



DEUXIÈME PARTIE

INTEGRALES SIMPLES ET MULTIPLES
THEORIE DES FONCTIONS.



ANALYSE

DE SES

TRAVAUX SUR LES INTÉGRALES

FAITE PAR H. POINCARÉ.

Acta mathematica, t. 38, p. 73-77 (1911).

VIII. Intégrales multiples. [52, 53, 60, 105, 168, 172, 181, 190, 200.]

La théorie qui a le plus contribué à faciliter l'étude des fonctions d'une variable est certainement celle des intégrales prises entre des limites imaginaires. Elle conduit, comme on le sait, à envisager les périodes de ces intégrales et à distinguer les périodes polaires (correspondant aux résidus) des périodes cycliques. Un des points les plus importants est d'ailleurs l'étude des intégrales abéliennes, c'est-à-dire des intégrales de différentielles algébriques; cette théorie est ordinairement présentée sous une forme géométrique, ce qui a amené à dire, pour abréger, que ces intégrales « appartiennent à une courbe algébrique ».

Quand on passe aux fonctions de deux variables, la notion de ces intégrales et de leurs périodes peut se généraliser à deux points de vue différents : par les intégrales de différentielles totales et par les intégrales doubles. Je ne m'étendrai pas beaucoup sur le premier de ces modes de généralisation. Il ne m'appartient pas, en effet : c'est M. Picard qui en a tiré les premiers et les plus beaux résultats. Je n'ai fait qu'appeler l'attention [52], à la suite de la Note de M. Picard, sur quelques points de détail. Ainsi ce géomètre avait démontré qu'une surface algébrique ne possède d'intégrales abéliennes de différentielles totales de première espèce que dans des cas particuliers.

Je veux dire que, si

$$f(x, y, z) = 0$$

est l'équation d'une surface algébrique définissant z en fonction de x et de y ,

il n'y aura pas, en général, de différentielle exacte

$$P dx + Q dy,$$

où P et Q soient rationnels en x, y, z , de telle façon que l'intégrale

$$\int P dx + Q dy$$

reste toujours finie.

Partant de là, j'ai trouvé les conditions pour qu'une surface du quatrième ordre possède de pareilles intégrales. Il faut et il suffit qu'elle soit une surface réglée ou qu'elle se ramène à une surface de révolution par une transformation linéaire. J'ai indiqué également un certain nombre de cas où il n'y a jamais, et d'autres où il y a toujours, des intégrales de première espèce.

J'ai reconnu que le théorème d'Abel s'étendait immédiatement aux intégrales de différentielles totales de première espèce; mais il semblait au premier abord qu'il ne serait plus applicable aux surfaces qui ne possèdent pas de pareilles intégrales, c'est-à-dire à la grande majorité des surfaces algébriques.

Il n'en était rien. J'ai démontré [53] le théorème suivant :

Si $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_q, y_q, z_q)$ sont les q points d'intersection d'une surface algébrique S et d'une courbe algébrique C ; si $(x_1 + dx_1, y_1 + dy_1, z_1 + dz_1, \dots)$ sont les q points d'intersection de cette même surface S avec une courbe C' infiniment peu différente de C , on aura un certain nombre de relations de la forme

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_q dx_q = 0,$$

où X_i est une fonction rationnelle de x_i, y_i, z_i . Ces relations peuvent être regardées comme la généralisation du théorème d'Abel.

Les difficultés qui s'attachent à l'étude des intégrales doubles et multiples étendues à un domaine imaginaire sont d'une nature différente. Il semble que la théorie des intégrales simples prises entre des limites imaginaires serait d'une exposition beaucoup plus laborieuse si l'on n'avait pour s'y guider une représentation géométrique. On perd ce guide quand on passe aux intégrales doubles; il faudrait alors recourir à la Géométrie à quatre dimensions, ce qui serait une complication plutôt qu'une simplification.

