mais cette opération est tout à fait analogue à ce que serait, dans l'étude des intégrales simples, un changement du sens de l'intégration.

A part ce changement de signe, l'intégrale est indépendante du choix des variables auxiliaires u et v.

Notre intégrale double étant ainsi complètement définie, il faut trouver les conditions d'intégrabilité; je veux dire les conditions pour que l'intégrale ne dépende pas de la surface d'intégration, mais seulement de la courbe qui limite cette surface; de même que les intégrales simples appliquées à des différentielles exactes ne dépendaient pas du chemin d'intégration, mais seulement des extrémités de ce chemin.

Supposons que l'on remplace les équations (4) par les suivantes :

$$x=\varphi_i'(u, v),$$

la fonction φ_i' étant différente de la fonction φ_i. Alors on changera la surface d'intégration.

Mais supposons en même temps que l'on conserve l'inégalité (5) sans aucun changement, et que l'on ait

$$\varphi_i'(u, v)=\varphi_i(u, v)$$

toutes les fois que l'on a

$$\psi(u, v)=0.$$

Alors la courbe qui limite la surface d'intégration n'a pas changé.

Si dans ces conditions l'intégrale n'a pas changé, nous dirons que l'expression sous le signe $\int\int$ est intégrable.

Imaginons que l'on pose

$$x_i=\varphi_i(u, v, w)$$

en introduisant une troisième variable auxiliaire w. Nous calculerons l'intégrale proposée J en l'étendant à toutes les valeurs de u et de v qui satisfont à l'inégalité (5) et en regardant w comme un paramètre arbitraire.

Je supposerai de plus que pour

$$\psi(u, v) = 0$$

les fonctions φ_i soient indépendantes de w. Alors la surface d'intégration dépendra de w, mais la courbe qui limite cette surface n'en dépendra pas.

J sera une fonction du paramètre w et nous chercherons les conditions pour que cette fonction soit une constante; ce seront les conditions d'intégrabilité.

Nous avons donc à écrire que

$$\frac{dJ}{dw} = 0.$$

Or

$$J = \int\int \sum_i \sum_k (X_i, X_k) \frac{dx_i}{du} \frac{dx_k}{dv} du\, dv,$$

ce qui donne

$$\frac{dJ}{dw} = \int\int \sum_i \sum_k \frac{d(X_i, X_k)}{dw} \frac{dx_i}{du} \frac{dx_k}{dv} du\, dv + \int\int \sum_i \sum_k (X_i, X_k) \left(\frac{d^2 x_i}{du\, dw} \frac{dx_k}{dv} + \frac{d^2 x_k}{dv\, dw} \frac{dx_i}{du} \right) du\, dv.$$

La première intégrale double du second membre peut s'écrire

$$\int\int \sum_i \sum_k \sum_h \frac{d(X_i, X_k)}{dx_h} \frac{dx_i}{du} \frac{dx_k}{dv} \frac{dx_h}{dw} du\, dv.$$

Cherchons à réduire la seconde. Pour cela, remarquons que l'on a

$$\int F\, du = \int\int \frac{dF}{dv} du\, dv, \tag{6}$$

l'intégrale double étant étendue à toute notre surface d'intégration et l'intégrale simple du premier membre au contour qui limite cette surface et qui est défini par l'équation

$$\psi(u, v) = 0.$$

Faisons dans cette équation

$$F = (X_i, X_k) \frac{dx_i}{du} \frac{dx_k}{dw}.$$

Nous avons supposé que les fonctions φ_i, c'est-à-dire les x_i, sont indépendantes de w pour $\psi = c$. On a donc, si ψ est supposé nul,

$$\frac{dx_k}{dw} = 0, \qquad F = 0.$$

Il résulte de là que le premier membre de (6) est nul. On doit donc avoir

$$\int\int (X_i, X_k) \frac{dx_i}{du} \frac{d^2 x_k}{dv\, dw} du\, dv = -\int\int (X_i, X_k) \frac{dx_k}{dw} \frac{d^2 x_i}{du\, dv} du\, dv - \int\int \frac{d(X_i, X_k)}{dv} \frac{dx_k}{dw} \frac{dx_i}{du} du\, dv. \tag{7}$$

On peut écrire une seconde équation analogue à l'équation (6),

$$-\int F\, dv = \int\int \frac{dF}{du} du\, dv \tag{6'}$$

d'où l'on déduit, de la même façon,

$$\int\int (X_i, X_k) \frac{dx_k}{dv} \frac{d^2 x_i}{du\, dw} du\, dv = -\int\int (X_i, X_k) \frac{dx_i}{dw} \frac{d^2 x_k}{du\, dv} du\, dv - \int\int \frac{d(X_i, X_k)}{du} \frac{dx_i}{dw} \frac{dx_k}{dv} du\, dv. \tag{7'}$$

Remarquons maintenant que

$$\int\int \sum_i \sum_k (X_i, X_k) \left(\frac{dx_k}{dw} \frac{d^2 x_i}{du\, dv} + \frac{dx_i}{dw} \frac{d^2 x_k}{du\, dv} \right) du\, dv = 0.$$

En effet si l'on envisage l'expression suivante :

$$H = (X_i, X_k) \left(\frac{dx_i}{dw} \frac{d^2 x_k}{du\, dv} + \frac{dx_k}{dw} \frac{d^2 x_i}{du\, dv} \right)$$

on voit qu'elle se change en — H quand on permute les indices i et k.

Dans l'emploi des relations (7) et (7') nous pourrons donc laisser de côté le premier terme du second membre. Il vient donc pour l'expression de $\frac{dJ}{dw}$

$$\int\int \sum_i \sum_k \left[\frac{d(X_i, X_k)}{dw} \frac{dx_i}{du} \frac{dx_k}{dv} - \frac{d(X_i, X_k)}{dv} \frac{dx_i}{du} \frac{dx_k}{dw} - \frac{d(X_i, X_k)}{du} \frac{dx_i}{dw} \frac{dx_k}{dv} \right] du\, dv.$$

Observons maintenant que

$$\frac{d(X_i, X_k)}{du} = \sum_h \frac{d(X_i, X_k)}{dx_h} \frac{dx_h}{du}$$

et que l'on a deux formules analogues pour

$$\frac{d(X_i, X_k)}{dv} \quad \text{et} \quad \frac{d(X_i, X_k)}{dw}.$$

Ceci nous permet de transformer l'expression de $\frac{dJ}{dw}$ et de l'écrire

$$\int\int \sum_k \sum_i \sum_k \frac{d(X_i, X_k)}{dx_h} \left[\frac{dx_i}{du} \frac{dx_k}{dv} \frac{dx_h}{dw} - \frac{dx_i}{du} \frac{dx_h}{dv} \frac{dx_k}{dw} - \frac{dx_h}{du} \frac{dx_k}{dv} \frac{dx_i}{dw} \right] du\, dv.$$

Transformons-la encore en laissant de côté les termes où les indices i et k sont égaux entre eux, puisque nous savons que ces termes sont nuls. Réunissons de plus les termes en (X_i, X_k) et (X_k, X_i) en remarquant que

$$(X_i, X_k) = -(X_k, X_i).$$

Cela donnera

$$\int\int \Sigma \frac{d(X_i, X_k)}{dx_h} \frac{\partial(x_i, x_k, x_h)}{\partial(u, v, w)}\, du\, dv.$$

Le signe Σ porte sur toutes les combinaisons (i, k, h) si l'on convient :

1° De laisser de côté les combinaisons où $i = k$.

2° De ne pas regarder comme différentes les deux combinaisons (i, k, h) et (k, i, h).

Nous pouvons écrire aussi :

$$\frac{dI}{dw} = \int\int \Sigma \left[\frac{d(X_i, X_k)}{dx_h} + \frac{d(X_k, X_h)}{dx_i} + \frac{d(X_h, X_i)}{dx_k} \right] \frac{\partial(x_i, x_k, x_h)}{\partial(u, v, w)}\, du\, dv.$$

Le signe Σ change alors de signification. Il porte sur toutes les combinaisons (i, k, h) si l'on ne considère pas comme différentes deux combinaisons qui ne diffèrent que par l'ordre des lettres i, k, h.

Il est clair d'ailleurs qu'on peut laisser de côté les combinaisons où deux des lettres i, k, h sont égales entre elles, parce qu'elles donneraient un résultat nul.

L'expression de $\frac{dI}{dw}$ doit être nulle quelles que soient les fonctions φ_i. Cela ne peut avoir lieu que si l'on a

$$\frac{d(X_i, X_k)}{dx_h} + \frac{d(X_k, X_h)}{dx_i} + \frac{d(X_h, X_i)}{dx_k} = 0. \tag{8}$$

Telles sont les conditions d'intégrabilité. Il faut prendre pour le système des trois nombres (i, k, h) toutes les combinaisons possibles, en excluant celles où deux des lettres seraient identiques et en ne regardant pas comme distinctes celles qui ne diffèrent que par l'ordre des lettres. Les conditions d'intégrabilité sont donc au nombre de

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Considérons en particulier le cas de $n = 4$ et envisageons l'intégrale double :

$$\int\int [(X, Y)\, dx\, dy + (X, Z)\, dx\, dz + (X, T)\, dx\, dt + (Y, Z)\, dy\, dz + (Y, T)\, dy\, dt + (Z, T)\, dz\, dt].$$

Les conditions d'intégrabilité seront

$$\frac{d(X, Y)}{dz} + \frac{d(Y, Z)}{dx} + \frac{d(Z, X)}{dy} = 0,$$
$$\frac{d(X, Y)}{dt} + \frac{d(Y, T)}{dx} + \frac{d(T, X)}{dy} = 0,$$
$$\frac{d(X, Z)}{dt} + \frac{d(Z, T)}{dx} + \frac{d(T, X)}{dz} = 0,$$
$$\frac{d(Y, Z)}{dt} + \frac{d(Z, T)}{dy} + \frac{d(T, Y)}{dz} = 0.$$

Si l'on compare les conditions d'intégrabilité relatives aux intégrales simples

$$\frac{dX_i}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_i} = 0 \tag{9}$$

avec les conditions (8) relatives aux intégrales doubles, il est impossible de n'être pas frappé d'un fait remarquable.

Dans les formules (9) on a alternativement le signe + et le signe −; dans les formules (8) on n'a que le signe +.

Qu'arrive-t-il si l'on passe aux intégrales d'ordre supérieur ?

On trouvera des conditions tout à fait analogues aux conditions (8) et (9) et l'on rencontrera encore le fait que je viens de signaler. Pour les conditions relatives aux intégrales d'ordre pair, tous les termes seront précédés du signe +; pour les conditions relatives aux intégrales d'ordre impair, les termes seront alternativement précédés des signes + et −.

Soit par exemple l'intégrale triple

$$\int\int\int \Sigma (X_\alpha, X_\beta, X_\gamma)\, dx_\alpha\, dx_\beta\, dx_\gamma,$$

l'intégrale étant définie comme plus haut, et les fonctions $(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma)$ étant des fonctions analogues aux fonctions (X_i, X_k) et qui changent de signe quand on permute deux des indices α, β, γ. Les conditions d'intégrabilité s'écriront alors

$$\frac{d(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma)}{dx_\delta} - \frac{d(X_\beta, X_\gamma, X_\delta)}{dx_\alpha} + \frac{d(X_\gamma, X_\delta, X_\alpha)}{dx_\beta} - \frac{d(X_\delta, X_\alpha, X_\beta)}{dx_\gamma} = 0$$

avec alternance des signes + et −.

Soit au contraire l'intégrale quadruple

$$\int\int\int\int \Sigma (X_\alpha, X_\beta, X_\gamma, X_\delta)\, dx_\alpha\, dx_\beta\, dx_\gamma\, dx_\delta.$$

Les conditions d'intégrabilité s'écriront

$$\frac{d(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma, X_\delta)}{dx_\varepsilon} + \frac{d(X_\beta, X_\gamma, X_\delta, X_\varepsilon)}{dx_\alpha} + \frac{d(X_\gamma, X_\delta, X_\varepsilon, X_\alpha)}{dx_\beta} + \frac{d(X_\delta, X_\varepsilon, X_\alpha, X_\beta)}{dx_\gamma} + \frac{d(X_\varepsilon, X_\alpha, X_\beta, X_\gamma)}{dx_\delta} = 0$$

avec le signe + partout.

III. — Théorème fondamental.

Reprenons le mode de représentation du paragraphe I. Soient donc λ, μ, ν les coordonnées d'un point dans l'espace ordinaire, et une surface ou portion de surface S. Posons ensuite

$$(1) \qquad x = \varphi_1(\lambda, \mu, \nu), \qquad y = \varphi_2(\lambda, \mu, \nu), \qquad z = \varphi_3(\lambda, \mu, \nu), \qquad t = \varphi_4(\lambda, \mu, \nu),$$

les φ étant des fonctions rationnelles.

Envisageons une fonction des deux variables complexes

$$\xi = x + iy, \qquad \eta = z + it,$$

que j'appellerai

$$F(\xi, \eta)$$

ou bien encore

$$P + iQ,$$

en séparant les parties réelle et imaginaire. On aura alors

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dP}{dz} = +\dfrac{dQ}{dy}, & \dfrac{dP}{dz} = -\dfrac{dQ}{dt}, \\ \dfrac{dP}{dy} = -\dfrac{dQ}{dx}, & \dfrac{dP}{dt} = -\dfrac{dQ}{dz}. \end{cases}$$

Il s'agit maintenant de définir ce qu'on doit entendre par l'intégrale double

$$\int\int F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

prise le long de la surface d'intégration définie par la surface S et par les équations fondamentales (1).

Il importe d'abord de définir le sens de l'intégration. Pour cela imaginons un observateur O, ayant les pieds sur la surface S et la tête dirigée soit vers l'extérieur de cette surface, soit vers l'intérieur. C'est la position de cet observateur O qui définira le sens d'intégration. Nous dirons que ce sens est positif si l'observateur a la tête vers l'extérieur et négatif dans le cas contraire.

Si la surface S n'est pas fermée, il n'y a plus à proprement parler d'extérieur et d'intérieur; mais nous pouvons toujours convenir de regarder l'un des côtés comme l'extérieur et l'autre comme l'intérieur. (Si la surface S n'avait qu'un seul côté, l'intégrale serait nulle.)

Envisageons maintenant l'expression

$$\int\int (P + iQ)(dx + i\,dy)(dz + i\,dt).$$

Cette expression n'a absolument aucune signification par elle-même et ne pourra avoir que celle que nous conviendrons de lui donner. Effectuons néanmoins le produit sous le signe $\int\int$ d'après les règles ordinaires du calcul (1); ce ne sera là qu'une opération purement mécanique et destinée à nous servir de règle mnémonique. Il viendra

$$\int\int [(P + iQ)\,dx\,dz + (iP - Q)\,dx\,dt + (iP - Q)\,dy\,dz - (P + iQ)\,dy\,dt].$$

Imaginons maintenant qu'on puisse trouver deux variables auxiliaires u et v telles qu'en tous les points de la surface S les trois coordonnées λ, μ, ν soient des fonctions holomorphes de u et de v.

Alors l'intégrale cherchée sera l'intégrale double ordinaire

$$\int\int \left[(P + iQ)\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} + (iP - Q)\frac{\partial(x, t)}{\partial(u, v)} + (iP - Q)\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} - (P + iQ)\frac{\partial(y, t)}{\partial(u, v)}\right] du\,dv$$

étendue à tous les systèmes de valeurs de u et de v qui correspondent aux différents points de la surface S.

Si l'on ne pouvait trouver deux variables u et v satisfaisant à ces conditions, on décomposerait la surface S en plusieurs régions et (à la condition que ces régions soient assez petites) on pourrait toujours trouver dans chacune d'elles, deux variables u et v telles que λ, μ, ν soient fonctions holomorphes de u et de v, en tous les points de la région.

L'ordre des deux variables u et v n'est pas indifférent. Il est clair en effet que l'intégrale change de signe quand on permute ces deux variables. Voici donc la convention que nous ferons : imaginons que u et v représentent les coordonnées d'un point dans un plan. Imaginons que le point λ, μ, ν décrive sur la surface S un contour fermé très petit C autour des pieds de l'observateur O et que cet observateur voie ce point décrire ce contour C dans le sens contraire à celui des

(1) [Sans changer l'ordre des facteurs.]

aiguilles d'une montre. Le point correspondant (u, v) décrira dans son plan un autre contour fermé C'. Il faudra que ce second contour C' soit décrit comme le premier dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre (en supposant que les axes des u et des v positifs soient disposés comme le sont d'ordinaire les axes des x et des y positifs).

Notre intégrale double est ainsi complètement définie et elle est analogue à celles que nous avons étudiées dans le paragraphe précédent. On a d'ailleurs

$$(X, Y) = (Z, T) = 0,$$
$$(X, Z) = (T, Y) = P + iQ,$$
$$(X, T) = (Y, Z) = iP - Q.$$

Les quatre conditions d'intégrabilité s'écrivent alors

$$\frac{d(iP-Q)}{dx} - \frac{d(P+iQ)}{dy} = 0,$$
$$-\frac{d(P+iQ)}{dx} - \frac{d(iP-Q)}{dy} = 0,$$
$$\frac{d(P+iQ)}{dt} - \frac{d(iP-Q)}{dz} = 0,$$
$$\frac{d(iP-Q)}{dt} + \frac{d(P+iQ)}{dz} = 0.$$

Elles seront donc remplies en vertu des relations (2).

Il est aisé de tirer de là diverses conséquences.

Imaginons d'abord deux portions de surfaces S et S' limitées par un même contour C et que ces deux portions de surfaces soient situées toutes deux dans l'espace (λ, μ, ν). Nous supposerons d'ailleurs que les deux surfaces d'intégration sont définies l'une par S, l'autre par S', mais toutes deux par les mêmes équations fondamentales

$$(1) \qquad x = \varphi_1(\lambda, \mu, \nu), \qquad y = \varphi_2(\lambda, \mu, \nu), \qquad z = \varphi_3(\lambda, \mu, \nu), \qquad t = \varphi_4(\lambda, \mu, \nu),$$

Si la surface S peut, par une déformation continue, arriver à se confondre avec S', et si dans cette déformation continue il n'arrive à aucun moment que la fonction $F = P + iQ$ devienne infinie ou discontinue en un point de la surface d'intégration, à ces conditions, l'intégrale prise le long de S sera égale à l'intégrale prise le long de S'.

Considérons maintenant les *surfaces singulières*, c'est-à-dire l'ensemble des points où la fonction F devient infinie ou discontinue. Soient

$$\psi_1(x, y, z, t) = \psi_2(x, y, z, t) = 0$$

les équations de ces surfaces.

Remplaçons dans ψ_1 et ψ_2, x, y, z, t par φ_1, φ_2, φ_3 et φ_4, les deux équations des surfaces singulières se réduiront à deux relations

$$f_1(\lambda, \mu, \nu) = f_2(\lambda, \mu, \nu) = 0,$$

entre λ, μ et ν. Ces deux équations définiront certaines courbes appartenant à l'espace (λ, μ, ν) et que j'appellerai *courbes singulières*, parce qu'elles sont le lieu des points qui appartiennent à l'espace (λ, μ, ν) et où la fonction sous le signe $\int\int$ devient infinie ou discontinue.

Nous pouvons donc énoncer le résultat précédent de la façon suivante :

Les deux portions de surface S et S' étant limitées au même contour C diviseront l'espace (λ, μ, ν) en deux régions, l'une intérieure et l'autre extérieure. Si dans cette région intérieure, il n'y a aucun point des courbes singulières, l'intégrale prise le long de S sera égale à l'intégrale prise le long de S'.

Si la surface S est fermée, elle divisera l'espace (λ, μ, ν) en deux régions; si à l'intérieur de S il n'y a aucun point des courbes singulières, l'intégrale prise le long de S sera nulle.

Si la surface S' appartenant comme S à l'espace (λ, μ, ν) est fermée comme S et tout entière intérieure à S, et si dans l'espace compris entre S et S', il n'y a aucun point des courbes singulières, l'intégrale prise le long de S est égale à l'intégrale prise le long de S'.

Si deux surfaces S et S', toutes deux fermées et appartenant toutes deux à l'espace (λ, μ, ν) contiennent à leur intérieur les mêmes courbes singulières et les mêmes portions de courbes singulières, l'intégrale prise le long de S sera égale à l'intégrale prise le long de S'.

Il faut toutefois avoir soin de prendre les deux intégrales dans le même sens. Nous avons défini le sens d'intégration à l'aide de l'observateur O. Nous supposerons donc que cet observateur a la même position par rapport aux deux surfaces S et S'. S'il a la tête vers l'extérieur de la surface S, il devra avoir aussi la tête vers l'extérieur de la surface S' et inversement.

Il peut arriver que deux surfaces fermées S et S' tout en n'appartenant pas au même espace (λ, μ, ν) contiennent néanmoins à leur intérieur une même courbe singulière.

Soient en effet

$$f_1(x, y, z) = 0, \qquad t = f_2(x, y, z)$$

les équations d'une courbe singulière C.

Cette courbe C appartiendra à la fois à l'espace (λ, μ, ν) défini par les équations fondamentales

$$x = \lambda, \quad y = \mu, \quad z = \nu, \quad t = f_2(\lambda, \mu, \nu),$$

et à l'espace (λ', μ', ν') défini par les équations

$$x = \lambda', \quad y = \mu', \quad z = \nu', \quad t = f_1(\lambda', \mu', \nu') + f_2(\lambda', \mu', \nu').$$

Il pourra se faire alors qu'une surface fermée S appartenant à l'espace (λ, μ, ν) contienne à son intérieur la courbe singulière C et n'en contienne pas d'autre; et qu'une autre surface fermée S′ appartenant à l'espace (λ', μ', ν') contienne à son intérieur la courbe singulière C et n'en contienne pas d'autre.

L'intégrale prise le long de S est alors égale à l'intégrale prise le long de S′. Il faudrait toutefois, pour s'assurer que l'intégration a bien lieu dans le même sens, une discussion délicate que je réserverai pour le paragraphe suivant. Je me contenterai donc pour le moment de dire que les deux intégrales sont égales, ou égales et de signe contraire.

On peut résumer tout ce qui précède en disant que *l'intégrale prise le long d'une surface fermée* S *ne dépend que des courbes singulières qui sont contenues à l'intérieur de cette surface.*

IV. — Résidus des fonctions rationnelles

Soit une fonction rationnelle

$$F(\xi, \eta).$$

Écrivons-la en mettant en évidence le numérateur et le dénominateur et en décomposant le dénominateur en facteurs irréductibles. Supposons pour fixer les idées que ce dénominateur admette deux semblables facteurs.

Soit donc

$$F(\xi, \eta) = \frac{P(\xi, \eta)}{Q(\xi, \eta)\,R(\xi, \eta)},$$

P, Q et R étant trois polynomes entiers dont les deux derniers sont irréductibles.

Considérons un espace (λ, μ, ν) défini par les quatre équations

$$x = \varphi_1(\lambda, \mu, \nu), \quad y = \varphi_2(\lambda, \mu, \nu), \quad z = \varphi_3(\lambda, \mu, \nu), \quad t = \varphi_4(\lambda, \mu, \nu)$$

et dans cet espace une surface fermée S.

Il s'agit de calculer l'intégrale double

$$\int\int F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

prise le long de S, l'observateur O étant dirigé vers l'extérieur.

Cette intégrale dépend comme nous l'avons vu des courbes singulières qui sont contenues à l'intérieur de la surface S.

Les courbes singulières de l'espace (λ, μ, ν) sont de deux sortes :

Les unes ont pour équations

$$Q[\varphi_1(\lambda, \mu, \nu) + i\varphi_3(\lambda, \mu, \nu), \quad \varphi_2(\lambda, \mu, \nu) + i\varphi_4(\lambda, \mu, \nu)] = 0,$$

les autres ont pour équations

$$R[\varphi_1 + i\varphi_3, \quad \varphi_2 + i\varphi_4] = 0.$$

D'ailleurs, celles de ces courbes qui seront contenues tout entières à l'intérieur de la surface fermée S devront évidemment être des courbes fermées.

Supposons que la surface S contienne à son intérieur plusieurs courbes singulières fermées, par exemple deux que j'appellerai C et C′. Nous pourrons toujours construire dans l'espace (λ, μ, ν) deux surfaces fermées Σ et Σ' situées toutes deux à l'intérieur de S et contenant à leur intérieur, la première C et C seulement, la seconde C′ et C′ seulement; l'intégrale prise le long de S sera alors la somme de l'intégrale prise le long de Σ et de l'intégrale prise le long de Σ', l'observateur O qui définit le sens d'intégration demeurant toujours dirigé vers l'extérieur.

Nous sommes ainsi ramenés au cas où la surface S ne contient à son intérieur qu'une seule courbe singulière C.

Toutes les surfaces S renfermant la courbe C conduiront à la même intégrale. Il n'est pas nécessaire pour cela que ces diverses surfaces S appartiennent au même espace (λ, μ, ν).

Construisons donc un espace (λ', μ', ν') particulier contenant la courbe C et, dans cet espace, une surface fermée Σ renfermant cette courbe. Nous choisirons cet espace et cette surface de telle sorte que l'intégration soit facile et l'intégrale cherchée, c'est-à-dire l'intégrale prise le long de S, sera égale au signe près à l'intégrale prise le long de Σ.

Nous pourrons toujours mettre les équations de la courbe C sous la forme

$$x = \psi_1(\omega), \quad y = \psi_2(\omega), \quad z = \psi_3(\omega), \quad t = \psi_4(\omega),$$

les ψ étant des fonctions périodiques du paramètre ω, puisque cette courbe est fermée. Nous supposerons que la période est égale à 2π.

Cela posé nous introduirons deux autres paramètres ρ et φ et nous écrirons

$$\lambda' = \cos\omega(1+\rho\cos\varphi), \qquad \mu' = \sin\omega(1+\rho\cos\varphi), \qquad \nu' = \rho\sin\varphi,$$
$$x = \psi_1(\omega), \qquad y = \psi_2(\omega), \qquad z = \psi_3(\omega) + \rho\cos\varphi,$$
$$t = \psi_4(\omega) + \rho\sin\varphi.$$

Ainsi x, y, z et t sont définis en fonctions de ω, ρ et φ et par conséquent en fonctions de λ', μ', ν'. Mais il faut faire ici une remarque :

x, y, z et t sont des fonctions uniformes de ω, ρ et φ, mais non de λ', μ', ν'. Toutefois si l'on convient que ρ devra toujours être compris entre 0 et 1, à un système de valeurs λ', μ', ν', correspondra un seul système de valeurs de ρ, $\cos\omega$, $\sin\omega$, $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ et un seul système de valeurs de x, y, z, t; grâce à cette restriction x, y, z et t deviennent donc des fonctions uniformes de λ', μ', ν'.

A un point de l'espace (λ', μ', ν') satisfaisant à la condition $\rho < 1$, c'est-à-dire situé à l'intérieur d'un certain tore, correspond donc un point et un seul de l'hyperespace.

Dans ce mode de représentation, la courbe C est représentée par le cercle ($\rho = 0$)

$$\lambda'^2 + \mu'^2 = 1, \qquad \nu' = 0.$$

Nous prendrons pour la surface Σ le tore dont l'équation est

$$\rho = \rho_0, \qquad 0 < \rho_0 < 1.$$

Ce tore enveloppe manifestement la courbe C. Nous allons voir que le calcul de l'intégrale

$$\int\int F(\xi, \eta_1)\, d\xi\, d\eta_1$$

le long de cette surface Σ est particulièrement simple.

Décomposons en effet l'intégration en deux parties; intégrons d'abord par rapport à η_1, en regardant ξ comme un paramètre arbitraire. Nous avons :

$$z = \psi_3(\omega) + \rho_0\cos\varphi, \qquad t = \psi_4(\omega) + \rho_0\sin\varphi.$$

Si ξ est regardé un instant comme une constante, ω sera aussi une constante; il en est de même de ρ_0, φ étant la seule variable. On a alors :

$$\eta_1 = \psi_3 + i\psi_4 + \rho_0 e^{i\varphi},$$

ce qui montre que le point η_1 décrit dans le plan des η_1 un cercle de rayon ρ_0

ayant pour centre le point $\psi_3 + i\psi_4$. L'intégrale simple

$$I = \int F(\xi, \eta_1)\, d\eta_1$$

est alors égale à $2i\pi$ multipliée par le résidu de la fonction $F(\xi, \eta_1)$ (regardée comme fonction de η_1 seulement) par rapport au point $\psi_3 + i\psi_4$.

Imaginons pour fixer les idées que le long de la courbe C ce soit le premier facteur $Q(\xi, \eta_1)$ du dénominateur qui s'annule, de telle sorte que

$$Q(\psi_1 + i\psi_2, \psi_3 + i\psi_4) = 0.$$

Le résidu en question est alors facile à calculer et l'on trouve pour l'intégrale simple :

$$I = \frac{2i\pi P(\xi, \eta_1)}{\frac{dQ}{d\eta_1} R(\xi, \eta_1)}$$

où

$$\xi = \psi_1(\omega) + i\psi_2(\omega), \qquad \eta_1 = \psi_3(\omega) + i\psi_4(\omega)$$

et où par conséquent

$$Q(\xi, \eta_1) = 0.$$

Il faut maintenant intégrer par rapport à ξ en faisant varier ω de 0 à 2π, c'est-à-dire en suivant toute la courbe C. On est donc ramené à chercher l'intégrale simple

$$J = \int \frac{2i\pi P\, d\xi}{R\frac{dQ}{d\eta_1}}$$

le long de la courbe C, η_1 étant supposé lié à ξ par la relation algébrique

$$Q(\xi, \eta_1) = 0.$$

Cette intégrale est donc une intégrale abélienne attachée à la courbe algébrique $Q = 0$.

Il suffit d'un peu d'attention pour vérifier que si l'on veut obtenir l'intégrale le long de Σ, l'observateur O étant dirigé vers l'extérieur, il faut, en prenant l'intégrale J, suivre la courbe C dans le sens des ω croissants.

L'intégrale prise le long de S sera donc aussi égale à J ou à $-J$; car elle est égale au signe près à l'intégrale prise le long de Σ. Il reste à déterminer le signe.

Imaginons que l'on fasse varier d'une manière continue les quatre relations fondamentales

$$x = \varphi_1(\lambda, \mu, \nu), \qquad y = \varphi_2(\lambda, \mu, \nu), \qquad z = \varphi_3(\lambda, \mu, \nu), \qquad t = \varphi_4(\lambda, \mu, \nu)$$

et qu'en même temps on fasse varier également d'une manière continue la surface S, mais de telle sorte que la courbe C reste toujours dans l'espace (λ, μ, ν) et à l'intérieur de S.

L'intégrale ne variera pas, tant que la surface S ne contiendra pas d'autre courbe singulière que C.

Cela posé envisageons les douze dérivées partielles de x, y, z, t par rapport à λ, μ, ν :

$$\frac{dx}{d\lambda} = \frac{d\varphi_1}{d\lambda}, \qquad \frac{dy}{d\lambda} = \frac{d\varphi_2}{d\lambda}, \qquad \dots$$

et d'autre part les quatre dérivées de x, y, z, t par rapport à ω, en supposant que le point x, y, z, t décrive la courbe C :

$$\frac{dx}{d\omega} = \frac{d\psi_1}{d\omega}, \qquad \frac{dy}{d\omega} = \frac{d\psi_2}{d\omega}. \qquad \dots.$$

Envisageons ensuite le déterminant

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{dy}{d\omega} & \dfrac{dx}{d\lambda} & \dfrac{dx}{d\mu} & \dfrac{dx}{d\nu} \\ \dfrac{dx}{d\omega} & \dfrac{dy}{d\lambda} & \dfrac{dy}{d\mu} & \dfrac{dy}{d\nu} \\ -\dfrac{dt}{d\omega} & \dfrac{dz}{d\lambda} & \dfrac{dz}{d\mu} & \dfrac{dz}{d\nu} \\ \dfrac{dz}{d\omega} & \dfrac{dt}{d\lambda} & \dfrac{dt}{d\mu} & \dfrac{dt}{d\nu} \end{vmatrix} = \Delta.$$

Je dis que si Δ s'annule en un point quelconque de C, il y aura à l'intérieur de S une autre courbe singulière que C (en négligeant certains cas exceptionnels qu'il serait d'ailleurs inutile d'envisager ici)

$$Q(\varphi_1 + i\varphi_2, \varphi_2 + i\varphi_1) = 0.$$

Pour qu'une courbe gauche possède un point double, il suffit en général que le calcul des cosinus directeurs de la tangente conduise à une indétermination. Cherchons donc à déterminer la tangente à C; l'équation des courbes singulières

$$Q(\xi, \eta) = 0$$

peut se résoudre par rapport à η, d'où :

$$\eta = f(\xi),$$

d'où

$$\frac{d\eta}{d\xi} = A + Bi,$$

A et B étant les parties réelle et imaginaire de la dérivée de $f(\xi)$.

Cela donne :

$$(1) \qquad \begin{cases} dz = A\,dx - B\,dy, \\ dt = B\,dx + A\,dy. \end{cases}$$

Nous devons chercher la tangente à C et pour cela, il faut déterminer les rapports des quatre différentielles dx, dy, dz, dt. Pour cela nous avons l'équation

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} dx & \dfrac{dx}{d\lambda} & \dfrac{dx}{d\mu} & \dfrac{dx}{d\nu} \\ dy & \dfrac{dy}{d\lambda} & \dfrac{dy}{d\mu} & \dfrac{dy}{d\nu} \\ dz & \dfrac{dz}{d\lambda} & \dfrac{dz}{d\mu} & \dfrac{dz}{d\nu} \\ dt & \dfrac{dt}{d\lambda} & \dfrac{dt}{d\mu} & \dfrac{dt}{d\nu} \end{vmatrix} = 0$$

qui jointe aux équations (1) suffit en général pour déterminer dx, dy, dz, dt. Mais comme dx, dy, dz, dt sont des différentielles se rapportant à C, elles doivent être proportionnelles à

$$\frac{dx}{d\omega}, \quad \frac{dy}{d\omega}, \quad \frac{dz}{d\omega}, \quad \frac{dt}{d\omega}$$

de sorte qu'on a toujours :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dx}{d\omega} & \dfrac{dx}{d\lambda} & \dfrac{dx}{d\mu} & \dfrac{dx}{d\nu} \\ \dfrac{dy}{d\omega} & \dfrac{dy}{d\lambda} & \dfrac{dy}{d\mu} & \dfrac{dy}{d\nu} \\ \dfrac{dz}{d\omega} & \dfrac{dz}{d\lambda} & \dfrac{dz}{d\mu} & \dfrac{dz}{d\nu} \\ \dfrac{dt}{d\omega} & \dfrac{dt}{d\lambda} & \dfrac{dt}{d\mu} & \dfrac{dt}{d\nu} \end{vmatrix} = 0.$$

On a toujours d'ailleurs :

$$\frac{dz}{d\omega} = A\frac{dx}{d\omega} - B\frac{dy}{d\omega},$$
$$\frac{dt}{d\omega} = A\frac{dy}{d\omega} + B\frac{dx}{d\omega},$$

ce qui montre que les différentielles

$$-dx = \varepsilon\frac{dy}{d\omega}, \qquad dy = \varepsilon\frac{dx}{d\omega}, \qquad -dz = \varepsilon\frac{dt}{d\omega}, \qquad dt = \varepsilon\frac{dz}{d\omega}$$

(où ε est une quantité infiniment petite quelconque) satisfont toujours aux équations (1).

Si de plus on a $\Delta = 0$, elles satisferont également à l'équation (2). Mais alors ces équations (1) et (2) ne suffiront plus pour déterminer les quatre différentielles. La courbe C aura donc un point double.

Donc si en un point de la courbe C, Δ s'annule, ce point est un point double; ou bien encore nous pouvons dire que la surface S contient outre la courbe C une autre courbe singulière qui vient couper C. Une discussion plus approfondie montrerait qu'il y a des cas d'exception, mais que ces cas ne se présenteront pas si Δ s'annule en changeant de signe.

En conséquence, si la surface S ne contient pas d'autre courbe singulière que C, le déterminant Δ conservera le même signe tout le long de C. Imaginons maintenant que l'on fasse varier S et l'espace (λ, μ, ν) d'une façon continue comme nous l'avons dit plus haut. Tant que Δ ne changera pas de signe, l'intégrale ne variera pas.

Donc le signe de l'intégrale dépend du signe de Δ.

Voyons quel est ce signe pour l'intégrale prise le long de Σ.

On a alors :

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\frac{dy}{d\omega} & \frac{dx}{d\omega} & \frac{dx}{d\rho} & \frac{dx}{d\varphi} \\ \frac{dx}{d\omega} & \frac{dy}{d\omega} & \frac{dy}{d\rho} & \frac{dy}{d\varphi} \\ -\frac{dt}{d\omega} & \frac{dz}{d\omega} & \frac{dz}{d\rho} & \frac{dz}{d\varphi} \\ \frac{dz}{d\omega} & \frac{dt}{d\omega} & \frac{dt}{d\rho} & \frac{dt}{d\varphi} \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\frac{\partial(\lambda', \mu', \nu')}{\partial(\omega, \rho, \varphi)}}.$$

Il vient ensuite

$$\frac{\partial(\lambda', \mu', \nu')}{\partial(\omega, \rho, \varphi)} = -\rho(1 + \rho\cos\varphi) < 0;$$

Δ est donc de même signe que

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{d\omega} & -\frac{dy}{d\omega} & 0 & 0 \\ \frac{dy}{d\omega} & \frac{dx}{d\omega} & 0 & 0 \\ \frac{dz}{d\omega} & -\frac{dt}{d\omega} & \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \frac{dt}{d\omega} & \frac{dz}{d\omega} & \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire positif.

En résumé :

L'intégrale double prise le long de S est égale à l'intégrale simple abélienne

$$J = \int \frac{2i\pi P\, d\xi}{R\frac{dQ}{d\eta}}$$

prise le long de la courbe C, et l'on doit parcourir cette courbe dans le sens des ω croissants si Δ est positif et des ω décroissants si Δ est négatif.

Ainsi *les périodes de l'intégrale double*

$$\iint \frac{P\, d\xi\, d\eta}{RQ}$$

sont les mêmes que celles de l'intégrale simple abélienne

$$J = \int \frac{2i\pi P\, d\xi}{R\frac{dQ}{d\eta}}$$

relative à la courbe algébrique $Q = 0$ *et aussi que celles de l'intégrale simple abélienne*

$$J' = \int \frac{2i\pi P\, d\xi}{Q\frac{dR}{d\eta}}$$

relative à la courbe algébrique $R = 0$.

Nous savons qu'une intégrale abélienne possède deux sortes de périodes, les périodes cycliques et les périodes polaires. Les intégrales de première et de deuxième espèce ne présentent que des périodes cycliques.

Étudions d'abord les périodes cycliques. Si la courbe $Q = 0$ est de genre q, l'intégrale J admettra $2q$ périodes cycliques. Si la courbe $R = 0$ est de genre r, l'intégrale J' admettra $2r$ périodes cycliques. L'intégrale double aura donc en tout $2q + 2r$ périodes cycliques.

Quelle est la condition pour que cette intégrale n'ait que des périodes cycliques. Il faut que les intégrales J et J' soient de première ou de deuxième espèce. Pour cela il faut et il suffit que la courbe $P = 0$ passe par tous les points doubles des deux courbes $R = 0$, $Q = 0$, ainsi que par les points d'intersection de ces deux courbes, à l'exception toutefois des points où ces deux courbes se touchent.

Passons maintenant aux périodes polaires. Les pôles de l'intégrale J sont les

points d'intersection des deux courbes

$$R = o, \qquad Q = o$$

et les points doubles de la courbe $Q = o$.

Pour les premiers, le résidu est facile à calculer. On trouve que la période est égale à

$$-4\pi^2 \frac{P}{\dfrac{dQ}{d\eta}\dfrac{dR}{d\xi} - \dfrac{dQ}{d\xi}\dfrac{dR}{d\eta}}$$

où ξ, η sont remplacés par les coordonnées du point d'intersection considéré.

Si l'on considère ce même point d'intersection comme un pôle de l'intégrale J', on est conduit au même résultat, au signe près.

Pour les points doubles de $Q = o$, on trouve :

$$-4\pi^2 \frac{P}{R\sqrt{\left(\dfrac{d^2Q}{d\xi\, d\eta}\right)^2 - \dfrac{d^2Q}{d\xi^2}\dfrac{d^2Q}{d\eta^2}}}$$

où ξ et η sont remplacés par les coordonnées du point double.

En envisageant l'intégrale J' et les points doubles de $R = o$, on serait conduit à des périodes de la forme

$$-4\pi^2 \frac{P}{Q\sqrt{\left(\dfrac{d^2R}{d\xi\, d\eta}\right)^2 - \dfrac{d^2R}{d\xi^2}\dfrac{d^2R}{d\eta^2}}}.$$

En résumé si les deux courbes $Q = o$, $R = o$ sont respectivement d'ordre m et n avec h et k points doubles, on aura :

$$q = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - h, \qquad r = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - k$$

et l'intégrale double admettra les périodes suivantes :

1° les

$$2q + 2r = (m-1)(m-2) + (n-1)(n-2) - 2(h+k)$$

périodes cycliques ;

2° les mn périodes relatives aux mn points d'intersection des deux courbes ;

3° les h périodes relatives aux h points doubles de $Q = o$;

4° les k périodes relatives aux k points doubles de $R = o$.

Il y aura donc en tout

$$m^2 + mn + n^2 - 3(m+n) + 4 - h - k$$

périodes.

Si l'on considère les deux courbes $Q = o$, $R = o$ comme n'en formant qu'une seule qui a pour équation

$$QR = o,$$

elle sera de degré $p = m + n$ et aura

$$d = mn + h + k$$

points doubles.

Le nombre des périodes auquel on est conduit est alors

$$p^2 - 3p + 4 - d.$$

Si l'on avait eu au dénominateur un polynome indécomposable Q, que ce polynome eût été de degré p et que la courbe

$$Q = o$$

eût eu d points doubles, on aurait trouvé pour le nombre des périodes, en appliquant les formules précédentes,

$$p^2 - 3p + 2 - d.$$

Voici donc ce que nous pourrons dire en général :

Soient p le degré du dénominateur, ν le nombre de ses facteurs irréductibles, d le nombre des points doubles, le nombre des périodes sera :

$$p^2 - 3p + 2\nu - d.$$

Ce nombre peut se réduire dans certains cas particuliers.

Nous ne nous sommes occupés jusqu'ici que du cas où tous les facteurs du dénominateur sont distincts. Il nous reste à examiner ceux où deux ou plusieurs de ces facteurs se confondent, ce qui arrivera par exemple si le dénominateur est un carré parfait.

Il faudrait donc étudier les périodes de l'intégrale double

$$\int\int \frac{P\, d\xi\, d\eta}{Q^\alpha R^\beta S^\gamma}$$

où Q, R et S sont des polynomes entiers irréductibles, et où α, β, γ sont des exposants entiers.