Cet obstacle ne paraît pas d'abord très sérieux; cependant il arrêta longtemps les géomètres. M. Picard, à propos des fonctions hyperfuchsienues, avait traité

une question qui présente quelque analogie avec celle qui nous occupe, mais qui n'est pourtant pas la même; les quantités qu'il a ainsi introduites ne peuvent être en aucune façon regardées comme la généralisation des périodes des intégrales simples. Il importe de ne pas les confondre avec les périodes cycliques que ce même savant a étudiées peu de temps après la publication de ma première Note à ce sujet, et qui se rattache, au contraire, très directement à la théorie que j'ai cherché à fonder.

Je fus donc le premier à étudier méthodiquement cette importante question dans une Note [60] que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie le 25 janvier 1886 et dont j'ai développé les résultats dans un Mémoire plus étendu [181].

Le premier point était d'imaginer un mode de représentation géométrique sans employer l'espace à quatre dimensions. On peut y arriver par diverses méthodes que je n'exposerai pas ici et dont j'ai fait tour à tour usage. Il faut ensuite donner une définition des intégrales doubles prises dans un domaine imaginaire. Grâce aux modes de représentation dont je viens de parler, on peut donner cette définition sans qu'il subsiste aucune équivoque. Il faut ensuite démontrer le théorème fondamental, analogue à celui de Cauchy, et d'après lequel une intégrale double prise le long d'un contour fermé est nulle en général. Cette démonstration ne présente aucune difficulté. On peut trouver, sous une forme simple, les conditions d'intégrabilité de différentielles doubles

$$A dy dz + B dz dx + C dx dy + \dots,$$

qu'il faut d'abord définir sans ambiguïté. Ces conditions présentent presque la même forme que celles qui expriment l'intégrabilité d'une différentielle ordinaire. Seulement certains signes qui sont tous positifs pour les intégrales d'ordre pair et, en particulier, pour les intégrales doubles sont, au contraire, alternativement positifs et négatifs quand il s'agit d'intégrales d'ordre impair et, en particulier, d'intégrales simples. Ces conditions une fois trouvées, le théorème fondamental s'ensuit immédiatement.

Il admet cependant des exceptions, comme la proposition correspondante de la théorie de Cauchy, et ce sont ces exceptions qui sont l'origine des périodes des intégrales doubles. Ces périodes se distinguent, comme dans le cas d'une seule variable, en périodes cycliques et en périodes polaires. Je me suis occupé, en particulier, des périodes polaires ou, si l'on veut, des résidus des intégrales doubles. M. Picard a étudié ensuite les périodes cycliques.

J'ai envisagé l'intégrale d'une fonction rationnelle que j'ai écrite sous la



forme suivante :

$$\int \int \frac{f(x, y) dx dy}{\varphi(x, y) \psi(x, y)},$$

en décomposant le dénominateur en facteurs irréductibles, et j'ai reconnu que cette intégrale présente trois sortes de périodes :

1° Celles de la première sorte sont égales à $2i\pi$ multiplié par l'une des périodes de première espèce de l'intégrale abélienne

$$\int \frac{f dx}{\varphi \frac{d\psi}{dy}}$$

(rapportée à la courbe algébrique $\psi = 0$).

2° Celles de la seconde sorte se rapportent aux divers points d'intersection des deux courbes $\varphi = \psi = 0$ et sont égales à

$$\pm 4\pi^2 \frac{f(x_0, y_0)}{\Delta(x_0, y_0)},$$

$\Delta(x, y)$ étant le déterminant de φ et de ψ par rapport à x et à y et x_0 et y_0 étant les coordonnées du point d'intersection.

3° Enfin celles de la troisième sorte se rapportent aux divers points doubles de ces deux courbes et ont une expression analogue.

Mais la théorie serait incomplète si l'on se bornait à ces trois sortes de périodes. Il peut arriver que la fonction sous le signe intégral devienne infinie en divers points du contour d'intégration sans que l'intégrale elle-même cesse d'être finie. Cette circonstance ne pouvait pas se produire dans le cas des intégrales simples, lorsque la fonction à intégrer était rationnelle; il n'en est plus de même ici. D'un autre côté, on ne saurait exclure de parti pris les intégrales de cette sorte; car, autant qu'on en peut juger aujourd'hui, elles doivent jouer un rôle important dans les applications.