Il nous suffira, pour faire comprendre la marche à suivre, de considérer le cas particulier de l'intégrale

$$\int\int \frac{P\, d\xi\, d\eta}{Q^2}.$$

Les courbes singulières ont alors pour équations

$$Q = o.$$

Pour calculer l'intégrale, il faut employer le procédé de la différentiation sous le signe $\int\int$.

Considérons l'intégrale double [prise le long de S]

$$\int\int \frac{P\,d\xi\,d\eta}{Q-\alpha}.$$

Nous avons vu qu'elle est égale à l'intégrale simple abélienne, prise le long de C,

$$J = 2i\pi \int \frac{P\,d\xi}{\frac{dQ}{d\eta}}$$

relative à la courbe algébrique

$$Q = \alpha.$$

C'est une fonction de α dont la dérivée par rapport à α est égale à

$$\int\int \frac{P\,d\xi\,d\eta}{(Q-\alpha)^2}.$$

Différentions de même l'intégrale simple J par rapport à α; nous trouvons :

$$\frac{d}{d\alpha}\left|\frac{P}{\frac{dQ}{d\eta}}\right| = \frac{d}{d\eta}\left|\frac{P}{\frac{dQ}{d\eta}}\right|\frac{d\eta}{d\alpha}.$$

On a

$$\frac{d}{d\eta}\left|\frac{P}{\frac{dQ}{d\eta}}\right| = \frac{\frac{dP}{d\eta}\frac{dQ}{d\eta} - P\frac{d^2Q}{d\eta^2}}{\left(\frac{dQ}{d\eta}\right)^2}.$$

De plus η nous est donné en fonction de ξ et de α par l'égalité

$$Q = \alpha.$$

En la différentiant par rapport à α on trouve

$$\frac{dQ}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha} = 1.$$

Il vient donc

$$\frac{dJ}{d\alpha} = 2i\pi \int \frac{\frac{dP}{d\eta}\frac{dQ}{d\eta} - P\frac{d^2Q}{d\eta^2}}{\left(\frac{dQ}{d\eta}\right)^3}\,d\xi.$$

D'où l'on conclut que *les périodes de l'intégrale double*

$$\int\int \frac{P\,d\xi\,d\eta}{Q^2}$$

sont les mêmes que celles de l'intégrale simple abélienne

$$2\pi i \int \frac{\frac{dP}{d\eta}\frac{dQ}{d\eta} - P\frac{d^2Q}{d\eta^2}}{\left(\frac{dQ}{d\eta}\right)^3}\,d\xi$$

relatives à la courbe algébrique $Q = 0$.

Un cas particulier intéressant est celui des *périodes polaires*. Soit, par exemple, à calculer celle des périodes polaires de l'intégrale double

$$\int\int \frac{P\,d\xi\,d\eta}{RQ^2}$$

qui se rapporte au point d'intersection

$$\xi = a, \qquad \eta = b$$

des deux courbes

$$R = 0, \qquad Q = 0.$$

On pourrait faire le calcul à l'aide de la formule précédente, mais il est plus simple d'opérer comme il suit :

Considérons les périodes polaires de l'intégrale

$$\int\int \frac{P\,d\xi\,d\eta}{R(Q-\alpha)}$$

et en particulier celle qui se rapporte au point d'intersection

$$\xi = a', \qquad \eta = b'$$

des deux courbes

$$R = 0, \qquad Q = \alpha.$$

Je suppose, bien entendu, que a' et b' se réduisent à a et b quand α s'annule. Cette période est égale à

$$-4\pi^2 \frac{P(a', b')}{\Delta(a', b')},$$

Δ désignant le déterminant fonctionnel de R et de Q.

Nous n'avons plus qu'à différentier cette expression par rapport à α.

Appelons φ la fonction

$$-4\pi^2 \frac{P}{\Delta}.$$

Appelons $D(\xi, \eta)$ le déterminant fonctionnel

$$\frac{d\xi}{d\xi}\frac{dR}{d\eta} - \frac{d\xi}{d\eta}\frac{dR}{d\xi}.$$

Nous trouverons que la période de l'intégrale double

$$\int\int \frac{P\,d\xi\,d\eta}{RQ^2}$$

est égale à

$$\pm\frac{D(a,b)}{\Delta(a,b)}.$$

On voit aisément comment on opérerait si l'exposant de Q était plus grand que 2.

En particulier, l'intégrale double

$$\int\int \frac{P\,d\xi\,d\eta}{(\xi-a)^n(\eta-b)^p}$$

n'a qu'une seule période qui a pour expression

$$\frac{4\pi^2 P'(a,b)}{(n-1)!\,(p-1)!}$$

où l'on a posé

$$P'(\xi,\eta)=\frac{d^{n+p-2}P}{d^{n-1}\xi\,d^{p-1}\eta}.$$

De même l'intégrale

$$\int\int \frac{P\,d\xi\,d\eta}{(\alpha\xi+\beta\eta)^n(\gamma\xi+\delta\eta)^p}$$

a une seule période dont l'expression est

$$\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)^{n+p}(n-1)!\,(p-1)!}{4\pi^2 P'(0,0)}.$$

Pour définir ici la fonction $P'(\xi,\eta)$ qui n'a plus la même signification que plus haut, nous supposerons qu'on ait changé de variables en faisant

$$\xi'=\alpha\xi+\beta\eta,$$
$$\eta'=\gamma\xi+\delta\eta,$$

et nous poserons

$$P'(\xi,\eta)=\frac{d^{n+p-2}P}{d^{n-1}\xi'\,d^{p-1}\eta'}.$$

V. — Méthode de M. Stieltjes.

M. Stieltjes a découvert il y a quelques années une remarquable généralisation de la série de Lagrange. Considérant l'intégrale double

$$\int\int \frac{P\,d\xi\,d\eta}{QR}$$

qui a fait l'objet du paragraphe précédent, et l'intégrant le long d'une surface

particulière, il découvrait l'une de ses périodes, qui a pour expression

$$(1)\qquad \frac{4\pi^2 P}{\frac{dQ}{d\xi}\frac{dR}{d\eta}-\frac{dQ}{d\eta}\frac{dR}{d\xi}},$$

ξ et η étant remplacées par les coordonnées d'un des points d'intersection des deux courbes

$$Q=0,\qquad R=0.$$

On n'a plus qu'à faire dans cette formule

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} Q=\xi-hf(\xi,\eta), \\ R=\eta-k\varphi(\xi,\eta), \end{cases}$$
$$P=F(\xi,\eta)\left[1-h\frac{df}{d\xi}-k\frac{d\varphi}{d\eta}+hk\left(\frac{df}{d\xi}\frac{d\varphi}{d\eta}-\frac{df}{d\eta}\frac{d\varphi}{d\xi}\right)\right]$$

(h et k étant deux quantités très petites; f, φ et F trois polynomes quelconques en ξ, η) pour retomber sur une généralisation de la formule de Lagrange.

M. Stieltjes ne publia pas toutefois sa découverte et se borna à la communiquer à quelques amis; mais de graves objections lui furent faites et le déterminèrent à ne pas publier ses résultats.

Était-il certain que la fonction sous le signe $\int\int$ ne devenait pas infinie en quelques points de la surface d'intégration?

Comment se faisait-il, puisque rien ne distingue Q de R, qu'on changeât le signe de l'expression (1) en permutant Q et R?

La discussion du paragraphe précédent nous met aujourd'hui en mesure de répondre à toutes ces objections.

Commençons par introduire les quatre relations fondamentales qui définissent l'espace (λ,μ,ν); nous écrirons :

$$x=\frac{\rho(k^2-1)}{k^2+1},\qquad y=\frac{2\lambda\rho}{k^2+1},\qquad z=\frac{2\mu\rho}{k^2+1},\qquad t=\frac{2\nu\rho}{k^2+1};$$

où l'on a posé pour abréger

$$k^2=\lambda^2+\mu^2+\nu^2.$$

Les deux équations

$$\xi=0\qquad\text{et}\qquad \eta=0$$

représenteront respectivement dans l'espace (λ,μ,ν) le cercle

$$(3)\qquad \lambda=0,\qquad \mu^2+\nu^2=1$$

et l'axe des λ

$$\mu=0,\qquad \nu=0.$$

Si h et k sont assez petits, les deux équations

$$Q = 0 \quad \text{et} \quad R = 0$$

ou ce qui revient au même

$$\xi = hf \quad \text{et} \quad \eta_1 = k\varphi$$

représenteront respectivement dans l'espace (λ, μ, ν) une courbe fermée très peu différente du cercle (3), et une autre courbe fermée se rapprochant beaucoup de l'axe des λ dans tous les points situés à distance finie.

Il importe de remarquer que ces deux courbes sont *entrelacées* l'une dans l'autre. Je veux dire par là qu'il serait impossible de construire une portion de surface simplement connexe limitée à l'une des deux courbes fermées et qui ne coupe pas l'autre courbe fermée.

La surface d'intégration considérée par M. Stieltjes est définie comme il suit : on fait décrire à ξ, dans son plan, un cercle ayant pour centre l'origine, pendant que η_1 décrit de son côté dans son plan un autre cercle ayant aussi pour centre l'origine.

Les équations de la surface d'intégration sont donc

$$x^2 + y^2 = \rho_1^2, \qquad z^2 + t^2 = \rho_2^2.$$

Si nous revenons à notre mode de représentation, il faut que nous supposions

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 = \rho^2.$$

La surface d'intégration sera alors représentée dans l'espace (λ, μ, ν) par la surface

$$(k^2+1)^2 \rho_2^2 = f^2 \rho^2 (\mu^2 + \nu^2).$$

Cette surface est un tore; le cercle

$$\xi = 0$$

et par conséquent, si h est très petit, la courbe fermée

$$\xi = hf$$

se trouvent entièrement à l'intérieur de ce tore.

Au contraire l'axe des λ

$$\eta_1 = 0$$

et par conséquent, si k est très petit, la courbe fermée

$$\eta_1 = k\varphi$$

se trouvent entièrement à l'extérieur de ce tore.

On voit tout de suite que la première objection faite à M. Stieltjes est levée, puisque le tore ne coupe en aucun point les courbes singulières.

Nous définirons le sens d'intégration comme nous l'avons fait jusqu'ici, par un observateur placé sur le tore; je supposerai par exemple que cet observateur est dirigé vers l'extérieur.

La seule courbe singulière située à l'intérieur de la surface d'intégration est la courbe

$$\xi = hf.$$

L'intégrale cherchée se ramène donc à une intégrale abélienne simple relative à cette courbe. Il suffit d'un peu d'attention pour reconnaître, en appliquant les règles du paragraphe précédent, que cette période est une période polaire et qu'elle est égale à

$$\frac{4\pi^2 P}{\dfrac{dQ}{d\xi}\dfrac{dR}{d\eta_1} - \dfrac{dQ}{d\eta_1}\dfrac{dR}{d\xi}}.$$

Il nous est facile de voir maintenant comment tombe d'elle-même la seconde objection qui avait été opposée à M. Stieltjes. Il n'est pas vrai que rien ne distingue Q de R. La courbe $Q = 0$ ou $\xi = hf$ est à l'intérieur du tore qui nous sert de surface d'intégration; la courbe $R = 0$ ou $\eta_1 = k\varphi$ est au contraire à l'extérieur. Si donc nous considérons l'observateur qui définit le sens de l'intégration, nous verrons qu'il est dirigé vers l'extérieur du tore, c'est-à-dire du même côté que la courbe $R = 0$, et du côté opposé à la courbe $Q = 0$. Ces deux courbes jouent donc des rôles différents.

La seconde partie de l'analyse de M. Stieltjes ne soulevait pas d'objection analogue à celles que nous venons de discuter. Néanmoins comme elle n'a pas encore été publiée et qu'elle est fort courte, je vais l'exposer ici en quelques mots.

Si nous donnons à P, Q et R leurs valeurs (2), il est aisé de voir que notre intégrale sera égale à

$$4\pi^2 F(\xi_0, \eta_0),$$

ξ_0 et η_0 étant les valeurs de ξ et de η_1 très voisines de 0 qui satisfont aux deux équations

$$\xi = hf, \qquad \eta_1 = k\varphi.$$

D'autre part si h et k sont assez petits pour qu'on ait en tous les points de notre tore

$$\left|\frac{hf}{\xi}\right| < 1, \qquad \left|\frac{k\varphi}{\eta_1}\right| < 1,$$

l'intégrale pourra se développer en série comme il suit :

$$\sum h^n k^p \int\int \frac{F f^n \varphi^p \, d\xi \, d\eta_1}{\xi^{n+1} \eta_1^{p+1}} - \sum h^n k^p \int\int \frac{F \frac{df}{d\xi} f^{n-1} \varphi^p \, d\xi \, d\eta_1}{\xi^n \eta_1^{p+1}}$$
$$- \sum h^n k^p \int\int \frac{F \frac{d\varphi}{d\eta_1} f^n \varphi^{p-1} \, d\xi \, d\eta_1}{\xi^{n+1} \eta_1^p} + \sum h^n k^p \int\int \frac{F \frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(\xi, \eta_1)} f^{n-1} \varphi^{p-1} \, d\xi \, d\eta_1}{\xi^n \eta_1^p}.$$

Ce qui donne, d'après les principes du paragraphe précédent,

$$F(\xi_0, \eta_{10}) = \sum h^n k^p \left\{ \frac{D_{n,p}(F f^n \varphi^p)}{n! p!} - \frac{D_{n-1,p}\left(F \frac{df}{d\xi} f^{n-1} \varphi^p\right)}{(n-1)! p!} - \frac{D_{n,p-1}\left(F \frac{d\varphi}{d\eta_1} f^n \varphi^{p-1}\right)}{n! (p-1)!} \right.$$
$$\left. + \frac{D_{n-1,p-1}\left(F \frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(\xi, \eta_1)} f^{n-1} \varphi^{p-1}\right)}{(n-1)! (p-1)!} \right\}.$$

Dans le second membre, ξ et η_1 sont supposés remplacés par o et o. Quant à la notation $D_{n,p}$, on a écrit pour abréger

$$D_{n,p}(u) = \frac{d^{n+p} u}{d\xi^n \, d\eta_1^p};$$

En réduisant, il reste pour la partie entre crochets

$$\frac{1}{n! p!} \left\{ D_{n,1}(F f^n \varphi^p) - D_{n-1,p}\left(F \frac{df^n}{d\xi} \varphi^p\right) - D_{n,p-1}\left(F f^n \frac{d\varphi^p}{d\eta_1}\right) + D_{n-1,p-1}\left(F \frac{\partial(f^n, \varphi^p)}{\partial(\xi, \eta_1)}\right) \right\}$$

ou bien

$$\frac{1}{n! p!} D_{n-1,p-1} \left[D_{1,1}(F f^n \varphi^p) - D_{0,1}\left(F \frac{df^n}{d\xi} \varphi^p\right) - D_{1,0}\left(F f^n \frac{d\varphi^p}{d\eta_1}\right) + F \frac{\partial(f^n, \varphi^p)}{\partial(\xi, \eta_1)} \right]$$

ou enfin en réduisant encore

$$\frac{1}{n! p!} D_{n-1,p-1} \left[\frac{d^2 F}{d\xi \, d\eta_1} f^n \varphi^p + \frac{dF}{d\xi} \frac{d(f^n)}{d\eta_1} \varphi^p + \frac{dF}{d\eta_1} \frac{d(\varphi^p)}{d\xi} f^n \right].$$

On est ainsi conduit à une généralisation de la formule de Lagrange.

VI. — Seconde application.

Il n'est pas douteux qu'on ne puisse tirer des principes qui précèdent une foule d'applications différentes. Je me bornerai à exposer ici la suivante.

Il est aisé de démontrer qu'*une fonction entière d'une variable, dont le module reste inférieur à une quantité donnée, se réduit à une constante.*

Ce résultat s'étend immédiatement aux fonctions de deux variables. On peut d'ailleurs l'énoncer comme il suit :

Une fonction entière de deux variables ξ et η qui tend vers une limite finie et déterminée quand ξ et η tendent vers l'infini, et quelle que soit la manière dont ξ et η tendent vers l'infini, se réduit à une constante.

La théorie actuelle nous permet de faire un pas de plus.

Il n'est pas nécessaire, pour que la fonction se réduise à une constante, qu'elle tende vers une limite finie et déterminée quelle que soit la manière dont ξ et η tendent vers l'infini.

Supposons, pour préciser davantage, que l'on pose

$$\xi = (\alpha + i\beta)\rho, \qquad \eta_1 = (\gamma + i\delta)\rho$$

avec la condition

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1. \tag{1}$$

Faisons ensuite croître ρ indéfiniment, α, β, γ, δ restant constants.

Les théories anciennes nous permettent d'affirmer ce qui suit :

Si, quels que soient α, β, γ, δ, la fonction entière, $F(\xi, \eta)$ tend vers une limite finie et déterminée, cette fonction est une constante. Il n'est d'ailleurs pas nécessaire que cette limite soit la même pour toutes les valeurs des quatre quantités α, β, γ, δ; il suffit qu'elle soit toujours finie.

Grâce à la théorie actuelle, nous pouvons affirmer quelque chose de plus.

La fonction entière F sera une constante, non seulement pourvu qu'elle tende vers une limite finie pour toutes les valeurs possibles de α, β, γ, δ, mais encore pourvu qu'elle tende vers une limite finie pour toutes les valeurs de α, β, γ, δ qui satisfont non seulement à la relation (1), mais à une autre relation convenablement choisie.

Reprenons les quatre relations fondamentales du paragraphe précédent :

$$x = \frac{\rho(k^2 - 1)}{k^2 + 1}, \qquad y = \frac{2\lambda\rho}{k^2 + 1}, \qquad z = \frac{2\mu\rho}{k^2 + 1}, \qquad t = \frac{2\nu\rho}{k^2 + 1},$$

Nous avons vu que les équations

$$\xi = o \qquad \text{et} \qquad \eta_1 = o$$

étaient respectivement représentées dans l'espace (λ, μ, ν) par le cercle

$$\lambda = o, \qquad \mu^2 + \nu^2 = 1$$

et par la droite

$$\mu = \nu = o.$$

Nous avons vu en outre que l'équation

$$\mathrm{mod}^2 \eta_1 = \rho_2^2$$

était représentée par le tore

$$(\lambda^2+1)^2\rho_2^2 = 4\rho^2(\mu^2+\nu^2).$$

Ces tores sont de révolution autour de l'axe des λ et l'on peut les définir géométriquement en disant qu'ils sont le lieu des points M tels que le rapport de la plus grande et de la plus petite distance de M au cercle $\xi = 0$ soit constant.

Venons maintenant à l'équation

$$\alpha\xi + \beta\eta_1 = 0,$$

où α et β sont des coefficients imaginaires quelconques. Elle représentera aussi un cercle. De plus ce cercle devra se trouver tout entier sur le tore

$$|\eta_1|^2 = \frac{|\alpha|^2\rho^2}{|\alpha|^2+|\beta|^2}.$$

Ce ne peut d'ailleurs être ni un des cercles méridiens qui ont pour équation

$$\eta_1 = \text{const.}$$

ni un des cercles parallèles qui ont pour équation

$$\xi = \text{const.}$$

Mais on sait que si l'on coupe le tore par un plan bitangent, l'intersection se décompose en deux cercles. Le cercle

$$\alpha\xi + \beta\eta_1 = 0$$

sera donc l'un de ces deux cercles.

Si les axes sont placés comme ils le sont d'ordinaire, ce sera celui des deux cercles qui est situé à gauche d'un observateur placé suivant l'axe des λ et regardant la partie des deux cercles qui est dirigée vers sa tête.

En faisant varier les deux coefficients α et β on obtiendra donc une famille de cercles que j'appellerai les cercles C.

Ces cercles seront toujours réels et leur rayon ne pourra s'annuler.

Ce qu'il importe de remarquer, c'est que deux quelconques des cercles C sont entrelacés, dans le sens donné à ce mot au paragraphe précédent.

En effet les cercles

$$\alpha\xi + \beta\eta_1 = 0, \qquad \gamma\xi + \delta\eta_1 = 0$$

sont évidemment entrelacés si

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 0, \qquad \delta = 1.$$

Faisons ensuite varier d'une manière continue les quatre coefficients α, β, γ, δ et voyons si les deux cercles peuvent cesser d'être entrelacés. Ils ne pourraient cesser de l'être que s'ils arrivaient d'abord à se couper. Or s'ils se coupaient, on aurait un point d'intersection :

$$\xi = \eta_1 = 0,$$

ce qui est impossible, puisque les formules (α) conduisent à la relation

$$|\xi|^2 + |\eta_1|^2 = \rho^2.$$

Pour faire compendre l'importance de cet entrelacement, considérons l'équation plus générale

$$\alpha\xi + \beta\eta_1 = \gamma.$$

Cette équation représentera encore une famille de cercles, les cercles C', dont les cercles C ne sont que des cas particuliers.

Deux cercles C'

$$\alpha\xi + \beta\eta_1 = \gamma,$$
$$\alpha'\xi + \beta'\eta_1 = \gamma'$$

peuvent être ou n'être pas entrelacés. Ils le seront si

$$|\alpha\gamma' - \alpha'\gamma|^2 + |\beta\gamma' - \beta'\gamma|^2 < \rho^2|\alpha\beta' - \alpha'\beta|^2.$$

Ils ne le seront pas dans le cas contraire.

L'intégrale double

$$\iint \frac{F(\xi,\eta_1)\,d\xi\,d\eta_1}{(\alpha\xi+\beta\eta_1-\gamma)(\alpha'\xi+\beta'\eta_1-\gamma')},$$

prise le long d'une surface qui enveloppe le cercle

$$\alpha\xi + \beta\eta_1 = \gamma$$

en laissant en dehors le cercle

$$\alpha'\xi + \beta'\eta_1 = \gamma',$$

sera égale tantôt à 0, tantôt à

$$\frac{4\pi^2}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}F(\xi_0,\eta_0),$$

où ξ_0 et η_0 satisfont aux équations simultanées

$$\alpha\xi_0 + \beta\eta_0 = \gamma, \qquad \alpha'\xi_0 + \beta'\eta_0 = \gamma'.$$

Elle sera égale à o si les deux cercles ne sont pas entrelacés et à

$$\frac{4\pi^2}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} F(\xi_0, \eta_0)$$

s'ils sont entrelacés.

Dans le cas des cercles C, comme il y a toujours entrelacement, on aura :

$$\int\int \frac{F\, d\xi\, d\eta}{(\alpha\xi + \beta\eta)(\alpha'\xi + \beta'\eta)} = \frac{4\pi^2}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} F(o, o).$$

De même l'intégrale :

$$\int\int \frac{F\, d\xi\, d\eta}{(\alpha\xi + \beta\eta)^m (\alpha'\xi + \beta'\eta)^p}$$

s'exprimera très simplement à l'aide des dérivées d'ordre $m+p$ de F, ou plutôt des valeurs de ces dérivées pour $\xi = \eta = o$. L'expression sera linéaire et les coefficients dépendront de α, β, α', β'. (*Voir* la fin du paragraphe IV.)

Cela posé, voyons comment chaque point de l'espace (λ, μ, ν) représente une manière pour ξ et η de tendre vers l'infini.

Imaginons que λ, μ, ν conservant la même valeur, ρ croisse indéfiniment. x, y, z et t croîtront indéfiniment et de façon que leurs rapports demeurent constants. Lors donc que x, y, z, t croissent au delà de toute limite, mais de telle façon que leurs rapports tendent vers des limites finies et déterminées, cette manière de tendre vers l'infini sera représentée par un point de l'espace (λ, μ, ν).

Une surface S appartenant à cet espace représentera donc un ensemble de manières de tendre vers l'infini.

Imaginons qu'une surface S soit telle que le cercle

$$\alpha\xi + \beta\eta = o$$

soit tout entier à son intérieur et le cercle

$$\alpha'\xi + \beta'\eta = o$$

tout entier à l'extérieur.

Supposons que, quand ξ et η tendent vers l'infini de l'une des manières représentées par les divers points de cette surface S, la fonction entière F tende vers une limite finie et déterminée.

A cette condition, F se réduira à une constante. En effet l'intégrale

$$\int\int \frac{F\, d\xi\, d\eta}{(\alpha\xi + \beta\eta)^m (\alpha'\xi + \beta'\eta)^p},$$

prise le long de S, tendra vers o quand ρ croîtra indéfiniment (à moins que $m = p = 1$). Elle est donc nulle.

Donc toutes les dérivées de F s'annulent pour $\xi = \eta = o$.

Donc F est une constante.

En résumé, si l'on sait démontrer que F tend vers une limite finie quelle que soit la manière dont ξ et η tendent vers l'infini, F est une constante ; voilà ce qu'on savait déjà.

Supposons maintenant qu'on sache démontrer seulement que F tend vers une limite finie quand ξ et η tendent vers l'infini d'une certaine manière. L'espace (λ, μ, ν), dont les points représentent les différentes façons de tendre vers l'infini, sera alors partagé en diverses régions. Pour les unes, on saura démontrer que F tend vers une limite finie ; pour les autres on ne saura rien.

Si par exemple il y a une région de l'espace qui contienne l'un des cercles C tout entier et en tous les points de laquelle la limite F soit finie, on sera certain que F est une constante.

Ou bien encore supposons que l'espace se divise en trois régions R_1, R_2 et R_3, de telle façon que l'on ne puisse passer de R_1 à R_3 sans traverser R_2. Imaginons que R_1 contienne un des cercles C tout entier; que R_3 contienne un autre cercle C tout entier et qu'en tous les points de R_2 la limite de F soit finie. Nous serons encore certains dans ce cas que F est une constante.

VII. — Périodes variables.

J'arrive à un autre ordre de considérations où l'on verra la principale différence qui éloigne la théorie actuelle de celle des intégrales simples.

Nous avons supposé jusqu'ici que la fonction sous le signe $\int\int$ ne devenait infinie en aucun des points de la surface d'intégration.

Cette hypothèse n'est pas nécessaire comme elle l'était dans le cas des intégrales simples. Il arrive en effet, comme nous allons le voir, que l'intégrale reste finie bien que la fonction sous le signe $\int\int$ devienne infinie.

Soit S la surface d'intégration appartenant à l'espace (λ, μ, ν) et dans ce même espace, une courbe singulière C en tous les points de laquelle la fonction $F(\xi, \eta)$ devienne infinie. Supposons que cette courbe C coupe la surface S de telle sorte que l'une des portions de C soit à l'intérieur de S et l'autre à l'extérieur.

Prenons maintenant l'intégrale :

$$\int\int F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

le long de la surface S. La fonction F sera infinie aux points où C coupe S, mais en général elle sera infinie de premier ordre seulement. L'intégrale restera alors finie.

Nous savons en effet qu'une intégrale multiple d'ordre n reste finie quand la fonction sous les n signes $\int$ devient infinie en un point isolé, pourvu toutefois qu'elle soit infinie d'ordre inférieur à n.

Pour évaluer cette intégrale double, on peut opérer absolument de la même façon que dans le paragraphe IV. Posons alors

$$F(\xi, \eta_1) = \frac{P(\xi, \eta_1)}{Q(\xi, \eta_1)}.$$

Nous supposerons que P ne devient pas infini à l'intérieur de S, et que Q ne devient infini que le long de la courbe C. Cela suppose que S ne contient pas d'autre courbe singulière que C; mais cette hypothèse est toujours permise, car s'il en était autrement, on remplacerait la surface S par plusieurs autres ne contenant chacune qu'une courbe singulière.

L'intégrale double sera égale alors à l'intégrale simple

$$\int \frac{2i\pi P\, d\xi}{\frac{dQ}{d\eta_1}}.$$

Cette intégrale, au lieu d'être prise tout le long de C, sera prise seulement le long d'une partie de cette courbe, puisqu'une partie seulement de cette courbe est intérieure à S.

Si P est rationnel et si Q est un polynome entier, cette intégrale simple est encore une intégrale abélienne relative à la courbe algébrique

$$Q(\xi, \eta_1) = 0.$$

Mais ce n'est plus une période de cette intégrale, c'est une intégrale prise entre deux points quelconques de la courbe $Q = 0$.

Quant au sens dans lequel on doit suivre la courbe C, on le déterminerait par la règle du paragraphe IV.

Nous pouvons donner aux intégrales doubles de cette forme le nom de périodes, puisqu'elles sont prises le long de surfaces fermées. Mais elles diffèrent beaucoup des périodes que nous avons envisagées jusqu'ici.

Si, en effet, nous déformons d'une façon continue la surface d'intégration S, l'arc de C qui sera à l'intérieur de S variera aussi d'une façon continue. Il en sera donc de même de la période.

Ces périodes ne sont donc pas des constantes. Ce sont des *périodes variables*. Il importe d'ailleurs de ne pas les confondre avec les intégrales auxquelles M. Picard avait donné ce nom dans ses Notes du 29 janvier 1883 et du 1er février 1886.

Je rappelle que dans l'introduction nous sommes convenus de ne pas le leur conserver afin d'éviter toute confusion.

VIII. — Applications aux fonctions θ.

Je vais reprendre les notations dont j'ai fait usage dans mon Mémoire *sur les fonctions abéliennes* (*American Journal of Mathematics*, vol. VIII, n° 4).

J'envisagerai une fonction *abélienne* de deux variables ξ et η_1 et j'appellerai les quatre périodes fondamentales

$$(1) \qquad \begin{matrix} a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & \text{pour } \xi, \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4, & \text{pour } \eta_1. \end{matrix}$$

J'envisagerai une fonction *intermédiaire* Φ jouissant des propriétés suivantes :

Elle est entière et de plus on a pour une quelconque des quatre périodes

$$\Phi(\xi + \alpha_i, \eta_1 + b_i) = \Phi(\xi, \eta_1) e^{\alpha_i \xi + \beta_i \eta_1 + \gamma_i}.$$

Je poserai ensuite :

$$M_{ik} = \alpha_k a_i + \beta_k b_i - \alpha_i a_k - \beta_i b_k;$$

M_{ik} sera égal à un entier multiplié par $2\pi\sqrt{-1}$.

Si les périodes (1) sont des périodes normales, on aura :

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_2 b_4 - a_4 b_2 = 0.$$

Si les périodes (1) ne sont pas normales, on aura une relation analogue

$$(2) \qquad \Sigma N_{ik} a_i b_k = 0$$

où

$$N_{ii} = 0, \qquad N_{ik} = -N_{ki}.$$

Les N seront des entiers dont le déterminant est égal à 1.

En d'autres termes le premier membre de l'équation (2) est une forme bilinéaire de discriminant 1.

On aura d'ailleurs :

$$M_{ik} = 2m\pi\sqrt{-1}\, N_{ik},$$

m étant l'*ordre* de la fonction intermédiaire Φ.

On sait que les fonctions Θ ne sont que des cas particuliers des fonctions intermédiaires qui s'y ramènent d'ailleurs aisément.

Nous allons maintenant définir notre espace λ, μ, ν.

Distinguons les parties réelles et imaginaires des périodes, en faisant

$$a_i = a'_i + a''_i\sqrt{-1}, \qquad b_i = b'_i + b''_i\sqrt{-1}.$$

Posons ensuite :

$$\begin{aligned} x &= a'_1\lambda + a'_2\mu + a'_3\nu, \\ y &= a''_1\lambda + a''_2\mu + a''_3\nu, \\ z &= b'_1\lambda + b'_2\mu + b'_3\nu, \\ t &= b''_1\lambda + b''_2\mu + b''_3\nu. \end{aligned}$$

Nous étendrons nos intégrations à la surface totale du cube dont les six faces ont pour équation

$$\lambda \text{ ou } \mu \text{ ou } \nu = 0 \text{ ou } 1.$$

Les courbes singulières que nous considérerons auront toutes pour équation

$$\Phi = 0.$$

A l'intérieur de notre cube, il pourra se trouver plusieurs branches de la courbe singulière $\Phi = 0$, mais parmi ces branches, nous devrons distinguer les branches fermées et les branches ouvertes limitées à chacune de leurs deux extrémités par l'une des faces du cube. Les points qui doivent surtout attirer notre attention sont les extrémités des branches ouvertes, c'est-à-dire les points où la courbe $\Phi = 0$ coupe les faces du cube.

Mais nous distinguerons ces points en deux catégories. Supposons que dans le voisinage d'un de ces points, les équations de $\Phi = 0$ puissent se mettre sous la forme

$$x = \psi_1(\omega), \qquad y = \psi_2(\omega), \qquad z = \psi_3(\omega), \qquad t = \psi_4(\omega)$$

ainsi qu'il est dit au paragraphe IV.

Nous formerons le déterminant Δ du paragraphe IV qui s'écrira ici :

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\dfrac{dy}{d\omega} & a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ \dfrac{dx}{d\omega} & a''_1 & a''_2 & a''_3 \\ -\dfrac{dt}{d\omega} & b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ \dfrac{dz}{d\omega} & b''_1 & b''_2 & b''_3 \end{vmatrix}.$$

Nous avons vu que si ce déterminant est positif, il faut, dans les intégrations, suivre la courbe $\Phi = 0$ dans le sens des ω croissants, et qu'il faut la suivre au contraire dans le sens des ω décroissants si Δ est négatif.

Comme ω reste arbitraire dans une large mesure, on peut toujours choisir cette variable de telle sorte que Δ soit positif et que par conséquent on ait toujours à suivre la courbe dans le sens des ω croissants.

Cela posé si nous considérons un des points d'intersection P de la courbe $\Phi = 0$ avec une des faces du cube, et que dans le voisinage de ce point, on suive cette courbe dans le sens des ω croissants, il pourra se présenter deux cas. Ou bien on passera de l'extérieur du cube à l'intérieur, ou inversement.

Nous distinguerons donc deux sortes de points P; le point P sera *positif* si l'on passe de l'extérieur du cube à l'intérieur et *négatif* dans le cas contraire.

Pour reconnaître le signe d'un de ces points, imaginons que ce point appartienne à la face $\lambda = 0$, et que dans le voisinage de ce point, on ait pour l'équation de $\Phi = 0$

$$\xi = f(\eta).$$

Il viendra alors :

$$d\xi = (\alpha + i\beta)\, d\eta$$

où

$$\alpha + i\beta = \frac{df}{d\eta} = -\frac{\dfrac{d\Phi}{d\eta}}{\dfrac{d\Phi}{d\xi}}$$

en remplaçant $d\xi$ et $d\eta$ par leurs valeurs et séparant les parties réelle et imaginaire, il vient :

$$(3)\quad \begin{aligned} &(a'_1 - \alpha b'_1 + \beta b''_1)\, d\lambda + (a'_2 - \alpha b'_2 + \beta b''_2)\, d\mu + (a'_3 - \alpha b'_3 + \beta b''_3)\, d\nu = 0, \\ &(a''_1 - \alpha b''_1 + \beta b'_1)\, d\lambda + (a''_2 - \alpha b''_2 + \beta b'_2)\, d\mu + (a''_3 - \alpha b''_3 + \beta b'_3)\, d\nu = 0. \end{aligned}$$

Ce sera en étudiant les coefficients des équations (3) qu'on reconnaîtra si le point P est positif ou négatif.

Si l'on fait varier ces coefficients d'une manière continue, le passage des points P positifs aux points P négatifs se fera au moment où $d\lambda$ est nul, c'est-à-dire où

$$(4)\quad (a'_2 - \alpha b'_2 + \beta b''_2)(a''_3 - \alpha b''_3 - \beta b'_3) - (a'_3 - \alpha b'_3 + \beta b''_3)(a''_2 - \alpha b''_2 - \beta b'_2) = 0.$$

Tout dépend donc du signe du premier membre de l'équation (4).

Nous n'avons encore rien supposé au sujet de la fonction Φ qui égalée à 0 définira la courbe singulière; nous choisirons plus tard pour Φ une fonction intermédiaire, mais dans ce qui a été dit jusqu'ici, rien ne préjuge ce choix.

Faisons en particulier

$$\Phi = \xi - \xi_0.$$

Alors on aura

$$\alpha = \beta = 0$$

et le premier membre de (4) se réduira à

$$a'_2 a''_3 - a'_3 a''_2.$$

C'est la partie imaginaire du produit

$$\overline{a}_2 a_3$$

en désignant par $\overline{a}_2$ la quantité imaginaire conjuguée de a_2.

Prenons le cas particulier où

$$a_3 = 1, \qquad a_2 = i.$$

Alors le premier membre de (4) se réduit à 1; il est par conséquent positif. Nous pouvons supposer en même temps $a_1 = 0$. Les équations (3) se réduisent alors à

$$d\mu = dy = 0.$$

On en conclut que

$$dx = dy = 0,$$
$$dz = b'_1\, d\lambda, \qquad dt = b''_1\, d\lambda.$$

Le déterminant Δ se réduit à

$$-\frac{d\lambda}{d\omega}(b'^2_1 + b''^2_1);$$

il est donc négatif.

Donc quand le premier membre de (4) est positif, le point P est négatif et inversement.

Nous n'avons considéré jusqu'ici que les points P situés sur la face du cube qui a pour équation $\lambda = 0$. On raisonnerait de même pour les cinq autres faces et l'on arriverait aux conclusions suivantes :

Posons

$$\alpha + i\beta = -\frac{\dfrac{d\Phi}{d\eta}}{\dfrac{d\Phi}{d\xi}} = h.$$

Posons ensuite :

$$c_i = a_i - h b_i$$

et soit $\overline{c}_i$ la quantité imaginaire conjuguée de c_i.

Soit enfin $\mathrm{I}(u)$ la partie imaginaire de u.

Les points P seront positifs :

pour la face $\lambda = 0$ si $\mathrm{I}(c_2\overline{c}_3) > 0$,
» $\lambda = 1$ si $\mathrm{I}(c_2\overline{c}_3) < 0$,
» $\mu = 0$ si $\mathrm{I}(c_3\overline{c}_1) > 0$,
» $\mu = 1$ si $\mathrm{I}(c_3\overline{c}_1) < 0$,
» $\nu = 0$ si $\mathrm{I}(c_1\overline{c}_2) > 0$,
» $\nu = 1$ si $\mathrm{I}(c_1\overline{c}_2) < 0$.

Nous devons remarquer que si nous avons sur la face $\lambda = 0$ un point P dont les coordonnées soient $(0, \mu, \nu)$, nous aurons sur la face opposée $\lambda = 1$ un point P′ dont les coordonnées seront $(1, \mu, \nu)$. De plus les points P et P′ seront de signe contraire.

De même à tout point P situé sur l'une des faces $\mu = 0$, $\nu = 0$, correspondra un autre point P′ de signe contraire situé sur la face opposée.

Considérons maintenant l'intégrale

$$\int\int \frac{\dfrac{d\Phi}{d\eta}\, d\xi\, d\eta}{\Phi}$$

et étendons-la à toute la surface de notre cube.

Soient N_1 et N_2 les nombres des points P positifs et négatifs situés sur la face $\lambda = 0$. Soient de même N'_1 et N'_2, N''_1 et N''_2 les nombres des points P positifs et négatifs situés sur la face $\mu = 0$ et sur la face $\nu = 0$.

L'intégrale double se ramène alors à l'intégrale simple

$$\int 2i\pi\, d\xi,$$

prise le long des diverses courbes $\Phi = 0$. Celle-ci est évidemment égale à

$$2i\pi(\Sigma\xi_1 - \Sigma\xi_2).$$

$\Sigma\xi_1$ représente la somme des ξ relatifs aux divers points P positifs, $\Sigma\xi_2$ la somme des ξ relatifs aux divers points P négatifs.

Or à chacun des N_1 points P positifs de la face $\lambda = 0$, correspondent N_1 points P négatifs appartenant à la face $\lambda = 1$. La différence des ξ est égale à a_1.

L'intégrale est donc égale à

$$2i\pi[(N_1 - N_2)a_1 + (N'_1 - N'_2)a_2 + (N''_1 - N''_2)a_3]. \tag{5}$$

D'autre part considérons deux points correspondants des deux faces opposées

$\lambda = 0$, $\lambda = 1$. Soient ψ_1 et ψ_0 les valeurs de $\frac{d\Phi}{\Phi\, d\eta}$ en ces deux points, on aura :

$$\psi_1 - \psi_0 = \beta_1,$$

de sorte que l'intégrale double étendue aux deux faces $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ se ramène à l'intégrale double

$$\beta_1 \int\int d\xi\, d\eta$$

étendue à la face $\lambda = 0$ toute seule.

Cette intégrale est alors égale à

$$\beta_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2).$$

On trouverait des expressions analogues pour les autres faces de telle sorte que l'intégrale totale est égale au déterminant

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant est donc égal à l'expression (5).

D'une façon plus générale, posons :

$$\xi = a_i \lambda + a_k \mu,$$
$$\eta_i = b_i \lambda + b_k \mu,$$

et envisageons alors l'équation

$$\Phi(a_i \lambda + a_k \mu,\ b_i \lambda + b_k \mu) = 0.$$

On pourra satisfaire à cette équation d'un certain nombre de manières par des valeurs de λ et de μ réelles et comprises entre 0 et 1. Parmi ces solutions qui correspondent à divers points P, distinguons celles pour lesquelles la partie imaginaire de $c_i \overline{c}_k$ est positive, de celles pour lesquelles cette partie imaginaire est négative. Soit ensuite P_{ik} l'excès du nombre des solutions de la première sorte sur le nombre des solutions de la deuxième sorte. D'après cette définition, on aura :

$$P_{ik} = -P_{ki}, \qquad P_{ii} = 0,$$
$$P_{23} = N_1 - N_2, \qquad P_{31} = N_1' - N_2', \qquad P_{12} = N_1'' - N_2''.$$

Remarquons de plus que la partie imaginaire de $c_i \overline{c}_k$ peut se mettre sous une autre forme :

$$I(c_i \overline{c}_k) = \left| \frac{d\Phi}{d\overline{\xi}_k} \right|^2 I\left[\frac{d\Phi}{d\lambda} \frac{\overline{d\Phi}}{d\mu} \right].$$

Elle est donc de même signe que la partie imaginaire de

$$\frac{d\Phi}{d\lambda} \frac{\overline{d\Phi}}{d\mu}.$$

De plus nous pouvons écrire :

$$2i\pi(a_1 P_{23} + a_2 P_{31} + a_3 P_{12}) = \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

On aurait de même par symétrie :

$$2i\pi(a_2 P_{34} + a_3 P_{42} + a_4 P_{23}) = \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix},$$

$$2i\pi(a_3 P_{41} + a_4 P_{13} + a_1 P_{34}) = \begin{vmatrix} \beta_3 & \beta_4 & \beta_1 \\ a_3 & a_4 & a_1 \\ b_3 & b_4 & b_1 \end{vmatrix}$$

et une quatrième équation analogue.

On peut réunir ces quatre équations en une seule, en écrivant symboliquement :

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = 2i\pi \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \overline{\omega}_1 & \overline{\omega}_2 & \overline{\omega}_3 & \overline{\omega}_4 \end{vmatrix}.$$

Dans cette identité x_1, x_2, x_3, x_4 sont des quantités quelconques. Quant aux ω et aux $\overline{\omega}$ ce sont des quantités qui ont un sens symbolique. Nous convenons de remplacer dans le développement du second membre

$$\omega_i \overline{\omega}_k - \overline{\omega}_k \omega_i$$

par

$$P_{ik}.$$

Comme rien ne distingue ξ de η_i nous pouvons écrire de même :

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 2i\pi \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \overline{\omega}_1 & \overline{\omega}_2 & \overline{\omega}_3 & \overline{\omega}_4 \end{vmatrix}.$$

Nous écrirons plus simplement encore les équations symboliques (6) et (7) de la façon suivante en écrivant les déterminants sous une forme abrégée :

$$(6') \qquad (x\beta ab) = 2i\pi(xa\omega\overline{\omega}),$$
$$(7') \qquad (x\alpha ba) = 2i\pi(xb\omega\overline{\omega}).$$

Posons :

$$P_{ik} = h(x_i a_k - x_k a_i) + k(\beta_i b_k - \beta_k b_i)$$

et cherchons à déterminer h et k par les équations (6) et (7). Il vient :

$$(x\alpha\omega\overline{\omega}) = h(x\alpha\,z\alpha) + k(x\alpha\,\beta b) = -k(x\beta ab),$$
$$(xb\omega\overline{\omega}) = h(xb\,z\alpha) + k(xb\,\beta b) = -h(x\,zb\alpha),$$

de sorte que les équations (6) et (7) donnent :

$$h = k = \frac{-1}{2i\pi},$$

d'où

$$P_{ik} = \frac{M_{ik}}{2i\pi} = mN_{ik}.$$

Nous avons donc une solution des équations (6) et (7). Je dis qu'il n'y en a pas d'autres, du moins en nombres entiers.

En effet s'il y en avait deux, on pourrait trouver des nombres entiers P'_{ik} satisfaisant aux huit équations

$$a_i P'_{kl} + a_k P'_{li} + a_l P'_{ik} = 0,$$
$$b_i P'_{kl} + b_k P'_{li} + b_l P'_{ik} = 0.$$

En d'autres termes si l'on pose symboliquement :

$$P'_{ik} = \omega'_i \omega_k - \omega_k \overline{\omega}'_i$$

et que l'on envisage la forme bilinéaire :

$$(xy\omega'\overline{\omega}'),$$

cette forme bilinéaire s'annulera identiquement quand on y fera, soit :

$$y_1 = a_1, \quad y_2 = a_2, \quad y_3 = a_3, \quad y_4 = a_4,$$

soit :

$$y_1 = b_1, \quad y_2 = b_2, \quad y_3 = b_3, \quad y_4 = b_4.$$

Faisons subir à x et à y en même temps qu'à a et à b un même changement linéaire de variables en faisant :

$$x_i = \Sigma q_{ik} x'_k, \quad y_i = \Sigma q_{ik} y'_k, \quad a_i = \Sigma q_{ik} a'_k, \quad b_i = \Sigma q_{ik} b'_k.$$

Nous choisirons ce changement de variables (où les q sont des entiers) de façon à réduire la forme bilinéaire $(xy\omega'\overline{\omega}')$ qui s'écrira alors :

$$A(x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1) + B(x'_3 y'_4 - x'_4 y'_3).$$

On devrait donc avoir identiquement :

$$A(x'_1 a'_2 - x'_2 a'_1) + B(x'_3 a'_4 - x'_4 a'_3) = 0,$$
$$A(x'_1 b'_2 - x'_2 b'_1) + B(x'_3 b'_4 - x'_4 b'_3) = 0.$$

Cela ne peut avoir lieu que si A et B sont nuls (mais alors la forme bilinéaire

est identiquement nulle et par conséquent tous les P'_{ik} sont nuls) (C. Q. F. D.) ou encore si un seul des coefficients A et B s'annule, A par exemple, mais alors il faut encore que

$$a'_3 = a'_4 = b'_3 = b'_4 = 0.$$

La fonction abélienne n'aurait plus alors que deux périodes; la seconde hypothèse est donc inadmissible.

On doit donc conclure de cette discussion que l'unique solution des équations (6) et (7) c'est :

$$P_{ik} = mN_{ik}.$$

Dans le cas particulier où la fonction Φ se réduit à une fonction Θ d'ordre m, et où l'on a :

$$\begin{array}{llll} a_1 = 2i\pi, & a_2 = 0, & a_4 = b_3, & \\ b_1 = 0, & b_2 = 2i\pi, & \ldots\ldots, & \\ \alpha_1 = 0, & \alpha_2 = 0, & \alpha_3 = m, & \alpha_4 = 0, \\ \beta_1 = 0, & \beta_2 = 0, & \beta_3 = 0, & \beta_4 = m, \end{array}$$

tous les N_{ik} sont nuls, excepté N_{31} et N_{42} qui sont égaux à 1.

Tous les P_{ik} sont donc nuls excepté P_{31} et P_{42} qui sont égaux à m.

Si nous reprenons les notations N_1, N_2, N'_1, N'_2 etc, de telle sorte que

$$P_{23} = N_1 - N_2, \quad P_{24} = N_1 - N'_2, \quad \ldots,$$

nous aurons

$$N_1 = N_2$$

et

$$N'_2 - N'_1 = m.$$

On pourrait trouver plus intéressant de connaître le nombre $N'_1 + N'_2$, c'est-à-dire le nombre total des P, au lieu d'avoir seulement l'excès du nombre des points P positifs sur celui du nombre des P négatifs.

Nous avons toutefois un renseignement sur ce nombre $N'_1 + N'_2$. Il est plus grand que m et de même parité que m, car il est clair que

$$N'_2 + N'_1 > N'_2 - N'_1; \qquad N'_2 + N'_1 \equiv N'_2 - N'_1 \pmod 2.$$

On pourrait arriver à tous les résultats qui précèdent par l'emploi des différentielles totales, cela serait même plus simple ; mais je n'ai voulu donner ici qu'une application de la théorie des intégrales doubles.

Paris, 24 décembre 1886.

SUR

LES PÉRIODES DES INTÉGRALES DOUBLES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 125, p. 995-997 (15 décembre 1897).

Je considère l'intégrale double

$$J = \int\int \frac{P\,dx\,dy}{\sqrt{F - z}},$$

où P et F sont deux polynomes entiers en x et y, et où z est un paramètre arbitraire.

Considérons, d'autre part, l'intégrale simple

$$j = \int \frac{P\,dx}{\left(\frac{dF}{dy}\right)}.$$

Dans cette intégrale simple, je suppose que y est lié à x par la relation algébrique

$$F = t,$$

où t est un autre paramètre arbitraire. Ainsi j est une intégrale abélienne relative à la courbe algébrique $F = t$.

Soit ω une des périodes de j; cette période sera une fonction de t, et l'on sait que cette fonction ω satisfait à une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des polynomes entiers en t.

Soit

$$\Sigma \Pi_k \frac{d^k \omega}{dt^k} = 0 \tag{1}$$

cette équation; Π_k est un polynome entier en t.

L'ordre de l'équation (1) sera égal au nombre des périodes, c'est-à-dire à $2p$, en appelant p le genre de la courbe $F = t$.

Soient

$$t_1, \quad t_2, \quad \ldots, \quad t_q$$

les points singuliers de l'équation (1), c'est-à-dire les racines distinctes du polynome Π_{2p}.

Alors les périodes Ω de l'intégrale J seront représentées par la formule

$$\Omega = 2\int_{t_k}^{z} \frac{\omega\,dt}{\sqrt{t - z}}.$$

Il y a donc, en général, $2pq$ périodes Ω, puisque l'on peut prendre pour ω l'une des $2p$ périodes de j et pour t_k l'un des q points singuliers de (1).

Nous devons dire également comment cette formule devrait être transformée si ω devenait infini pour $t = t_k$.

Soient alors

$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_{2p}$$

$2p$ intégrales de l'équation (1) qui deviennent

$$\lambda_1 v_1, \quad \lambda_2 v_2, \quad \ldots, \quad \lambda_{2p} v_{2p}$$

quand t tourne autour de t_k.

Soit, dans le voisinage de l'origine O,

$$\omega = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_{2p} v_{2p},$$

les α étant des coefficients constants.

On aura alors

$$\Omega = 2\int \left(\frac{\alpha_1 v_1}{1 - \lambda_1} + \frac{\alpha_2 v_2}{1 - \lambda_2} + \ldots + \frac{\alpha_{2p} v_{2p}}{1 - \lambda_{2p}}\right) \frac{dt}{\sqrt{t - z}} - \int \frac{\omega\,dt}{\sqrt{t - z}},$$

la première intégrale étant prise le long d'un lacet partant de l'origine et y revenant après avoir entouré le point t_k, et la seconde le long d'un lacet partant de l'origine et y revenant après avoir entouré le point z.

Il est clair que Ω est une fonction de z qui va satisfaire à une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des polynomes entiers en z. Soit

$$\Sigma Q_k \frac{d^k \Omega}{dz_k} = 0 \tag{2}$$

cette équation; les Q_k sont des polynomes entiers en z.

L'équation (2) se déduit de l'équation (1) par une transformation bien connue qui se rattache à la théorie des dérivées d'ordre fractionnaire.

Les points singuliers de l'équation (2) sont les mêmes que ceux de l'équation (1); mais le point sur lequel je voudrais surtout insister, c'est la manière de déduire le groupe de l'équation (2) de celui de l'équation (1).

Pour fixer les idées je supposerai

$$2p = 2, \qquad q = 3.$$

L'équation (1) est alors du second ordre et l'équation (2) est, en général, du sixième ordre.

Soient alors

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{vmatrix}$$

les substitutions fondamentales du groupe de (1); les subtitutions correspondantes du groupe de (2) seront :

$$\begin{vmatrix} -a & -b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & -d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-a & -b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -c & 1-d & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1-a & -b & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -c & 1-d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1-a' & -b' & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -c' & 1-d' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a' & -b' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c' & -d' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a' & -b' & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -c' & 1-d' & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1-a'' & -b'' \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -c'' & 1-d'' \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1-a'' & -b'' \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -c'' & 1-d'' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a'' & -b'' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c'' & -d'' \end{vmatrix}.$$

Le groupe de (1) a tous ses coefficients entiers; on voit qu'il en sera de même du groupe de (2), ainsi qu'il était aisé de le prévoir.

SUR

LES PÉRIODES DES INTÉGRALES DOUBLES

Journal de Mathématiques, 6ᵉ série, t. 2, p. 135-189 (1906).

I. — Introduction.

La détermination du nombre des périodes cycliques d'une intégrale double exige une grande attention, comme toutes les questions d'*Analysis situs*, dès que le nombre des dimensions dépasse 3. M. Picard a abordé la question dans son Ouvrage sur les fonctions algébriques de deux variables, que je citerai souvent.

Je m'en suis occupé moi-même dans un Mémoire intitulé : *Sur les cycles des surfaces algébriques*, et inséré au *Journal de Liouville* en 1902 (¹). C'est à ce Mémoire que je renverrai quand je parlerai sans autre explication du *Mémoire cité*.

L'application des règles posées dans ce Mémoire présente quelquefois quelques difficultés; la question du nombre des cycles ne se pose pas d'une façon aussi simple que dans le cas des courbes algébriques, puisqu'il y a plusieurs manières d'envisager les points à l'infini et que le nombre des cycles ne reste pas le même quelle que soit la convention adoptée. D'autre part, il peut arriver que ce nombre ne soit pas le même pour deux surfaces, bien que l'on puisse passer de l'une à l'autre par une transformation birationnelle. C'est ce qu'a montré M. Picard.

Si l'on ne fait pas attention à ces circonstances, il peut arriver qu'on soit conduit à d'apparentes contradictions et que le nombre des cycles d'une surface, tel que le donnent les règles, ne demeure pas le même quand on change d'axes de coordonnées.

C'est ce qui m'a déterminé à revenir encore une fois sur la question et d'ail-

(¹) *Voir* aux NOTES.

leurs sans l'épuiser. J'ai modifié la convention relative aux points à l'infini, de façon que tout devienne projectif et que les résultats se présentent sous une forme plus simple.

J'ai obtenu ainsi une formule générale et je l'ai appliquée aux surfaces du troisième degré.

Ces surfaces présentent, au point de vue qui nous occupe, des propriétés qui semblent paradoxales, sur lesquelles M. Picard a déjà attiré l'attention. C'est ce qui m'a engagé à les étudier en détail.

Il faudrait, pour aller plus loin, étudier les cas où la surface présente d'autres singularités que les singularités ordinaires qui caractérisent les surfaces auxquelles toutes les autres peuvent être ramenées par une transformation birationnelle; c'est-à-dire les cas où la variété à quatre dimensions correspondante présente un point singulier. Mais je n'ai pas abordé ce problème. Je me suis contenté de dire quelques mots au sujet du point conique ordinaire, et sans épuiser la question.

II. — Intégrales doubles relatives à une surface.

Soit

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

une surface algébrique quelconque, et soit

$$J = \int\int \frac{P\,dx\,dy}{F'_z} = \int\int \frac{P\,dy\,dz}{F'_x} = \int\int \frac{P\,dz\,dx}{F'_y} \tag{2}$$

une intégrale double relative à cette surface; P étant une fonction rationnelle de x, y, z. Nous supposerons cette intégrale prise le long d'un domaine à deux dimensions que j'appellerai K et qui sera généralement un cycle fermé.

Soit maintenant

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 1 \tag{3}$$

un plan variable quelconque, et soit C l'intersection de ce plan variable avec la surface (1). Nous pourrons supposer que le domaine d'intégration K est engendré de la façon suivante : le plan (3) variera d'une manière continue; en même temps, nous envisagerons, sur la surface de Riemann correspondant à la courbe algébrique C, un cycle fermé k; quand le plan (3) variera d'une manière continue, ce cycle k variera également d'une manière continue, et ce sont les positions successives du cycle à une dimension k qui engendreront le cycle à deux dimensions K. Que devient dans ces conditions notre intégrale double?

Posons

$$\begin{cases} X = \beta F'_z - \gamma F'_y, \\ Y = \gamma F'_x - \alpha F'_z, \\ Z = \alpha F'_y - \beta F'_x. \end{cases} \tag{4}$$

Posons encore

$$u = \lambda x + \mu y + \nu z,$$

λ, μ et ν étant des constantes quelconques; supposons que les coefficients variables α, β, γ de l'équation (3) soient des fonctions d'une certaine variable t et prenons u et t pour nouvelles variables indépendantes. Il s'agit de calculer le déterminant fonctionnel des anciennes variables x et y par rapport aux nouvelles u et t.

Pour cela, nous avons les équations suivantes :

$$\begin{cases} du = \lambda\ dx + \mu\ dy + \nu\ dz, \\ -dt\,\Sigma x \dfrac{d\alpha}{dt} = \alpha\ dx + \beta\ dy + \gamma\ dz, \\ dF = F'_x\,dx + F'_y\,dy + F'_z\,dz. \end{cases} \tag{5}$$

Si donc nous posons

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \alpha & \beta & \gamma \\ F'_x & F'_y & F'_z \end{vmatrix} = \lambda X + \mu Y + \nu Z,$$

nous trouverons

$$\frac{\partial(u, t, F)}{\partial(x, y, z)} = -\frac{D}{\Sigma x \dfrac{d\alpha}{dt}}.$$

D'autre part,

$$\frac{\partial(u, t, F)}{\partial(x, y, z)} = \frac{\partial(u, t, F)}{\partial(u, t, z)} \frac{\partial(u, t, z)}{\partial(x, y, z)} = F'_z \frac{\partial(u, t)}{\partial(x, y)},$$

d'où enfin

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, t)} = -\frac{F'_z\,\Sigma x \dfrac{dz}{dt}}{D},$$

de sorte que notre intégrale double devient

$$J = -\int\int \frac{P\,\Sigma x \dfrac{dz}{dt}\,du\,dt}{D}$$

ou bien

$$J = \int (A\,dz + B\,d\beta + C\,d\gamma). \tag{6}$$

avec

$$A = \int \frac{P x\,du}{D}, \qquad B = \int \frac{P y\,du}{D}, \qquad C = \int \frac{P z\,du}{D}. \tag{7}$$

On peut annuler deux des trois coefficients arbitraires λ, μ, ν, en faisant l'autre égal à 1 ; on trouve ainsi, par exemple,

$$(7\,bis) \qquad A = \int \frac{P\,x\,dx}{X} = \int \frac{P\,x\,dy}{Y} = \int \frac{P\,x\,dz}{Z}.$$

Les intégrales (7) et (7 *bis*) sont des intégrales abéliennes *simples* relatives à la courbe algébrique C ; et si, comme nous l'avons supposé, le chemin d'intégration k est un cycle fermé, ce sont des périodes de ces intégrales abéliennes.

Nous devons nous attendre à ce que

$$A\,d\alpha + B\,d\beta + C\,d\gamma$$

soit une différentielle exacte, et c'est en effet ce qui arrive. Vérifions que

$$(8) \qquad \frac{dA}{d\beta} = \frac{dB}{d\alpha}.$$

Quand nous allons parcourir le cycle k, le point u va décrire dans son plan une certaine courbe fermée ; nous pourrons toujours supposer que cette courbe ne varie pas quand on donne à β, par exemple, un accroissement très petit.

En effet, par hypothèse, notre cycle k est fermé et varie d'une manière continue. Si donc k est la courbe fermée décrite par u dans son plan, si k' est ce que devient cette même courbe quand β se change en $\beta + d\beta$, ces deux courbes fermées k' et k'' différeront infiniment peu. On aura toujours pu choisir k' de façon que cette courbe passe à distance finie de tous les points singuliers. Il n'y aura pas alors de point singulier entre k' et k''. L'intégrale le long de k'' est donc égale à l'intégrale le long de k'; on peut remplacer la courbe k'' par la courbe k', c'est-à-dire supposer que la courbe k' n'a pas varié. Cela nous permet de calculer $\frac{dA}{d\beta}$ par différentiation sous le signe $\int$ en regardant le chemin d'intégration comme invariable. On trouve ainsi

$$\frac{dA}{d\beta} = \int \frac{d}{d\beta}\left(\frac{P\,x}{D}\right) du,$$

en remarquant que

$$\frac{d}{d\beta} = \frac{d}{dx}\frac{dx}{d\beta} + \frac{d}{dy}\frac{dy}{d\beta} + \frac{d}{dz}\frac{dz}{d\beta} + \frac{\partial}{\partial\beta},$$

en représentant par $\frac{\partial}{\partial\beta}$ avec des ∂ ronds la dérivée prise par rapport à β en tant que cette variable figure explicitement dans $\frac{P\,x}{D}$, mais en regardant x, y, z comme des constantes.

Nous observerons que, dans le numérateur $P\,x$, la lettre β ne figure pas explicitement, mais qu'elle figure dans D et que l'on a

$$\frac{\partial D}{\partial\beta} = (\lambda F'_z - \nu F'_x).$$

Maintenant, pour calculer $\frac{dx}{d\beta}$, $\frac{dy}{d\beta}$, $\frac{dz}{d\beta}$, il faut dans les équations (5) faire $du = 0$, puisque notre chemin d'intégration est invariable; $dF = 0$, puisque l'équation (1) a toujours lieu; $d\alpha = d\gamma = 0$, puisque pour chercher la dérivée partielle par rapport à β il faut regarder les deux autres variables α et γ comme des constantes, On trouve ainsi

$$(5\,bis) \qquad \begin{cases} 0 = \Sigma\lambda\,dx, \\ -y\,d\beta = \Sigma z\,dx, \\ 0 = \Sigma F'_x\,dx. \end{cases}$$

Nous y adjoignons l'identité

$$(9) \qquad d\left(\frac{P\,x}{D}\right) = x\left(\frac{dQ}{dx}dx + \frac{dQ}{dy}dy + \frac{dQ}{dz}dz\right) + \frac{P}{D}dx - \frac{P\,x}{D^2}\frac{\partial D}{\partial\beta}d\beta,$$

en posant

$$Q = \frac{P}{D}.$$

Les équations (5 *bis*) nous donnent d'abord

$$D\left(\frac{dQ}{dx}dx + \frac{dQ}{dy}dy + \frac{dQ}{dz}dz\right) = y\,d\beta \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ F'_x & F'_y & F'_z \\ Q'_x & Q'_y & Q'_z \end{vmatrix} = y\Delta\,d\beta,$$

et d'autre part

$$D\frac{dx}{d\beta} = y(\mu F'_z - \nu F'_y).$$

Si donc dans l'équation (9) nous remplaçons $\Sigma\frac{dQ}{dx}dx$, dx et $\frac{\partial D}{\partial\beta}$ par leurs valeurs, nous trouverons

$$\frac{d}{d\beta}\left(\frac{P\,x}{D}\right) = \frac{x\,y\,\Delta}{D} + \frac{D}{D^2}[y(\mu F'_z - \nu F'_y) - x(\lambda F'_z - \nu F'_x)].$$

On trouverait de même

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{P\,y}{D}\right) = \frac{x\,y\,\Delta}{D} + \frac{D}{D^2}[-x(\lambda F'_z + \nu F'_x) + y(\mu F'_z - \nu F'_y)],$$

et l'identité des deux expressions suffit pour démontrer l'égalité (8).

Donc $A\,d\alpha + B\,d\beta + C\,d\gamma$ est une différentielle exacte C. Q. F. D.

Afin de ne pas exclure le cas où le plan (3) passe par l'origine, il convient de

rendre l'équation de ce plan homogène en l'écrivant

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \varepsilon. \tag{3 bis}$$

Il vient alors

$$dJ = A_1 d\frac{\alpha}{\varepsilon} + B_1 d\frac{\beta}{\varepsilon} + C_1 d\frac{\gamma}{\varepsilon},$$

A_1, B_1, C_1 étant ce que deviennent A, B, C quand on y remplace α, β, γ par $\frac{\alpha}{\varepsilon}$, $\frac{\beta}{\varepsilon}$, $\frac{\gamma}{\varepsilon}$; dans ces conditions, le déterminant D se change en

$$D_1 = \frac{D}{\varepsilon}.$$

Il vient ainsi

$$A_1 = \int \frac{P x\, du}{D_1} = \varepsilon \int \frac{P x\, du}{D} = A\varepsilon,$$

d'où

$$A_1 d\frac{\alpha}{\varepsilon} = A\, dx - \frac{A\alpha\, d\varepsilon}{\varepsilon},$$

d'où enfin

$$dJ = A\, dx + B\, d\beta + C\, d\gamma - E\, d\varepsilon, \tag{6 bis}$$

où

$$E = \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{\varepsilon} = \int \frac{P(\alpha x + \beta y + \gamma z)\, du}{D\varepsilon},$$

ou en vertu de l'équation (3 *bis*) :

$$E = \int \frac{P\, du}{D}. \tag{10}$$

Considérons alors J comme fonction de α, β, γ, ε; nous partirons de certaines valeurs initiales de ces variables, par exemple les valeurs 1, 0, 0, 1 (c'est-à-dire le plan $x = 1$), et nous les ferons varier d'une manière continue et par un chemin quelconque jusqu'à leurs valeurs finales α, β, γ, ε; le cycle k une dimension k variera aussi d'une manière continue et engendrera une variété à deux dimensions K qui ne sera pas fermée, mais qui aura une frontière formée du cycle initial (c'est-à-dire du cycle k de la surface de Riemann correspondant au plan initial $x = 1$) et du cycle final (c'est-à-dire du cycle k de la surface de Riemann correspondant au plan final $\alpha x + \beta y + \gamma z = \varepsilon$). C'est le long de cette variété K que sera prise l'intégrale double J.

L'intégrale J est une fonction multiforme des variables α, β, γ, ε; parce que les cycles k s'échangent entre eux lorsque ces variables tournent autour d'un point singulier, et parce que l'intégrale J prend deux valeurs différentes, quand

les variables vont de leurs valeurs initiales à leurs valeurs finales par deux chemins différents, si entre ces deux chemins il y a un point singulier.

Quels sont ces points singuliers ; ce sont ceux qui correspondent au cas où le plan (3 *bis*) est tangent à la surface (1).

Considérons d'abord le cycle k et les valeurs correspondantes des intégrales A, B, C, E comme des fonctions des variables α, β, γ, ε; quand les variables ayant tourné autour d'un point singulier reviendront à leurs valeurs initiales, le cycle k se transformera en un autre cycle de la même surface de Riemann. Soient $k_1, k_2, \ldots, k_{2p}$ les cycles fondamentaux de cette surface de Riemann (que je suppose de genre p). Après une rotation autour du point singulier, ils se transformeront en d'autres cycles de la même surface, qui devront être eux-mêmes des combinaisons des cycles fondamentaux $k_1, k_2, \ldots, k_{2p}$.

Soient alors $A_1, A_2, \ldots, A_{2p}$ les valeurs de l'intégrale A correspondant à ces $2p$ cycles; ce sont les périodes fondamentales de l'intégrale abélienne indéfinie A. Elles se transformeront en $A'_1, A'_2, \ldots, A'_{2p}$ et les A'_i ne seront autre chose que des combinaisons linéaires des A_i, à coefficients constants et entiers.

Donc A, considéré comme fonction de l'une des variables α, β, γ, ε, satisfait à une équation différentielle linéaire d'ordre $2p$, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de α, β, γ, ε; plus généralement, entre $2p+1$ dérivées partielles de A par rapport aux quatre variables (parmi lesquelles la fonction A elle-même pourra être comprise), il y a toujours une relation dont les coefficients seront des fonctions rationnelles de α, β, γ, ε.

Il en sera de même en ce qui concerne B, C et E. Mais il y a quelque chose de plus. Quand les variables tournent autour d'un point singulier, B, C et E subissent *la même* transformation linéaire que A. Il en résulte que nous aurons encore une relation de même forme, non seulement entre $2p+1$ dérivées de A, mais entre $2p+1$ dérivées quelconques, appartenant les unes à A, les autres à B, C ou E, les fonctions A, B, C et E elles-mêmes n'étant pas exclues.

Mais A, B, C, E sont les dérivées du premier ordre de J; et les dérivées de ces quatre fonctions sont aussi des dérivées partielles de J, de sorte que nous arrivons finalement au résultat suivant :

Entre $2p+1$ dérivées partielles quelconques de J (*la fonction* J *étant exclue*) *il y a toujours une relation linéaire dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de* $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$.

Prenons un nombre suffisant de semblables relations, en assez grand nombre

pour que toutes les autres n'en soient plus que des conséquences; nous aurons un système de relations que j'appellerai le système (S). Il suffira, par exemple, pour cela de prendre les quatre équations

$$(S)\qquad \begin{cases} \sum Q_i \dfrac{d^i J}{dx^i} = 0, & \dfrac{dJ}{d\beta} = \sum R_i^1 \dfrac{d^i J}{dx^i}, \\ \dfrac{dJ}{d\gamma} = \sum R_i^2 \dfrac{d^i J}{dx^i}, & \dfrac{dJ}{d\varepsilon} = \sum R_i^3 \dfrac{d^i J}{dx^i}; \end{cases}$$

Q_i, R_i^1, R_i^2, R_i^3 sont des fonctions rationnelles de α, β, γ, ε; dans la première équation (S) l'indice i peut prendre les valeurs $1, 2, \ldots, 2p$. Qu'arrive-t-il maintenant de J quand les variables tournent autour d'un point singulier? Considérons par exemple les $2p$ déterminations de A :

$$A_1,\quad A_2,\quad \ldots,\quad A_{2p}$$

définies plus haut et soient

$$J_1,\quad J_2,\quad \ldots,\quad J_{2p}$$

les déterminations correspondantes de J. Supposons que, quand on tourne autour du point singulier, A_i se change en

$$\sum \lambda_{ik} A_k,$$

les λ_{ik} étant des coefficients constants et entiers comme on l'a expliqué plus haut; alors J_i se change en

$$\sum \lambda_{ik} J_k + H_i,$$

H_i étant une constante.

Une combinaison quelconque $\sum \lambda_k J_k$, où les λ_k sont entiers, se changera donc en $\sum \mu_k J_k + H$ où les μ_k sont des entiers et où H est une constante. Cela posé considérons q points singuliers $M_1, M_2, \ldots, M_q$. Imaginons que, quand on tourne autour de M_1, une certaine combinaison

$$\sum \lambda_{ik} J_k$$

se change en $\sum \mu_{ik} J_k + H_i$; et que plus généralement, quand on tourne autour de M_i, une certaine combinaison $\sum \lambda_{ik} J_k$ se change en

$$\sum \mu_{ik} J_k + H_i.$$

Les λ_{ik} et les μ_{ik} sont des coefficients entiers, les H_i sont des constantes.

Soit d'ailleurs K_i un contour à deux dimensions défini de la façon suivante :

Soit C_i un contour à une dimension; pour les valeurs initiales $(1, 0, 0, 1)$ des quatre variables, il est choisi dans le plan $(x = 1)$ de façon que la période correspondante de l'intégrale A soit $\sum \lambda_{ik} A_k$. Supposons ensuite que les variables α, β, γ, ε tournent autour du point singulier M_i en partant des valeurs initiales $(1, 0, 0, 1)$ pour revenir aux mêmes valeurs finales, et que le cycle C_i varie avec elles d'une manière continue; il engendrera le cycle à deux dimensions K_i.

Nous pouvons supposer que $J_1, J_2, \ldots, J_{2p}$ (qui ne sont définies jusqu'ici qu'à une constante près) s'annulent pour les valeurs initiales. Alors H_i sera l'intégrale double prise le long du contour K_i.

Soient maintenant

$$\nu_1,\quad \nu_2,\quad \ldots,\quad \nu_q,$$

q coefficients entiers, choisis de telle sorte que

$$(11)\qquad \sum \nu_i(\lambda_{i1} - \mu_{i1}) = \sum \nu_i(\lambda_{i2} - \mu_{i2}) = \ldots = \sum \nu_i(\lambda_{i2p} - \mu_{i2p}) = 0.$$

Alors, l'expression

$$\sum \nu_i H_i$$

représentera une des *périodes de l'intégrale double;* ce sera la valeur de cette intégrale double, prise le long du cycle *fermé* à deux dimensions

$$\sum \nu_i K_i.$$

Je dis, en effet, que ce cycle est fermé. En effet le cycle K_i n'est pas fermé, mais il admet pour frontière, d'une part, le cycle C_i dans sa position initiale, c'est-à-dire

$$C_i = \sum \lambda_{il} k_l;$$

d'autre part, ce même cycle dans sa position finale, c'est-à-dire

$$C_i = \sum \mu_{il} k_l,$$

de sorte que sa frontière complète sera

$$\sum (\lambda_{il} - \mu_{il}) k_l.$$

Donc la frontière complète du cycle $\sum \nu_i K_i$ sera

$$\sum\sum \nu_i(\lambda_{il}-\mu_{il})k_l$$

et elle se réduira à rien en vertu des relations (11).

Supposons, d'autre part, que nous changions l'origine, je veux dire qu'au lieu de faire varier α, β, γ, ε depuis les valeurs initiales (1, 0, 0, 1) jusqu'aux mêmes valeurs finales nous fassions varier α, β, γ, ε depuis d'autres valeurs initiales $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \varepsilon_0)$ auxquelles nous les ferons finalement revenir. La définition des cycles K_i se trouvera modifiée; nous n'aurons plus le droit de considérer J_k comme nul à l'origine et l'intégrale double prise le long du cycle K_i ne sera plus H_i, mais

$$\sum(\mu_{ik}-\lambda_{ik})J_k+H_i.$$

Elle dépendra donc du choix de l'origine $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \varepsilon_0)$. Considérons, au contraire, l'intégrale double prise le long du cycle $\sum \nu_i K_i$; elle sera

$$\sum\sum \nu_i(\mu_{ik}-\lambda_{ik})J_k+\sum \nu_i H_i,$$

expression qui se réduira à $\sum \nu_i H_i$ en vertu des relations (11). Elle sera donc indépendante du choix de l'origine.

III. — Lacets rectilignes.

M. Picard a démontré que, par une transformation birationnelle convenable, une surface quelconque peut être ramenée à une surface *normale*, c'est-à-dire à une surface n'ayant d'autres singularités que des courbes formées par l'intersection de deux nappes sans point singulier, ou des points triples formés par l'intersection de trois nappes sans point singulier. Néanmoins la courbe double pourra présenter des *pinch-points* (1), c'est-à-dire des points où les deux nappes se touchent, de telle façon que l'intersection de la surface par un plan quelconque passant par ce point présente non plus un point double à tangentes séparées, mais un point de rebroussement ordinaire.

(1) [ou *points-pincés*.]

Dans ce qui va suivre, nous supposerons donc en général que la surface

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

est normale; cependant, dans certains cas, nous serons amenés à considérer des surfaces qui, outre les singularités des surfaces normales, présentent des points coniques isolés; nous supposerons qu'en ces points coniques le cône des tangentes est un cône du deuxième degré ne se décomposant pas en deux plans.

Nous avons envisagé dans le paragraphe précédent les quatre variables homogènes α, β, γ, ε et nous avons considéré en particulier le cas où ces variables prenaient des valeurs correspondant à un *point singulier;* et nous entendions par là des valeurs telles que le genre de la section de la surface (1) avec le plan

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=\varepsilon, \tag{3 bis}$$

que ce genre, dis-je, s'abaisse d'une ou plusieurs unités.

C'est ce qui arrivera :

1° Si le plan (3 *bis*) est tangent à la surface (1);

2° Si la surface (1) admet des points coniques, et si le plan (3 *bis*) passe par un de ces points coniques.

Je ne reviendrai pas sur la discussion par laquelle M. Picard a démontré que ces deux cas sont les seuls. Pour une surface normale, on n'a à considérer que le premier, et alors les points singuliers seront définis par l'équation

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon) = 0 \tag{2}$$

qui est l'équation de la surface (1) en coordonnées tangentielles homogènes ou, si l'on aime mieux, l'équation de la dualistique de la surface (1).

On est ainsi amené à se préoccuper des singularités *tangentielles* de la surface (1). Mais, par un raisonnement tout à fait pareil à celui de M. Picard, on verrait que l'on peut toujours supposer que la surface (2), dualistique de (1), est une surface normale.

Nous supposerons donc en général dans ce qui va suivre que les deux surfaces sont toutes deux normales, de sorte que les seules singularités tangentielles de la surface (1) seront :

1° Des plans tangents doubles en nombre simplement infini;

2° Des plans tangents triples en nombre fini;

3° Des plans tangents d'*inflexion* correspondant aux points-pinces.

Considérons d'abord un point singulier M_i correspondant à un plan tangent simple ordinaire. Soient $k_1, k_2, \ldots, k_{2p}$ les $2p$ cycles fondamentaux de la courbe algébrique, intersection de (1) et de (3*bis*); supposons que le point analytique $(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$ parte d'une position initiale quelconque que j'appellerai O, et qui correspondra par exemple à $(0, 1, 0, 0)$, c'est-à-dire au plan $y = 0$, que ce point analytique tourne autour du point singulier M_i et revienne en O; que seront devenus les $2p$ cycles fondamentaux?

Il résulte d'un raisonnement de M. Picard (*Théorie des fonctions algébriques*, t. I, p. 96) que, si l'on a choisi convenablement les $2p$ cycles fondamentaux

$$k_1, \quad k_2, \quad k_3, \quad \ldots, \quad k_{2p},$$

ils se changeront en

$$k_1, \quad k_2 + k_1, \quad k_3, \quad \ldots, \quad k_{2p}.$$

Il va sans dire que le choix des cycles fondamentaux qui permet d'énoncer le résultat sous cette forme simple n'est pas le même pour les différents points singuliers M_i.

Lorsque le point analytique $(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$ vient en M_i, le plan (3 *bis*) devient tangent à la surface (1), coupe cette surface suivant une courbe qui n'est plus que de genre $p - 1$ et qui par conséquent n'a plus que $2p - 2$ cycles fondamentaux; ces cycles sont

$$k_3, \quad k_4, \quad \ldots, \quad k_{2p}.$$

Considérons alors le cycle

$$k = \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \ldots + \lambda_{2p} k_{2p},$$

les λ étant des coefficients entiers; quand le point analytique $(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$, partant de O, reviendra en O après avoir tourné autour de M_i, en décrivant le chemin fermé C, le cycle à une dimension k engendrera un cycle à deux dimensions K; reprenons l'intégrale J du paragraphe précédent et prenons cette intégrale double le long de K. Le chemin C peut être remplacé par un *lacet*, c'est-à-dire par un chemin allant d'abord de O en N_i, point infiniment voisin de M_i le long de la ligne L_i, allant ensuite de N_i en N_i' en décrivant autour de M_i le contour infiniment petit C_i et revenant enfin de N_i' en O par la ligne L_i'.

Je remarque d'abord que l'intégrale J correspondant au contour infiniment petit C_i est infiniment petite. En effet, cette intégrale peut s'écrire, comme nous l'avons vu au paragraphe précédent,

$$J = \int\int \frac{P\,dx\,dy}{F_z'} = \int\int \frac{P\,dy\,dz}{F_x'} = \int\int \frac{P\,dz\,dx}{F_y'}.$$

Les trois dénominateurs F_x', F_y', F_z' ne sont pas nuls à la fois, si le point singulier n'est pas un point conique; de sorte que nous pouvons toujours supposer que la fonction sous le signe $\int\int$ reste finie; et le contour d'intégration est infiniment petit.

Nous excluons ainsi le cas où le point singulier serait un point conique et aussi celui où P *deviendrait précisément infini au point singulier* M_i.

Mais le premier cas ne se présentera pas si la surface (1) est normale, et si l'autre se présentait, c'est-à-dire si le plan tangent $\alpha x + \beta y + \gamma z = \varepsilon$ correspondant au point M_i touchait la surface (1) en un point où P serait infini, il suffirait de remplacer ce plan par un plan tangent infiniment voisin pour que la difficulté ne se présentât plus.

Il reste donc

$$J = \int \int_{L_i k} + \int \int_{L_i k'}, \tag{3}$$

la première intégrale étant prise en parcourant la ligne L_i dans le sens direct, et la seconde en parcourant cette même ligne dans le sens inverse, mais après que le cycle k_2 se serait changé dans le cycle $k_2 + k_1$, et le cycle k dans le cycle k',

$$k' = k + \lambda_2 k_1.$$

On a donc simplement

$$J = -\lambda_2 \int \int_{L_i k_1},$$

l'intégrale étant prise depuis O jusqu'à M_i en suivant la ligne L_i et en remplaçant le cycle à une dimension k par le cycle k_1. Nous aurons donc

$$J = -\lambda_2 j(L_i), \tag{4}$$

où

$$j(L_i) = \int_0^{M_i} (A\,dx + B\,d\beta + C\,d\gamma - E\,d\varepsilon),$$

l'intégrale étant prise le long de la ligne L_i; les intégrales A, B, C, E ont le même sens que dans le paragraphe précédent; elles sont supposées prises le long du cycle k_1; le cycle k_1 est choisi parce que c'est celui qui s'évanouit au point singulier M_i; c'est, pour prendre le langage du Mémoire cité (*Journal de Liouville*, 5e série, t. VIII, 1902, p. 191), le cycle *évanouissant* relatif à M_i.

Les périodes de l'intégrale double J sont donc des combinaisons linéaires à coefficients entiers des intégrales $j(L_i)$. D'autre part, quand la ligne L_i allant

de O en M_i se déforme d'une manière continue en même temps que se déplace le point M_i et de telle façon qu'elle ne passe jamais par aucun point singulier, son extrémité M_i exceptée; dans ces conditions, dis-je, l'expression $j(L_i)$ est une constante.

Si le point M_i correspond à un plan tangent double ou triple, il y aura deux ou trois cycles évanouissants correspondant aux deux ou trois points de contact de ce plan avec la surface; l'intégrale $j(L_i)$ sera donc susceptible de deux ou trois valeurs entre lesquelles il faudra distinguer. Il en sera de même si le point M_i correspond à un plan tangent d'inflexion; seulement les deux cycles évanouissants correspondront alors à un même point de contact. A part cela, aucune différence avec ce qui se passe pour un plan tangent ordinaire.

Supposons maintenant que l'on prenne $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = 1$, de telle sorte que le plan (3 *bis*) se réduise au plan $y = \varepsilon$; on étudie ainsi les sections successives de la surface par des plans parallèles à $y = 0$; c'est le procédé qu'a employé M. Picard dans son Ouvrage et j'ai suivi son exemple dans le Mémoire cité.

Marquons dans le plan des y l'origine O correspondant au plan initial $y = 0$, et les points singuliers M_1, M_2, ..., M_q correspondant aux plans $y = y_1$, $y = y_2$, ..., $y = y_q$ qui touchent la surface (1). Joignons OM_1, OM_2, ..., OM_q par des droites. Je considère une ligne L_i dont tous les points satisfont aux conditions $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = 1$; dans ce cas ε est seul variable et, comme notre plan (3 *bis*) a précisément pour équation $y = \varepsilon$, nous pouvons représenter la ligne L_i sur le plan des y. Je dis que l'intégrale $j(L_i)$ sera une combinaison linéaire à coefficients entiers des intégrales

$$j(OM_1), \quad j(OM_2), \quad \ldots, \quad j(OM_q)$$

correspondant aux droites OM_i.

En effet, prolongeons les droites $OM_1, OM_2, \ldots, OM_q$ jusqu'à l'infini; nous pourrons considérer les prolongements $M_i\infty$ des droites OM_i comme des coupures.

Cela posé, la ligne L_i, tracée dans le plan des y, ira du point O au point M_i en traversant un certain nombre de coupures; supposons pour fixer les idées qu'elle traverse successivement les coupures $M_1\infty$ et $M_2\infty$; il faut en outre préciser le sens dans lequel elle les traverse; je supposerai, par exemple, que ce soit dans le sens direct, c'est-à-dire dans le même sens qu'un mobile qui décrirait un cercle de rayon très grand dans le sens opposé à celui des aiguilles d'une montre. Alors un mobile qui décrirait le *lacet* tout entier, c'est-à-dire L_i, puis

le contour infiniment petit C_i, puis de nouveau L_i en sens contraire, coupera successivement les coupures $M_1\infty$, $M_2\infty$, $M_i\infty$ dans le sens direct, puis $M_2\infty$ et $M_1\infty$ dans le sens rétrograde. Le lacet primitif pourra donc être remplacé par cinq lacets rectilignes consécutifs, enveloppant respectivement les points singuliers M_1, M_2, M_i, M_2, M_1 et décrits les trois premiers dans le sens direct, les deux autres dans le sens rétrograde. Les intégrales correspondant à ces cinq lacets seront respectivement égales à

$$j(OM_1), \quad j(OM_2), \quad j(OM_i), \quad j(OM_2), \quad j(OM_1)$$

multipliées par des coefficients entiers convenables. La détermination de ces coefficients, dont quelques-uns d'ailleurs peuvent être nuls, dépend de la façon dont se transforment les cycles fondamentaux $k_1, k_2, \ldots, k_{2p}$ quand on tourne autour des points singuliers.

Nous verrons plus loin comment on peut faire une réduction analogue, dans le cas où la ligne L_i n'est pas telle que tous ses points satisfassent aux conditions $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = 1$. Mais, pour le moment, nous remarquerons que, dans le Mémoire cité du *Journal de Liouville*, j'ai démontré au paragraphe 3 que, sous certaines hypothèses, toutes les périodes de l'intégrale double J sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers des expressions $j(OM_i)$; les points M_i correspondent en effet aux points A_i du Mémoire cité et les chemins rectilignes OM_i aux coupures OA_j.