Or les intégrales de cette nouvelle sorte ont un caractère bien différent de celui des intégrales à périodes. Celles-ci, en effet, ou bien restent constantes quand on fait varier le chemin d'intégration d'une manière continue, ou bien s'accroissent par sauts brusques; celles-là, au contraire, varient d'une façon continue comme le chemin d'intégration lui-même. C'est là la principale différence entre la théorie nouvelle et celle de Cauchy.

Ces résultats s'appliquent, *mutatis mutandis*, aux transcendentes et, en particulier, aux fonctions uniformes.

Cette théorie nouvelle sera-t-elle aussi féconde que l'ont été les découvertes de Cauchy? Elle est encore trop jeune pour qu'on puisse se prononcer sur ce point. Certainement quelques-uns des résultats qu'on peut obtenir ainsi, et par une généralisation immédiate des méthodes de Cauchy, auraient pu être atteints plus aisément par d'autres voies. Mais on peut espérer qu'il n'en sera pas toujours de même, et déjà je suis sur la voie de propositions réellement nouvelles dans la théorie des fonctions abéliennes.

Les périodes dont il a été question jusqu'ici sont analogues à celles qui se rapportent aux singularités polaires des intégrales simples. Mais lorsque la fonction sous le signe f n'est pas uniforme, les intégrales multiples peuvent, outre ces périodes polaires, présenter des périodes cycliques.

C'est une question de Mécanique Céleste, celle du développement de la fonction perturbatrice, qui m'a amené à m'en occuper.

Si la fonction sous le signe f dépend d'un paramètre (comme par exemple les intégrales elliptiques du module) les périodes cycliques seront des fonctions de ce paramètre. De même que dans le cas des intégrales simples, ces fonctions seront définies par des équations linéaires à coefficients algébriques. J'ai étudié ces équations linéaires et leurs groupes [172]. J'ai montré qu'il y a un lien intime entre l'équation linéaire qui définit les périodes des intégrales doubles dépendant du radical $\sqrt{F(x, y)}$ et celle qui définit les périodes des intégrales abéliennes simples engendrées par la courbe algébrique $F(x, y) = 0$. J'ai fait voir par quelle transformation on peut passer de l'une à l'autre.

Cette dernière recherche se rattache à mes travaux sur l'Analysis Situs.

D'un autre côté, étant données plusieurs intégrales multiples dépendant du radical $\sqrt{F(x, y)}$, on peut se proposer de faire une théorie de la réduction de ces intégrales, analogue à la théorie classique de la réduction des intégrales elliptiques (ou hyperelliptiques), à un petit nombre d'intégrales types (dites de première, seconde et troisième espèces). J'ai résolu ce problème qui m'était utile pour le développement de la fonction perturbatrice [168, 196, 206].

La réduction des intégrales doubles et celle des intégrales de différentielles totales se présentent d'ailleurs ici comme deux questions intimement liées.



BIBLIOGRAPHIE DE LA DEUXIÈME PARTIE

INTÉGRALES SIMPLES ET MULTIPLES

de l'Analyse des Travaux scientifiques de Henri Poincaré, faite par lui-même.

-
52. Sur les intégrales de différentielles totales (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 29 décembre 1884).
53. Sur une généralisation du théorème d'Abel (*Ibid.*, 5 janvier 1885).
60. Sur les résidus des intégrales doubles (*Ibid.*, 25 janvier 1886).
105. Sur les transformations des surfaces en elles-mêmes (*Ibid.*, 103, p. 732-734, 1886).
168. Sur les périodes des intégrales doubles et le développement de la fonction perturbatrice (*Ibid.*, 124, p. 199-200, 1897).
172. Sur les périodes des intégrales doubles (*Ibid.*, 125, p. 993-997, 1897).
181. Sur les résidus des intégrales doubles (*Acta mathematica*, t. 9, p. 321-380, 1887).
190. Les propriétés du Potentiel et les Fonctions abéliennes (*Ibid.*, t. 22, p. 89-178, 1898).
200. Sur les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique (*American Journal of Mathematics*, t. 12, p. 89-178, 1899).
-



SUR
LA RÉDUCTION DES INTÉGRALES ABÉLIENNES

Bulletin de la Société mathématique de France. t. 12, p. 124-143 (1884).

1. Tous les lecteurs de ce Bulletin connaissent les remarquables travaux de M. Picard *Sur la réduction des intégrales abéliennes*, qui, après avoir paru dans divers numéros des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, ont été réunis ici-même en un Mémoire unique. La même question a été l'objet des recherches des géomètres étrangers, et en particulier des géomètres allemands.

En 1874, M^{re} Kowalevski a envoyé à l'Université de Göttingen un Mémoire qui va paraître dans les *Acta mathematica*. Dans ce Mémoire (*Ueber die Reduction einer bestimmten Klasse Abelschen Integrale 3^{ten} Ranges auf elliptische Integrale*), elle cite les deux théorèmes suivants, dus à Weierstrass :

Si l'on envisage un système de ρ intégrales abéliennes de rang ρ , parmi lesquelles il y en a une qui est susceptible d'être réduite aux intégrales elliptiques, et si l'on considère également la fonction Θ correspondante :

1^{re} Cette fonction Θ à ρ variables peut être changée, par une transformation d'ordre k , en un produit d'une fonction Θ à une variable et d'une fonction Θ à $\rho-1$ variables.

2^{re} Elle peut également par une transformation linéaire, c'est-à-dire du premier ordre, être amenée à une forme telle que, le tableau des périodes s'écrivant comme il suit :

$$(A) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1\rho} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2\rho} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \tau_{\rho 1} & \tau_{\rho 2} & \dots & \tau_{\rho\rho} \end{pmatrix}$$

avec les conditions habituelles

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha},$$



nulles à la fois dans μ intégrales, la base de ce système non primitif jouira de la même propriété. D'où la conséquence suivante :

On peut toujours trouver, pour nos p intégrales abéliennes, un système primitif de $2p$ périodes, de telle façon que les $2p - 2\mu$ dernières périodes soient nulles dans μ des p intégrales considérées.

3. Mais ce système primitif ne sera pas en général un système de périodes normales.

A chaque système primitif de périodes de p intégrales abéliennes est attachée une forme bilinéaire à deux séries de $2p$ variables

$$F(x_1, x_2, \dots, x_{2p}; y_1, y_2, \dots, y_{2p}).$$

Si dans cette forme on remplace $x_1, x_2, \dots, x_{2p}$ par les périodes (formant le système primitif considéré) d'une de nos p intégrales abéliennes et $y_1, y_2, \dots, y_{2p}$ par les périodes correspondantes d'une seconde intégrale, la forme s'annule.

Si l'on y remplace les x par les parties réelles des périodes d'une des intégrales et les y par les parties imaginaires de ces mêmes périodes, le résultat de cette substitution sera positif.

La forme F est une forme bilinéaire *identique*, c'est-à-dire que l'on a identiquement

$$F(x_1, x_2, \dots, x_{2p}; x_1, x_2, \dots, x_{2p}) = 0.$$

On sait que les formes bilinéaires identiques ont un seul invariant qui est le déterminant où le $m^{\text{ème}}$ terme de la $n^{\text{ème}}$ colonne est le coefficient de $x_m y_n$. Cet invariant, qui est toujours un carré parfait, est égal à 1 dans le cas qui nous occupe.

Une forme bilinéaire d'invariant 1 est *réduite* lorsqu'elle s'écrit

$$(3) \quad x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3 + \dots + x_{2p-1} y_{2p} - x_{2p} y_{2p-1}.$$

Le système primitif considéré est alors un système de *périodes normales*.