Les combinaisons linéaires qui correspondent aux périodes de l'intégrale double sont les suivantes. Soit k_i le cycle évanouissant, correspondant à OM_i; toute combinaison

$$\sum \nu_i j(OM_i),$$

où les ν_i sont des entiers tels que

$$\sum \nu_i k_i = 0, \tag{5}$$

correspondra à une période

Dans ce même Mémoire, à la fin du même paragraphe, j'ai montré que quelques-unes de ces combinaisons sont nulles; ce sont celles qui sont engendrées de la façon suivante : je suppose qu'on décrive successivement les différents lacets

$$OM_1, \quad OM_2, \quad \ldots, \quad OM_q$$

dans le sens direct et dans l'ordre où ces différents segments rectilignes se succèdent autour de O; de telle façon que le contour total se compose d'une ligne

fermée qui enveloppe tous les points singuliers M_i sans couper aucun des segments OM_i. On part d'ailleurs du point initial avec un cycle à une dimension quelconque k, et l'on revient, par conséquent, au point final avec ce même cycle. La combinaison correspondant à ce chemin sera nulle.

Mais il est nécessaire de revenir sur ce point; car, dans le Mémoire cité, j'ai supposé, entre autres hypothèses, qu'aucun des points singuliers A_i n'est rejeté à l'infini. Or, si l'on considère une surface

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

qui soit la plus générale de son degré; puis la section de cette surface par le plan $(3\,bis)\ y = \varepsilon$ qui est la courbe plane C,

$$F(x, \varepsilon, z) = 0.$$

On peut dire que pour $\varepsilon = \infty$ cette courbe présente des singularités, et l'on pourrait, par conséquent, se demander si les résultats ne s'en trouvent pas modifiés.

Or le contour que nous venons de définir peut être remplacé par le suivant : la variable y décrit dans son plan un cercle de rayon très grand; en même temps la surface de Riemann correspondant à la courbe plane C se déforme d'une manière continue; nous avons sur cette surface un cycle fermé qui varie également d'une manière continue et revient à sa position initiale en même temps que la variable y; les variables x et z sont assujetties à rester sur ce cycle.

Supposons d'abord que P soit un polynome entier de degré $m - 3$ en x, y, z, de telle façon que l'intégrale simple

$$\int \frac{P\,dx}{F_z'} \tag{6}$$

soit une intégrale abélienne de première espèce.

Posons

$$x = uy, \qquad z = vy.$$

Nous voyons que P deviendra un polynome d'ordre $m - 3$ et F_z' un polynome d'ordre $m - 1$ en y, de telle sorte que $\frac{P}{F_z'}$ pourra se développer suivant les puissances décroissantes de y et que le premier terme sera un terme en $\frac{1}{y^2}$. Le coefficient de ce terme sera d'ailleurs

$$\frac{P_0(u, 1, v)}{F_{0v}'(u, 1, v)}$$

en désignant par $P_0(x, y, z)$, $F_0(x, y, z)$, $F_{0v}'(x, y, z)$ les termes du degré

le plus élevé en y de $P(x, y, z)$, $F(x, y, z)$, $F_z'(x, y, z)$. J'écrirai simplement $\frac{P_0}{F_0'}$ en supprimant l'indice v.

Nous avons d'autre part

$$dx\,dy = y\,du\,dy,$$

d'où

$$\int\int \frac{P\,dx\,dy}{F_z'} = \int\int du\,dy \left(\frac{1}{y}\frac{P_0}{F_0'} + \dots\right).$$

Le premier terme est seul sensible; il reste donc

$$\int\int \frac{dy}{y}\frac{P_0\,du}{F_0'} = 2i\pi \int \frac{P_0\,du}{F_0'}, \tag{7}$$

$\int \frac{P_0\,du}{F_0'}$ est une intégrale abélienne relative à la courbe algébrique

$$F_0(u, 1, v) = 0. \tag{8}$$

Ainsi, notre période, qui est égale à l'expression (7), n'est pas nulle dans le cas qui nous occupe, mais elle a le caractère d'une période polaire et non d'une période cyclique.

Il en sera encore de même si P est de la forme $\frac{Q}{x - a}$, Q étant un polynome d'ordre $m - 2$, c'est-à-dire si l'intégrale (6) a la forme d'une intégrale abélienne de troisième espèce ayant tous ses infinis à distance finie. Nous laisserons de côté, pour le moment, les cas où cette intégrale abélienne (6) aurait des infinis à distance infinie.

IV. — Théorie générale.

J'ai cité plusieurs fois le travail que j'ai fait insérer dans le *Journal de Liouville*, comme 4e Complément à l'*Analysis situs*; je crois devoir non seulement en rappeler ici les résultats, mais les présenter sous une forme nouvelle, les différences portant non seulement sur le mode d'exposition, mais sur une convention fondamentale que je crois préférable de modifier. Quand on s'occupe des propriétés d'une surface algébrique au point de vue de l'*Analysis situs*, on s'aperçoit promptement que la question peut avoir un sens très différent selon la convention que l'on adoptera au sujet des points à l'infini. A l'égard d'une surface $F(x, y, z) = 0$, nous pouvons envisager plusieurs sortes de points à l'infini; nous avons d'abord ceux où x, y et z sont infinis à la fois, et ceux où deux seulement de ces trois coordonnées sont infinies. Je néglige ceux où deux

coordonnées sont finies et une infinie; ils n'existeraient en effet que, si la surface étant de degré m, par exemple, le polynome F ne contenait pas de terme en z^m, et ce cas, évidemment, ne se présentera pas en général.

On peut ne pas considérer comme distincts deux points x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 toutes les fois que les six coordonnées de ces deux points sont infinies, et alors même que l'on n'aurait pas $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$; on regarderait, au contraire, ces deux points comme distincts si, par exemple, x_1, y_1, x_2, y_2 étaient infinis, z_1 et z_2 finis et z_1 différent de z_2. C'est le premier point de vue.

Au second point de vue, on regardera deux points à l'infini comme distincts toutes les fois que l'on n'aura pas

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Si, au contraire, z_1 et z_2 sont finis, le rapport $\frac{x_1}{y_1}$ sera égal au rapport $\frac{x_2}{y_2}$ puisqu'on l'obtiendra en égalant à zéro l'ensemble des termes de F qui sont de degré m en x et y; d'autre part, les rapports $\frac{z_1}{y_1}$ et $\frac{z_2}{y_2}$ seront égaux entre eux et égaux à zéro, et les deux points devront être regardés comme non distincts, contrairement au premier point de vue, alors même que z_1 ne serait pas égal à z_2.

Dans le Mémoire cité, je m'étais placé au premier point de vue, et c'est également ce que M. Picard avait fait le plus souvent. Ce premier point de vue peut être le plus avantageux dans certains cas, mais il a l'inconvénient de n'être pas *projectif*, ce qui m'empêcherait d'appliquer les principes des deux paragraphes précédents et j'adopterai le second.

Si nous considérons y comme une constante, l'équation

$$F(x, y, z) = 0$$

définira une courbe algébrique et par conséquent une surface de Riemann que j'appelle $S(y)$. J'observe d'abord que deux surfaces de Riemann $S(y_1)$ et $S(y_2)$ ont un certain nombre de points communs.

Soit, en effet, $F_m(x, 0, z)$ l'ensemble des termes de F qui sont d'ordre m en x et en z; l'équation $F_m(x, 0, z) = 0$ définira m valeurs du rapport $\frac{x}{z}$, qui correspondront aux directions asymptotiques de la courbe algébrique

$$F(x, y_1, z) = 0,$$

directions qui seront d'ailleurs les mêmes que celles de la courbe

$F(x, y_2, z) = 0$; à ces m directions asymptotiques correspondront m points à l'infini sur la surface $S(y_1)$ et de même m points à l'infini sur la surface $S(y_2)$. D'après la convention que nous venons de faire, *les m points à l'infini de* $S(y_1)$ *ne différeront pas de ceux de* $S(y_2)$.

Pour $y = \infty$, nous avons la surface de Riemann $S(\infty)$ dont les différents points correspondent aux différents systèmes de valeurs des rapports de x, y et z satisfaisant à l'équation

$$F_m(x, y, z) = 0,$$

où F_m est l'ensemble des termes de F de degré m en x, y et z; ou, en d'autres termes, aux différents points à l'infini de la surface $F = 0$. Parmi les points de la surface $S(\infty)$, nous distinguerons ceux qui sont donnés par

$$F_m(x, 0, z) = 0,$$

et qui lui sont communs avec les autres surfaces $S(y_1)$, $S(y_2)$, ...

Pour certaines valeurs de y, le genre de la surface $S(y)$ s'abaisse, ce sont celles qui correspondent à un plan $y = \text{const.}$ tangent à la surface $F = 0$. Soient

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_k$$

ces valeurs singulières de y.

Il faut maintenant que je définisse ce que j'appelle la *projection* d'une surface $S(y_1)$ sur une autre surface $S(y_2)$ *quand je suppose que* y_1 *et* y_2 *ont même argument*. A chaque point de $S(y_1)$ je ferai correspondre un point de $S(y_2)$ et inversement, et cela d'une façon biunivoque, et je dirai que l'un de ces points est la projection de l'autre. Je m'arrangerai de façon que deux points infiniment voisins aient pour projections deux points infiniment voisins et, par conséquent, qu'une courbe continue se projette suivant une courbe continue et une courbe fermée suivant une courbe fermée. De plus, je m'arrangerai de façon que les m points à l'infini qui sont communs aux deux surfaces soient leur propre projection. Il est clair que toutes ces conditions peuvent être remplies.

Imposons-nous maintenant une condition de plus. Soient y_1, y_2, y'_1, y'_2 quatre valeurs de y; y_1 et y_2 d'une part, y'_1 et y'_2 d'autre part ont même argument; d'ailleurs y_1 diffère très peu de y'_1 et y_2 de y'_2. Je considérerai alors deux points M_1 et M'_1 des deux surfaces $S(y_1)$ et $S(y'_1)$ et leurs projections M_2 et M'_2 sur $S(y_2)$ et $S(y'_2)$, et *je supposerai que, si* M_1 *et* M'_1 *sont infiniment voisins, il en est de même de* M_2 *et* M'_2.

Cette condition ne peut pas toujours être remplie. Traçons dans le plan

des y le quadrilatère rectiligne $y_1y'_1y'_2y_2$, dont deux côtés $y_1y'_1$ et y'_2y_2 sont infiniment petits. Si à l'intérieur de ce quadrilatère se trouve l'un des points singuliers $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$, la condition ne pourra être remplie. Nous joindrons donc dans le plan des y l'origine O aux différents points singuliers ε_i; les droites ainsi tracées partageront le plan en secteurs et la condition devra être remplie à l'intérieur de chacun des secteurs. Si maintenant y_1 et y'_1, et, par conséquent, y_2 et y'_2 n'appartiennent pas à un même secteur, la condition pourra ne pas être remplie; elle le sera si $|y_1|$ et $|y_2|$ (et par conséquent $|y'_1|$ et $|y'_2|$) sont tous deux plus grands ou tous deux plus petits que $|\varepsilon_i|$ (ε_i étant le point singulier qui se trouve entre les deux rayons infiniment voisins Oy_2y_1 et Oy'_2x_1); elle ne le sera pas dans le cas contraire.

Cela posé, envisageons un cycle fermé à deux dimensions quelconques de la variété V à quatre dimensions dont les différents points réels correspondent aux différents points réels et imaginaires, *regardés comme distincts*, de la surface $F = 0$. (Pour expliquer ce qu'on entend par regardés comme distincts, je rappellerai la convention que nous venons de faire au sujet des points à l'infini et, d'autre part, que si la surface a une courbe double, aux deux nappes qui se coupent en un point de cette courbe, doivent correspondre deux points distincts de V.) Soit K ce cycle fermé à deux dimensions.

Considérons un point de ce cycle, et marquons sur le plan des y la valeur correspondante de y; à chaque point de K correspondra donc ainsi un point du plan des y, et inversement à certains points de ce plan pourront correspondre un ou plusieurs points du plan de K. Nous sommes ainsi conduits à partager le plan des y en régions diverses, les régions R_0 aux points desquelles ne correspond aucun point y, les régions R_1 aux points desquelles correspond un seul point y, les régions R_2 aux points desquelles correspondent deux points y, etc.

Cela suppose toutefois que le cycle K ne passe par aucun des m points à l'infini communs à toutes les surfaces $S(y)$, sans quoi la valeur correspondante de y serait indéterminée. S'il en était autrement, on déformerait légèrement le cycle K de façon qu'il cesse de passer par ces points.

Ce n'est pas tout, ce cycle K est tel que, dans le voisinage de chacun de ces points, les parties réelles et imaginaires de x, y, z peuvent s'exprimer en fonctions holomorphes de deux paramètres u et v; si nous considérons donc deux domaines à deux dimensions faisant partie de ce cycle, et de telle façon que dans le premier tout s'exprime en fonction de u et v, et dans le second en fonction

de deux autres paramètres u' et v'; si ces deux domaines ont une partie commune, le signe du déterminant fonctionnel de u et v par rapport à u' et v' sera constant dans toute cette partie commune.

Si nous supposons, comme il convient, que le cycle K *est bilatère*, nous pourrons supposer sans restreindre la généralité que ces paramètres u, v, u', v' ont été choisis dans chaque domaine de telle façon que ce déterminant fonctionnel soit toujours positif.

Soit alors Δ le déterminant fonctionnel de u et v par rapport à y_1 et y_2, en désignant pour un instant par y_1 et y_2 les parties réelle et imaginaire de y. Le signe de ce déterminant ne changera pas, d'après la convention que nous venons de faire, quand on passera de u et v à deux autres paramètres u' et v'. Soit alors un point de l'une des régions R_n dont nous venons de parler; à ce point correspondront n points du cycle K; je suppose qu'il y en ait p pour lesquels Δ soit positif et $n-p$ pour lesquels Δ soit négatif. Eh bien, *l'excès* $2p-n$ *sera constant pour tous les points du plan des* y *et pour toutes les régions* R_0, R_1, ...

D'où l'on peut conclure que le nombre n relatif aux diverses régions R_n est constamment de même parité. S'il y a des régions R_0, l'excès $2p-n$ est constamment nul.

Nous examinerons d'abord le cas où le point $y=0$ et le point $y=\infty$ appartiennent l'un et l'autre à une région R_0. Coupons notre cycle K par la variété

$$\arg y = \text{const.}$$

Cette variété sera représentée sur le plan des y par une demi-droite allant de l'origine à l'infini. Nous remarquerons que cette demi-droite, partant de l'intérieur d'une région R_0, traverse des régions R_n ($n>0$) et aboutit finalement à l'intérieur d'une région R_0. Si donc nous envisageons les points qui appartiennent à la fois à cette variété et au cycle K, le module de y variera pour ces points entre un certain minimum et un certain maximum. *Il en résulte que l'intersection de cette variété et de* K *sera un cycle fermé à une dimension* que j'appelle (K, ω), ω étant l'argument constant de y.

Tous les points de (K, ω) appartiennent à une surface de Riemann $S(y)$, où $y=\rho e^{i\omega}$ a un argument constant ω; nous pouvons donc les *projeter* sur l'une quelconque d'entre elles $S(\rho_0 e^{i\omega})$ et, par exemple, sur $S(o)$: j'appellerai (K, ω, o) la projection du cycle (K, ω) sur $S(o)$. Comparons maintenant (K, ω, o) à (K, ω', o); si ω diffère très peu de ω', il résulte des conventions

faites plus haut que (K, ω, o) différera très peu de (K, ω', o), *à moins que l'argument de l'un des points singuliers* ε_k *ne soit compris entre* ω *et* ω'. Si nous adoptons la notion de l'*homologie*, nous aurons donc, sur la surface $S(o)$, l'homologie

$$(K, \omega, o) \sim (K, \omega', o)$$

et elle subsistera quand même ω et ω' différeront d'une quantité finie (puisque cette homologie signifie précisément que l'on peut passer d'un cycle à l'autre par déformation continue); elle subsistera, dis-je, à moins que l'argument de l'un des points singuliers ε_k ne soit compris entre ω et ω'; ou, en d'autres termes, toutes les fois que les demi-droites correspondant aux arguments ω et ω' appartiennent à un même secteur (si l'on suppose le plan divisé en secteurs par les droites $O\varepsilon_k$ et leurs prolongements).

Comparons maintenant les cycles (K, ω, o), (K, ω', o) en admettant qu'il y ait un point ε_k dont l'argument soit compris entre ω et ω'. Projetons les deux cycles (K, ω) et (K, ω') non plus sur $S(o)$, mais sur les deux surfaces de Riemann $S(\rho_0 e^{i\omega})$ et $S(\rho_0 e^{i\omega'})$ qui diffèrent très peu l'une de l'autre; soient H et H' ces deux projections; ce sont deux cycles appartenant respectivement aux deux surfaces $S(\rho_0 e^{i\omega})$ et $S(\rho_0 e^{i\omega'})$. Soit H'', un cycle de la première surface qui diffère infiniment peu du cycle H' lequel appartient à la deuxième surface, infiniment peu différente de la première. Quand ρ_0 décroîtra d'une manière continue de ∞ à o, H' et H'' et par conséquent H'' et $H - H''$ varieront d'une manière continue. Pour $\rho_0 = o$, nous aurons

$$(K, \omega, o) \sim (K, \omega', o) + H - H''.$$

Faisons maintenant $\rho_0 = |\varepsilon_k|$; je dis que pour cette valeur de ρ_0 les cycles H, H' et H'' différeront infiniment peu l'un de l'autre. En effet, dans le cycle (K, ω), nous distinguerons deux parties, que nous appellerons H et H_1; la première comprendra les points tels que $|y| < |\varepsilon_k|$, et la seconde les points tels que $|y| > |\varepsilon_k|$. De même dans le cycle (L, ω') nous distinguerons deux parties H' et H'_1. Alors H différera infiniment peu de H' et H_1 de H'_1. Projetons H et H' sur les surfaces $S(\rho_0 e^{i\omega})$, $S(\rho_0 e^{i\omega'})$, où $\rho_0 = |\varepsilon_k| - \delta$, δ étant infiniment petit et positif; les projections seront infiniment peu différentes. Si nous considérons en effet deux points très peu différents de H et H' pour lesquels y a respectivement pour valeur $\rho_0 e^{i\omega}$, $\rho_0 e^{i\omega'}$, $(\rho < |\varepsilon_k|)$ et leurs projections pour lesquelles y a pour module $|\varepsilon_k| - \delta$, le quadrilatère rectiligne formé par ces quatre valeurs de y ne contient pas ε_k à son intérieur.

Donc les projections de ces deux points différeront très peu d'après les conventions faites plus haut; les projections de H et de H' sur les surfaces $\rho_0 = |\varepsilon_k| - \delta$ et par conséquent sur les surfaces infiniment voisines $\rho_0 = |\varepsilon_k|$ différeront donc très peu. On le démontrerait de même pour les projections de H_1 et de H'_1.

Donc, pour $\rho_0 = |\varepsilon_k|$, H et H' diffèrent très peu; le cycle $H - H''$ est infiniment petit, c'est un cycle évanouissant relatif au point singulier ε_k.

Nous arrivons donc à la conclusion suivante :

Si ω *et* ω' *n'appartiennent pas à un même secteur, mais à deux secteurs contigus séparés par la droite* $O\varepsilon_k$, *les cycles*

$$(K, \omega, o), \quad (K, \omega', o)$$

ne sont plus homologues en général, mais leur différence est homologue à un cycle évanouissant relatif au point singulier ε_k.

Pour aller plus loin, précisons davantage la notion de *projection*. Nous joignons l'origine O par des segments de droite $O\varepsilon_k$ aux différents points singuliers ε_k et nous regardons ces segments comme des coupures. Tant que y ne franchira pas ces coupures, la surface $S(y)$ restera *homéomorphe* à elle-même; nous pouvons donc établir entre les points des deux surfaces $S(y_1)$, $S(y_2)$ quelconques une correspondance biunivoque telle que, lorsqu'un point M variera d'une manière continue sur une surface $S(y_1)$ et qu'en même temps y variera d'une façon continue mais *sans franchir les coupures*, le point M' de $S(y)$ qui correspond à M variera d'une façon continue. Seulement, si l'on a deux points y_1 et y_2 infiniment voisins l'un de l'autre, mais de part et d'autre d'une coupure, et deux points M_1 et M_2 se correspondant sur $S(y_1)$ et $S(y_2)$, ces deux points ne seront pas, en général, infiniment voisins. C'est cette correspondance qui servira à définir la *projection* en se restreignant alors aux cas où y_1 et y_2 ont même argument.

Considérons maintenant une coupure $O\varepsilon_k$ et le point singulier correspondant ε_k. Soient y_1 et y_2, y'_1 et y'_2 deux couples de points; je suppose que y_1 et y_2 soient infiniment voisins et de part et d'autre de la coupure et qu'il en soit de même pour le second couple. Soient M_1 un point de $S(y_1)$ et M_2 un point de $S(y_2)$, infiniment voisin de M. D'après ce que nous venons de voir, M_1 et M_2 ne peuvent être correspondants. Soit maintenant M'_1 le point de $S(y'_1)$ correspondant de M_1, et M'_2 le point de $S(y'_2)$ correspondant de M_2. Les deux points

M_1 et M_2 seront infiniment voisins, il est toujours possible de le supposer. En revanche il y a une chose que nous ne pourrions supposer sans nous lancer dans de grosses difficultés. Soit η_i un point de la coupure; considérons la surface de Riemann correspondante, nous l'appellerons $S(\eta_i)$ si y a atteint η_i par l'une des lèvres de la coupure, et $S(\eta_i')$ si y a atteint η_i par l'autre lèvre. Les deux surfaces $S(\eta_i)$ et $S(\eta_i')$ sont identiques; mais le point de cette surface qui correspond à un point donné d'une autre surface $S(y)$ ne sera pas le même selon qu'il sera regardé comme appartenant à $S(\eta_i)$ ou à $S(\eta_i')$. Il en résulte qu'il y a une correspondance entre les points de $S(\eta_i)$ et ceux de $S(\eta_i')$; on peut se demander si cette correspondance est réciproque; mais on voit bientôt qu'il n'est pas permis en général de supposer cette réciprocité.

Différents cas sont à distinguer suivant la nature du point singulier ε_k; le plus simple est celui où le plan $y=\varepsilon_k$ est tangent à la surface $F=0$ et la coupe suivant une courbe présentant un point double ordinaire à tangentes séparées. Que pouvons-nous dire alors de la correspondance entre les points de $S(\eta_i)$ et de $S(\eta_i')$; soit p le genre de la surface $S(\eta_i)$; soient $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{2p}$ un système de cycles fondamentaux de $S(\eta_i)$; soient $\Omega_1', \Omega_2', \ldots, \Omega_{2p}'$ les cycles correspondants de $S(\eta_i')$; on verrait qu'on peut choisir les cycles fondamentaux de telle façon que l'on ait

$$\Omega_1'=\Omega_1+\Omega_2, \qquad \Omega_2'=\Omega_2, \qquad \Omega_3'=\Omega_3, \qquad \ldots.$$

Alors Ω_2 est un cycle *évanouissant* relatif au point singulier ε_k.

Pour nous rendre compte de la correspondance entre les points de $S(\eta_i)$ et de $S(\eta_i')$, nous pouvons supposer que dans un espace E à six dimensions, par exemple, on construise la variété V à quatre dimensions, et qu'on se soit arrangé pour que cette variété n'ait pas de point double et que tous ses points soient à distance finie. Les points de V qui correspondent à une valeur donnée de y formeront alors une surface *fermée* à deux dimensions de l'espace E qui n'aura en général aucun point singulier et qui sera notre $S(y)$. Cependant la surface $S(\varepsilon_k)$ admettra un point conique P. Si η_i est très voisin de ε_k, la surface $S(\eta_i)$, identique à $S(\eta_i')$, présentera donc un *étranglement* dans le voisinage du point P. Nous pourrons tracer sur $S(\eta_i)$ une petite ligne fermée qui embrasse la partie la plus étroite de cet étranglement (tel le cercle de gorge sur un hyperboloïde de révolution à une nappe). Ce sera notre cycle évanouissant Ω_2; nous pourrons tracer dans le voisinage du point P une série de cycles fermés analogues sur $S(\eta_i)$ tels que seraient les différents parallèles sur un hyperboloïde de révolution; nous pouvons ensuite définir un point quelconque

de $S(\eta_i)$, *au moins dans la partie étranglée voisine du point* P, par deux coordonnées ρ et ω, choisies de telle sorte que ρ soit constant tout le long de chacun de ces cycles fermés, et que ω augmente de 2π quand on fait le tour d'un de ces cycles. Nous pourrons alors admettre la loi de correspondance suivante : dans la partie non voisine du point P, ou toutes les fois que ρ ne sera pas compris entre ρ_0 et ρ_1, chaque point de $S(\eta_i)$ sera son propre correspondant. Si ρ est compris entre ρ_0 et ρ_1, nous ferons correspondre au point ρ, ω de $S(\eta_i)$ le point ρ, $\omega+\varphi(\rho)$ de $S(\eta_i')$; et $\varphi(\rho)$ sera une fonction continue de ρ constamment croissante, égale à 0 pour $\rho=\rho_0$ et à 2π pour $\rho=\rho_1$. En d'autres termes nous ferons subir à la partie étranglée comprise entre les cclyes $\rho=\rho_0$ et $\rho=\rho_1$ une torsion progressivement croissante d'un cycle à l'autre, de telle façon que cette torsion, nulle pour $\rho=\rho_0$, atteigne un tour complet pour $\rho=\rho_1$, ce qui permet le raccordement avec la partie non étranglée, supposée non déformée.

A mesure que η_i s'éloignera de ε_k, l'étranglement sera de moins en moins prononcé et nous serons conduits à étendre la déformation à une partie de plus en plus étendue de la surface; cette loi de correspondance restera néanmoins arbitraire dans une très large mesure.

Ces conventions faites, projetons maintenant le cycle (K, ω) sur la surface $S(\eta_i)$ en supposant que ω soit l'argument de ε_k; nous obtiendrons deux projections différentes, selon que l'on supposera que cet argument ω a été atteint par l'une ou par l'autre lèvre de la coupure, c'est-à-dire selon que l'on projettera sur $S(\eta_i)$ ou sur $S(\eta_i')$. Soient (K, ω, η_i), (K, ω, η_i') ces deux projections. Soit M un point de (K, ω); N sa projection sur $S(\eta_i)$, N' sa projection sur $S(\eta_i')$. N et N' seront identiques si l'y du point M est plus petit en valeur absolue que ε_k. Dans le cas contraire, ces deux points seront *correspondants* conformément à la loi de correspondance adoptée plus haut. La différence des deux cycles $(K, \omega, \eta_i)-(K, \omega, \eta_i')$ sera alors un cycle de $S(\eta_i)$ homologue à zéro, au cycle évanouissant Ω_2, ou à un de ses multiples.

L'ensemble des cycles $(K, \omega, \eta_i)-(K, \omega, \eta_i')$ quand on fait varier η_i depuis zéro jusqu'à ε_k engendrera une variété $\Delta(\varepsilon_k)$ à deux dimensions. Le cycle $(K, \omega, \eta_i)-(K, \omega, \eta_i')$ est toujours homologue à un multiple de Ω_2; supposons, par exemple, à Ω_2; il se réduit au point P pour $\eta_i=\varepsilon_k$; mais, pour $\eta_i=0$, il ne se réduit pas à un point, mais à un cycle de la surface $S(0)$ qui est encore homologue à Ω_2 et que nous pourrons appeler

$$(K, \omega, 0)-(K, \omega, 0').$$

La variété $\Delta(\varepsilon_k)$, que nous pourons appeler un *doigt* à cause de sa forme, n'est donc pas fermée, mais a pour frontière le cycle

$$(K, \omega, o) - (K, \omega, o').$$

Mais, jusqu'ici, nous avons supposé que Ω_2 n'est pas homologue à zéro, c'est-à-dire que le cycle infiniment petit que l'on peut tracer sur $S(\eta_i)$ quand η_i est très voisin de ε_k ne partage pas cette surface en deux régions distinctes. Mais le cas contraire peut aussi se présenter; il arrive alors que la surface $S(\varepsilon_k)$ se décompose en deux surfaces distinctes, c'est-à-dire que la courbe intersection de $F = o$ et de $y = \varepsilon_k$ est décomposable.

Dans ce cas, le cycle $(K, \omega, \eta_i) - (K, \omega, \eta_i')$ décomposera la surface $S(\eta_i)$ en deux régions que nous appellerons $S_1(\eta_i)$ et $S_2(\eta_i)$. Considérons la variété à trois dimensions engendrée par $S_1(\eta_i)$ quand η_i varie de zéro à ε_k; elle sera limitée d'une part par le doigt $\Delta(\varepsilon_k)$, par $S_1(o)$ qui est une partie de $S(o)$ et par $S_1(\varepsilon_k)$; de sorte que

$$\Delta(\varepsilon_j) \sim S_1(\varepsilon_k) - S_1(o).$$

Mais $S_1(\varepsilon_k)$ *n'est autre chose que la surface de Riemann relative à l'une des composantes de la courbe d'intersection de* $F = o$ *et* $y = \varepsilon_k$; ce qui nous fait comprendre la signification du doigt $\Delta(\varepsilon_k)$ dans ce cas particulier.

Revenons au cas général et reportons-nous à un paragraphe précédent, nous verrons que nous y avons défini une intégrale

$$j(L_i);$$

eh bien! cette intégrale n'est autre chose que l'intégrale prise le long du doigt $\Delta(\varepsilon_k)$ lorsque la ligne L_i parcourue par le point $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ est telle que α et γ soient constamment nuls, β égal à 1, et que ε varie avec un argument constant de zéro à ε_k.

Un autre cas est celui où le point singulier ε_k correspond à un point conique ordinaire de la surface $F = o$. Il arrive alors que les cycles

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p}$$

se changent en

$$\Omega_1 + 2\Omega_2, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p}$$

et non plus en $\Omega_1 + \Omega_2, \Omega_2, \ldots, \Omega_{2p}$. Ce que nous avons dit de la loi de correspondance subsiste; seulement la fonction $\varphi(\rho)$, qui croît constamment depuis $\rho = \rho_0$ jusqu'à $\rho = \rho_1$, au lieu de croître de zéro à 2π, croîtra de zéro à 4π. La définition du doigt $\Delta(\varepsilon_k)$ restera la même.

Il peut arriver ensuite que le plan $y = \varepsilon_k$ soit tangent à $F = o$ en deux points

différents. Alors la surface $S(\eta_i)$ très voisine de $S(\varepsilon_k)$ présente deux étranglements au lieu d'un, il y a deux cycles *évanouissants* au lieu d'un, d'où résulte la circonstance suivante :

Appelons *doigt simple* et désignons par $\Delta(\varepsilon_k, \Omega)$ la variété engendrée par un cycle de $S(\eta_i)$ qui reste homologue à Ω quand on fait varier η_i de zéro à ε_k. Notre doigt défini plus haut et que nous continuerons à appeler simplement $\Delta(\varepsilon_k)$ serait dans cette notation

$$\Delta[\varepsilon_k, (K, \omega, \eta_i) - (K, \omega, \eta_i')].$$

Dans les cas examinés plus haut, il n'y avait qu'un cycle évanouissant Ω_2, le cycle $(K, \omega, \eta_i) - (K, \omega, \eta_i')$ était toujours homologue à un multiple de Ω_2, soit à $n\Omega_2$, de sorte qu'on avait toujours

$$\Delta(\varepsilon_k) \sim n\,\Delta(\varepsilon_k, \Omega_2) + \sigma(o),$$

$\sigma(o)$ désignant une partie de $S(o)$.

Ici, au contraire, nous aurons deux cycles évanouissants Ω_2, Ω_2' et deux doigts simples $\Delta(\varepsilon_k, \Omega_2)$, $\Delta(\varepsilon_k, \Omega_2')$ et l'on aura, quel que soit le cycle K,

$$\Delta(\varepsilon_k) \sim n\,\Delta(\varepsilon_k, \Omega_2) + n'\Delta(\varepsilon_k, \Omega_2') + \sigma(o),$$

n et n' étant entiers, de sorte que $\Delta(\varepsilon_k)$ s'exprimera linéairement en fonction non plus d'un, mais de deux doigts simples.

Il peut arriver que l'un des cycles Ω_2 et Ω_2' qui correspondent aux deux étranglements soit homologue à zéro sur sa surface; soit, par exemple, Ω_2; dans ce cas la surface $S(\varepsilon_k)$ se décompose et le doigt simple $\Delta(\varepsilon_k, \Omega_2)$ est alors homologue à l'une des composantes de cette surface de Riemann, plus une région de $S(o)$. C'est ce que nous avons vu plus haut.

Nous examinerons un dernier cas, c'est celui où le plan $y = \varepsilon_k$ coupe $F = o$ suivant une courbe présentant un point de rebroussement. Il arrive alors que les cycles

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \Omega_3, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p}$$

se changent en

$$\Omega_1 + \Omega_2, \quad -\Omega_1, \quad \Omega_3, \quad \ldots \quad \Omega_{2p},$$

de sorte qu'il y a deux cycles évanouissants

$$\Omega_1, \quad \Omega_2$$

et par conséquent deux doigts simples $\Delta(\varepsilon_k, \Omega_1)$, $\Delta(\varepsilon_k, \Omega_2)$ dont le doigt $\Delta(\varepsilon_k)$ sera une combinaison linéaire à coefficients entiers.

V. — Formation des cycles.

Cela posé, reprenons le cycle K, menons les projetantes de ses différents points et prolongeons-les jusqu'à la surface S(o). Ces projetantes engendreront une variété W à trois dimensions. Quelles sont les frontières de cette variété? Ce sera d'abord le cycle K dont chaque point est l'extrémité de l'une des projetantes; ce sera ensuite une portion $S_2(o)$ de la surface S(o); car l'autre extrémité de chaque projetante se trouve sur cette surface. Mais ce n'est pas tout; deux projetantes issues de deux points infiniment voisins pourront ne pas rester infiniment voisines; si, par exemple, ω et ω' sont deux arguments infiniment voisins, l'un plus grand, l'autre plus petit que celui de ε_k, les projetantes issues des deux cycles à une dimension (K, ω) et (K, ω') se sépareront et s'étaleront sur le doigt $\Delta(\varepsilon_k)$, de sorte que ces doigts $\Delta(\varepsilon_k)$ complètent la frontière de W. Je puis donc écrire

$$K \sim S_2(o) + \sum \Delta(\varepsilon_k).$$

$\Delta(\varepsilon_k)$ a pour frontière $(K, \omega, o) - (K, \omega, o')$; $S_2(o)$ aura pour frontières

$$\sum [(K, \omega, o) - (K, \omega, o')]$$

de telle façon que la variété totale $S_2(o) + \sum \Delta(\varepsilon_k)$ soit, comme il convient, une variété fermée.

Soit J l'intégrale

$$\int\int \frac{P\,dx\,dy}{F_z'}$$

étendue à K. Elle sera égale à l'intégrale étendue à $S_2(o) + \sum \Delta(\varepsilon_k)$. Étendue à $S_2(o)$ elle est nulle, puisque, le long de cette surface, y est constant et que

$$dx\,dy = o.$$

L'intégrale étendue à $\Delta(\varepsilon_k)$ sera une combinaison linéaire des intégrales étendues aux différents doigts simples correspondants, intégrales que nous avons appelées $j(L_i)$.

L'intégrale J est donc une combinaison linéaire des intégrales $j(L_i)$, la ligne L_i étant telle que $\alpha = \gamma = o$, $\beta = 1$. C'est ce que nous avions annoncé dans un paragraphe antérieur.

J'ai dit que la surface $S_2(o)$ a pour frontière

$$\sum [(K, \omega, o) - (K, \omega, o')],$$

de sorte que

$$\sum [(K, \omega, o) - (K, \omega, o')] \sim o$$

sur la surface S(o). Supposons que les doigts simples correspondant à $\Delta(\varepsilon_k)$ soient $\Delta(\varepsilon_k, \Omega_1)$, $\Delta(\varepsilon_k, \Omega_2)$ et soient Ω_1^0 et Ω_2^0 les cycles correspondants de S(o).

Soit

$$\Delta(\varepsilon_k) \sim n_1 \Delta(\varepsilon_k, \Omega_1) + n_2 \Delta(\varepsilon_k, \Omega_2) + \sigma(o),$$

on aura sur S(o)

$$(K, \omega, o) - (K, \omega, o') \sim n_1 \Omega_1^0 + n_2 \Omega_2^0,$$

d'où

$$\sum (n_1 \Omega_1^0 + n_2 \Omega_2^0) \sim o$$

sur S(o).

Ainsi pour un cycle K *de l'espèce considérée, mais quelconque, on aura toujours*

$$K \sim S_2(o) + \sum n_i \Delta(\varepsilon_k, \Omega_i), \tag{1}$$

$S_2(o)$ *étant une partie de* S(o), n_i *un entier et* Ω_i *un des cycles évanouissants relatifs à* ε_k; *d'ailleurs les entiers* n_i *et les cycles* Ω_i *ne devront pas être quelconques, car on devra avoir sur* S(o)

$$\sum n_i \Omega_i^0 \sim o, \tag{2}$$

Ω_i^0 *étant le cycle de* S(o) *qui correspond à* Ω_i.

Mais nous nous sommes jusqu'ici restreints au cas où le point $y = o$, de même que le point $y = \infty$, correspondait à une région R_0 par rapport à K, c'est-à-dire où, pour aucun point du cycle C, on n'a ni $y = o$, ni $y = \infty$. Les cycles qui satisfont à cette condition pourront s'appeler de la *première sorte* et l'on voit que tout cycle de la première sorte peut être ramené à la forme (1).

Passons aux cycles de la *seconde sorte*, ce seront ceux où l'excès $2p - n$ dont il a été question au paragraphe IV du nombre des points pour lesquels le déterminant Δ est positif sur celui des points où ce déterminant est négatif, où cet excès, dis-je (constant pour tout le plan des y d'après ce que nous avons vu), est constamment nul. Je dis que tout cycle de la seconde sorte peut être ramené à la première.

Supposons en effet qu'un cycle K admette $2h$ points pour lesquels $y=0$, et que h de ces points soient tels que $\Delta>0$ et h tels que $\Delta<0$. Accouplons ces points deux à deux de telle façon qu'à un point tel que $\Delta>0$ soit associé un point tel que $\Delta<0$. Soient M_1 et M_2 un pareil couple de points. Entourons M_1 sur le cycle K d'un contour infiniment petit C_1; soit D_1 la portion très petite de K limitée par ce contour. Définissons de même autour de M_2 le contour C_2 et le domaine D_2; nous pourrons supposer que les valeurs de y correspondant aux différents points de C_1 soient les mêmes que celles qui correspondent aux différents points de C_2. Ces valeurs formeront alors dans le plan des y un contour fermé très petit Γ entourant le point $y=0$; je puis alors imaginer un contour mobile C à une dimension et un domaine mobile D à deux dimensions satisfaisant aux conditions suivantes : 1° le contour C sera la frontière de D; 2° C et D varieront d'une manière continue; 3° initialement C et D se confondront avec C_1 et D_1, et finalement avec C_2 et D_2; 4° les valeurs de y correspondant au contour C seront sur le contour fermé très petit Γ.

Dans ces conditions, C engendrera une variété à deux dimensions U, et D une variété à trois dimensions W. La frontière complète de W se composera de U, D_1 et D_2. Car W est assimilable à un cylindre dont U serait la surface latérale et D_1 et D_2 les deux bases; on aura donc

$$U\sim D_1+D_2,$$

d'où

$$K\sim K-D_1-D_2+U.$$

Aussi nous pouvons remplacer K par $K-D_1-D_2+U$; ce cycle a perdu ainsi les deux points M_1 et M_2 et n'a gagné aucun autre point pour lequel $y=0$, car sur U la variable y reste constamment sur le contour Γ, qui ne passe pas par $y=0$. En opérant de même sur tous les autres couples de points, nous ferons disparaître tous les points pour lesquels $y=0$. On ferait disparaître de même tous les points pour lesquels $y=\infty$, de sorte que le cycle se trouverait ramené à la première sorte.

Restent enfin les cycles pour lesquels l'excès $2p-n$ n'est pas nul. Le premier d'entre eux nous est fourni par la surface de Riemann

$$x=x_0,$$

où x_0 est une constante quelconque.

Pour cette surface, en effet, l'excès en question est égal au degré de la surface $F=0$, que j'appellerai m; car à un point $y=y_0$ du plan des y correspondront m points de la surface dont le z sera donné par l'équation

$$F(x_0, y_0, z)=0.$$

(Dans certains cas particuliers, le degré de cette équation en z est plus petit que celui de la surface $F=0$; c'est alors le degré de l'équation en z que nous appellerons m.)

Pour ces m points le déterminant Δ est positif; l'excès $2p-n$ est bien égal à m.

Soit donc K un cycle pour lequel cet excès soit égal à q et H le cycle $x=x_0$.

Alors le cycle $mK-qH$ aura pour excès zéro; il sera donc de la deuxième sorte et pourra être ramené à la première.

Donc le cycle mK sera homologue à q fois le cycle $x=x_0$ plus un cycle de la forme (1).

Ici nous apercevons une des différences les plus importantes entre les résultats qui ressortent de la convention adoptée ici et de celle qui était adoptée dans le Mémoire cité. Considérons l'intersection de la surface $F=0$ avec le plan

$$P_1=\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1z-\delta_1=0$$

et l'intersection de la même surface avec le plan

$$P_2=\alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2z-\delta_2=0.$$

A ces deux courbes correspondront deux surfaces de Riemann et, par conséquent, deux cycles à deux dimensions que j'appellerai K_1 et K_2. Je dis qu'on aura

$$K_1\sim K_2.$$

En effet, considérons les intersections de $F=0$ avec $P_1+\lambda P_2=0$, où λ est réel et positif, mais varie d'ailleurs de 0 à ∞; les points de ces différentes intersections engendreront une variété W à trois dimensions. Quelle est la frontière de W? Elle se compose des deux cycles K_1 et K_2, de sorte que

$$K_1\sim K_2.$$

Il ne pourrait y avoir de doute qu'en ce qui concerne les points à l'infini des courbes

$$F=P_1+\lambda P_2=0,$$

ce sont des points de la surface de Riemann $S(\infty)$; à chaque valeur de λ correspondent un nombre fini de ces points, de sorte que, quand λ variera de 0

à l'∞, ces points décriront une ligne à une dimension seulement qui ne saurait constituer une frontière pour W qui en a trois.

Ainsi le cycle K_1, le cycle K_2 sont homologues entre eux, homologues par conséquent aussi au cycle $S(o)$, ou au cycle $S(y)$ quel que soit y, ou au cycle $x = x_0$.

Il n'en serait pas de même avec la convention du Mémoire cité, car pour $P_1 = z$, par exemple, on pourrait faire tendre x et y vers l'infini et en même temps λ vers zéro, de telle sorte que P_2 tend vers l'infini et $-\lambda P_2 = P_1 = z$ tende vers une limite finie quelconque; or avec cette convention les points $x = y = \infty$, $z = z_1$ et $x = y = \infty$, $z = z_2$ seraient regardés comme distincts et engendreraient une variété à deux dimensions que j'appellerai Z quand z_1 et z_2 prendraient toutes les valeurs possibles. Alors la frontière de W se composerait non seulement de K_1 et de K_2, mais encore de Z.

On a donc alors

$$K_2 \sim K_1 + Z.$$

Soient de même X la variété à deux dimensions formée par les points où x est fini, y et z infinis, et Y celle qui est formée par les points où y est fini, x et z infinis; on aura alors

$$K_1 \sim X + Y$$

et

$$K_2 \sim X + Y + Z.$$

et cette homologie sera vraie pour tous les cycles K_2 engendrés par les points satisfaisant à l'équation $\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z - \delta_2 = o$, *à moins que deux des coefficients* $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ *ne soient nuls à la fois*, auquel cas le second membre devrait être remplacé par $X + Y$ si $\alpha_2 = \beta_2 = o$, par $X + Z$ si $\alpha_2 = \gamma_2 = o$, par $Y + Z$ si $\beta_2 = \gamma_2 = o$.

Je n'entrerai pas dans plus de détails et ne rechercherai pas s'il y a une homologie entre X, Y, Z, me contentant de faire remarquer que le cycle $x = x_0$ n'est pas homologue à $S(o)$.

Au contraire, avec la convention nouvelle, tous les cycles engendrés par les points satisfaisant à une équation de la forme

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \varepsilon$$

sont homologues entre eux et, en particulier, il en est ainsi de $S(o)$ et du cycle $x = x_0$.

Nous devons toutefois faire observer que, pour certaines valeurs des coefficients α, β, γ, ε, le cycle $\alpha x + \beta y + \gamma z = \varepsilon$ peut se décomposer et que, en

particulier, la surface de Riemann $S(y)$ peut se décomposer pour certaines valeurs de y.

Supposons donc que la surface $S(y)$, indécomposable pour la valeur la plus générale de y, se décompose en $S_1(\varepsilon_k)$ et $S_2(\varepsilon_k)$ pour $y = \varepsilon_k$. Il est clair qu'on aura alors

$$S(y) \sim S_1(\varepsilon_k) + S_2(\varepsilon_k),$$

mais qu'il n'y aura en général aucune homologie entre $S_1(\varepsilon_k)$ et $S_2(\varepsilon_k)$; nous avons vu d'ailleurs qu'il arrive alors que $S_1(\varepsilon_k)$ est homologue au doigt $\Delta(\varepsilon_k)$, plus une portion de $S(o)$.

VI. — Homologies entre les cycles.

Ainsi tous nos cycles peuvent se ramener à $S(o)$ ou à un cycle de la forme (1). Tous les cycles que l'on peut former ainsi sont-ils distincts? Toute combinaison de $S(o)$ et de cycles de la forme (1) est elle-même une combinaison de la forme (1) et, par conséquent, en tous ses points y est nul ou appartient à l'une des coupures. Est-il possible qu'une pareille combinaison soit homologue à zéro? C'est-à-dire existe-t-il une variété à trois dimensions W dont une pareille combinaison forme la frontière complète?

Soit W une pareille variété, soit y_0 une valeur de y n'appartenant pas à l'une des coupures; soit $W(y_0)$ l'ensemble des points de W pour lesquels $y = y_0$; alors $W(y_0)$ formera une ligne ou variété à une dimension. Cette ligne $W(y_0)$ peut-elle aboutir à un point d'arrêt? Non, car ce point d'arrêt appartiendrait à la frontière de W, ce qui est impossible, puisque, pour tous les points de cette frontière, y est nul ou se trouve sur l'une des coupures et ne peut, par conséquent, être égal à y_0. A moins que ce point d'arrêt ne soit l'un des m points communs à toutes les surfaces de Riemann $S(y)$ et qui sont donnés, comme nous l'avons vu plus haut, par l'équation

$$F_m(x, o, z) = o.$$

Soient $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ ces m points.

Ainsi, $W(y_0)$ *se composera de cycles fermés et de lignes allant de l'un des points* Q *à un autre.*

La ligne $W(y_0)$ appartient à la surface $S(y_0)$; considérons sur la surface $S(y_1)$ les points qui correspondent à ceux de $W(y_0)$ en vertu de la loi de cor-

respondance adoptée plus haut; soit $W(y_0, y_1)$ l'ensemble de ces points. Je dis que la ligne $W(y_0, y_1)$ restera toujours homologue à elle-même sur la surface $S(y_1)$ quand y_1 restant constant on fera varier y_0. Si en effet y_0 varie d'une façon continue, $W(y_0)$ et par conséquent $W(y_0, y_1)$ varieront d'une façon continue, sans quoi le $W(y_0)$ pour lequel une discontinuité se produirait devrait appartenir à la frontière de W.

Il résulte de là par exemple que, s'il y avait des valeurs de y pour lesquelles W n'admette aucun point, $W(y_0, y_1)$ devrait être *constamment* homologue à zéro sur $S(y_1)$ et que, par conséquent, il en sera de même de $W(y_0)$ sur $S(y_0)$.

De quoi va alors se composer la frontière de W? Lorsque y_0 approchera d'un point η de l'une des coupures, la ligne $W(y_0, y_1)$, toujours homologue à elle-même sur $S(y_1)$, tendra vers $W(\eta, y_1)$ et $W(y_0)$ tendra vers $W(\eta)$, de telle façon que $W(\eta, y_1)$ soit le lieu des points de $S(y_1)$ qui correspondent aux différents points de $W(\eta)$ sur $S(\eta)$. Quand maintenant y_0 approchera du même point par l'autre lèvre de la coupure, la ligne $W(y_0, y_1)$ tendra vers $W(\eta', y_1)$ et la ligne $W(y_0)$ tendra vers $W(\eta')$. En général, $W(\eta)$ ne sera pas homologue à $W(\eta')$, car les points de $W(\eta, y_1)$ sont les points de $S(y_1)$ qui correspondent à ceux de $W(\eta)$ *considérés comme appartenant à* $S(\eta)$; les points de $W(\eta', y_1)$ sont les points de $S(y_1)$ qui correspondent à ceux de $W(\eta')$ *considérés comme appartenant à* $S(\eta')$. Alors, bien que $W(\eta, y_1)$ soit homologue à $W(\eta', y_1)$ sur $S(y_1)$, il n'en résulte pas que $W(\eta)$ soit homologue à $W(\eta')$ sur $S(\eta)$.

La frontière de W sera alors engendrée par les cycles

$$W(\eta) - W(\eta')$$

quand on fait décrire successivement à η toutes les coupures. Quand on fera varier η depuis o jusqu'à ε_k le long de la coupure $O\varepsilon_k$, le cycle $W(\eta) - W(\eta')$, qui devra s'évanouir pour $\eta = \varepsilon_k$, engendrera un doigt $\Delta(\varepsilon_k)$. La frontière de W est donc bien un cycle de la forme (1).

Combien pouvons-nous obtenir, de cette façon, d'homologies entre les cycles de la forme (1)?

Tout dépend de l'hypothèse faite au sujet de la ligne $W(y_0, y_1)$. Il est clair que, si l'on remplace cette ligne par une autre qui lui soit homologue sur $S(y_1)$, les deux homologies que l'on obtiendra ainsi ne seront pas distinctes.

La ligne $W(y_0, y_1)$ pourra se composer de l'un des $2p$ cycles de la surface

de Riemann $S(y_1)$, ou d'une ligne allant sur cette surface de Q_1 à l'un des $m-1$ autres points $Q_2, Q_3, \ldots, Q_m$, ou d'une combinaison de ces lignes; aucune autre hypothèse n'est possible. D'ailleurs, si l'on envisage deux lignes allant de Q_1 à Q_2, il suffira de considérer la première, car la réunion de ces deux lignes formerait un cycle. Cela nous fait donc en tout $2p+m-1$ homologies.

Ces homologies sont-elles toutes distinctes? Si le cycle

$$W(\eta_1) - W(\eta_1')$$

est homologue à zéro sur $S(\eta_1)$ et cela sur toutes les coupures, il est clair que l'homologie correspondant à W se réduit à une identité. En effet, dans ce cas, les doigts $\Delta(\varepsilon_k)$ qui figurent dans le premier membre de l'homologie $S_1(o) + \sum \Delta(\varepsilon_k) \sim o$ sont homologues à zéro, plus une portion de $S(o)$; il reste donc $S_1(o) \sim o$, $S_1(o)$ étant une portion de $S(o)$; mais, comme une variété ne peut être homologue à zéro sans être fermée, cette homologie doit se réduire soit à une identité, soit à $S(o) \sim o$. Cette dernière hypothèse doit être rejetée puisque $S(o)$ n'est pas homologue à zéro. Si l'on peut former ainsi q homologies se réduisant à des identités, il n'y aura plus que

$$2p + m - q - 1$$

homologies distinctes.

Si $W(y_0)$ est un cycle, il faut que $W(\eta) \sim W(\eta')$, c'est-à-dire que le cycle ne soit pas altéré quand y tourne autour du point singulier ε_k et qu'il en soit de même pour tous les autres points singuliers. Il faut, en d'autres termes, que $W(y_0)$ soit ce que nous avons appelé, dans le Mémoire cité, un *cycle invariant;* nous aurons donc d'abord autant d'homologies identiques que de cycles invariants, c'est-à-dire, d'après le Mémoire cité, autant que de cycles à trois dimensions, ou encore autant que de cycles à une dimension.

Y en a-t-il d'autres? Supposons que la ligne $W(y_0)$ aboutisse à un point Q_1, considérons la portion de la variété à quatre dimensions V voisine de Q_1; soit M un point de V infiniment voisin de Q_1; soit II le plan tangent à la variété V au point Q_1; ce sera une variété plane à quatre dimensions appartenant à l'espace plan à plus de quatre dimensions, dans lequel nous supposons V tracée; la droite MQ_1, si les deux points M et Q_1 sont infiniment voisins, sera dans le plan II. Portons alors sur la droite MQ_1 une longueur égale à 1 à partir de Q_1 et soit H(M) le point ainsi obtenu; les points H(M) appartiendront à l'hypersphère de rayon 1 et de centre Q_1, ou plutôt à l'intersection de cette

hypersphère et du plan H, intersection que j'appelle J et qui est une variété hypersphérique H à trois dimensions. Si deux points M et M′ sont de part et d'autre de Q_1, de telle façon que les deux droites MQ_1 et Q_1M' soient dans le prolongement l'une de l'autre, les deux points H(M) et H(M′) seront diamétralement opposés sur J.

Considérons maintenant les points M de W qui sont très voisins de Q_1; les H(M) correspondants engendreront une variété à deux dimensions H(W) située sur J; considérons de même les points M très voisins de Q_1 et tels que $y = y_0$; les H(M) correspondants engendreront une variété à une dimension $H(y_0)$ située sur J. Enfin les points de $W(y_0)$ donneront des H(M) en nombre fini et dont l'ensemble pourra s'appeler $H(W, y_0)$. Si alors un point appartient à $H(y_0)$, il en sera de même du point diamétralement opposé.

Au contraire, si un point appartient à $H(W, y_0)$, il n'en sera pas de même du point diamétralement opposé, puisque par hypothèse la ligne $W(y_0)$ s'arrête au point Q_1 et ne se prolonge pas au delà. Donc, si un point appartient à H(W), il n'en sera pas de même du point diamétralement opposé, sans quoi nous aurions deux points diamétralement opposés sur un même $H(W, y_0)$.

Si la ligne $W(y_0)$ doit nous conduire à une homologie se réduisant à une identité, nous venons de voir que $W(\eta_i)$ doit être homologue à $W(\eta_i')$ sur $S(\eta_i)$. Je puis sans restreindre la généralité supposer que $W(\eta_i)$ est non seulement homologue, mais identique à $W(\eta_i')$. Si, en effet, il en était autrement, soit $C(\eta_i)$ la portion de $S(\eta_i)$ limitée par le cycle $W(\eta_i) - W(\eta_i')$ homologue à zéro. Soit $P(\varepsilon_k)$ la variété à trois dimensions engendrée par $C(\eta_i)$ quand η_i varie de zéro à ε_k en suivant la coupure; elle est limitée par l'ensemble des cycles

$$W(\eta_i) - W(\eta_i')$$

qui la séparent de W, et par $C(O, \varepsilon_k)$, en désignant par $C(O, \varepsilon_k)$ la limite vers laquelle tend $C(\eta_i)$ quand η_i tend vers zéro en suivant la coupure $O\varepsilon_k$. Il est clair que $C(O, \varepsilon_k)$ est une portion de S(o).

Envisageons alors la variété à trois dimensions

$$W + \sum P(\varepsilon_k),$$

où la sommation indiquée par le signe $\sum$ est étendue aux différentes coupures.

La variété W avait pour frontière l'ensemble des cycles

$$W(\eta_i) - W(\eta_i')$$

plus une partie de S(o), la variété $\sum P(\varepsilon_k)$ avait pour frontière l'ensemble des cycles $W(\eta_i) - W(\eta_i')$ plus $\sum C(O, \varepsilon_k)$ qui est une partie de S(o). Quand nous annexons les deux variétés l'une à l'autre, la partie commune de la frontière disparaît, de sorte que la frontière complète fait partie de S(o). Comme cette frontière complète doit être une variété *fermée* à deux dimensions, ou bien elle se réduira à zéro, de sorte que $W + \sum P(\varepsilon_k)$ est une variété fermée, ou bien elle sera la surface S(o) tout entière, ce qui est très possible puisque cette surface n'est pas homologue à zéro.

Ainsi, $W + \sum P(\varepsilon_k)$ est une variété *fermée* à trois dimensions; il est vrai qu'elle présente une circonstance toute particulière, puisque pour certaines valeurs de y, à savoir les valeurs $y = \eta_i$, les points de cette variété pour lesquels $y = \eta_i$ forment non plus une ligne, mais une variété à deux dimensions $C(\eta_i)$. Mais il suffit de déformer infiniment peu notre variété pour faire cesser cette circonstance gênante. Nous pouvons donc, sans restreindre la généralité, supposer que W est une variété fermée et, par conséquent, que $W(\eta_i)$ est identique à $W(\eta_i')$.

Alors H(W) est une variété fermée; supposons d'abord que Q_1 soit l'extrémité d'une des branches de la ligne $W(y_0)$ et n'appartient à aucune autre branche de cette ligne; il suffit évidemment que cela ait lieu pour une valeur de y_0 pour que cela ait lieu pour toutes. Dans ce cas H(W) a un seul point commun avec $H(y_0)$; ce sont deux variétés fermées l'une à deux, l'autre à une dimension tracées sur l'hypersphère H. Si elles n'ont qu'un point commun, c'est qu'elles ne sont ni l'une ni l'autre homologues à zéro sur H; *or cela est absurde puisque* H *est simplement connexe.*

Prenons un cas plus général; chacune des branches de $W(y_0)$ peut être parcourue dans deux sens opposés; nous distinguerons donc un sens positif et un sens négatif. D'autre part nous attribuerons un signe à l'intersection de H(W) et de $H(y_0)$ [d'après le signe d'un certain déterminant ainsi qu'il a été expliqué dans l'*Analysis situs* (*Journal de l'École Polytechnique*, 2ᵉ série, Iᵉʳ Cahier, p. 33 et suiv.)]. Supposons donc que p branches de $W(y_0)$ aboutissent à Q_1 de façon que Q_1 soit à la *fin* de la branche quand on décrit cette branche dans le sens positif, et n branches quand on décrit la branche dans le sens négatif.

Alors H(W) et $H(y_0)$ admettront p intersections positives et n négatives.

Ou bien alors l'excès $p - n$ ne sera pas nul, ce qui est impossible parce qu'on pourrait avoir $H(W) \sim 0$ sur H et que H est simplement connexe; ou bien cet excès sera nul et alors la ligne $W(y_0)$ pourra être remplacée par une autre ne passant pas par Q_1.

Il est donc impossible qu'il existe une variété W satisfaisant aux conditions énoncées; il n'y a donc pas d'autre homologie identique que celles que l'on déduit des cycles invariants.

En résumé, soit N le nombre des points singuliers $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, en tenant compte du degré de multiplicité, un de ces points pouvant être double par exemple s'il correspond à deux cycles évanouissants.

Soit $2p$ le nombre des cycles de la surface de Riemann $S(y)$.

Soit m le nombre des points tels que $Q_1, Q_2, \ldots$.

Soit q le nombre des cycles invariants de $S(y)$, ou, ce qui revient au même, le nombre des cycles à une ou à trois dimensions de $F(o)$.

Nous aurons N doigts, tous nos cycles seront des combinaisons de la forme (1), c'est-à-dire des combinaisons de ces N doigts et de $S(o)$; mais toutes les combinaisons de ces $N + 1$ variétés ne conviennent pas; elles doivent satisfaire à la condition (2); cette condition, puisque $S(o)$ admet $2p$ cycles, équivaut à $2p$ conditions simples. Il reste ainsi $N + 1 - 2p$ cycles.

Mais ces cycles sont liés par des homologies, engendrées par les différentes lignes $W(y_0)$ possibles; il y en a $2p$ provenant des $2p$ cycles fermés qu'on peut tracer sur $S(y_0)$; il y en a $m - 1$ provenant des $m - 1$ lignes qui vont d'un point Q à un autre point Q. Si ces $2p + m - 1$ homologies sont distinctes, ce qui arrive en général, il reste

$$N + 2 - 4p - m$$

cycles à deux dimensions distincts. Mais il y a q homologies identiques, il y a donc finalement

$$N + q + 2 - 4p - m \tag{3}$$

cycles à deux dimensions.

VII. — Application aux surfaces du troisième degré.

Appliquons ces principes à la surface du troisième degré. Dans les paragraphes précédents, un rôle essentiel était joué par les surfaces de Riemann $S(y)$ correspondant aux intersections de la surface $F = o$ avec le plan $y = \text{const.}$

Si nous prenons les coordonnées homogènes

$$x, \quad y, \quad z, \quad t,$$

ces plans $y = \text{const.}$ passent par une droite fixe située à l'infini et qui a pour équations $y = t = o$. On pourrait répéter la même analyse en faisant jouer le rôle de cette droite $y = t = o$ à une droite quelconque D, et le rôle des surfaces $S(y)$ aux surfaces de Riemann correspondant aux intersections de $F = o$ avec les plans passant par D.

Cela revient à faire un changement de coordonnées tétraédriques en prenant cette droite D pour l'une des arêtes du tétraèdre de référence. Tout étant projectif, il est clair que le résultat doit rester le même quelle que soit la droite D, et l'on en comprendra d'ailleurs mieux les raisons en se reportant à ce qui a été dit aux paragraphes 2 et 3.

L'application de la formule (3) doit conduire au même nombre de cycles à deux dimensions, de quelque façon que soit choisie la droite D.

Mais, si ce résultat est certain *a priori*, il conduit à quelques paradoxes apparents et il est intéressant de voir par quel mécanisme se fait la compensation. M. Picard, en étudiant une surface du troisième degré particulière, sur laquelle nous reviendrons, avait déjà mis en évidence certaines propositions paradoxales, dont il avait donné l'explication.

Dans la formule (3), le nombre q représente le nombre des cycles linéaires. Ce nombre est évidemment indépendant de la droite D. Il est d'ailleurs nul, comme l'a montré M. Picard, pour la surface du troisième degré.

Le nombre N est le nombre des plans tangents que l'on peut mener à la surface par la droite D. Ce nombre est égal à 12 dans le cas le plus général.

Le nombre p est le genre de la courbe, intersection de $F = o$ par un plan passant par la droite D; il est égal à 1.

Les points $Q_1, Q_2, \ldots$ sont les intersections de la surface $F = o$ et de la droite D; le nombre m est le nombre de ces intersections. Il est égal à 3 dans le cas général. On a donc, dans le cas général,

$$q = o, \qquad N = 12, \qquad p = 1, \qquad m = 3$$

et, pour le nombre de cycles,

$$N + q + 2 - 4p - m = 7.$$

Supposons maintenant que la surface $F = o$, restant toujours la plus générale, la droite D prenne des positions particulières.

Supposons d'abord que la droite D devienne tangente à la surface; deux des plans tangents menés par D se confondront et N se réduira à 11, mais deux des points d'intersection de D se confondront et m se réduira à 2. Le nombre

$$N + q + 2 - 4p - m$$

ne changera pas.

Supposons maintenant que l'un des plans tangents menés par D coupe la surface suivant une courbe présentant un point de rebroussement; ici encore deux plans tangents se confondront, mais il faut tenir compte du degré de multiplicité. Or nous avons vu que, dans le cas d'un rebroussement, il y a deux cycles évanouissants et que, par conséquent, le plan tangent doit être regardé comme double; le nombre N reste donc égal à 12.

La surface $F = 0$ contient vingt-sept droites que nous appellerons les *droites* Δ. Supposons que D rencontre l'une des droites Δ. Le plan de D et de Δ coupe la surface suivant la droite Δ et une conique; c'est donc un plan tangent double avec deux points de contact distincts.

Le nombre des plans tangents *distincts* se réduit donc à 11, mais ce plan DΔ doit être regardé comme double; il n'y a, il est vrai, qu'un seul cycle évanouissant, mais la courbe se décompose; cela fait donc deux doigts simples, l'un engendré par le cycle évanouissant, l'autre homologue à l'une des composantes de la surface de Riemann, donc N reste égal à 12.

Les divers plans menés par Δ coupent la surface suivant des coniques; deux de ces coniques touchent la droite Δ. Soient P_1 et P_2 les plans de ces deux coniques et supposons que Δ soit dans le plan P_1. Alors trois de nos douze plans tangents se confondent, les deux points de contact du plan tangent DΔ, qui étaient distincts et équivalents à deux points doubles à tangentes séparées, se confondent en un seul, équivalent à un point de rebroussement. Nous avons cette fois deux cycles évanouissants, cela nous fait *trois* doigts simples dont deux correspondent à ces deux cycles et un est homologue à l'une des composantes de la surface de Riemann (composante relative à la droite, ou bien à la conique); donc le plan tangent P_1 doit être regardé comme triple et N reste égal à 12.

Ainsi voilà trois cas où le plan tangent correspond à deux, deux ou trois plans tangents confondus : ce sont ceux où ce plan coupe la surface suivant une cubique à rebroussement, suivant une droite Δ et une conique qui la coupe, suivant une droite Δ et une conique qui la touche; nous venons de voir que ce plan doit être alors regardé comme double, double ou triple. Mais il

peut arriver que, dans l'un de ces trois cas, la droite D passe par le point de contact, c'est ce qui arrive respectivement si D touche la surface en un point où l'indicatrice est parabolique, si D coupe Δ en un point où cette droite rencontre la conique intersection du plan DΔ et de la surface $F = 0$, si D coupe Δ au point où cette droite *touche* la conique intersection de DΔ et de la surface. Le plan tangent correspond alors à trois, trois ou quatre plans tangents confondus, et il reste double, double ou triple; le nombre N se réduit donc à 11, mais, comme D touche la surface, le nombre m se réduit à 2, de sorte que la différence $N - m$ et le nombre des cycles

$$N + q + 2 - 4p - m$$

ne changent pas.

Si la droite D est une asymptote de l'indicatrice en un point de la surface, le plan tangent correspondant équivaut à trois plans tangents confondus; donc N se réduit à 10, mais, d'autre part, D coupe la surface en trois points confondus, de sorte que m se réduit à 1 et que la différence $N - m$ ne change pas.

Il peut se faire que, parmi les plans tangents menés par D, il y en ait deux ou plusieurs qui présentent séparément l'une des singularités que nous venons d'étudier; rien n'est à changer alors à ce qui précède. Il peut arriver enfin que par la droite D on puisse mener un plan qui coupe la surface suivant trois droites Δ, qui soit par conséquent triplement tangent à la surface. Ce plan correspondra à trois plans tangents confondus. Quel est son degré de multiplicité, c'est-à-dire le nombre de doigts simples auxquels il correspond? Il n'y a qu'un cycle évanouissant, mais la surface de Riemann $S(\varepsilon_k)$ se décompose en trois parties $S_1(\varepsilon_k)$, $S_2(\varepsilon_k)$, $S_3(\varepsilon_k)$ correspondant aux trois droites. Nous aurons donc trois doigts simples, le premier engendré par le cycle évanouissant, le deuxième homologue à $S_1(\varepsilon_k)$ plus une partie de $S(0)$, le troisième homologue à $S_2(\varepsilon_k)$ plus une partie de $S(0)$. Le cycle qui serait homologue à $S_3(\varepsilon_k)$ plus une partie de $S(0)$ n'est pas distinct des précédents, car, toutes les surfaces $S(y)$ étant homologues entre elles, comme nous l'avons vu, on a

$$S_1(\varepsilon_k) + S_2(\varepsilon_k) + S_3(\varepsilon_k) \sim S(0),$$

de sorte qu'une combinaison de nos trois doigts nous ramène au cycle $S(0)$. En résumé, ce plan triplement tangent, qui équivaut à trois plans tangents confondus, a pour degré de multiplicité 3, de sorte que N reste égal à 12.

Il nous reste à examiner le cas où D est l'une des droites Δ. Alors D rencontre dix autres droites Δ, que j'appellerai A_1 et B_1, A_2 et B_2, A_3 et B_3, A_4 et B_4, A_5 et B_5.

Les droites A_i et B_i se rencontrent quel que soit i et il n'y a pas d'autre rencontre entre les droites A et B. Par D on peut mener cinq plans tangents qui sont les cinq plans DA_iB_i; que sont devenus les sept autres plans tangents? Soit D' une droite très voisine de D; par D' nous pouvons mener douze plans tangents, dont cinq tendront vers les cinq plans DA_iB_i; vers quelles limites tendront les sept autres et les points de contact correspondants? Parmi les plans menés par D, il y en a deux P_1 et P_2, qui coupent la surface suivant la droite D et une conique qui la touche. Eh bien, deux plans tangents tendront vers P_1 et deux vers P_2.

Il reste à voir ce que deviennent les trois plans tangents restants. Soient M'_1, M'_2, M'_3 les trois points d'intersection de D' avec la surface; quand D' tendra vers D, ces trois points tendront vers trois points M_1, M_2, M_3 de D; eh bien, les points de contact des trois plans tangents restants tendront vers M_1, M_2, M_3.

Quant aux cycles à deux dimensions correspondants, voici ce qu'ils deviennent. Considérons d'abord un plan tangent qui, à la limite, se réduit au plan A_iB_iD; la surface de Riemann correspondant à l'intersection de ce plan et de la surface se décompose à la limite en trois parties correspondant aux trois droites A_i, B_i, D; le *doigt* correspondant est à la limite homologue à l'une de ces trois parties, par exemple à la surface de Riemann correspondant à la droite A_i et que j'appellerai $S(A_i)$. Voilà donc déjà cinq de nos sept cycles correspondant aux cinq surfaces de Riemann $S(A_1)$, $S(A_2)$, ..., $S(A_5)$. Les sept doigts correspondant aux sept autres plans tangents nous fourniront à la limite, par leurs combinaisons entre eux et avec $S(o)$, un seul cycle nouveau qui sera la surface de Riemann $S(D)$; cette notation $S(A_i)$, $S(D)$ ne peut engendrer aucune confusion avec $S(y)$, puisque A_i et D sont des droites et y une quantité. Il nous reste un dernier cycle qui est $S(o)$, mais

$$S(o) \sim S(D) + S(A_i) + S(B_i),$$

puisque $S(o)$ est homologue à la surface de Riemann correspondant à l'intersection de la surface avec un plan quelconque, et que, quand ce plan est le plan DA_iB_i, cette surface de Riemann se décompose en $S(D)$, $S(A_i)$, $S(B_i)$.

En conséquence, tous les cycles à deux dimensions de $F = o$ sont homologues à des combinaisons des sept cycles suivants :

$$S(D),\quad S(A_1),\quad S(A_2),\quad S(A_3),\quad S(A_4),\quad S(A_5),\quad S(B_1),$$

qui ne sont autre chose que des surfaces de Riemann correspondant à sept des vingt-sept droites Δ.

Quelques mots maintenant sur les intersections mutuelles de ces cycles; quel est l'excès du nombre des intersections positives sur celui des intersections négatives, en adoptant le point de vue du paragraphe 9 de l'*Analysis situs* (*Journal de l'École Polytechnique*, 2^e série, 1er Cahier, p. 33)? Si nous considérons deux surfaces de Riemann $S(y_1)$ et $S(y_2)$, cet excès sera évidemment 3; si nous considérons deux surfaces de Riemann $S(\Delta_1)$ et $S(\Delta_2)$ correspondant à deux droites Δ, cet excès sera 1 ou zéro, suivant que ces deux droites se rencontreront ou non. Si nous considérons deux cycles K_1 et K_2, nous représenterons cet excès par $N(K_1, K_2)$; si alors

$$K_1 \sim K'_1, \qquad K_2 \sim K'_2,$$

on aura également

$$N(K_1, K_2) = N(K'_1, K'_2).$$

Si maintenant

$$K_2 \sim n_0 S(D) + \Sigma n_i S(A_i) + n_6 S(B_1),$$

il viendra

$$N(K_1, K_2) = n_0 N[K_1, S(D)] + \Sigma n_i N[K_1, S(A_i)] + n_6 N[K_1, S(B_1)],$$

d'où cette conséquence que la connaissance des sept excès

$$N[K_1, S(D)],\quad N[K_1, S(A_i)],\quad N[K_1, S(B_1)]$$

suffit pour déterminer $N(K_1, K_2)$, K_2 étant un cycle quelconque.

Soit, en particulier, $K_1 = S(\Delta_1)$, $K_2 = S(\Delta_2)$, Δ_1 et Δ_2 étant deux quelconques des vingt-sept droites Δ; nous voyons que la connaissance du nombre des points d'intersection de Δ_1 avec D, les A_i et B_1 suffit pour déterminer le nombre des intersections de Δ_1 avec une droite quelconque Δ_2, c'est-à-dire pour déterminer complètement la droite Δ_1.

C'est, en effet, ce qu'il est aisé de vérifier; une des vingt-sept droites sera complètement déterminée quand on saura si elle rencontre une autre des vingt-sept droites choisie au hasard D, et aussi si elle rencontre cinq autres des vingt-sept droites qui rencontrent D sans se rencontrer entre elles.

On sait que les surfaces du troisième degré sont unicursales. Si en effet on prend deux des vingt-sept droites Δ qui ne se rencontrent pas, soient D et D'; qu'on prenne un point M sur D et un point M' sur D' ayant pour abscisse, par exemple, le premier u, le second v, la droite MM' rencontrera la surface en un troisième point M, dont les coordonnées sont des fonctions rationnelles de u et de v. De cette circonstance découlent des conséquences paradoxales sur lesquelles M. Picard a déjà appelé l'attention.

Si les valeurs de u et v correspondent à l'une des droites A_1, A_2, A_3, A_4, A_5

qui rencontrent à la fois D et D', la droite MM' est tout entière sur la surface et les coordonnées du point M_1 deviennent indéterminées.

Si maintenant nous prenons un point M_1 sur la surface, les deux plans M_1D et M_1D' se couperont suivant une droite déterminée MM', les points M et M' seront donc déterminés et, par conséquent, u et v seront fonctions rationnelles des coordonnées de M_1. Si cependant le point M_1 était sur la droite D, le plan M_1D ne serait alors autre chose que le plan tangent en M_1 et ce qui précède subsisterait.

Le lieu des points $u = \infty$ est une conique C' qui coupe D' en deux points et le lieu des points $v = \infty$ est une conique C qui coupe D en deux points.

Reprenons maintenant la variété V à quatre dimensions engendrée par la surface $F = 0$; et sur cette variété un cycle K fermé à deux dimensions et non homologue à zéro. Soit W l'espace plan à quatre dimensions engendré par les deux variables complexes u, v; on pourrait d'abord être tenté de dire que, la surface étant unicursale, V et W doivent être homéomorphes, qu'à tout cycle fermé K de V correspondra un cycle fermé K' de W; que, tous les cycles fermés de W étant homologues à zéro, il doit en être de même de tous les cycles fermés de V; ce qui serait contraire aux conclusions qui précèdent. Les découvertes de M. Picard nous ont d'ailleurs depuis longtemps mis en garde contre un pareil raisonnement.

Le cycle K, en effet, peut rencontrer l'une des droites A_i ou l'une des coniques C ou C'. S'il rencontre C, par exemple, le cycle correspondant K' ne sera plus fermé, mais présentera un pointement à l'infini, ainsi que l'a signalé M. Picard.

Supposons maintenant que le cycle K' soit fermé et, par conséquent, homologue à zéro dans l'espace W. S'ensuivra-t-il que le cycle fermé correspondant K soit homologue à zéro sur V? Pas du tout. Il y a dans l'espace W cinq points auxquels correspondent une infinité de points de la variété V; ce sont les points $u = u_i$, $v = v_i$ qui correspondent aux cinq droites A_i; nous avons vu en effet que, pour ces valeurs de u et v, les coordonnées de M_1 sont indéterminées. Supposons alors que le cycle K' passe par l'un de ces points u_i, v_i; étant homologue à zéro sur W, il limitera un domaine à trois dimensions de cet espace. Mais considérons un point N de R et supposons que ce point se rapproche indéfiniment de u_i, v_i qui est sur la frontière de R. Soit M le point de V qui est le correspondant de N; quand N tendra vers u_i, v_i, le point M tendra vers un point de la droite A_i et ce point pourra occuper une position

quelconque sur cette droite, suivant la façon dont N tendra vers u_i, v_i. Soit R' un domaine à trois dimensions de V correspondant à R; sa frontière complète se composera non seulement de K, cycle de V correspondant à K', mais de la surface de Riemann $S(A_i)$; car, quand N se rapproche de la frontière de R, le point correspondant M se rapproche, soit de K si N tend vers un point de K' autre que u_i, v_i, soit d'un point quelconque de $S(A_i)$ si N tend vers u_i, v_i. Donc K n'est pas homologue à zéro.

Dans la variété W, on doit considérer comme distincts les points $u = \infty$, $v = v_1$ et $u = \infty$, $v = v_2$, de même que les points $u = u_1$, $v = \infty$ et $u = u_2$, $v = \infty$, puisque à ces points correspondent des droites MM' distinctes. On doit donc adopter, au sujet des points à l'infini, non la convention du Mémoire actuel, mais celle du Mémoire cité. Il en résulte que les deux surfaces de Riemann $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ ne sont pas homologues entre elles. D'où cette conclusion : les cycles K' de W qui sont tout entiers à distance finie sont homologues à zéro; mais si l'on tient compte de ceux qui s'étendent à l'infini, il y en a *deux* qui non seulement ne sont pas homologues à zéro, mais sont indépendants; ce sont justement ces deux surfaces de Riemann $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$

De plus, parmi les cycles K' homologues à zéro, il y en a qui ne correspondent pas à des cycles K homologues à zéro : ce sont ceux qui passent par l'un des points u_i, v_i et cinq de ces cycles doivent être considérés comme distincts, puisqu'il y a cinq points u_i, v_i. Nous retrouverons donc bien nos *sept* cycles distincts et la conciliation est complète avec ce qui précède.

Un mot encore sur une circonstance qui peut se présenter pour certaines surfaces du troisième degré particulières; il peut arriver que trois des droites Δ que j'appellerai Δ_1, Δ_2, Δ_3, soient dans un même plan tangent P et passent par un même point M. C'est ce qui arrive en particulier pour la surface de M. Picard

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1.$$

Si alors la droite D par laquelle doivent être menés les plans tangents se trouve sur le plan P, *quatre* des plans tangents menés par D se confondront avec P, de sorte que nous n'aurons plus que neuf plans tangents distincts au lieu de douze.

Il faut voir à combien de doigts distincts ce plan correspond. Pour nous en rendre compte, prenons la surface de Picard et coupons par exemple par les plans $z = \text{const.}$; la droite D étant alors la droite à l'infini qui est l'intersection

commune de tous ces plans $z = \text{const.}$ La courbe d'intersection est

$$x^3 + y^3 = 1 - z^3,$$

où z est regardé comme un paramètre. Les deux cycles sont des combinaisons de lacets tracés dans le plan des x et enveloppant les trois points singuliers

$$x = \sqrt[3]{1-z^3}, \qquad x = \varepsilon\sqrt[3]{1-z^3}, \qquad x = \varepsilon^2\sqrt[3]{1-z^3},$$

ε étant une racine cubique de l'unité. Pour $z = 1$, ces trois points singuliers se confondent avec O, les lacets se réduisent à un point et il en est de même des cycles, les deux cycles sont donc évanouissants.

De plus, pour $z = 1$, la courbe se décompose en trois droites Δ_1, Δ_2, Δ_3; donc, entre les deux doigts provenant des deux cycles évanouissants, nous en aurons deux autres homologues à $S(\Delta_1)$ et $S(\Delta_2)$; je ne parle pas de $S(\Delta_3)$ qui n'est pas distinct des précédents puisque

$$S(\Delta_1) + S(\Delta_2) + S(\Delta_3) \sim S(o).$$

Ainsi ce plan tangent quadruple donne naissance à quatre doigts distincts. Le nombre N n'est donc pas altéré.

Supposons enfin que la surface présente un point conique H; dans ce cas, six des droites Δ, comptant chacune pour deux, passent en H; je les appellerai Δ_1, Δ_2, ..., Δ_6; il y a quinze autres droites qui sont dans les quinze plans déterminés par les six premières. Le nombre des cycles K se réduit alors à 6; on peut le voir de trois manières :

1° Nos sept cycles $S(D)$, $S(A_i)$, $S(O)$ du cas général se réduisent ici à $S(\Delta_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ et $S(o)$, parce que, si l'on prend pour la droite D la droite Δ_1, les droites A_i ne sont autres que les cinq autres droites Δ_i; or, les droites Δ_i forment l'intersection de la surface avec le cône tangent au point H qui est du second degré. La surface de Riemann correspondant à l'intersection de la surface avec une quadrique quelconque est homologue à $2S(o)$, on a donc l'homologie

$$\Sigma S(\Delta_i) \sim 2S(o),$$

de sorte qu'il ne reste que six cycles distincts.

2° Si la droite D est quelconque, deux des plans tangents menés par D se confondent avec le plan DH, de sorte que les nombres N, p et m deviennent égaux à 11, 1, 3 et que

$$N + 2 - 4p - m = 6.$$

3° Si la droite D passe par H, un plan quelconque mené par D coupera la surface suivant une conique, et cette conique se décomposera en deux droites, quand ce plan passera par l'une des six droites Δ_i; on a donc $N = 6$, la conique étant unicursale $p = 0$, et D coupant la surface en deux points distincts $m = 2$; on a donc

$$N + 2 - 4p - m = 6.$$

Plus généralement, quand une surface acquerra un point conique, le nombre des cycles à deux dimensions diminuera d'une unité. Soit, en effet, P le point conique, et supposons d'abord que la droite D ne passe pas par ce point, le plan PD devra être regardé comme un plan tangent, qui comptera pour *deux* plans tangents confondus, mais pour *un* seulement au point de vue de l'évaluation du nombre N. Le nombre N se changera donc en $N - 1$ et les autres nombres ne changeront pas.

Supposons maintenant qu'on fasse passer la droite D par P; les points de contact de la surface avec les plans tangents menés par D sont les intersections de cette surface avec une certaine courbe gauche, et cette courbe coupe la surface au point P, non plus en deux, mais en six points confondus; de plus, ce point P ne comptera plus dans l'évaluation du nombre N puisqu'il n'y a plus de plan PD. Donc N se changera, non plus en $N - 1$, mais en $N - 6$.

D'autre part, le genre p d'une section faite par un plan quelconque mené par D se change en $p - 1$ puisque toutes ces sections admettent un point double. Le nombre m des intersections distinctes de D avec la surface se change en $m - 1$ puisque deux de ces intersections sont confondues en P.

Le nombre $N + 2 - 4p - m$ se change donc en $N + 1 - 4p - m$.

Nous n'avons pas à nous inquiéter des plans tangents menés par D au cône tangent à la surface au point P. En effet, pour les sections faites par ces plans, le point double devient un point de rebroussement, ce qui n'altère pas le genre.

REMARQUES
SUR
L'ÉQUATION DE FREDHOLM

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 147, p. 1367-1371 (21 décembre 1908).

On sait que Fredholm résout l'équation

$$\varphi(x) + \lambda \int f(x, s)\,\varphi(s)\,ds = \psi(x) \tag{1}$$

par la formule

$$\varphi(x) = \psi(x) - \int \frac{D_{\lambda f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{D_{\lambda f}}\,\psi(y)\,dy, \tag{2}$$

où $D_{\lambda f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $D_{\lambda f}$ sont deux fonctions entières de λ. Le développement de $D_{\lambda f}$ commence par le terme 1, et le terme général est

$$\frac{\lambda^n}{n!}\int f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix} dx_1\,dx_2 \ldots dx_n.$$

Le terme général du développement de $D_{\lambda f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est

$$\frac{\lambda^{n+1}}{n!}\int f\begin{pmatrix} x, x_1, x_2, \ldots, x_n \\ y, x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix} dx_1\,dx_2 \ldots dx_n.$$

La notation $f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ y_1, y_2, \ldots, y_n \end{pmatrix}$ représente le déterminant à n lignes et n colonnes, où l'élément de la $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $k^{\text{ième}}$ colonne est $f(x_i, y_k)$.

Si $f(x, y)$ devient infini pour $x = y$ les formules précédentes deviennent illusoires, puisque certains éléments de nos déterminants sont infinis. On sait comment Fredholm s'est tiré de cette difficulté. Soient $f_2, f_3, \ldots$ ce que l'on appelle les *noyaux réitérés;* si $f(x, y)$ devient infini comme $(x - y)^{-\alpha}$ et que l'exposant α soit suffisamment petit, il arrivera que tous ces noyaux réitérés seront finis à partir de l'un d'entre eux. Supposons donc que f_n soit fini, ainsi que tous les noyaux réitérés d'indice plus grand. Fredholm ramène l'équation (1)

à une autre équation de même forme, mais où λ est remplacé par $-(-\lambda)^n$ et f par f_n.

Dans l'équation (2), la fonction méromorphe en λ

$$\Phi(\lambda) = \frac{D_{\lambda f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{D_{\lambda f}}$$

se trouve remplacée par une autre fonction méromorphe en λ, $\Phi_n(\lambda)$, dont le dénominateur est

$$D_n = D_{-(-\lambda)^n f_n}.$$

Si f est fini, f_n l'est également, et les deux formules sont applicables; les deux fonctions méromorphes Φ et Φ_n sont donc égales, ce qui veut dire que l'on peut revenir de la nouvelle formule à l'ancienne en divisant le numérateur et le dénominateur par un même facteur commun. Il est aisé en effet de vérifier que, si l'on pose

$$D_{\lambda f} = F(\lambda)$$

et si α est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité, on aura

$$D_n = F(\lambda)\,F(\alpha\lambda)\,F(\alpha^2\lambda)\ldots F(\alpha^n\lambda).$$

Qu'arrive-t-il maintenant quand f devient infini et que, par exemple, f_2 est fini? Ici encore, nous devons prévoir que le numérateur et le dénominateur de Φ_2 auront un facteur commun, et que $D_2 = D_{-\lambda f_2}$, qui est une fonction entière de λ^2, sera le produit de deux fonctions entières $G(\lambda)$ et $G(-\lambda)$, le second facteur $G(-\lambda)$ divisant également le numérateur.