Qu'arrive-t-il maintenant lorsque l'on passe d'un système primitif à un autre système primitif équivalent? Posons, comme plus haut,

$$(1) \quad x_i = \sum_{k=1}^{k=2p} a_{ik} x'_k,$$

les a_{ik} étant des entiers dont le déterminant sera égal à 1. Les x' formeront comme les x un système primitif, et si l'on désigne par y'_k la période de la

seconde intégrale qui correspond à x'_k , on aura

$$(1 \text{ bis}) \quad y_i = \sum_{k=1}^{k=2p} a_{ik} y'_k.$$

En remplaçant dans F les x et les y par leurs valeurs (1) et (1 bis), on obtiendra une forme bilinéaire en x' et en y' , arithmétiquement équivalente à F et d'invariant 1. Ce sera la forme bilinéaire correspondant au système primitif des x' .

On pourra toujours choisir la substitution linéaire (1), de telle façon que la forme F ainsi transformée soit réduite, et par conséquent que le système primitif des x' soit un système de périodes normales (cf. Clebsch et Gordan, *Abelsche Functionen*, p. 106). Il existe également des substitutions linéaires qui changent la forme (3) en elle-même et qui, par conséquent, changent un système de périodes normales en un autre système de périodes normales (*loc. cit.*, p. 300). C'est ce qu'on appelle les *transformations linéaires* ou du *premier ordre*.

Imaginons maintenant que dans les relations (1) et (1 bis) les a_{ik} soient encore entiers, mais que leur déterminant soit égal à Δ ($\Delta > 1$). Alors le système des x' ne sera plus un système de périodes de nos intégrales abéliennes, mais ce sera un système de périodes, primitif ou non, d'autres intégrales abéliennes.

Si l'on remplace dans F les x et les y par leurs valeurs (1) et (1 bis), on obtiendra une forme bilinéaire identique en x' et y' , d'invariant Δ^2 .

Je dirai qu'une pareille forme est *réduite* lorsqu'elle s'écrit

$$(4) \quad k_1(x_1 y_2 - x_2 y_1) + k_2(x_3 y_4 - x_4 y_3) + \dots + k_p(x_{2p-1} y_{2p} - x_{2p} y_{2p-1}),$$

et il est aisé de voir que l'on peut toujours *réduire* une forme bilinéaire identique par une substitution linéaire à coefficients entiers et de déterminant 1.

Supposons en particulier que la forme F soit réduite, de telle façon que les x soient les périodes normales des intégrales abéliennes données. Supposons, de plus, qu'après la transformation notre forme soit encore réduite, c'est-à-dire qu'elle se réduise à une expression telle que (4), et de telle sorte que

$$k_1 = k_2 = \dots = k_p = k.$$

Alors les x' seront les périodes normales d'un nouveau système d'intégrales abéliennes; par conséquent la substitution (1) aura changé un système de



périodes normales en un autre système de périodes normales, mais appartenant à de nouvelles intégrales. Elle s'appellera alors une *transformation d'ordre k*.

4. Ces préliminaires posés, passons à la démonstration du premier théorème de M. Weierstrass, généralisé.

Nous avons supposé que, les x formant un système primitif de périodes et F étant la forme correspondante, les $2\rho - 2\mu$ dernières périodes étaient nulles pour μ de nos ρ intégrales. Posons encore

$$(1) \quad x_i = \sum a_{ik} x'_k, \quad y_i = \sum a_{ik} y'_k,$$

les a_{ik} étant entiers, mais leur déterminant étant en général plus grand que 1.

Si les $2\rho - 2\mu$ dernières périodes du nouveau système ne dépendent que des $2\rho - 2\mu$ dernières périodes de l'ancien système, si, en d'autres termes, on a

$$(5) \quad a_{ik} = 0 \quad (i = 2\mu + 1, 2\mu + 2, \dots, 2\rho - 1, 2\rho; k = 1, 2, \dots, 2\mu - 1, 2\mu),$$

les $2\rho - 2\mu$ dernières périodes du nouveau système seront nulles comme celles de l'ancien pour les μ intégrales dont il vient d'être question.

Si l'on peut trouver une substitution linéaire de la forme (1) satisfaisant aux conditions (5), et réduisant le système de périodes à un système de périodes normales des intégrales transformées; si, en d'autres termes, on peut trouver une pareille substitution qui réduise la forme F à une expression, telle que (4), avec les conditions

$$k_1 = k_2 = \dots = k_p = k,$$

le théorème énoncé sera démontré.