C'est en effet ce qui arrive; on peut alors se proposer, puisque la fonction méromorphe Φ se présente sous une forme illusoire et que la fonction méromorphe Φ_2 n'est pas irréductible, de former une fonction méromorphe irréductible égale à Φ_2. Dans ce cas, la solution se présente sous une forme très simple.

Nous aurons

$$\Phi_2 = \frac{N}{D}, \tag{3}$$

N et D étant deux fonctions entières de λ qui se formeront de la même manière que $D_{\lambda f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $D_{\lambda f}$; la seule différence, c'est que les déterminants

$$f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} x, x_1, x_2, \ldots, x_n \\ y, x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix}$$

seront remplacés par d'autres, formés tout à fait de la même manière, sauf que les éléments $f(x_i, x_i)$ qui deviennent infinis seront remplacés par zéro.

Les considérations suivantes permettront de mieux comprendre la signification de ce résultat. Supposons que la fonction $f(x, y)$ non seulement soit finie, mais admette des dérivées premières finies. Dans ce cas, d'après un résultat de M. Fredholm sur la loi de décroissance des coefficients, la fonction entière $D_\lambda f$ sera de genre zéro. Supposons, au contraire, que $f(x, y)$ devienne infinie pour $x = y$ comme $(x-y)^{-\alpha}$ et que α soit plus petit que $\frac{1}{4}$. Supposons même, pour éviter toute complication dans l'énoncé, que l'on ait

$$f(x, y) = \frac{\psi(x, y)}{|x-y|^\alpha},$$

la fonction ψ restant holomorphe dans le domaine considéré. On aura alors

$$|f_2(x', y) - f_2(x, y)| < A\,|x' - x|^{1-2\alpha},$$

et, d'après le théorème de M. Fredholm, le coefficient de λ^{2n} dans le développement de $D_{-\lambda^2 f}$ décroîtra comme $(n^n)^{2\alpha-1-\frac{1}{2}}$; de sorte que, si $\alpha < \frac{1}{4}$, cette fonction $D_{-\lambda^2 f}$ sera une fonction entière de genre zéro de λ^2. Nous savons qu'une fonction entière de genre zéro de λ^2 peut toujours être regardée comme le produit de deux fonctions entières de λ,

$$G(\lambda)\,G(-\lambda),$$

qui sont de genre 1. Nous devons donc nous attendre à ce qu'en appelant $D(\lambda)$ le dénominateur de la formule (3), on ait

$$D_{-\lambda^2 f} = D(\lambda)\,D(-\lambda),$$

de sorte que

$$G(\lambda) = e^{k\lambda}\,D(\lambda),$$

où k est une constante quelconque. C'est en effet ce qui arrive. Ce qui caractérise la fonction $D(\lambda)$ et la distingue de toutes les autres fonctions $G(\lambda)$, c'est que le coefficient de λ est nul. Quand la fonction $f(x, y)$ reste finie de telle façon que $D_\lambda f$ existe, $D_\lambda f$ sera aussi une fonction $G(\lambda)$ et l'on aura

$$D_\lambda f = e^{k\lambda}\,D(\lambda),$$

k étant le coefficient de λ dans le développement de $D_\lambda f$. Dès que la fonction $f(x, y)$ devient infinie, cette formule devient illusoire, parce que le coefficient k devient infini.

Proposons-nous, d'autre part, de développer $\log D_\lambda f$ suivant les puissances

de λ; nous trouverons

$$\log D_\lambda f = \sum \frac{\lambda^n \tau_n}{n},$$

en posant

$$\tau_n = (-1)^{n+1} \int f(x_1, x_2) f(x_2, x_3) \dots f(x_{n-1}, x_n) f(x_n, x_1)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n.$$

On peut tirer de là une conclusion. Reprenons la formule

$$\Phi(\lambda) = \frac{D_\lambda f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{D_\lambda f}.$$

Multiplions haut et bas par

$$e^{-\frac{\lambda\tau_1}{1} - \frac{\lambda^2\tau_2}{2} - \dots - \frac{\lambda^p \tau_p}{p}}.$$

Nous obtiendrons ainsi la formule

$$\Phi(\lambda) = \frac{N_p}{D_p}, \tag{3 bis}$$

où N_p et D_p sont des fonctions entières de λ. Ces fonctions se formeront de la même manière que $D_\lambda f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $D_\lambda f$, avec cette différence qu'après avoir développé les déterminants

$$f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix} x, x_1, x_2, \dots, x_n \\ y, x_1, x_2, \dots, x_n \end{pmatrix},$$

il faudra supprimer dans le développement tous les termes qui contiennent en facteur un produit de la forme

$$f(x_1, x_1),\quad f(x_1, x_2) f(x_2, x_1),\quad f(x_1, x_2) f(x_2, x_3) f(x_3, x_1),\quad \dots,$$

jusqu'à

$$f(x_1, x_2) f(x_2, x_3) \dots f(x_{p-1}, x_p) f(x_p, x_1).$$

Mais il arrivera ceci; supposons que $f(x, y)$ ne reste plus fini, mais prenne la forme

$$f(x, y) = \frac{\psi(x, y)}{x - y|^\alpha},$$

ψ étant fini. Alors les séries $D_\lambda f$, $D_\lambda f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ne seront plus convergentes, mais *les séries* N_p *et* D_p *resteront convergentes*, pourvu que

$$\alpha < \frac{p}{p+1},$$

de sorte que la formule (3 *bis*) restera applicable.

Si l'on suppose $f(x, y)$ fini et pourvu d'une dérivée, les quatre séries $D_\lambda f$, $D_\lambda f\binom{x}{y}$, N_p et D_p sont toutes convergentes; mais les deux premières convergent plus rapidement, puisqu'elles représentent des fonctions entières de genre zéro, tandis que les deux dernières représentent des fonctions entières de genre p.

Remarquons encore qu'on peut obtenir la dérivée logarithmique de $D_\lambda f$ de la façon suivante :

Soit $\theta(x, \zeta)$ la solution de l'équation

$$\theta(x, \zeta) + \lambda \int f(x, s)\,\theta(s, \zeta)\,ds = f(x, \zeta);$$

on aura

$$\frac{d}{d\lambda} \log D_\lambda f = \int \theta(x, x)\,dx.$$

SUR QUELQUES APPLICATIONS

DE

LA MÉTHODE DE FREDHOLM

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 148, p. 125-126 (18 janvier 1909).

La méthode de Fredholm permet de résoudre presque immédiatement certaines questions relatives au développement des fonctions en séries ou à leur représentation par des intégrales définies.

Par exemple, on peut résoudre l'équation intégrale de première espèce

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\,[e^{i\alpha x} + f(x, y)]\,dy = \psi(x),$$

où $\varphi(y)$ est la fonction inconnue, si $f(x, y)$ n'a, quel que soit x, qu'un nombre limité de maxima et de minima, si elle tend uniformément vers zéro pour $y = \pm\infty$, si $\frac{df}{dy}$ est limité et satisfait aux mêmes conditions.

Dans le même ordre d'idées, une fonction satisfaisant aux conditions de Dirichlet sera, pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et 2π, développable en série procédant suivant les fonctions

$$e^{imx} + \theta_m(x) \qquad (m \text{ entier}),$$

pourvu que la série $\Sigma|\theta_m(x)|$ converge absolument et uniformément. Cette condition est suffisante; il serait facile de trouver les conditions nécessaires et suffisantes, que je n'énonce pas.

Par exemple, on pourra développer suivant les fonctions

$$\cos\mu_m x, \quad \sin\mu_m x,$$

pourvu que la série

$$\Sigma(\mu_m - m)$$

converge absolument.

Proposons-nous encore de résoudre l'équation intégrale de première espèce

$$\int_0^{2\pi} \varphi(z)[e^{ixz} + f(x,z)]\,dz = \psi(x).$$

Nous nous proposons de déterminer la fonction $\varphi(z)$ pour les valeurs de z comprises entre o et 2π; je ne dirai pas en se donnant arbitrairement la fonction $\psi(x)$, cela serait impossible, mais en se donnant les valeurs de $\psi(x)$ pour toutes les valeurs *entières* de x positives ou négatives.

Pour que cela soit possible, il suffit que la série

$$\sum \psi(m)$$

et que l'intégrale

$$\int_0^\infty f'(x,z)\,dx$$

convergent absolument et uniformément.

Je profite de l'occasion pour réparer un oubli involontaire qui m'a été signalé par M. Picard.

Dans une Note récente, j'ai signalé une série de résultats relatifs respectivement aux cas où le noyau de l'équation de Fredholm devient infini d'ordre $< \frac{1}{2}, < \frac{2}{3}, < \frac{3}{4}, \cdots$; le premier de ces résultats avait déjà été obtenu par une autre voie par M. Hilbert.

SUR

LES ÉQUATIONS DE FREDHOLM

Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und Mathematischen Physik, Leipzig und Berlin, 1910 (Erster Vortrag), p. 1-10.

L'équation intégrale

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b f(x,y)\varphi(y)\,dy + \psi(x) \tag{1}$$

est, comme l'on sait, résolue par l'expression intégrale de même espèce

$$\varphi(x) = \psi(x) + \lambda \int_a^b \psi(y)\,\mathrm{G}(x,y)\,dy, \tag{1_a}$$

où

$$\mathrm{G}(x,y) = \frac{\mathrm{N}(x,y;\lambda\,|\,f)}{\mathrm{D}(\lambda\,|\,f)};$$

N et D sont, d'après la théorie de Fredholm, deux transcendantes entières en λ. Afin de pouvoir écrire explicitement leur développement, nous désignons avec Fredholm par $f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ y_1, y_2, \ldots, y_n \end{pmatrix}$ le déterminant à n lignes dont l'élément général est $f(x_i, y_k)$.

Si l'on pose alors

$$a_n = \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n,$$

on a

$$\mathrm{D}(\lambda) = \sum_0^\infty \frac{(-\lambda)^n}{n!} a_n.$$

Nous transformerons cette équation en introduisant les noyaux déduits de $f(x,y)$ par *itération*.

Si nous posons

$$f(x_\alpha, x_\beta) f(x_\beta, x_\gamma) \ldots f(x_\lambda, x_\mu) f(x_\mu, x_\alpha) = f(x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\lambda, x_\mu),$$

il est clair que $f\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \\ x_1, \ldots, x_n \end{pmatrix}$ a la forme $\Sigma \pm \Pi f(x_2, \ldots, x_\mu)$, ainsi qu'il résulte du développement du déterminant. Soit alors

$$b_k = \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b f(x_2, \ldots, x_\mu)\, dx_2 \ldots dx_\mu,$$

où k désigne le nombre des variables d'intégration $x_2, \ldots, x_\mu$, nous pouvons aussi écrire

$$b_k = \int_a^b f_k(x, x)\, dx,$$

en regardant

$$f_k(x, y) = \int_a^b \cdots \int_a^b f(x, x_2) f(x_2, x_3) \ldots f(x_\mu, y)\, dx_2 \ldots dx_\mu$$

comme le $k^{\text{ième}}$ *noyau itéré*.

En raison de cette relation, nous avons donc

$$a_n = \sum \pm \Pi b_k.$$

Si nous observons que certains des b_k figurant dans un produit Πb_k peuvent être égaux, que de plus certains des produits Πb_k peuvent eux-mêmes être égaux, ceux qui se déduisent l'un de l'autre par une permutation des x_i, l'analyse combinatoire de a_n conduira à une expression

$$a_n = \sum_{\alpha 2 + \beta 3 + \gamma 4 + \ldots = n} \frac{n!}{2^\alpha 3^\beta 4^\gamma \ldots \alpha!\, \beta!\, \gamma! \ldots} [(-1)^{2+1} b_2]^\alpha [(-1)^{3+1} b_3]^\beta [(-1)^{4+1} b_4]^\gamma \ldots,$$

d'où l'on conclut

$$D(\lambda) = \sum_{\alpha, \beta, \gamma \ldots} \frac{1}{\alpha!\, \beta!\, \gamma! \ldots} \left(\frac{-\lambda^2 b_2}{2}\right)^\alpha \left(\frac{-\lambda^3 b_3}{3}\right)^\beta \left(\frac{-\lambda^4 b_4}{4}\right)^\gamma \ldots,$$

c'est-à-dire

$$D = \prod_1^\infty e^{-\frac{\lambda^n b_n}{n}}, \tag{2}$$

d'où l'on tire

$$\log D(\lambda) = -\sum \frac{\lambda^n b_n}{n}, \tag{2a}$$

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = -\sum \lambda^{n-1} b_n. \tag{2b}$$

Le numérateur $N(x, y; \lambda)$ de la fonction $G(x, y; \lambda)$ peut être défini de même par l'équation

$$N(x, y; \lambda) = D(\lambda) \cdot \sum \lambda^k f_{k+1}(x, y). \tag{3}$$

Ces équations, qui se trouvent d'ailleurs déjà dans Fredholm, sont utiles comme point de départ à de nombreuses considérations, comme on va le voir sur quelques exemples.

La méthode de Fredholm n'est immédiatement applicable que pour des noyaux $f(x, y)$ qui restent finis. Si le noyau devient infini en certains points, il arrive parfois que l'un des noyaux itérés, $f_n(x, y)$ par exemple, demeure fini. L'équation intégrale relative au noyau itéré se laisse alors traiter par la méthode de Fredholm et Fredholm montre que l'équation initiale (1) se laisse ramener à celle-ci.

La solution en est encore donnée par une formule telle que (1_a), mais on a

$$G = \frac{N_1(x, y; \lambda)}{D_n(\lambda)},$$

où

$$D_n(\lambda) = D(\lambda^n | f_n)$$

et

$$N_1(x, y; \lambda) = D_n(\lambda) \cdot \sum \lambda^k f_{k+1}(x, y).$$

Les fonctions N_1 et D_n de λ sont encore des transcendantes entières; on peut cependant montrer qu'elles possèdent un diviseur commun.

Nous allons voir comment cela résulte de nos formules (2) et (3) et comment on parvient à une expression fractionnaire pour la fonction méromorphe G, dont les deux termes sont sans diviseur commun.

De notre hypothèse sur les noyaux itérés, il suit que les coefficients b_n, b_{n+1}, ... sont finis. Formons alors, eu égard à l'équation (2_a), la suite

$$K(\lambda) = -\lambda^n \frac{b_n}{n} - \lambda^{n+1} \frac{b_{n+1}}{n+1} - \ldots,$$

cette suite convergera.

Posons maintenant

$$G(x, y; \lambda) = \frac{e^K \sum \lambda^k f_{k+1}}{e^K},$$

nous avons là l'expression cherchée. Pour l'établir, il nous faut montrer que e^K et $e^K \cdot \Sigma \lambda^k f_{k+1}$ sont des fonctions entières.

Formons dans ce but $\frac{dK}{d\lambda}$, on obtient aisément

$$-\frac{dK(\lambda)}{d\lambda} = \lambda^{n-1} \int_a^b \frac{N_1(x, x)}{D_n(\lambda)}\, dx + \sum_{k=1}^{k=n-1} \lambda^{n+k-1} \int_a^b \int \frac{N_1(x, y)}{D_n} f_k(x, y)\, dx\, dy.$$

On en conclut d'abord que $\frac{dK}{d\lambda}$ est méromorphe en λ, car elle possède au plus des pôles aux zéros de $D_n(\lambda)$, c'est-à-dire aux points $\lambda = \alpha\lambda_i$ où α est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité, et λ_i une *valeur propre* du noyau f_n. On peut alors montrer qu'en ces points de discontinuité possible le résidu de Cauchy de $\frac{dK}{d\lambda}$ est 1 ou 0 suivant que l'on a $\alpha = 1$ ou $\alpha \neq 1$. Nous ne ferons pas le calcul ici; on utilise pour cela le fait que le résidu de $\frac{N_1(x,y)}{D_n}$ pour $\lambda = \lambda_k$ est égal à $\varphi_k(x)$. $\psi_k(y)$ où φ_k, ψ_k sont respectivement les *fonctions propres* correspondant à $\lambda = \lambda_k$, solutions des deux équations

$$\int_a^b \varphi_k(x) f_p(y,x)\,dx = \lambda_k^{-p}\varphi_k(y),$$

$$\int_a^b \psi_k(z) f_p(z,y)\,dz = \lambda_k^{-p}\psi_k(y).$$

Il suit de là que $e^{K(\lambda)}$ est une fonction entière qui ne s'annule qu'aux points $\lambda = \lambda_i$.

Si l'on envisage de même le numérateur de G, on voit d'abord que c'est une fonction méromorphe de λ qui ne peut devenir infinie qu'aux points $\lambda = \alpha\lambda_i$. La considération des résidus montre alors que cela n'a pas lieu et par suite que le numérateur $e^{K}\Sigma\lambda^h f_{h+1}$ est aussi une fonction entière en λ. La réduction annoncée pour la fonction de Fredholm est donc obtenue.

Nous obtiendrons les développements en série des deux termes de la fraction de Fredholm sous cette forme réduite, en revenant à la formation de $K(\lambda)$; si nous posons, pour le dénominateur,

$$e^{K(\lambda)} = \sum (-\lambda)^n \frac{a'_n}{n!},$$

nous aurons

$$a'_n = \sum_{\alpha+\beta+\gamma+\ldots=n} \pm b_\alpha^\alpha b_\beta^\beta b_\gamma^\gamma \ldots,$$

à condition de poser

$$b_\alpha = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha < n$$

et

$$b_\alpha = \int_a^b f_\alpha(x,x)\,dx \qquad \text{pour } \alpha \geq n.$$

Le numérateur est formé de manière analogue. On doit donc développer les déterminants selon l'usage courant, puis rejeter les termes de ce développement qui contiennent un facteur $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ avec moins de n variables.

Nos formules (2), (2a), (3) sont également utiles lorsque, avec le noyau $f(x, y)$, tous les noyaux itérés deviennent infinis, cas où la méthode de Fredholm échoue certainement.

Supposons, par exemple, les nombres $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ infinis et $b_n, b_{n+1}, \ldots$ finis. On peut former la série $K(\lambda)$, chercher si elle est convergente et si $e^{K(\lambda)}$ est encore une fonction entière. Dans l'hypothèse où $f(x, y)$ est un noyau *symétrique*, c'est-à-dire où $f(x, y) = f(y, x)$, j'ai pu l'établir. J'utilise dans ce but les relations

$$b_n = \Sigma\lambda_i^{-n}$$

qui doivent avoir lieu pour $n > 2$, car le genre de la fonction $D(\lambda)$, d'après un théorème d'Hadamard, est inférieur à 2.

Le temps me manque pour indiquer ici ma démonstration. Je n'ai pas traité la question pour le numérateur de la fraction de Fredholm.

Quelques mots encore sur l'équation intégrale de *première espèce*.

On peut appliquer directement à certaines de ces équations, quand on les ramène d'abord à des équations intégrales de seconde espèce, la méthode de Fredholm.

Soit, par exemple, l'équation

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\left[e^{ixy} + \lambda f(x,y)\right]dy = \psi(x) \qquad (-\infty < x < +\infty),$$

dans laquelle $\psi(x)$ est donné et $\varphi(x)$ inconnu, alors que la partie $f(x, y)$ du noyau est une fonction donnée qui est assujettie à certaines conditions restrictives indiquées plus loin.

Faisons, pour la fonction cherchée $\varphi(y)$, l'hypothèse

$$\varphi(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(z) e^{-izy}\,dy.$$

de laquelle, en vertu d'un théorème de Fourier sur les intégrales, on tire, lorsque $\Phi(x)$ satisfait aux conditions de sa valabilité,

$$2\pi\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{ixy}\,dy.$$

L'équation (1) se transforme alors en

$$2\pi\Phi(x) + \lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(z) f(x,y) e^{-izy}\,dz\,dy = \Psi(x),$$

ou encore

$$2\pi\Phi(x)+\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(z)\,\mathrm{K}(x,z)\,dz=\Psi(x),$$

quand on pose

$$\mathrm{K}(x,z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)e^{-izy}\,dy; \tag{2}$$

nous sommes ainsi parvenus à une équation intégrale de seconde espèce.

Le noyau (2) permet l'application de la méthode de Fredholm quand, par exemple, $f(x,y)$ et $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ tendent uniformément en x vers zéro lorsque y devient $\pm\infty$ et qu'on a l'inégalité

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}<\frac{\mathrm{M}}{1+y^2},$$

où M est une constante indépendante de x et de y.

Pour $\Psi(x)$, il suffit d'admettre que dans l'intervalle $(-\infty,+\infty)$ elle n'a qu'un nombre limité de maxima et de minima et qu'elle est absolument intégrable.

On peut appliquer la même méthode à une série

$$\Psi(x)=\sum_{(m)}\mathrm{A}_m[e^{imx}+\lambda\theta_m(x)];$$

le problème est ici aussi, quand $\Psi(x)$ et les $\theta_m(x)$ sont donnés, de calculer les coefficients A_m de telle sorte que le développement soit valable. De même que tout à l'heure il s'agissait d'une extension du *théorème intégral de Fourier*, nous avons affaire ici à une extension de la *série de Fourier*.

Si nous posons

$$\varphi(z)=\sum_m\mathrm{A}_m e^{imz};\qquad 2\pi\mathrm{A}_m=\int_0^{2\pi}\varphi(z)e^{-imz}\,dz,$$

nous aurons

$$\Psi(x)=\varphi(x)+\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(z)\sum_m e^{-imz}\theta_m(x)\,dz.$$

Nous devons supposer que la série qui joue le rôle de noyau est absolument et uniformément convergente, c'est-à-dire nous devons admettre que

$$\sum_{(m)}|\theta_m(x)| \tag{3}$$

converge uniformément.

Posons, par exemple,

$$\lambda=1,\qquad \theta_m(x)=e^{i\beta_m x}-e^{imx},$$

nous obtiendrons un développement de la forme

$$\Psi(x)=\sum_{(m)}\mathrm{A}_m e^{i\beta_m x}.$$

La condition (3) est remplie quand on suppose la convergence absolue de $\sum_{(m)}(\mu_m-m)$.

Considérons encore, enfin, l'équation

$$\int_0^{2\pi}\varphi(y)[e^{ixy}+\lambda f(x,y)]\,dy=\psi(x)\qquad(-\infty<x<+\infty) \tag{4}$$

qui se distingue de (1) en ce que l'intégrale est à prendre dans un intervalle fini et non entre $-\infty$ et $+\infty$.

Dans ce cas, $\psi(x)$ ne peut être pris arbitrairement : elle doit, si $f(x,y)$ est holomorphe, être une fonction entière pour que l'équation (4) admette une solution. Mais les valeurs $\psi(m)$ de cette fonction ψ pour tous les entiers m peuvent être choisies arbitrairement.

Si l'on pose en effet

$$\varphi(z)=\sum_{(m)}\mathrm{A}_m e^{-imz}\qquad\text{où}\qquad 2\pi\mathrm{A}_m=\int_0^{2\pi}\varphi(y)e^{imy}\,dy,$$

l'équation (4) se transforme, pour $x=m$, en

$$2\pi\mathrm{A}_m+\lambda\sum_{(p)}\mathrm{A}_p\int_0^{2\pi}e^{-ipy}f(m,y)\,dy=\psi(m).$$

Nous obtenons ainsi un système d'une infinité d'équations linéaires avec une infinité d'inconnues, tel que ceux étudiés par Hill, H. v. Koch, Hilbert entre autres. La résolution de ce système, au cas où nous supposons la série

$$\sum_{(p,m)}\int_0^{2\pi}e^{-ipy}f(m,y)\,dy \tag{5}$$

absolument et uniformément convergente, est tout à fait analogue à la résolution par Fredholm de l'équation intégrale et conduit aussi à une fonction méromorphe du paramètre λ.

La convergence absolue et uniforme de (5) est d'ailleurs, comme une inté-

gration par parties le montre, assurée au cas où la somme $\sum_{(m)} f^{n}(m, z)$ ou l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f^{n}(x, z)\,dx$, est absolument et uniformément convergente.

On voit nettement l'analogie et la différence entre les deux cas (1) et (4); suivant que les limites de l'intégrale sont infinies ou finies, ou aussi suivant que le noyau présente aux limites d'intégration une allure régulière ou une singularité suffisamment élevée, on peut choisir la fonction *donnée* d'une manière essentiellement arbitraire ou seulement fixer une suite infinie mais *discrète* des valeurs qu'elle doit prendre. Il ne serait probablement pas sans intérêt d'approfondir cette distinction par l'emploi des noyaux itérés.

REMARQUES DIVERSES

SUR

L'ÉQUATION DE FREDHOLM [1]

Acta mathematica, t. 33, 1901, p. 57-86.

I. — Formules fondamentales.

Nous écrirons l'équation de Fredholm sous la forme suivante :

$$\varphi(x) = \lambda \int f(x, y)\varphi(y)\,dy + \psi(x); \tag{1}$$

$\varphi(x)$ est la fonction inconnue, $\psi(x)$ une fonction donnée, $f(x, y)$ le noyau (les limites de l'intégrale étant deux constantes). La solution du problème nous est donnée par la formule de Fredholm

$$\varphi(x) = \psi(x) + \lambda \int \psi(y) \frac{N(\lambda; x, y)}{D(\lambda)}\,dy, \tag{2}$$

où $D(\lambda)$ est le $D_{-\lambda f}$ de Fredholm, tandis que $N(\lambda; x, y)$ s'écrit d'après les notations de Fredholm

$$-\frac{1}{\lambda} D_{-\lambda f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Nous aurons donc

$$D(\lambda) = \sum \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix} dx_1\,dx_2 \ldots dx_n = 1 - \lambda \int f(x_1, x_1)\,dx_1 + \ldots.$$

Je n'écris qu'un signe $\int$ pour une intégration multiple.

Nous aurons de même

$$N(\lambda) = \sum \frac{(-\lambda^n)}{n!} \int f\begin{pmatrix} x, x_1, x_2, \ldots, x_n \\ y, x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix} dx_1\,dx_2 \ldots dx_n$$
$$= f(x, y) - \lambda \int f\begin{pmatrix} x, x_1 \\ y, x_1 \end{pmatrix} dx_1 + \ldots.$$

[1] Imprimé le 12 septembre 1909.

Nous sommes ainsi conduits à examiner la formation du déterminant

$$f\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_n \\ x_1, & x_2, & \dots, & x_n \end{pmatrix}.$$

Un des termes de son développement sera de la forme

$$\pm \Pi f(x_i, x_k),$$

$\Pi f(x_i, x_k)$ représentant le produit d'un certain nombre de facteurs de la forme $f(x_i, x_k)$. Ces facteurs doivent satisfaire à la condition suivante : chacune des lettres $x_1, x_2, \dots, x_n$ devra figurer une fois et une seule *comme* x_i, c'est-à-dire comme premier argument de la fonction $f(x, y)$ dans l'un des facteurs du produit. Elle devra figurer une fois et une seule *comme* x_k, c'est-à-dire comme second argument de la fonction $f(x, y)$ dans l'un des facteurs du produit. A chacun des termes du déterminant correspondra ainsi une permutation des lettres $x_1, x_2, \dots, x_n$; à savoir celle qui change chacune des lettres x_i en la lettre x_k correspondante. Il y aura autant de termes dans le déterminant qu'il y a de semblables permutations, c'est-à-dire $n!$; et le produit Π devra être du signe $+$ si la permutation appartient au groupe alterné et du signe $-$ dans le cas contraire.

On peut répartir les lettres $x_1, x_2, \dots, x_n$ en un certain nombre de *cycles* de telle façon que la permutation S envisagée permute circulairement entre elles les lettres d'un même cycle. Si nous désignons par T(S) celui des termes $\pm \Pi f(x_i, x_k)$ de notre déterminant qui correspond à la permutation S, et si nous posons, pour abréger,

$$f(x_\alpha, x_\beta, \dots, x_\lambda, x_\mu) = f(x_\alpha, x_\beta) f(x_\beta, x_\gamma) \dots f(x_\lambda, x_\mu) f(x_\mu, x_\alpha),$$

nous pourrons écrire

$$\mathrm{T}(\mathrm{S}) = \pm \Pi f(x_i, x_k) = \pm \Pi f(x_\alpha, x_\beta, \dots, x_\lambda, x_\mu).$$

Le dernier membre représente un produit de facteurs de la forme

$$f(x_\alpha, x_\beta, \dots, x_\lambda, x_\mu).$$

Chacun de ces facteurs correspond à un des *cycles* de la permutation S et les lettres

$$x_\alpha, \quad x_\beta, \quad \dots, \quad x_\lambda, \quad x_\mu$$

sont les lettres de ce cycle, qui sont permutées circulairement par S.

Quant au signe, on l'obtient en faisant le produit de différents facteurs ± 1 correspondant aux différents facteurs $f(x_\alpha, x_\beta, \dots, x_\mu)$, ces facteurs étant

égaux à $+1$ pour les cycles d'un nombre impair de lettres et à -1 pour les cycles d'un nombre pair de lettres.

Nous poserons

$$(3)\quad \begin{cases} a_n = \int f\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_n \\ x_1, & x_2, & \dots, & x_n \end{pmatrix} dx_1\, dx_2 \dots dx_n, \qquad a(\mathrm{S}) = \int \mathrm{T}(\mathrm{S})\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n, \\ b_k = \int f(x_\alpha, x_\beta, \dots, x_\lambda, x_\mu)\, dx_\alpha\, dx_\beta \dots dx_\lambda\, dx_\mu. \end{cases}$$

Dans cette dernière égalité, l'indice k de b_k représente le nombre des lettres du cycle $x_\alpha, x_\beta, \dots, x_\lambda, x_\mu$; l'intégrale ne dépend évidemment que de ce nombre, puisque, quelles que soient les lettres $x_\alpha, \dots, x_\mu$ envisagées, on les fera toujours varier entre les mêmes limites.

Cela posé l'intégrale $a(\mathrm{S})$ va se décomposer en un produit d'intégrales b_k, puisque chacun des facteurs de T(S) ne contient qu'un certain nombre de lettres $x_\alpha, \dots, x_\mu$ qui ne figurent pas dans les autres facteurs; nous pourrons écrire

$$a(\mathrm{S}) = \pm \Pi b_k$$

ou pour préciser le signe

$$(4)\qquad a(\mathrm{S}) = \Pi |(-1)^{k+1} b_k|.$$

Si par exemple $n = 17$ et que S comprenne 1 cycle de 4 lettres, 2 de 3 lettres, 3 de 2 lettres et 2 d'une lettre, nous aurons

$$a(\mathrm{S}) = (-b_4)(b_3)^2(-b_2)^3(b_1)^2 = b_4 b_3^2 b_2^3 b_1^2.$$

Il faut maintenant calculer

$$a_n = \Sigma a(\mathrm{S}),$$

la sommation étant étendue aux différentes permutations S de n lettres. Nous devons donc rechercher combien il y a de permutations comprenant a cycles de α lettres, b cycles de β lettres, c cycles de γ lettres, d cycles de δ lettres, etc. En d'autres termes, de combien de manières peut-on répartir n lettres en a groupes de α lettres, b de β, c de γ, d de δ lettres, etc.? On rangera les lettres dans les différents ordres possibles qui sont au nombre de $n!$; on prendra ensuite les α premières lettres qui nous donneront le premier groupe, puis les α suivantes qui nous donneront le second, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait les a groupes de α lettres; on prendra ensuite les β lettres suivantes pour former le premier groupe de β lettres, et ainsi de suite. On obtiendrait ainsi $n!$ solutions, mais elles ne sont pas distinctes; on obtient la même répartition en permutant *circulairement* les lettres d'un même groupe, ce qui nous oblige

à diviser par $\alpha^a\beta^b\gamma^c\delta^d\ldots$; on obtient la même répartition en permutant d'une manière quelconque les divers groupes qui sont formés d'un même nombre de lettres, ce qui nous oblige à diviser par $a!b!c!d!\ldots$; le nombre cherché est donc

$$\frac{n!}{\alpha^a\beta^b\gamma^c\delta^d\ldots a!\,b!\,c!\,d!\ldots}.$$

On aura donc

$$a_n=\sum\frac{n!}{\alpha^a\beta^b\gamma^c\delta^d\ldots a!\,b!\,c!\,d!\ldots}\times[(-1)^{\alpha+1}b_\alpha]^a[(-1)^{\beta+1}b_\beta]^b[(-1)^{\gamma+1}b_\gamma]^c[(-1)^{\delta+1}b_\delta]^d\ldots$$

Les entiers α, β, γ, δ, ..., a, b, c, d, ... sont assujettis à la condition

$$\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d+\ldots=n.$$

On a donc

$$\frac{a_n}{n!}=\frac{(-1)^n}{a!\,b!\,c!\,d!\ldots}\left(\frac{-b_\alpha}{\alpha}\right)^a\left(\frac{-b_\beta}{\beta}\right)^b\left(\frac{-b_\gamma}{\gamma}\right)^c\left(\frac{-b_\delta}{\delta}\right)^d\ldots$$

Il vient ensuite

$$(5)\quad D(\lambda)=\sum\frac{(-\lambda)^n a_n}{n!}=\sum\frac{1}{a!\,b!\,c!\,d!\ldots}\left(\frac{-\lambda^\alpha b_\alpha}{\alpha}\right)^a\left(\frac{-\lambda^\beta b_\beta}{\beta}\right)^b\left(\frac{-\lambda^\gamma b_\gamma}{\gamma}\right)^c\left(\frac{-\lambda^\delta b_\delta}{\delta}\right)^d+\ldots,$$

de sorte que $D(\lambda)$ se présente sous la forme d'un produit

$$D(\lambda)=\Pi\varphi_\alpha;\qquad \varphi_\alpha=\sum\left(\frac{-\lambda^\alpha b_\alpha}{\alpha}\right)^a\frac{1}{a!}.$$

Mais la sommation est immédiate et l'on trouve

$$\varphi_\alpha=e^{-\frac{\lambda^\alpha b_\alpha}{\alpha}};\qquad \log\varphi_\alpha=-\frac{\lambda^\alpha b_\alpha}{\alpha},$$

d'où

$$(6)\qquad \log D(\lambda)=-\sum\frac{\lambda^\alpha b_\alpha}{\alpha}$$

et en prenant la dérivée logarithmique de $D(\lambda)$

$$(7)\qquad \frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)}=-\sum\lambda^{\alpha-1}b_\alpha.$$

Ces formules ne sont pas nouvelles, elles ont été énoncées par Fredholm qui les a découvertes par une voie différente (*Acta mathematica*, t. 27, p. 384).

Appliquons la même analyse au calcul de $N(\lambda)$ et du déterminant

$$f\begin{pmatrix}x, & x_1, & x_2, & \ldots, & x_n\\ y, & x_1, & x_2, & \ldots, & x_n\end{pmatrix}.$$

Chaque terme se présentera sous la forme

$$\pm\Pi f(x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\mu),$$

sauf que l'un des facteurs sera remplacé par

$$(8)\qquad f(x, y; x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\lambda)=f(x, x_\alpha)f(x_\alpha, x_\beta)\ldots f(x_\lambda, y)$$

Si nous posons

$$\int f(x, y; x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\lambda)\,dx_\alpha\,dx_\beta\ldots dx_\lambda=f_{k+1}(x, y),$$

cette intégrale ne dépendra que du nombre k des variables x_α, x_β, ..., x_λ par rapport auxquelles on intègre; c'est ce nombre qui figure dans l'indice $k+1$. Cette fonction $f_{k+1}(x, y)$ n'est autre chose que ce qu'on appelle le *noyau itéré* d'ordre $k+1$. On aura d'ailleurs

$$b_k=\int f_k(x, x)\,dx.$$

Si alors, par analogie avec les notations adoptées plus haut, nous désignons par $T'(S)$ un quelconque des termes de notre nouveau déterminant et par $a'(S)$ l'intégrale de $T'(S)$, nous trouverons comme plus haut

$$a'(S)=\pm f_{h+1}(x, y)\Pi b_k,$$

avec la condition

$$h+\Sigma k=n.$$

Le facteur $f_{h+1}(x, y)$ provient de l'intégration du facteur (8) et les divers facteurs b_k de l'intégration des autres facteurs de la forme $f(x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\lambda)$. Je puis encore écrire

$$a'(S)=(-1)^h f_{h+1}a(S'),$$

où S' est la substitution qui permute entre elles les lettres qui figurent dans les facteurs autres que le facteur (8) et de la façon indiquée par l'ordre de ces lettres dans ces divers facteurs. Si alors nous désignons par a'_n l'intégrale de notre déterminant lui-même, il viendra en remarquant qu'on obtient autant de fois le même terme qu'il y a de manières de choisir les h lettres $x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\lambda$ qui figurent dans le facteur (8); c'est-à-dire autant de fois qu'il y a d'arrange-

ments de n lettres h à h; c'est-à-dire $\frac{n!}{n-h!}$;

$$a'_n = \sum (-1)^h f_{h+1} a_{n-h} \frac{n!}{(n-h)!}$$

ou

$$N(\lambda) = \sum \frac{(-\lambda)^n}{n!} a'_n = \sum \lambda^h f_{h+1} (-\lambda)^{n-h} \frac{a_{n-h}}{(n-h)!} = D(\lambda) \sum \lambda^h f_{h+1},$$

d'où enfin

$$\frac{N(\lambda)}{D(\lambda)} = \sum \lambda^h f_{h+1}. \tag{9}$$

Cette formule s'obtiendrait immédiatement en cherchant à développer suivant les puissances de λ la solution de l'équation (1).

Bien que les séries (6), (7) et (9) ne convergent que pour les petites valeurs de λ, leur considération peut abréger le calcul des termes des séries $D(\lambda)$ et $N(\lambda)$, qui, elles, convergent toujours. Mais ce n'est pas là l'usage que je veux en faire.

II. — Cas où le noyau devient infini.

La fonction

$$\frac{N(\lambda)}{D(\lambda)}$$

se présente sous la forme d'une fonction méromorphe de λ; mais elle peut être mise d'une infinité de manières sous la forme du quotient de deux fonctions entières. En effet, on pourrait écrire

$$\frac{N(\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{N(\lambda) G(\lambda)}{D(\lambda) G(\lambda)},$$

$G(\lambda)$ étant une fonction entière quelconque de λ; et si l'on veut que la fraction du second membre reste irréductible, il suffit de prendre

$$G(\lambda) = e^{H(\lambda)},$$

$H(\lambda)$ étant une fonction entière. En particulier nous pouvons prendre

$$H(\lambda) = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=n} \frac{\lambda^\alpha b_\alpha}{\alpha}.$$

Alors le dénominateur $D(\lambda) G(\lambda)$ reste une fonction entière, et le développement de son logarithme est le même que celui de $\log D(\lambda)$ en supprimant les n premiers termes.

Ces considérations prennent surtout de l'intérêt dans les cas où la méthode de Fredholm ne s'applique pas immédiatement, et où il faut recourir à la généralisation exposée par Fredholm pages 384 et suiv., par le moyen des noyaux itérés.

La méthode de Fredholm s'applique immédiatement quand le noyau f reste partout fini; supposons maintenant que les premiers noyaux itérés

$$f, \quad f_2, \quad \ldots, \quad f_{n-1}$$

deviennent infinis, mais que f_n et les noyaux suivants $f_{n+1}, \ldots$ restent partout finis. Nous supposerons de plus que les intégrales

$$\int f_i(x, y) \psi(y) \, dy \qquad (i = 1, 2, \ldots, \text{ad inf.})$$

restent finies. Toutes ces conditions sont remplies dans l'hypothèse faites par Fredholm dans son paragraphe 6, c'est-à-dire si le noyau $f(x, y)$ ne devient infini que pour $x = y$ et comme $(x-y)^\alpha$ où $\alpha < \frac{n-1}{n}$.

L'équation (1) du paragraphe 1 peut alors être remplacée par la suivante :

$$\varphi(x) = \lambda^n \int f_n(x, y) \varphi(y) \, dy + \Theta(x), \tag{1 bis}$$

où

$$\Theta(x) = \psi(x) + \int \psi(y) [\lambda f + \lambda^2 f_2 + \ldots + \lambda^{n-1} f_{n-1}] \, dy$$

est une fonction connue. La méthode de Fredholm est alors immédiatement applicable à l'équation (1 *bis*) que l'on peut résoudre par une formule analogue à la formule (2) du paragraphe 1, où l'on remplace seulement λ par λ^n, f par f_n, et ψ par Θ. Si nous convenons d'écrire $N(\lambda, f)$ et $D(\lambda, f)$ au lieu de $N(\lambda)$ et $D(\lambda)$ pour mettre en évidence la fonction f, la nouvelle formule pourra s'écrire

$$\varphi(x) = \Theta(x) + \lambda^n \int \Theta(y) \frac{N(\lambda^n, f_n)}{D(\lambda^n, f_n)} \, dy \tag{2 bis}$$

ou bien encore

$$\varphi(x) = \psi(x) + \lambda \int \psi(y) \frac{N_1(\lambda)}{D(\lambda^n, f_n)} \, dy. \tag{2 ter}$$

Pour définir $N_1(\lambda)$, nous poserons

$$f + \lambda f_2 + \ldots + \lambda^{n-2} f_{n-1} = F(x, y)$$

et nous aurons alors

$$N_1(\lambda) = F(x, y) D(\lambda^n f_n) + \lambda^n N(\lambda^n, f_n) + \lambda^{n+1} \int N(\lambda^n, f_n; x, z) F(z, y) \, dz.$$

La fonction

$$\frac{N_1(\lambda)}{D(\lambda^n, f_n)}$$

se présente sous la forme d'une fonction méromorphe; et nous sommes certains que le numérateur et le dénominateur sont des séries entières toujours convergentes. Mais il n'est pas certain que cette fraction soit irréductible; il est même aisé de se rendre compte qu'elle ne l'est pas en général. En effet la formule subsiste quand le noyau f est toujours fini; mais dans ce cas, la formule (2) est vraie également, de sorte qu'on a

$$\frac{N_1(\lambda)}{D(\lambda^n, f_n)} = \frac{N(\lambda)}{D(\lambda, f)};$$

le dénominateur de la première fraction admet tous les zéros

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots$$

du dénominateur de la deuxième; mais il admet en outre tous les zéros

$$\alpha\lambda_1, \quad \alpha\lambda_2, \quad \ldots,$$

où α est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité. Cela montre que la première fraction n'est pas irréductible.

Le problème que je me propose maintenant, c'est dans le cas où les premiers noyaux itérés ne sont pas partout finis, *de trouver une formule analogue à la formule* (2 *ter*), *mais où figure une fraction irréductible*.

Je vais établir que le résultat est le suivant. Il suffira de remplacer dans la formule (2) $N(\lambda)$ et $D(\lambda)$ par

$$N(\lambda)e^{-H(\lambda)}, \qquad D(\lambda)e^{-H(\lambda)},$$

où $H(\lambda)$ est l'ensemble des $n-1$ premiers termes de $\log D(\lambda)$. Reprenons le développement de ce logarithme

$$\log D(\lambda) = -\sum \frac{\lambda^\alpha b_\alpha}{\alpha},$$

$b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ peuvent être infinis, mais $b_n, b_{n+1}, \ldots$ sont finis. Formons alors la série

$$K(\lambda) = -\frac{\lambda^n b_n}{n} - \frac{\lambda^{n+1} b_{n+1}}{(n+1)} - \frac{\lambda^{n+2} b_{n+2}}{(n+2)} - \ldots.$$

Nous montrerons que la série $K(\lambda)$ est convergente pour les petites valeurs de λ; que $e^{K(\lambda)}$ est une fonction entière; que

$$e^{K(\lambda)} \Sigma \lambda^k f_{k+1}$$

est également une fonction entière, sauf pour $x = y$ auquel cas quelques-uns de ses coefficients deviennent infinis.

Revenons un instant au cas où f reste fini et reprenons la formule (9) du paragraphe 1

$$\frac{N(\lambda)}{D(\lambda)} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k f_{k+1}.$$

Si nous revenons au cas où f_n est le premier noyau itéré qui reste fini, et si nous changeons λ en λ^n et f en f_n, cette formule deviendra

$$\frac{N(\lambda^n, f_n)}{D(\lambda^n, f_n)} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{nk} f_{nk+n}, \tag{3}$$

ou en mettant en évidence les variables x et y

$$\frac{N(\lambda^n, f_n; x, y)}{D(\lambda^n, f_n)} = \sum \lambda^{nk} f_{nk+n}(x, y),$$

d'où en supprimant pour abréger les indications λ^n et f_n devenues inutiles

$$\int \frac{N(x, x)}{D} dx = \sum \lambda^{nk} b_{nk+n} \tag{4}$$

et

$$\int \frac{N(x, y)}{D} f_k(y, x)\, dx\, dy = \sum \lambda^{nk} \int f_{nk+n}(x, y) f_k(y, x)\, dx\, dy \tag{5}$$
$$= \sum \lambda^{nk} b_{nk+n+k}.$$

Reprenons notre fonction $K(\lambda)$, nous aurons

$$-\frac{dK}{d\lambda} = \lambda^{n-1} b_n + \lambda^n b_{n+1} + \lambda^{n+1} b_{n+2} + \ldots;$$

le second membre peut s'écrire

$$\lambda^{n-1} \Sigma \lambda^{nk} b_{nk+n} + \lambda^n \Sigma \lambda^{nk} b_{nk+n+1} + \ldots$$
$$+ \lambda^{n+k-1} \Sigma \lambda^{nk} b_{nk+n+k} + \ldots + \lambda^{2n-2} \Sigma \lambda^{nk} b_{nk+2n-1}$$

ou bien

$$\lambda^{n-1} \int \frac{N(x, x)}{D} dx + \sum_{k=1}^{k=n-1} \lambda^{n+k-1} \int \frac{N(x, y)}{D} f_k(y, x)\, dx\, dy. \tag{6}$$

Comme $D = D(\lambda^n, f_n)$ et $N(x, y) = N(\lambda^n, f_n; x, y)$ sont des fonctions entières de λ, on voit que l'expression (6) et par conséquent $\frac{dK}{d\lambda}$ est une fonction méromorphe de λ et que les infinis de cette fonction méromorphe ne sont autre chose que les zéros de $D(\lambda^n, f_n)$.

Or, d'après Fredholm, si l'on a

$$D(\lambda_K^n, f_n) = 0$$

et si λ_K^n est un zéro simple, ce que je supposerai, il existera une fonction $\varphi_K(x)$ et une seule telle que

$$\varphi_K(x) = \lambda_K^n \int \bar{\varphi}_K(y) f_n(x, y)\, dy. \tag{7}$$

En convenant de poser

$$\int \varphi(y) f_p(x, y)\, dy = S^p \varphi(x),$$

d'où

$$S^p[S^q \bar{\varphi}(x)] = S^{p+q} \varphi(x),$$

cette relation peut s'écrire

$$\bar{\varphi}_K(x) = \lambda_K^n S^n \varphi_K(x), \tag{7 bis}$$

on en déduit

$$S\bar{\varphi}_K(x) = \lambda_K^n S^{n+1} \varphi_K(x) = \lambda_K^n S^n[S\bar{\varphi}_K(x)],$$

de sorte que $S\varphi_K(x)$ sera aussi une solution de l'équation (7) ou (7 *bis*); comme cette équation ne comporte qu'une solution, on devra avoir

$$S\bar{\varphi}_K(x) = \alpha \bar{\varphi}_K(x),$$

α étant un coefficient constant.

On en tire

$$S^n \varphi_K(x) = \alpha^n \varphi_K(x),$$

d'où en comparant avec (7 *bis*)

$$\alpha^n = \frac{1}{\lambda_K^n},$$

ce qui revient à dire que α est égal à $\frac{1}{\lambda_K}$, à une racine $n^{\text{ième}}$ près de l'unité. Nous pourrons toujours choisir λ_K de telle façon que cette racine $n^{\text{ième}}$ soit égale à 1 et que l'on ait

$$\bar{\varphi}_K(x) = \lambda_K S \varphi_K(x).$$

On obtiendrait un résultat analogue dans le cas d'une racine multiple; je ne reproduis pas ici l'analyse complète qui a déjà été faite bien des fois. Cela posé reprenons notre fonction méromorphe $\frac{dK}{d\lambda}$ et proposons-nous de déterminer le *résidu* de cette fonction méromorphe pour le pôle $\lambda = \lambda_K$ et pour les pôles correspondants $\lambda = \alpha\lambda_K$, α étant une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

Cherchons d'abord ce résidu pour

$$\int \frac{N(x, x)}{D}\, dx = \Sigma \lambda^{n+k} b_{n,k+n}.$$

Cette expression n'est autre chose que

$$-\frac{d \log D(\lambda^n, f_n)}{d\lambda^n}.$$

Son résidu est donc -1, si l'on considère λ^n comme la variable indépendante, c'est-à-dire que le terme infini sera de la forme

$$-\frac{1}{\lambda^n - \lambda_K^n},$$

et le résidu correspondant, si l'on reprend λ comme variable, est

$$-\frac{1}{n\lambda_K^{n-1}},$$

c'est-à-dire, $-\frac{1}{n}\lambda_K^{1-n}$ pour le pôle λ_K et $-\frac{1}{n}(\alpha\lambda_K)^{1-n}$ pour le pôle $\alpha\lambda_K$. Pour le premier terme de l'expression (6), le résidu est donc $\frac{1}{n}$ tant pour le pôle λ_K que pour le pôle $\alpha\lambda_K$. Considérons maintenant le terme général de l'expression (6), c'est-à-dire

$$\lambda^{n+p-1} \int \frac{N(x, y)}{D} f_p(y, x)\, dx\, dy.$$

Le résidu de $\frac{N(x, y)}{D}$ pour $\lambda^n = \lambda_i^n$, en considérant de nouveau λ^n comme la variable indépendante, sera une fonction de x et de y de la forme $\varphi_K(x)\psi_K(y)$, en vertu d'un théorème connu, d'après ce qui précède : le résidu par rapport à λ^n de

$$\int \frac{N(x, x)}{D}\, dx$$

devra être

$$-1 = \int \bar{\varphi}_K(x) \psi_K(x)\, dx$$

et celui de

$$\int \frac{N(x, y)}{D} f_p(y, x)\, dx\, dy$$

sera

$$\int \bar{\varphi}_K(x) \psi_K(y) f_p(y, x)\, dx\, dy.$$

Mais on a, d'après l'équation (8),

$$\int \varphi_K(x) f(y, x)\, dx = S\bar{\varphi}_K(y) = \frac{1}{\lambda_K} \bar{\varphi}_K(y)$$

et plus généralement

$$\int \varphi_k(x) f_p(y, x)\, dx = S^p \varphi_k(y) = \frac{1}{\lambda_k^p} \varphi_k(y).$$

Le résidu cherché sera donc

$$\frac{1}{\lambda_k^n} \int \varphi_k(y) \psi_k(y)\, dy = -\frac{1}{\lambda_k^n}$$

et par rapport à λ

$$-\frac{1}{n\lambda_k^n \lambda^{n-1}} = -\frac{1}{n} \lambda_k^{1-n-p} \alpha^{1-n}$$

pour le pôle $\lambda = \alpha\lambda_k$. Pour le terme correspondant de l'expression (6), qui est affecté du facteur λ^{n+p-1}, il faudra multiplier par

$$\lambda^{n+p-1} = (\alpha\lambda_k)^{n+p-1},$$

de sorte qu'on trouvera

$$-\frac{1}{n}\alpha^p.$$

Nous avions trouvé pour le premier terme de l'expression (6)

$$-\frac{1}{n} = -\frac{1}{n}\alpha^0,$$

de sorte que le résidu total de l'expression (6) est

$$-\frac{1}{n} \sum_{p=0}^{p=n-1} \alpha^p.$$

Cela fait -1 pour le pôle $\lambda = \lambda_k$, c'est-à-dire pour $\alpha = 1$, et 0 pour le pôle $\lambda = \alpha\lambda_k$ quand α est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité, différente de 1.

Ainsi, l'expression

$$\frac{dK}{d\lambda} = -\lambda^{n-1} b_n - \lambda^n b_{n+1} - \dots$$

est une fonction méromorphe de λ dont tous les résidus sont égaux à 1. Donc l'expression

$$e^{K(\lambda)}$$

sera une fonction entière de λ. C. Q. F. D.

Il resterait à établir que

$$\sum \lambda^h f_{h+1} e^{K(\lambda)} \tag{9}$$

est également une fonction entière de λ.

En effet, nous avons d'après la formule (2 *ter*)

$$\sum \lambda^h f_{h+1} = \frac{N_1(\lambda)}{D(\lambda^n, f_n)},$$

ce qui nous prouve que l'expression (9) est une fonction méromorphe de λ, qui ne pourrait devenir infinie que pour $D(\lambda^n, f_n) = 0$, c'est-à-dire pour $\lambda = \lambda_k$ et pour $\lambda = \alpha\lambda_k$. Comme $e^{K(\lambda)}$ s'annule pour $\lambda = \lambda_k$, nous voyons que l'expression (9), c'est-à-dire

$$\frac{N_1(\lambda)}{D} e^{K(\lambda)},$$

où j'ai écrit D au lieu de $D(\lambda^n, f_n)$, reste finie pour $\lambda = \lambda_k$; il me reste à montrer que $N_1(\lambda)$ s'annule pour $\lambda = \alpha\lambda_k$; ou que le résidu correspondant de $\frac{N_1}{D}$ est nul.

Nous avons donc à évaluer le résidu de

$$\frac{N_1}{D} = F + \lambda^n \frac{N(x, y)}{D} + \lambda^{n+1} \int \frac{N(x, z)}{D} F\, dz. \tag{10}$$

Le premier terme du second membre de (10) ne devient pas infini; le second a pour résidu

$$[\lambda_k^n \varphi_k(x) \psi_k(y)] \frac{1}{n\lambda_k^{n-1}}$$

et le troisième

$$\frac{1}{n\lambda_k^{n-1}} \alpha\lambda_k^{n+1} \int \varphi_k(x) \psi_k(z) F(z, y)\, dz = \frac{1}{n\lambda_k^{n-1}} \sum \alpha^p \lambda_k^{n-p} \int \varphi_k(x) \psi_k(z) f_p(z, y)\, dz.$$

Nous sommes donc amenés à calculer

$$\int \psi_k(z) f_p(z, y)\, dz.$$

Nous démontrerons bientôt que l'on a

$$\int \psi_k(z) f_p(z, y)\, dz = \lambda_k^{n-p} \psi_k(y), \tag{11}$$

de sorte qu'il viendra pour notre résidu

$$\frac{1}{n\lambda_k^{n-1}} \sum_{p=1}^{n-1} \alpha^p \lambda_k^n \varphi_k(x) \psi_k(y)$$

et pour le résidu total de l'expression (10)

$$\frac{1}{n\lambda_k^{n-1}} \lambda_k^n \varphi_k(x)\, \psi_k(y) \sum_{p=0}^{n-1} \alpha^p, \quad \text{c'est-à-dire zéro.}$$

Donc l'expression (9) ne devenant infinie ni pour $\lambda = \lambda_K$ ni pour $\lambda = \alpha\lambda_K$ est une fonction entière. C. Q. F. D.

Il nous reste à démontrer l'égalité (11). A cet effet, remarquons que $N(y, x)$ et $f_p(y, x)$ sont à $f(y, x)$, ce que $N(x, y)$ et $f_p(x, y)$ sont à $f(x, y)$. Le résidu de $\frac{1}{D}N(x, y)$ étant $\varphi_K(x)\psi_K(y)$ et par conséquent celui de $\frac{1}{D}N(y, x)$ étant $\varphi_K(y)\psi_K(x)$, nous voyons que $\psi_K(x)$ est à $f(y, x)$ ce que $\varphi_K(x)$ est à $f(x, y)$. Alors de même que l'on a

$$\varphi_K(x) = \lambda_K^n \int \varphi_K(y) f_n(x, y)\, dy \tag{12}$$

et que $\varphi_K(x)$ est la seule solution de cette équation; de même on aura

$$\psi_K(x) = \lambda_K^n \int \psi_K(y) f_n(y, x)\, dy \tag{12 bis}$$

et $\psi_K(x)$ sera la seule solution de cette équation. De l'équation (12) nous avons déduit

$$\varphi_K(x) = \beta\lambda_K \int \varphi_K(y) f(x, y)\, dy, \tag{13}$$

β étant une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité, de même de (12 *bis*) nous déduirons

$$\psi_K(x) = \beta'\lambda_K \int \psi_K(y) f(y, x)\, dy, \tag{13 bis}$$

β' étant une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité; et il reste à faire voir que $\beta = \beta' = 1$. Pour cela remarquons que f_{n+1} étant toujours fini comme f_n, nous pouvons raisonner sur l'un de ces noyaux comme sur l'autre. Il existera donc des fonctions $\varphi'_K(x)$ et $\psi'_K(x)$ satisfaisant aux équations

$$\varphi'_K(x) = \gamma\lambda_K \int \varphi'_K(y) f(x, y)\, dy, \tag{14}$$

$$\psi'_K(x) = \gamma'\lambda_K \int \psi'_K(y) f(y, x)\, dy, \tag{14 bis}$$

γ et γ' étant deux racines $(n+1)^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Il est aisé de voir que φ'_K est égal à φ_K, et ψ'_K à ψ_K; sans quoi on aurait

$$\varphi'_K(x) = \gamma^n\lambda_K^n \int \varphi'_K(y) f_n(x, y)\, dy,$$

$$\psi'_K(x) = \gamma'^n\lambda_K^n \int \psi'_K(y) f_n(y, x)\, dy,$$

et nous devrions conclure que $D(\lambda^n, f_n)$ admet outre la racine λ_K^n les racines $\gamma^n\lambda_K^n$ et $\gamma'^n\lambda_K^n$, c'est-à-dire plusieurs racines (deux au moins, ou une racine

double) de même module que λ_K^n. Cela n'arrivera pas en général (et il est aisé de voir comment on devrait raisonner dans les cas d'exception).

Il faut donc que

$$\varphi'_K = \varphi_K, \qquad \psi'_K = \psi_K, \qquad \gamma = \beta, \qquad \gamma' = \beta',$$
$$\gamma^n = \beta^n = 1, \qquad \gamma'^n = \beta'^n = 1^n, \qquad \gamma^n = \gamma^{n+1} = 1, \qquad \gamma'^n = \gamma'^{n+1} = 1,$$

d'où enfin

$$\gamma = \gamma' = 1.$$

L'équation (13 *bis*) s'écrit alors

$$\psi_K(x) = \lambda_K \int \psi_K(y) f(y, x)\, dy,$$

et il est aisé d'en déduire

$$\psi_K(x) = \lambda_K^p \int \psi_K(y) f_p(y, x)\, dy,$$

ce qui n'est autre chose que l'équation (11) qu'il fallait démontrer.

III. — Formation de la fonction méromorphe.

On peut tirer de là une façon de calculer les divers termes du développement du numérateur et du dénominateur de notre fonction méromorphe. Nous avons trouvé plus haut

$$\log D(\lambda) = -\sum \frac{\lambda^\alpha b_\alpha}{\alpha}, \tag{1}$$

formule que nous avons déduite de la suivante :

$$D(\lambda) = \sum \frac{(-\lambda)^n a_n}{n!} = \sum \frac{1}{a!\,b!\,c!\,d!\ldots}\left(\frac{-\lambda^\alpha b_\alpha}{\alpha}\right)^a\left(\frac{-\lambda^\beta b_\beta}{\beta}\right)^b\left(\frac{-\lambda^\gamma b_\gamma}{\gamma}\right)^c\left(\frac{-\lambda^\delta b_\delta}{\delta}\right)^d\ldots. \tag{2}$$

Comment pourrons-nous passer de ces développements à ceux de notre nouveau dénominateur $e^{K(\lambda)}$ et de son logarithme $K(\lambda)$. Pour passer du développement (1) à celui de $K(\lambda)$, il suffit de supprimer les $n-1$ premiers termes, c'est-à-dire de remplacer $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ par 0; on obtiendra de même le développement de e^K en partant du développement (2) et en y remplaçant $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ par zéro. Soit donc

$$e^{K(\lambda)} = \sum \frac{(-\lambda)^n \alpha'_n}{n!}. \tag{2 bis}$$

Nous avons trouvé plus haut

$$a_n = \Sigma a(S) = \Sigma \pm b_\alpha^a b_\beta^b b_\gamma^c b_\varepsilon^d \dots.$$

Pour obtenir a'_n, il suffira dans le troisième membre de cette double égalité de remplacer $b_1, \dots, b_{n-1}$ par zéro. Mais $a(S)$ provient de l'intégration d'un des termes $T(S)$ du déterminant

$$f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{pmatrix}$$

et b_a de celle de la fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_a)$. D'où la règle suivante :

Quand le noyau deviendra infini pour $x = y$ de la même façon que $(x-y)^\alpha$ où $\alpha < \frac{n-1}{n}$, on pourra former le dénominateur de notre fonction méromorphe en appliquant la règle générale de Fredholm; et par conséquent en partant des déterminants

$$f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{pmatrix},$$

seulement il faudra supprimer tous ceux des termes de ces déterminants qui contiennent un facteur de la forme

$$f(x_\alpha, x_\beta, x_\gamma, \dots, x_\lambda, x_\mu) = f(x_\alpha, x_\beta) f(x_\beta, x_\gamma) \dots f(x_\gamma, x_\mu) f(x_\mu, x_\alpha)$$

les lettres $x_\alpha, x_\beta, x_\gamma \dots, x_\lambda, x_\mu$ formant un cycle de moins de n lettres.

La même règle s'applique à la formation du numérateur.

Dans le cas de $n = 2$, il suffira donc de supprimer les facteurs de la forme $f(x_i, x_i)$, c'est-à-dire de remplacer dans nos déterminants tous les termes de la diagonale principale par zéro. Cette règle, dans ce cas particulier, avait déjà été trouvée par une autre voie par Hilbert dans le dernier paragraphe de son premier Mémoire (*Göttinger Nachrichten*, 1904).

IV. — La question du genre.

Fredholm a démontré que les coefficients de la fonction entière $D(\lambda)$ décroissent comme $(n^n)^{-\frac{1}{2}}$; et que la décroissance est plus rapide encore quand le noyau $f(x, y)$ satisfait à certaines conditions de continuité. Si par exemple

on a

$$(1) \qquad \begin{cases} |f(x, y) - f(x, y')| < A\,|y - y'|^\alpha, \\ |f(x, y) - f(x', y)| < A\,|x - x'|^\alpha, \end{cases}$$

A et α étant des constantes, les coefficients a_n décroîtront comme $(n^n)^{-\alpha-\frac{1}{2}}$.

D'un autre côté Hadamard a démontré que si le $n^{\text{ième}}$ coefficient d'une fonction entière est de l'ordre de $(n^n)^{-\lambda}$, le genre de cette fonction entière sera E, en désignant par E + 1 l'entier immédiatement supérieur à λ. Si λ est entier, il peut y avoir doute et le genre peut être égal à λ ou à $\lambda - 1$.

Donc le genre de la fonction $D(\lambda)$ dépendra de l'exposant α qui figure dans les inégalités (1); il sera zéro pour $\alpha > \frac{1}{2}$, il sera au plus égal à 1 pour $\alpha > 0$, $\alpha \leqq \frac{1}{2}$; et enfin au plus égal à 2 pour $\alpha = 0$. Si donc le noyau a des dérivées premières finies de sorte que $\alpha = 1$, le genre de $D(\lambda)$ sera certainement nul.

Nous pouvons nous demander ce que devient l'exposant α quand on passe du noyau $f(x, y)$ aux noyaux itérés successifs. Supposons que $f(x, y)$ soit de la forme

$$f(x, y) = \frac{\psi(x, y)}{|x - y|^\alpha} \qquad \left(\alpha < \frac{1}{2}\right),$$

$\psi(x, y)$ étant holomorphe. On peut alors établir l'inégalité

$$|f_2(x', y) - f_2(x, y)| < A\,|x - x'|^{1-2\alpha},$$

A étant une constante. La fonction

$$D(\lambda^2, f_2)$$

sera donc une fonction entière de genre zéro par rapport à λ^2 pourvu que l'exposant $(1 - 2\alpha)$ soit plus grand que $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire pourvu que

$$\alpha < \frac{1}{4}.$$

Si alors le noyau $f(x, y)$ n'est pas partout fini, la fonction $D(\lambda, f)$ n'existe pas en général, mais nous pouvons, comme dans le paragraphe II, former les deux fonctions entières

$$e^{K(\lambda)}, \quad \Sigma \lambda^h f_{h+1} e^{K(\lambda)};$$

on a d'ailleurs

$$D(\lambda^2, f_2) = e^{K(\lambda)} e^{K(-\lambda)}.$$

La fonction $e^{K(\lambda)}$ sera en général dans ce cas de genre 1, de sorte que $e^{K(\lambda)}$

sera le produit d'un certain nombre de facteurs primaires de la forme

$$e^{\beta\lambda}(1-\gamma\lambda).$$

Le facteur primaire correspondant de $e^{K(-\lambda)}$ sera alors

$$e^{-\beta\lambda}(1+\gamma\lambda)$$

et celui de $D(\lambda^2, f_2)$ sera

$$1-\gamma^2\lambda^2,$$

ce qui explique que la fonction $D(\lambda^2, f_2)$ soit de genre zéro.

Les résultats des trois premiers paragraphes s'appliquent sans changement lorsque les intégrales et les fonctions connues ou inconnues qui figurent dans l'équation de Fredholm sont des intégrales doubles ou triples, et des fonctions de deux et de trois variables, au lieu d'être des intégrales simples, et des fonctions d'une seule variable. Mais il n'en est pas de même des résultats relatifs au genre, que nous venons d'exposer. Le genre ne s'abaisse plus quand les inégalités (1) sont satisfaites, ou plutôt il s'abaisse moins rapidement. Un résultat subsiste toutefois, et c'est le seul qui nous importe, *le genre de* $D(\lambda)$ *reste toujours au plus égal à* 2.

Comme d'ailleurs nous avons

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = -\Sigma\lambda^{n-1}b_n$$

et que l'on peut écrire en décomposant $D(\lambda)$ en facteurs primaires

$$D(\lambda) = \Pi\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_i}\right)e^{P_i},$$

λ_i étant les *valeurs propres* de l'équation de Fredholm, c'est-à-dire les racines de $D(\lambda)=0$ et P_i étant un polynome du second degré au plus; on en déduit

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = \sum\frac{1}{\lambda-\lambda_i} + \Sigma P_i' = -\sum\sum\frac{\lambda^n}{\lambda_i^{n+1}} + \Sigma P_i',$$

d'où en identifiant les deux développements de $\frac{D'}{D}$ et remarquant que ΣP_i ne peut donner que des termes de degré 0 et 1 :

$$b_n = \Sigma\lambda_i^{-n}, \tag{2}$$

égalité qui est exacte pour $n > 2$.

V. — Tentative de généralisation.

Au paragraphe II, nous avons donné une règle pour former notre fonction méromorphe de λ quand le noyau $f(x, y)$ peut devenir infini, tandis que l'un des noyaux itérés successifs $f_n(x, y)$ reste partout fini.

On est naturellement amené à penser que la même règle restera applicable dans des cas beaucoup plus généraux, à savoir :

1° Si les intégrales

$$\int f_h(x, y)\varphi(y)\,dy$$

sont finies, sauf pour des valeurs exceptionnelles de x.

2° Si en même temps à partir d'un certain rang, les nombres que nous avons appelés b_n sont finis.

Il est clair que cela peut arriver dans des cas où tous les noyaux $f_n(x, y)$ présentent encore des infinis, et l'on peut se demander si les règles des paragraphes II et III peuvent néanmoins être appliquées.

Je me bornerai au cas où toutes les *valeurs propres* λ_i sont réelles et positives. Les théorèmes de Hilbert nous permettent de reconnaître dans quel cas cela a certainement lieu. Ainsi, si le noyau est *symétrique*, les λ_i sont certainement réels; ils seront positifs quand la forme quadratique qui correspond à ce noyau sera définie; et par exemple, si $f(x, y)$ est un noyau symétrique, les valeurs propres relatives au noyau redoublé $f_2(x, y)$ seront réelles et positives.

Cela posé, nous supposons que notre noyau $f(x, y)$ symétrique devient infini pour certaines valeurs de x et de y; par exemple en certains points singuliers ou sur certaines lignes singulières du plan des xy. Nous emploierons le même artifice que M. Hilbert à la fin de son premier Mémoire. Nous subdiviserons la partie du plan des xy à laquelle s'étend l'intégration (c'est-à-dire par exemple le carré $0<x<1$, $0<y<1$, si les limites d'intégration de l'intégrale de Fredholm sont 0 et 1). Ce carré sera ainsi divisé en deux aires A et A' que nous assujettirons aux conditions suivantes : 1° Tous les points et lignes singulières devront se trouver dans A'. 2° Chacune des deux aires A et A' devrait être symétrique par rapport à la droite $x=y$. Nous définirons ensuite un noyau symétrique $f'(x, y)$ de la façon suivante :

$$f'(x, y) = f(x, y) \quad \text{(dans A)}, \qquad f'(x, y) = 0 \quad \text{(dans A')}.$$

Nous désignerons par λ_i et b_n les valeurs de ces quantités qui correspondent à $f(x,y)$ et par λ'_i et b'_n les valeurs des quantités correspondantes pour $f'(x,y)$.

Nous ferons ensuite tendre l'aire A′ vers zéro, de telle sorte que λ'_i tende vers λ_i et b'_i vers b_n. Le noyau $f'(x,y)$ étant symétrique, les λ'_i seront tous réels, et nous pouvons nous arranger de façon qu'ils soient tous positifs. Comme le noyau $f'(x,y)$ est partout fini, les résultats du paragraphe IV seront applicables et nous aurons

$$b'_n = \Sigma \lambda_i'^{-n}. \tag{1}$$

Nous supposerons les λ'_i rangés par ordre de grandeur croissante. Nous aurons ensuite

$$b_n = \lim b'_n.$$

Je dis d'abord que $\sqrt[n]{b_n}$ tend vers une limite pour $n=\infty$. En effet, les λ'_i étant réels positifs, les quantités $\sqrt[n]{b'_n}$ sont positives; de plus on a

$$b'_{n+1} < b'_n \lambda_1'^{-1}, \qquad b'_n > \lambda_1'^{-n},$$

d'où

$$b'^{\frac{1}{n+1}}_{n+1} < b'^{\frac{1}{n+1}}_n \lambda_1'^{\frac{-1}{n+1}}, \qquad \lambda_1'^{-1} < b'^{\frac{1}{n}}_n$$

et enfin

$$\lambda_1'^{\frac{-1}{n+1}} < b'^{\frac{1}{n(n+1)}}_n, \qquad b'^{\frac{1}{n+1}}_{n+1} < b'^{\frac{1}{n}}_n.$$

Les quantités $\sqrt[n]{b'_n}$ vont donc en décroissant quand n croît; il en résulte qu'à la limite les quantités $\sqrt[n]{b_n}$ iront en décroissant quand n croît (ou du moins ne pourront croître) et comme ces quantités sont positives, elles tendront vers une limite pour $n=\infty$; cette limite, je l'appelle λ_1^{-1}.

Je dis maintenant que l'on a

$$\lambda_1 = \lim \lambda'_1.$$

Observons d'abord que, *au moins si n est pair*, b'_n va en décroissant quand n étant constant, l'aire A′ diminue; on a en effet

$$b'_{2n} = \int f'^n_n(x,y)\, f'^n_n(y,x)\, dx\, dy.$$

Mais le noyau étant symétrique, cela peut s'écrire

$$b'_{2n} = \int f'^2_n(x,y)\, dx\, dy$$

et d'après sa définition $f'^2_n(x,y)$ ne peut que croître quand l'aire A′ diminue; on aura donc si n est pair

$$b'_n < b_n.$$

De plus pour $n > p$, d'après notre hypothèse, les quantités b_n sont finies; nous aurons donc si p est un nombre pair suffisamment grand

$$b'_p = \Sigma \lambda_i'^{-p} < b_p.$$

Les quantités

$$\frac{b'_{n+1}}{b'_n}$$

vont en croissant quand n croît; il en est donc de même des limites vers lesquelles tendent ces quantités quand l'aire A′ tend vers zéro, c'est-à-dire de

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Les quantités $\frac{b'_{n+1}}{b'_n}$ et $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ tendent pour $n=\infty$, vers les mêmes limites que les quantités $\sqrt[n]{b'_n}$, $\sqrt[n]{b_n}$, c'est-à-dire vers $\lambda_1'^{-1}$ et λ_1^{-1}; mais elles tendent vers ces limites en croissant, tandis que $\sqrt[n]{b_n}$, $\sqrt[n]{b'_n}$ tendent vers ces limites en décroissant. On aura donc

$$\sqrt[n]{b'_n} > \lambda_1'^{-1} > \frac{b'_{n+1}}{b'_n}, \qquad \sqrt[n]{b_n} > \lambda_1^{-1} > \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

d'où

$$\frac{b'_{n+p}}{b'_n} < \lambda_1'^{-p}, \qquad \frac{b_{n+p}}{b_n} < \lambda_1^{-p}.$$

On tire de là

$$\lambda_1'^{-n} < b'_n < b'_p \lambda_1'^{p-n} < b_p \lambda_1'^{p-n},$$
$$\lambda_1^{-n} < b_n < b_p \lambda_1^{p-n};$$

$$\frac{\lambda'_1}{\lambda_1}\left(\frac{b'_n}{b_n}\right)^{\frac{1}{n-p}} < b'^{\frac{1}{n-p}}_p \lambda_1'^{\frac{-p}{n-p}}; \qquad \frac{\lambda'_1}{\lambda_1}\left(\frac{b'_n}{b_n}\right)^{\frac{1}{n}} > b_p^{-\frac{1}{n}} \lambda_1^{-\frac{p}{n}}. \tag{2}$$

Nous ne savons pas encore si λ'_1 tend vers une limite quand l'aire A′ tend vers zéro; mais nous pouvons parler de la limite supérieure et de la limite inférieure de λ'_1; je veux dire que λ'_1 oscillera entre deux limites, dont l'une tendra vers $\limsup \lambda'_1$ et l'autre vers $\liminf \lambda'_1$ quand A′ tendra vers zéro; à la limite les inégalités (2) deviendront donc puisque ($\lim b'_n = b_n$) :

$$\frac{\limsup \lambda'_1}{\lambda_1} \leq b_p^{\frac{1}{n-p}} \lambda_1^{\frac{-p}{n-p}}; \qquad \frac{\liminf \lambda'_1}{\lambda_1} > b_p^{-\frac{1}{n}} \lambda_1^{-\frac{p}{n}}. \tag{3}$$

Mais comme nous pouvons prendre n assez grand pour que les seconds membres de l'inégalité (3) soient aussi voisins de 1 que nous voudrons, nous pouvons écrire

$$\frac{\limsup \lambda'_1}{\lambda_1} \leqq 1; \qquad \frac{\liminf \lambda'_1}{\lambda_1} \geqq 1,$$

c'est-à-dire

$$\lim \lambda'_1 = \lambda_1.$$

C. Q. F. D.

On verrait comme plus haut que les quantités

$$(b'_n-\lambda_1'^{-n})^{\frac{1}{n}}=(\lambda_2'^{-n}+\lambda_3'^{-n}+\ldots)^{\frac{1}{n}}$$

vont en décroissant quand n croît indéfiniment, et que l'aire A′ demeure constante. D'autre part on a

$$\lim(b'_n-\lambda_1'^{-n})=b_n-\lambda_1^{-n}$$

quand n restant constant, A′ tend vers zéro. On voit qu'à la limite

$$(b_n-\lambda_1^{-n})^{\frac{1}{n}}$$

décroît quand n croît. Cette expression pour $n=\infty$ tend donc vers une limite que j'appelle λ_2^{-1}.

On verrait ensuite que les expressions

$$\frac{b'_{n+1}-\lambda_1'^{-n-1}}{b'_n-\lambda_1'^{-n}}$$

et par conséquent

$$\frac{b_{n+1}-\lambda_1^{-n-1}}{b_n-\lambda_1^{-n}}$$

vont en croissant avec n et l'on en déduirait les inégalités

$$\lambda_2'^{-n}<b'_n-\lambda_1'^{-n}<(b'_p-\lambda_1'^{-p})\lambda_2'^{p-n}<b'_p\lambda_2'^{p-n}<b_p\lambda_2'^{p-n},$$
$$\lambda_2^{-n}<b_n-\lambda_1^{-n}<(b_p-\lambda_1^{-p})\lambda_2^{p-n}<b_p\lambda_2^{p-n},$$

et en raisonnant ensuite sur $b_n-\lambda_1^{-n}$, $b'_n-\lambda_1'^{-n}$, λ'_2 et λ_4 comme nous l'avons fait sur b_n, b'_n, λ'_1 et λ_1, nous verrions que

$$\lim\lambda'_2=\lambda_2.$$

Et ainsi de suite.

Je dis maintenant que si nous considérons la fonction

$$\mathrm{K}(\lambda)=-\frac{\lambda^p b_p}{p}-\frac{\lambda^{p+1}b_{p+1}}{p+1}-\ldots,$$

c'est le logarithme d'une fonction entière de λ. Soit en effet

$$\mathrm{K}_1(\lambda)=\mathrm{K}(\lambda)-\sum_{i=1}^{i=h}\log\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_i}\right)=-\sum\frac{c_q\lambda^q}{q}.$$

Nous aurons pour $q>p$

$$c_q=b_q-\lambda_1^{-q}-\lambda_2^{-q}-\ldots-\lambda_h^{-q}$$

et par conséquent

$$\lim\sqrt[q]{c_q}=\lambda_{h+1}^{-1}.$$

La fonction $\mathrm{K}_1(\lambda)$ est donc holomorphe pour $|\lambda|<|\lambda_{h+1}^{-1}|$ et il en est de

même de e^{K_1} ou de

$$e^{\mathrm{K}_1}\prod_{i=1}^{i=h}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_i}\right)=e^{\mathrm{K}(\lambda)}.$$

Mais nous pouvons prendre h assez grand pour que λ_{h+1} soit aussi grand que l'on veut. On a en effet

$$b_p>\lambda_1^{-p}+\lambda_2^{-p}+\ldots+\lambda_h^{-p}>h\,\lambda_{h+1}^{-p},$$

d'où

$$\lambda_{h+1}>\left(\frac{b_p}{h}\right)^{-\frac{1}{p}}.$$

Donc e^{K} reste holomorphe pour un module de λ aussi grand que l'on veut. C'est donc une fonction entière. C. Q. F. D.

Il faudrait, pour compléter le résultat, démontrer le même théorème en ce qui concerne le numérateur de la fonction méromorphe; je me propose de revenir ultérieurement sur cette question.

VI. — Équations intégrales de première espèce.

Il y a des cas où la méthode de Fredholm permet presque immédiatement l'intégration des équations intégrales de première espèce, c'est-à-dire de la forme

$$\int f(x,y)\varphi(y)\,dy=\psi(x),$$

où $\psi(x)$ est donnée et $\varphi(y)$ inconnue, les limites de l'intégrale étant des constantes.

Soit par exemple

$$(1)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)[e^{ixy}+\lambda f(x,y)]\,dy=\psi(x).$$

Dans le cas de $\lambda=0$, elle se réduit tout simplement à l'équation de Fourier

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)e^{ixy}\,dy=\psi(x),$$

d'où l'on tirerait

$$2\pi\varphi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(y)e^{-ixy}\,dy.$$

Posons alors

$$\varphi(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(z)e^{-izy}\,dz,$$

d'où

$$2\pi\Phi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)e^{ixy}\,dy;$$

l'équation (1) deviendra

$$2\pi\Phi(x)+\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(z)f(x,y)e^{-izy}\,dz\,dy=\psi(x) \tag{2}$$

et prend ainsi la forme d'une équation de Fredholm, où $\Phi(x)$ est la fonction inconnue et où le noyau est

$$K(x,z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)e^{-izy}\,dy.$$

Quelle est la condition pour que la méthode de Fredholm soit applicable à l'équation (2) qui peut s'écrire

$$2\pi\Phi(x)+\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(z)K(x,z)\,dz=\psi(x).$$

L'intégrale étant prise entre des limites infinies, il faut chercher d'abord à la ramener à des limites finies; c'est ce qui est possible si $K(x,z)$ s'annule pour $z=\pm\infty$, et pour $|z|$ très grand est de l'ordre de $|z|^{-h}$, où $h>1$. Si nous posons en effet

$$x=\operatorname{tang}\xi,\qquad z=\operatorname{tang}\zeta,$$

l'équation prend la forme

$$2\pi\Phi(\operatorname{tang}\xi)+\lambda\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\Phi(\operatorname{tang}\zeta)K(\operatorname{tang}\xi,\operatorname{tang}\zeta)\frac{d\zeta}{\cos^2\zeta}=\psi(\operatorname{tang}\xi);$$

ou mieux encore si nous posons

$$x=\operatorname{tang}^k\xi,\qquad z=\operatorname{tang}^k\zeta,$$

k étant un nombre suffisamment grand pour que

$$\frac{k}{k+1}>\frac{1}{h},$$

ce qui est toujours possible si $h>1$, notre équation deviendra

$$2\pi\Phi(\operatorname{tang}^k\xi)+\lambda\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}k\Phi(\operatorname{tang}^k\zeta)K(\operatorname{tang}^k\xi,\operatorname{tang}^k\zeta)\operatorname{tang}^{k-1}\zeta\frac{d\zeta}{\cos^2\zeta}=\psi(\operatorname{tang}^k\xi).$$

Nous voyons que le nouveau noyau

$$kK(\operatorname{tang}^k\xi,\operatorname{tang}^k\zeta)\operatorname{tang}^{k-1}\zeta\frac{1}{\cos^2\zeta}$$

se comporte pour $\zeta=\pm\frac{\pi}{2}$ comme

$$\operatorname{tang}^{-kh}\zeta\operatorname{tang}^{k-1}\xi\frac{1}{\cos^2\zeta},$$

c'est-à-dire comme

$$(\cos\zeta)^{kh-k-1}$$

et par conséquent reste fini puisque

$$kh-k-1>0.$$

Pour préciser davantage nous supposerons que

$$|K(x,z)|<A\,z^{-h},$$

A étant une constante indépendante de x et de z, et l'inégalité subsistant pour toutes les valeurs de x et de z depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

A quelles conditions cela correspond-il pour $f(x,y)$. Il faut d'abord que la méthode de Fourier puisse être appliquée à $f(x,y)$, c'est-à-dire :

1° Que $f(x,y)$ considérée comme fonction de y n'admette qu'un nombre fini de maxima et de minima (quelle que soit la valeur constante attribuée à x);

2° Que $f(x,y)$ tende uniformément vers zéro, quand y tend vers l'infini, et cela quel que soit x.

Si nous supposons de plus que $f(x,y)$ admet des dérivées des deux premiers ordres; que $\frac{df}{dy}$ tend uniformément vers zéro, quand y tend vers l'infini et que

$$\left|\frac{d^2f}{dy^2}\right|<M\frac{1}{1+y^2},$$

et qu'enfin $\frac{d^2f}{dy^2}$ n'ait comme f qu'un nombre fini de maxima et de minima, on aura en intégrant par parties :

$$\int fe^{-izy}\,dy=\frac{i}{z}fe^{-izy}+\frac{df}{dy}\frac{1}{z^2}e^{-izy}-\frac{1}{z^2}\int\frac{d^2f}{dy^2}e^{-izy}\,dy$$

ou en prenant pour limites $y=\pm\infty$

$$K(x,z)=\int_{-\infty}^{+\infty}fe^{izy}\,dy=-\frac{1}{z^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d^2f}{dy^2}e^{-izy}\,dy,$$

d'où

$$|K(x,z)|<\left|\frac{1}{z^2}\right|M\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{y^2+1}=\frac{M\pi}{|z|^2}.$$

Et comme d'ailleurs $|K(x,z)|$ reste fini même pour $z=0$, on voit que les conditions sont remplies pour que la méthode de Fredholm soit applicable.

Il est à peine nécessaire d'ajouter qu'elle le serait dans des cas beaucoup plus généraux et qu'il serait aisé de déterminer.

Cherchons à appliquer le même principe à des séries analogues à celles de Fourier et écrivons

$$\psi(x) = \Sigma A_m [e^{lmx} + \lambda \theta_m(x)]. \tag{3}$$

Partons de la formule de Fourier, en posant

$$2\pi A_m = \int_0^{2\pi} \varphi(z)\, e^{-lmz}\, dz; \qquad \varphi(z) = \Sigma A_m e^{lmz},$$

notre équation deviendra

$$\psi(x) = \varphi(x) + \frac{\lambda}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(z) \Sigma e^{-lmz} \theta_m(x)\, dz. \tag{4}$$

Dans l'équation (3), il s'agissait de déterminer les coefficients A_m, connaissant les fonctions $\psi(x)$ et $\theta_m(x)$, c'est-à-dire de développer la fonction donnée $\psi(x)$ en série procédant suivant les fonctions $e^{imx} + \lambda\theta_m(x)$. Dans l'équation transformée (4), il s'agit de déterminer la fonction inconnue $\varphi(x)$ connaissant la fonction $\psi(x)$. Les deux problèmes sont manifestement équivalents, mais le second se ramène à une équation intégrale, et la méthode de Fredholm y sera applicable pourvu que le noyau

$$\Sigma e^{-lmz} \theta_m(x)$$

soit toujours fini.

C'est ce qui arrivera évidemment si la série

$$\Sigma |\theta_m(x)|$$

est absolument et uniformément convergente.

Soit par exemple à développer $\psi(x)$ pour les valeurs de x comprises entre o et 2π, suivant les exponentielles

$$e^{i\mu_m x}.$$

Nous pourrons ramener ces exponentielles à la forme

$$e^{lmx} + \lambda\theta_m$$

en posant

$$\lambda = 1, \qquad \theta_m = e^{i\mu_m x} - e^{lmx}.$$

Or on a

$$|\theta_m| < |\mu_m - m|\, x$$

puisque

$$\theta_m = i \int_{mx}^{\mu_m x} e^{it}\, dt$$

et que $|e^{it}| = 1$. Comme x varie de o à 2π, on aura

$$|\theta_m| < 2\pi |\mu_m - m|.$$

Il suffit donc que la série

$$\Sigma |\mu_m - m|$$

soit absolument et uniformément convergente. C'est ce qui arrivera, par exemple, si l'on a

$$\mu_m = m + \frac{1}{m^2}.$$

Ici encore, il serait aisé d'étendre le résultat à des cas beaucoup plus étendus.

Soit maintenant l'équation

$$\int_0^{2\pi} \varphi(y)[e^{lxy} + \lambda f(x, y)]\, dy = \psi(x), \tag{5}$$

qui diffère de (1) parce que les limites ne sont plus infinies. Nous ne pouvons pas nous proposer de déterminer la fonction inconnue φ, connaissant la fonction ψ; et cette fonction étant quelconque; le problème serait en général impossible. Il suffit pour s'en convaincre de faire $\lambda = 0$; on voit alors que, quelle que soit la fonction $\varphi(y)$, la fonction ψ sera une fonction entière qui tend vers zéro quand x tend vers l'infini, avec un argument compris entre o et π; et telle que $\psi e^{-2i\pi x}$ tende vers zéro quand x tend vers l'infini avec un argument compris entre π et 2π. La fonction ψ ne peut donc pas être choisie arbitrairement.

Ce que nous nous donnerons, ce sont les valeurs $\psi(m)$ que prend la fonction ψ quand x prend une valeur entière positive ou négative. Il est aisé d'ailleurs de se rendre compte que ces valeurs $\psi(m)$ suffisent pour déterminer une fonction entière satisfaisant aux conditions que nous venons d'énoncer.

Posons encore

$$\varphi(z) = \Sigma A_m e^{-lmz}, \qquad 2\pi A_m = \int_0^{2\pi} \varphi(z) e^{lmz}\, dz.$$

L'équation (5) devient alors

$$2\pi A_m + \lambda \int_0^{2\pi} \Sigma A_p e^{-lpy} f(m, y)\, dy = \psi(m). \tag{6}$$

Cette équation doit permettre de déterminer les coefficients A et par conséquent la fonction inconnue φ, quand on connaît les quantités $\psi(m)$.

Cette équation n'a plus la forme d'une équation intégrale, mais celle d'un système d'une infinité d'équations à une infinité d'inconnues, tel que ceux qui

ont fait l'objet des études de M. von Koch. L'analogie des deux théories est d'ailleurs évidente.

Pour que la méthode soit applicable, il faut et il suffit que le déterminant infini converge; il suffit donc qu'il soit *normal* au sens de M. von Koch, c'est-à-dire que la série double en m et p

$$\sum \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ipy}}{p^2} f(m, y)\, dy \tag{7}$$

converge absolument. Si $f(m, y)$ est une fonction périodique de y avec une dérivée seconde, nos intégrales peuvent se transformer par une intégration par parties et la série (7) devient

$$-\sum \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ipy}}{p^2} f'(m, y)\, dy.$$

Les termes en sont plus petits que ceux de la série

$$\sum \frac{|f'|}{p^2} = \sum \frac{1}{p^2} \Sigma |f'|.$$

Il suffit donc que la série

$$\Sigma f'(m, z)$$

converge absolument et uniformément, ou encore que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x, z)\, dz$$

converge absolument et uniformément.

On voit par cet exemple quelles différences il y a, en ce qui concerne les équations intégrales de première espèce, entre le cas où les limites sont finies et celui où elles sont infinies, cas auquel se rattacherait d'ailleurs celui où le noyau présenterait des singularités entre les limites d'intégration. Je me réserve de revenir sur cette question par des méthodes fondées sur l'itération des noyaux et qui mettront en évidence d'une autre manière les mêmes particularités.

NOTES ET ERRATA.

1. Pages 6 et 14. *Sur les équations à points critiques fixes :*

I. L'extension des recherches de Fuchs et de Poincaré a donné lieu à des travaux importants, maintenant classiques, dus essentiellement à MM. Émile Picard et Paul Painlevé (1) et à leurs élèves. Nous en donnons ici une *bibliographie* sommaire, les questions soulevées étant loin d'être épuisées. M. P. Painlevé a d'abord observé que les raisonnements de Fuchs et de Poincaré doivent être complétés : ils sous-entendent des propriétés des solutions de l'équation du premier ordre, non encore établies, qui ne sont plus vraies pour les ordres supérieurs.

Fuchs exprime que toute solution de l'équation $F(y', y, x) = 0$ qui prend, pour un point *arbitraire* $x = x_0$, une valeur *déterminée* y_0, est uniforme dans le domaine de x_0. Painlevé démontre (Thèse; *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques*, Paris, 1887, p. 38, et *Annales de la Faculté de Toulouse*, 1888, p. 38-57) que toute solution $y(x)$ d'une équation $F(y', y, x) = 0$, où F est un polynome en y', y à coefficients analytiques en x, ne peut admettre comme points singuliers *non algébriques* que certains points *fixes*, $x = \xi$, mis en évidence sur l'équation. Si les coefficients sont algébriques en x, ces points sont en nombre limité. Il n'y a donc pas pour une solution $y(x)$ de point *variable* x_0 pour lequel $y(x)$ ne tendrait vers aucune valeur déterminée quand x tend vers x_0.

Au contraire, dès le second ordre, les solutions $y(x)$ peuvent présenter des points *transcendants* ou *essentiels mobiles*, c'est-à-dire variant avec les constantes d'intégration. Il suffit, par exemple, de remplacer dans l'équation précédente x par $x + c$ et d'éliminer c entre l'équation et sa dérivée pour obtenir une équation du second ordre en y, indépendante de x, dont les solutions possèdent les points transcendants $x = \xi - c$, variables avec c.

La méthode de Poincaré s'appuie sur l'existence d'une correspondance *birationnelle* entre les valeurs $y(x)$, $y'(x)$ et les valeurs initiales y_0, y'_0, mais il démontre seulement que cette correspondance est *biuniforme*. S'il était prouvé que la correspondance n'admet que des points singuliers *isolés*, on en conclurait aisément qu'elle est birationnelle, mais *a priori* elle peut admettre des singularités plus compliquées; cela arrive pour les ordres supérieurs. Si dans la rela-

(1) Les pages qui suivent étaient écrites au moment de la mort de l'illustre géomètre; elles peuvent tout juste faire pressentir l'importance de son œuvre dans la théorie des équations différentielles.

tion $y=\varphi(x, y_0, x_0)$ on regarde x et x_0 comme fixes, Painlevé montre que si leurs valeurs diffèrent des valeurs ξ, *pour une équation à points critiques fixes* la fonction φ de la seule variable y_0 ne présente dans le plan complexe, même à l'infini, que des singularités *algébriques*. Il suit de là, sans restriction, que la correspondance entre y, y' et y_0, y'_0 est *birationnelle*.

Ces propositions ont permis à Painlevé d'étudier les équations du premier ordre $F(y, y', x)=0$, où F est un polynome en y', y à coefficients analytiques en x, dont *la solution générale $y(x)$ n'acquiert que n déterminations quand x tourne autour des points critiques mobiles* (nécessairement algébriques). [La variable x ne tourne donc pas autour des points transcendants ξ, c'est-à-dire que la variation de l'argument de $x-\xi$, pour tous les points ξ, est nulle pour tous les contours fermés envisagés.]

Le résultat est simple : *ces équations se ramènent algébriquement à des équations à points critiques fixes*. (Cf. *Leçons sur la Théorie analytique des équations différentielles, professées à Stockholm en* 1895, Paris, 1897, p. 23-60 et 443-462, et *Comptes rendus Acad. Sciences*, Paris, 23 et 30 juillet, 5 novembre 1888.)

La recherche des équations $F(y', y, x)=0$, algébriques en y, y' à coefficients uniformes en x dont la solution générale $y(x)$ est *uniforme*, ou à *un nombre fini de branches*, est un problème beaucoup plus difficile lorsque x figure dans l'équation. Le cas simple de l'équation de Riccati n'est pas encore traité. (Cf. P. Painlevé, *Leçons de Stockholm*, p. 219-238 et une *Note* étendue dans l'ouvrage de Pierre Boutroux : *Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre*, Paris.)

La question a été reprise, avec les méthodes de P. Boutroux, par J. Malmquist (*Acta mathematica*, 36, 1910, p. 297-343) pour les équations où y' est rationnel en x et y. Cf. aussi les résultats curieux obtenus par M. Petrovitch (*Comptes rendus Acad. Sciences*, 118, 1894, p. 1190, et *Thèse*, Paris, 1895; aussi E. Picard, *Traité d'Analyse*, III, 3e édition, p. 378).

II. Les mêmes questions se posent pour les équations du second ordre, *algébriques* en y'', y', y, *analytiques* en x. Quelles sont les équations *à points critiques fixes?* Parmi celles-là, quelles sont celles dont la solution générale $y(x)$ est une fonction *uniforme* ou à *un nombre fini de branches?* Peut-on les intégrer à l'aide de fonctions uniformes déjà définies ou déterminent-elles des transcendantes nouvelles?

M. E. Picard a consacré à ces questions entre 1880 et 1895 plusieurs Mémoires et de nombreuses Notes (cf. *Comptes rendus Acad. Sciences*, Paris, 91, 1880, p. 724; 103, 1886, p. 549; 104, 1887, p. 41; 114, 1892, p. 1310; 116, 1893, p. 365; 117, 1893, p. 472 et 603; 120, 1895, p. 402). Citons en particulier : *Sur une propriété des fonctions uniformes d'une variable liées par une équation algébrique et sur une classe d'équations différentielles* (*Bulletin Sc. math.*, 4, 1880, p. 416-432); *Mémoire sur les fonctions algébriques de deux variables* (*Journal de Liouville*, 5, 1889, p. 223-249 et 263-319); *Remarques sur les équations différentielles* (*Acta mathematica*, 17, 1893, p. 296-300); *Sur une classe de transcendantes nouvelles*, 18, 1894, p. 133-154; 23, 1900, p. 333-337; *Sur l'inversion des intégrales à multiplicateurs* (*American Journal*, 16, 1894, p. 111-122), et *Traité d'Analyse*, t. III, 3e édition, 1927, p. 67-81.

M. Picard s'occupe d'abord des équations algébriques de la forme $F(y'', y)=0$, puis de $y''=y'^2A(y)$ et détermine tous les cas où la solution générale y est uniforme en x; on n'a pas ainsi de fonctions nouvelles.

Passant aux équations $y''=R(y', y)$, où R est rationnel en y' et y, M. Picard a donné des conditions *suffisantes* pour que $y(x)$ n'ait ni points critiques algébriques, ni points transcendants d'une certaine espèce; la solution $y(x)$ est à *apparence uniforme*, elle n'est pas toujours uniforme. (Cf. les applications particulières de Forsyth, *Theory of differential equations*, III, p. 276-306; Wallenberg, *Journal de Crelle*, 119, 1898, p. 87-113; 120, 1899, p. 113-131.)

Lorsque x figure dans l'équation et qu'elle a la forme

$$y''=y'[a(x)y+b(x)]+A(x)y^3+B(x)y^2+C(x)y+D(x),$$

M. E. Picard a donné deux conditions pour que $y(x)$ présente des pôles mobiles; Painlevé (*Acta mathematica*, 25, 1902, § 30) a montré que ces conditions, non nécessaires, sont suffisantes et qu'on peut former toutes les équations qui y satisfont. Dans le cas où les coefficients $a, \ldots, A, \ldots$ sont constants, Mittag-Lœffler (*Acta mathematica*, 18, 1894, p. 233-245) et Fransén ont prouvé que les conditions de M. Picard entraînent l'intégrabilité de l'équation par les fonctions uniformes élémentaires.

La grande difficulté de l'étude des équations du second ordre à points critiques fixes, reconnue par M. E. Picard, est dans l'existence de points transcendants ou essentiels *mobiles*. La solution de l'équation

$$y''=\frac{P(x, y, y')}{Q(x, y, y')},$$

définie par les valeurs initiales : y_0, y'_0 pour $x=x_0$ présente en général un point transcendant quand ces valeurs initiales annulent à la fois P et Q.

Pour l'équation

$$y''=y'^2\frac{(2y-1)}{(1+y^2)}$$

dont la solution générale est

$$y=\operatorname{tang}[\log A(x-\alpha)],$$

lorsque x tend vers α dans une direction quelconque, y est indéterminé : ce point est essentiel et critique.

L'équation, rencontrée par M. E. Picard, retrouvée et étudiée plus tard par Painlevé,

$$\Delta y''=y'^2\left\{y[2k^2y^2-(1+k^2)]+\frac{1}{\lambda}\sqrt{\Delta}\right\},$$

où $\Delta=(1-y^2)(1-k^2y^2)$ et λ est une constante, est telle que $y(x)$ n'a comme point singulier algébrique que des pôles; toute solution y qui tend vers une valeur déterminée, finie ou non, quand x tend vers x_0 est holomorphe ou méromorphe

pour $x = x_0$. Cependant, comme

$$y = sn_{k^2}[\lambda \log \Lambda(x-a)],$$

le point $x = a$ est un point d'indétermination complète pour y; sur un chemin donné tendant vers a, quel qu'il soit, y ne tend vers aucune limite et une infinité de déterminations de y se permutent autour de ce point, *à moins que* $2i\pi\lambda$ *ne soit une période ou fraction de période de* sn_{k^2}. Pour que y soit à points critiques fixes (ici *uniforme*), il faut et suffit que cette condition soit remplie : $2i\pi\lambda$ est période de sn_{k^2}; on ne sait pas le reconnaître, λ et k étant donnés, par un nombre limité de calculs.

M. E. Picard a obtenu enfin (*Acta mathematica*, **18**, 1894, p. 133), en partant de fonctions uniformes définies directement, des équations différentielles à solution générale uniforme, mais il a reconnu que cette solution *dépend algébriquement des constantes*. Ces équations sont alors réductibles aux quadratures ou aux équations linéaires (cf. PAINLEVÉ, *Leçons de Stockholm*, p. 351-394).

La méthode par laquelle P. Painlevé a obtenu de *nouvelles conditions nécessaires* à la fixité des points critiques est très simple en principe : elle consiste à introduire dans les coefficients, supposés holomorphes, du système différentiel étudié, par une transformation des éléments (variable et fonctions) qui conserve cette holomorphie, un paramètre variable α, tel que les coefficients soient aussi holomorphes en α. Si le système a ses points critiques fixes pour α quelconque, non nul, il en sera de même pour $\alpha = 0$ et le développement des solutions suivant les puissances de α aura pour coefficients des fonctions de la variable à points critiques fixes.

Un choix convenable de la transformation amène pour $\alpha = 0$ à des équations *simplifiées* pour lesquelles on sait exprimer la fixité des points critiques ou l'uniformité de la solution.

Cette méthode est susceptible d'applications variées (cf. PAINLEVÉ, *Acta mathematica*, **25**, 1902, p. 82-85). Les équations différentielles qui peuvent être à points critiques fixes, ou à solution générale uniforme, étant, par la méthode précédente, réduites à un petit nombre de types, il s'agit, *pour celles que l'on ne peut intégrer à l'aide de fonctions uniformes définies par des équations du premier ordre ou des équations linéaires*, de décider si les points critiques sont réellement fixes, ou si la solution est uniforme. La méthode, imaginée par M. Painlevé pour le second ordre, s'étend au troisième et aux ordres supérieurs, mais la difficulté de son application croît avec l'ordre de l'équation.

Les résultats essentiels de Painlevé sont résumés dans un Mémoire étendu : *Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme* (*Acta mathematica*, **25**, 1902, p. 1-86); la détermination explicite de toutes les équations à points critiques fixes, du type

$$y'' = a(x)y' + b(x)y^2 + c(x)y + d(x),$$

et la démonstration des propriétés fondamentales de l'équation

$$(I) \qquad y'' = 6y^2 + x,$$

qui est la plus simple de celles qui définissent des fonctions uniformes (méromorphes) nouvelles, sont données en détail au *Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme* (*Bulletin de la Soc. math. de France*, **28**, 1900, p. 201-261).

Une omission dans les tableaux publiés aux *Acta mathematica* a conduit M. Gambier à reprendre l'application de la méthode de Painlevé (*Comptes rendus Acad. Sciences*, Paris, **143**, 1906, p. 741, et *Acta mathematica*, **33**, 1910, p. 1-55); c'est ainsi qu'a été trouvée l'équation

$$(VI) \qquad y'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x}\right)y'^2 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x}\right)y' + \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left[\alpha + \frac{\beta x}{y^2} + \frac{\gamma(x-1)}{(y-1)^2} + \delta\frac{x(x-1)}{(y-x)^2}\right]$$

(α, β, γ, δ constantes). Painlevé montre alors (*Comptes rendus Acad. Sciences*, Paris, **143**, 1906, p. 1111) que cette équation (VI) donne par dégénérescence les cinq équations :

$$(V) \qquad y'' = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right)y'^2 - \frac{y'}{x} + \frac{(y-1)^2}{x^2}\left(\alpha y + \frac{\beta}{y}\right) + \frac{\gamma y}{x} + \delta\frac{y(y+1)}{(y-1)},$$

$$(IV) \qquad y'' = \frac{y'^2}{2y} + \frac{3}{2}y^3 + 4xy^2 + 2(x^2 - \alpha)y + \frac{\beta}{y},$$

$$(III) \qquad y'' = \frac{y'^2}{y} - \frac{y'}{x} + \frac{\alpha y^2 + \beta}{x} + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y},$$

$$(II) \qquad y'' = 2y^3 + xy + \alpha,$$

$$(I) \qquad y'' = 6y^2 + x.$$

Ces six équations sont les *types* auxquels se ramènent, *algébriquement*, *toutes les équations*

$$y'' = R(y', y, x),$$

où R est rationnel en y', algébrique en y, analytique en x *dont les points critiques sont fixes* et qui ne s'intègrent pas à l'aide de fonctions *uniformes* classiques (données par des équations du premier ordre ou par des équations linéaires).

La solution générale de (VI) est méromorphe, *sauf aux trois points homologues* ($x = 0, 1, \infty$) qui sont des singularités transcendantes. M. R. Garnier a étudié $y(x)$ au voisinage de ces singularités par l'emploi des approximations successives de M. E. Picard (*Ann. Éc. Norm.*, **34**, 1917, p. 239-253).

La solution générale de (I) est *partout méromorphe;* les égalités

$$y = \varphi(x, x_0, y_0, y'_0), \qquad y' = \frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

qui la déterminent, expriment entre y, y' et leurs valeurs initiales une correspondance *biuniforme*. On peut écrire

$$y = \frac{\zeta'^2 - \zeta\zeta''}{\zeta^2},$$

où $\zeta(x)$ est une fonction *entière* définie par le système

$$\frac{\zeta'}{\zeta}=\eta_1, \qquad \frac{\eta_1'^2}{2}+2\eta_1^3+x\eta_1'-\eta_1=0.$$

P. Boutroux a étudié en détail l'allure des solutions $y(x)$ quand x croît indéfiniment; une transformation simple le conduit à les regarder comme *asymptotes* aux fonctions doublement périodiques (*Ann. Éc. Norm.*, 30, 1913, p. 265-375, et 31, 1914, p. 99-159).

La solution générale de (II) est encore méromorphe et s'exprime comme quotient de deux fonctions entières qui satisfont à une équation du troisième ordre.

Quand on passe à (III), y a un point transcendant pour $x=0$, mais si l'on pose $x=e^u$, y est *méromorphe* en u et P. Painlevé a montré qu'on pouvait aussi l'obtenir comme quotient de deux fonctions *entières* qui satisfont à un système du troisième ordre.

Les fonctions méromorphes (ou entières) définies ainsi ont été nommées *fonctions de Painlevé*. La raison profonde de leur *nouveauté* doit être cherchée dans la théorie du *groupe de rationalité* (au sens de M. Drach) de l'équation aux dérivées partielles correspondante :

$$X(f)=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial y'}y''=0.$$

Pour toutes les équations de Painlevé, ce groupe est le groupe *infini, primitif, simple*, de transformations, défini par l'équation

$$\frac{\partial(\Phi,\Psi)}{\partial(\varphi,\psi)}=1;$$

φ, ψ sont deux intégrales de $X(f)=0$, formant un système fondamental et satisfaisant à une relation

$$\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(y,y')}=M,$$

où M est un dernier multiplicateur de Jacobi, *rationnel* en x, y, y'. On parvient facilement à l'expression de M, pour (VI), en remarquant que cette équation peut être obtenue en annulant la *variation* de l'intégrale simple

$$\int F(x,y,y')\,dx,$$

où l'on a posé

$$F=\frac{x(x-1)}{y'(y-1)(y-x)}y'^2+\frac{2}{(x-1)}\left[\alpha y-\frac{\beta x}{y}-\gamma\frac{(x-1)}{(y-1)}-\delta\frac{x(x-1)}{(y-x)}\right];$$

on peut prendre alors

$$M=\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}=\frac{2x(x-1)}{y(y-1)(y-x)}.$$

Pour (I) et (II), on a simplement

$$M=1.$$

Toutes les fonctions uniformes définies antérieurement à l'aide d'équations différentielles correspondaient à des *groupes de rationalité finis* (projectifs ou

linéaires); il y a donc lieu de regarder les transcendantes uniformes de Painlevé comme de nature essentiellement nouvelle (cf. P. Painlevé, *Comptes rendus Acad. Sciences*, Paris, 135, 27 octobre 1902 et 1902-1903, *passim*; J. Drach, *Bulletin Sc. math.*, 39, 1915, p. 149).

Une autre « correspondance » allait accroître leur intérêt. Alors que M. Gambier trouvait l'équation (VI), M. Richard Fuchs poursuivant les recherches de son père L. Fuchs et de M. Schlesinger sur les groupes des équations linéaires, la rencontrait aussi (cf. *Comptes rendus Acad. Sciences*, Paris, 141, 1905, p. 555, et *Math. Ann.*, 63, 1906, p. 301). Si l'on considère l'équation différentielle linéaire (E_1) à coefficients rationnels, réguliers, possédant les quatre points singuliers 0, 1, x, ∞ et un point singulier *apparent* y,

$$(E_1)\qquad \frac{1}{z}\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\alpha}{t^2}+\frac{\beta}{(t-1)^2}+\frac{\gamma}{(t-x)^2}+\frac{\delta}{t(t-1)}+\frac{\lambda}{t(t-y)^2}+\frac{a}{t(t-1)(t-x)}+\frac{b}{t(t-1)(t-y)},$$

et si l'on cherche à déterminer y et les coefficients en fonction de x, de manière que le groupe de monodromie de (E_1) soit indépendant du paramètre x, on trouve que y doit vérifier l'équation (VI), α, β, γ, δ ayant les mêmes valeurs, constantes, et que a et b s'expriment rationnellement à l'aide de y', y, x.

L'équation (VI) est ainsi mise en relation avec le *problème de Riemann* qui consiste à déterminer les arbitraires d'une équation différentielle linéaire, où les points singuliers sont fixés, de manière qu'elle admette un groupe donné.

On déduit de là une interprétation des intégrales premières de (VI) au moyen des transformations linéaires que subissent les solutions fondamentales de (E_1) quand t tourne autour des points singuliers (cf. R. Garnier, *Comptes rendus Acad. Sciences*, Paris, 159, 1914, p. 296).

Tout ceci s'étend à un ordre quelconque, c'est-à-dire qu'en partant d'une équation différentielle linéaire, ou mieux d'un système linéaire et homogène à n inconnues dont les coefficients n'ont que des pôles simples, comme le fait L. Schlesinger, l'étude du problème de Riemann conduit à des systèmes différentiels qui définissent des transcendantes dont les points critiques sont fixes, les pôles seuls étant mobiles (cf. L. Schlesinger, *Journal für die reine Math.*, 123, 1901, p. 138, et *Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen*, Leipzig und Berlin, 1908, p. 7).

Pour le développement des recherches de Painlevé sur les équations du second ordre, on doit citer encore J. Malmquist (*Archiv for Math.*, 17, 22, et *Comptes rendus du 5e Congrès des Math. scandinaves*, 1922, p. 253-253) et F. Tricomi (*Atti della r. Acc. dei Lincei*, V, 32, 1923) qui étudie les équations du second degré en y''.

L'étude des équations du troisième ordre à points critiques fixes, commencée par M. Painlevé (*Acta mathematica*, 25, 1902, p. 67), a été continuée par MM. J. Chazy et R. Garnier. M. J. Chazy (*Comptes rendus Acad. Sciences*, Paris, 145, 1907, p. 305, et *Acta mathematica*, 34, 1910, p. 316-386) a étudié en détail la *simplifiée* correspondante

$$y''=\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{y'^2}{y}+b(y)y'y''+c(y)y'^2,$$

où $b(y)$ et $c(y)$ sont rationnels et où n est un entier positif ou négatif, ou infini mais différent de -1 et de zéro, dont la solution générale est uniforme.

Pour $n=-2$, $b(y)=0$, on trouve les fonctions fuchsiennes ou kleinéennes de Poincaré. Lorsque $n\neq -2$, M. Painlevé avait annoncé que $b(y)$ et $c(y)$ étaient de genre *zéro* ou *un*, sauf si les points singuliers de $y(x)$ forment un ensemble parfait, et que y s'obtenait avec les fonctions uniformes classiques.

M. R. Garnier reprenant le cas $b(y)$, $c(y)$ rationnels a traité en outre (*Comptes rendus Acad. Sciences*, Paris, **145**, 1907, p. 308, et **147**, 1908, p. 915) le cas où ces fonctions sont de genre un.

M. Chazy a formé une équation à points critiques fixes qui donne par dégénérescence les six équations du second ordre de M. Painlevé, mais son étude n'est pas terminée. Il a également étudié quelques équations du quatrième ordre.

M. E. Borel avait observé (*Comptes rendus Acad. Sciences*, Paris, **138**, 1904, p. 337) que l'ensemble des termes de poids le plus élevé par rapport aux indices de dérivation, dans certaines équations dont la solution générale est *entière*, est identique à un *invariant* d'une forme binaire

$$u^{(n)}+n\lambda u^{(n-1)}+\ldots+n\lambda^{n-1}u'+\lambda^n u.$$

Par exemple, les trois invariants

$$uu''-u'^2,\quad uu^{iv}-4u'u'''+3u''^2,\quad uu^{vi}-6u'u^{v}+15u''u^{iv}-10u'''^2$$

donnent des équations dont les solutions respectives sont les fonctions entières :

$$e^{ax+b},\quad e^{ax+b}\sigma(x+c,\,0,\,d),\quad e^{ax+b}\sigma(x+c;\,0,\,e)\,\sigma(x+d;\,0,\,-e),$$

où la dernière ne dépend que de cinq constantes. M. Chazy a développé ces remarques, sans aboutir à des conclusions définitives; toutefois l'équation obtenue en annulant l'invariant de la suite qui correspond à $n>6$ a des points critiques transcendants.

Un autre travail de M. Chazy (*Acta mathematica*, **41**, 1926, p. 1-69) est essentiellement consacré à la limitation des degrés dans la fonction rationnelle R, pour que l'équation *d'ordre n*

$$y^{(n)}=\mathrm{R}(y^{(n-1)},\ldots,y,x)$$

ait ses points critiques fixes.

M. R. Garnier, dans sa Thèse (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 3e série, **29**, 1912, p. 34-160), a généralisé l'équation (E_1) qui conduit à (VI) en portant à $(n+3)$ le nombre des points essentiellement singuliers; dans l'équation, régulière au sens de Fuchs,

$$(\mathrm{E}_n)\qquad \frac{1}{y}\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{c_{n+1}}{x^2}+\frac{c_{n+2}}{(x-1)^2}+\frac{c_{n+3}}{x(x-1)}+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{c_i}{(x-t_i)^2}+\frac{\alpha_i}{x(x-1)(x-t_i)}\right]+\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{3}{4(x-\lambda_j)^2}+\frac{\beta_j}{x(x-1)(x-\lambda_j)}\right],$$

qui possède avec les points singuliers t_i, les points *apparents* λ_j, simples et en même nombre n, il s'agit de déterminer les λ_j et α_i (et par suite les c_i, β_j qui en résultent) en fonction des n variables $t_1,\ldots,t_n$ de manière que les coefficients des transformations du groupe de monodromie G, soient indépendantes de $t_1,\ldots,t_n$. M. R. Garnier obtient pour les λ_i un système (f_n,F_n) comprenant $\frac{n(n-1)}{2}$ équations du premier ordre (f_n) et n équations du second ordre (F_n), complètement intégrable, qui donne par dégénérescence un système hyperelliptique jacobien de genre n.

Il montre que les fonctions *symétriques* des λ_i, considérées comme fonctions de l'un des arguments t_i, ont *leurs points critiques fixes* ($t_i=t_j$, 0, 1, ∞) et sont méromorphes en dehors de ces points.

Dans la suite (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 3e série, **43**, 1926), M. R. Garnier a étendu ses recherches au problème de Riemann général, en étudiant *autour de leurs singularités essentielles* [comme il l'avait fait pour (VI)] les solutions du système (A) par lequel L. Schlesinger définit les résidus des pôles simples des coefficients de son système linéaire (S) au moyen des affixes de ces pôles quand on fixe le groupe G de monodromie de (S). Ce système (A) est d'ordre $(4n+8)$, il possède $(2n+7)$ intégrales premières algébriques, dont $(n+3)$ quadratiques; M. R. Garnier a réussi à le remplacer par un système plus simple d'ordre $2n$, auquel il applique la méthode des approximations successives de M. E. Picard.

2. Pages 95 et 101. *Sur l'intégration algébrique des équations différentielles linéaires :*

Cette question a été l'objet de nombreux travaux à la fin du siècle dernier. H. Valentiner (*Mémoires de l'Académie de Copenhague*, 6e série, V, 1889), recherchant à nouveau les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire homogène à trois variables d'ordre 360, a découvert un nouveau groupe, qui avait échappé à C. Jordan.

E. Goursat (*Ann. de l'École Norm.*, 3e série, II, 1885) relie l'étude des intégrales algébriques de l'équation du second ordre à la transformation de cette équation, par changement de variable et de fonction, en une équation hypergéométrique (de Gauss) dont l'intégrale est algébrique.

Le passage aux équations du troisième ordre, et aux systèmes vérifiés par deux fonctions de deux variables dont toutes les déterminations se déduisent de l'une d'elles par un nombre fini de transformations projectives, a été fait par E. Goursat (*Comptes rendus*, **104**, 16 mai 1887) et P. Painlevé (*Comptes rendus*, **104**, 31 mai 1887), qui ont formé des invariants différentiels I et J analogues à celui de Cayley-Schwarz pour le groupe projectif à une variable. Pour l'application particulière au troisième et au quatrième ordre, on peut consulter P. Painlevé (*Comptes rendus*, **104**, 27 juin 1887; **105**, 4 juillet 1887) dont les indications ont été développées par A. Boulanger (*Thèse*, Paris, juin 1897) avec une application au groupe de Hesse d'ordre 216.

La voie nouvelle ouverte par M. Emile Picard (*Comptes rendus*, **96**, 1883; *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, **1**, 1887), qui l'a conduit à la notion du *groupe de rationalité* pour une équation différentielle linéaire dont les

coefficients appartiennent à un certain *domaine de rationalité* [R], amène à rechercher, dans un domaine de rationalité *donné* [R], les équations dont le groupe de rationalité est formé d'un nombre limité de transformations linéaires. La définition précise de [R] pose alors chaque fois un problème spécial. (Cf. Émile Picard, *Comptes rendus*, **119**, 1894; **121**, 1895, et *Traité d'Analyse*, III, 3e édition, Chap. XVII, Paris, 1927, et aussi E. Vessiot, *Ann. de l'École Norm. sup.*, IX, 1892, et L. Schlesinger, *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, II, Leipzig, 1897.)

Il faut encore citer Wallenberg (*Journal für die reine Math.*, **113**, 1893, p. 1-41) qui s'est occupé des équations d'ordre n dont les solutions satisfont à $(n-2)$ relations homogènes de degré supérieur au premier, et l'exposé d'ensemble, avec historique, de G. Fano (*Math. Annalen*, 53, 1899, p. 493-590), où l'on aborde, en particulier, l'étude des équations du 5e et du 6e ordre dont les solutions sont liées entre elles par des relations algébriques.

3. Page 98. Sous le radical, deuxième ligne, *lire* $\frac{dF}{dz}$, barre omise.

4. Page 99. Deuxième ligne, dans le déterminant, *lire* $\frac{d^2 t_2}{dx^2}, \frac{d^2 t_3}{dx^2}$.

5. Page 106. Neuvième ligne, *lire* isomorphe sans *s*.

6. Page 112. Ligne 14, *lire* $\frac{2\pi}{n_{p+1}}$, barre omise.

7. Page 170. Ligne 22, au dénominateur du troisième terme, *lire* 2!

8. Page 174. Ajouter *à* au début de la dernière ligne.

9. Page 177. Ligne 10, *lire* $\frac{dx_i'}{dt}$, accent omis.

10. Page 189. Ligne 4 en partant du bas, *lire* $X_i(f)$, *i* omis.

11. Page 225. Ces formules peuvent s'obtenir directement. Une rotation continue de grandeur 1, autour de l'axe de cosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, produit dans le temps dt, la même variation des coordonnées x, y, z d'un point fixe du trièdre que la rotation infiniment petite

$$t_1 = \alpha_1 \delta t, \qquad t_2 = \beta_1 \delta t, \qquad t_3 = \gamma_1 \delta t.$$

On a donc pour le déplacement d'*entraînement*

$$\delta x = t_3 z - t_2 y, \qquad \delta y = t_2 x - t_1 z, \qquad \delta z = t_1 y - t_2 x.$$

Si l'on applique ceci au point

$$x = \mu = \alpha \sin\theta, \qquad y = \nu = \beta \sin\theta, \qquad z = \rho = \gamma \sin\theta,$$

représentatif de la rotation finie, en observant que si θ varie avec t, ce point varie dans le trièdre, on aura

$$\delta\mu = \delta x \sin\theta + x \cos\theta \, \delta\theta, \qquad \ldots,$$

les seconds termes donnant le déplacement *relatif*. Donc, en tenant compte du

déplacement d'entraînement $\delta x, \delta\beta, \delta\gamma$,

$$\begin{aligned} \delta\mu &= t_3\rho - t_2\nu + \lambda\alpha\,\delta\theta, \\ \delta\nu &= t_1\mu - t_3\rho + \lambda\beta\,\delta\theta, \\ \delta\rho &= t_2\nu - t_1\mu + \lambda\gamma\,\delta\theta. \end{aligned}$$

On déduit de là $\delta\lambda$ par l'identité

$$\lambda\,\delta\lambda + \mu\,\delta\mu + \nu\,\delta\nu + \rho\,\delta\rho = 0,$$

d'où

$$\delta\lambda = -(\mu\alpha\,\delta\theta + \nu\beta\,\delta\theta + \rho\gamma\,\delta\theta) = -\sin\theta\,\delta\theta.$$

Ces formules, plus générales que celles de H. Poincaré, donnent la variation des quantités λ, μ, ν, ρ pour une rotation infiniment petite *quelconque*. Elles redonnent celles du texte, si l'on suppose

$$\alpha\,\delta\theta + \alpha_1\,\delta t = 0, \qquad \beta\,\delta\theta + \beta_1\,\delta t = 0, \qquad \gamma\,\delta\theta + \gamma_1\,\delta t = 0,$$

c'est-à-dire, en particulier,

$$\alpha_1 = \alpha, \qquad \beta_1 = \beta, \qquad \gamma_1 = \gamma \qquad \text{avec} \quad \delta t = -\delta\theta.$$

La théorie *analytique* des groupes continus finis, dans la voie adoptée par H. Poincaré, ne semble pas avoir été poursuivie. L'étude de ces groupes, plus particulièrement celle des groupes *simples* ou *semi-simples* de M. E. Cartan, a donné lieu à de nombreux travaux. On doit citer particulièrement : H. Weyl (*Math. Zeitschrift*, **23**, 1925, p. 271-309; **24**, 1926, p. 328-395); de très nombreux Mémoires de E. Cartan (*Bulletin Sc. math.*, 2e série, **49**, 1925; *Journal de Math. pures et appl.*, 6, 1927; **8**, 1929; *Annali di Mat.*, 4e série, 5, 1928, etc.) rappelés au fascicule 42 du *Mémorial des Sciences mathématiques* : E. Cartan, *La Théorie des groupes finis et continus et l'*Analysis situs, 1930; enfin O. Schreier (*Abh. math. Seminar Hamburg*, **4**, 1926; **5**, 1927). Cf. aussi l'exposé d'ensemble du fascicule 33 du *Mémorial des Sciences mathématiques* : A. Buhl, *Aperçus modernes sur la théorie des groupes continus et finis*, 1928, où l'on trouvera une bibliographie étendue.

12. Page 484-492. *Réduction des intégrales abéliennes. Intégrales doubles* :

La réduction des intégrales abéliennes, l'étude des résidus et des périodes des intégrales doubles, celle des intégrales différentielles totales algébriques par rapport à deux variables complexes x, y, et les questions connexes, ont, comme le fait remarquer H. Poincaré, occupé M. Émile Picard pendant plus de dix ans. On ne peut aborder ce domaine sans étudier à la fois les travaux des deux savants. Nous ne pouvons ici que grouper quelques indications bibliographiques pour aider à cette étude.

Sur la réduction des intégrales abéliennes, voir E. Picard, *Comptes rendus*, **93**, 1881, p. 696 et 1126; **94**, 1882, p. 1704; **95**, 1882, p. 898; *Bulletin Soc. math. de France*, **11**, 1882, p. 25-53; **12**, 1884, p. 153-155.

Sur les résidus et les périodes des intégrales doubles de fonctions rationnelles ou de fonctions algébriques, voir E. Picard, *Comptes rendus*, 102, 1886, p. 349

et 410; **124**, 1897, p. 433; **125**, 1897, p. 1068; **126**, 1898, p. 1116; **129**, 1899, p. 539; **132**, 1901, p. 18 et 929; **133**, 1901, p. 795; **134**, 1902, p. 69; **137**, 1903, p. 594; **140**, 1905, p. 915; *Annales Éc. Norm. sup.*, 3e série, **19**, 1902, p. 65-87; **20**, 1903, p. 531-584; **22**, 1905, p. 69-100; *Journal de Math. pures et appl.*, 5e série, **5**, 1899, p. 5-59; *Bull. Sciences math.*, 2e série, **26**, 1902. Un certain nombre des résultats sont exposés dans le *Traité d'Analyse* de M. Émile PICARD, II, 1925, Chap. IX; pour d'autres, particulièrement pour ceux relatifs aux *Intégrales de différentielles totales, algébriques par rapport à deux variables x, y*, dont la considération est due à M. E. Picard, on trouvera un exposé d'ensemble dans l'ouvrage de E. PICARD et G. SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, Paris, I, 1897; II, 1900.

Le Tome II contient également un résumé des résultats obtenus par voie géométrique en Italie, et qui n'avaient pas trouvé place dans l'Ouvrage, par MM. G. Castelnuovo et F. Enriques, avec une bibliographie étendue où l'on doit relever les noms de G. Castelnuovo, F. Enriques et F. Severi. Cf. aussi F. SEVERI, *Rom. Acc. L. Rend.*, 13, 1904, p. 253-258, etc.

13. Page 493. Le Mémoire *Sur les cycles des surfaces algébriques* est attribué à un autre volume des *Œuvres;* la pensée de H. Poincaré présente une complexité — et, dirons-nous, une « connexion » — telle qu'il n'est pas possible que chaque travail ne se rapporte qu'aux publications déjà faites. Cela ne serait vrai que si l'on adoptait l'ordre chronologique, ce qui est impossible.

14. Page 553, titre, *lire* la date 1910 *au lieu de* 1901.

15. Page 571, ligne 6. L'exposant de n^{e} est $-\frac{1}{\lambda}$.

16. Page 540-578. *Sur les équations de Fredholm :*

La théorie des équations intégrales de Fredholm a donné lieu à de nombreux travaux, avant et après 1909, époque où H. Poincaré s'en est occupé. On rappellera seulement ici les recherches fondamentales de D. HILBERT, *Göttinger Nachr.*, 1904-1910; E. SCHMIDT, *Math. Ann.*, 63, 1907, p. 433-476, et 64, 1907, p. 161-174; E. GOURSAT, *Annales de la Faculté de Toulouse*, 2e série, 10, 1908, p. 5-98; H. LEBESGUE, *Annales de la Faculté de Toulouse*, 1, 1910, p. 25-128, et *Bulletin Soc. math. France*, 36, 1908, p. 3-19.

Pour les travaux récents sur les équations intégrales à noyau singulier, Cf. E. PICARD, *Ann. Éc. Norm. sup.*, 1911, p. 313; F. WEYL, *Math. Annalen*, 66, 1909, et T. CARLEMAN, *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1, 1931, p. 401-430, où l'on trouvera une bibliographie plus complète. Cf. aussi V. VOLTERRA, *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles*, Paris, 1913.

Jules DRACH.

FIN DU TOME III.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME III.

PREMIÈRE SECTION. — ANALYSE PURE.

PREMIÈRE PARTIE. — *Équations différentielles* (suite).

	Pages.
Sur un théorème de M. Fuchs..... 1,	4
Sur l'intégration algébrique des équations différentielles.....	32
Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré.....	35
Sur les équations différentielles linéaires à intégrales algébriques.....	95
Sur l'intégration des équations linéaires par le moyen des fonctions abéliennes....	98
Sur l'intégration algébrique des équations linéaires, etc.....	101
Groupes continus.....	167
Sur les groupes continus.....	169
Quelques remarques sur les groupes continus.....	213
Nouvelles remarques sur les groupes continus.....	261

DEUXIÈME PARTIE. — *Théorie des fonctions.*

Intégrales simples et multiples.

Analyse de ses travaux sur les intégrales, faite par H. Poincaré.....	325
Bibliographie de la deuxième Partie.....	331
Sur la réduction des intégrales abéliennes.....	333
Sur les intégrales de différentielles totales.....	355
Sur une généralisation du théorème d'Abel.....	357
Sur la réduction des intégrales abéliennes.....	360
Sur la réduction des intégrales abéliennes et la théorie des fonctions fuchsiennes..	429

Pages.

Sur les résidus des intégrales doubles..... 493
Remarques sur l'équation de Fredholm..... 540
Sur quelques applications de la méthode de Fredholm..... 545
Sur les équations de Fredholm..... 547
Remarques diverses sur l'équation de Fredholm..... 555

NOTES ET ERRATA..... 583

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME III.

84505 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.