Remarquons même qu'il le sera encore, si nous arrivons au même résultat en appliquant *successivement* à notre forme F plusieurs substitutions assujetties aux conditions que nous venons d'énoncer; car la résultante de deux pareilles substitutions satisfait également à ces mêmes conditions.

Quand dans la forme F on annule les $2\rho - 2\mu$ derniers x et les $2\rho - 2\mu$ derniers y , il reste une forme bilinéaire F_1 admettant deux séries de 2μ variables, $x_1, x_2, \dots, x_{2\mu}; y_1, y_2, \dots, y_{2\mu}$. Je puis toujours supposer qu'elle est réduite et s'écrit

$$F_1 = k_1(x_1 y_1 - x_2 y_2) + k_2(x_2 y_1 - x_1 y_2) + \dots + k_p(x_{2p-1} y_{2p} - x_{2p} y_{2p-1});$$

car, si cela n'était pas, on ferait subir aux variables une substitution linéaire de déterminant 1, ne portant que sur les 2μ premières périodes, et qui réduirait la forme F_1 .

Nous pourrions alors écrire

$$F = F_1 + F_2 + F_3,$$

F_1 ne contenant que les 2μ premières périodes, F_2 ne contenant que les $2\rho - 2\mu$ dernières et F_3 représentant l'ensemble des termes qui dépendent à la fois d'une des 2μ premières et d'une des $2\rho - 2\mu$ dernières.

Nous allons chercher par une suite de substitutions linéaires à faire disparaître successivement tous les termes de F_3 .

Soit, par exemple, à faire disparaître un terme

$$a(x_1 y_1 - x_1 y_1),$$

x_i étant une des $2\rho - 2\mu$ dernières périodes; nous poserons

$$x_2 = x'_2 - a x'_1, \quad x_i = k_1 x'_i;$$

de même, si l'on veut faire disparaître un terme

$$b(x_2 y_1 - x_1 y_2),$$

on posera

$$x_1 = x'_1 + b x'_2, \quad x_i = k_1 x'_i,$$

et ainsi de suite.

Toutes ces substitutions satisfont aux conditions (5) et l'on obtiendra finalement une forme F' transformée de F qui s'écrit

$$(6) \quad F' = F_1 + F'_2,$$

F_1 ne dépendant que des 2μ premières et F'_2 des $2\rho - 2\mu$ dernières périodes du nouveau système : les deux catégories de périodes sont séparées. La forme F'_1 , ne différant d'ailleurs de F_1 qu'en ce que les anciennes variables sont remplacées par les nouvelles, sera réduite. On réduira ensuite la forme F'_2 par une substitution linéaire de déterminant 1 ne portant que sur les $2\rho - 2\mu$ dernières périodes; la forme F' transformée se réduira alors à une expression telle que (4), d'où il est aisé de passer à l'expression

$$k(x_1 y_2 - x_2 y_1) + k(x_2 y_3 - x_1 y_2) + \dots + k(x_{2p-1} y_{2p} - x_{2p} y_{2p-1}) \quad \text{C. O. F. D.}$$

5. Mais on peut craindre, en suivant la marche qui précède, d'être conduit à employer une transformation d'ordre trop élevé. C'est ce qui nous amène à nous poser le problème suivant :

Trouver toutes les substitutions satisfaisant aux conditions (5) et qui ramènent la transformée F' de F à la forme (6), où les deux catégories de périodes sont séparées.



Ce problème se ramène au suivant :

Trouver toutes les substitutions linéaires portant sur les $2\rho - 2\mu$ dernières périodes et telles qu'après la transformation, tous les coefficients des termes qui contiennent à la fois x_i ou x_2 et une des $2\rho - 2\mu$ dernières périodes soient divisibles par k_i ; que tous les coefficients des termes qui contiennent à la fois x_2 ou x_i et une des $2\rho - 2\mu$ dernières périodes soient divisibles par k_2 , etc.

Soit

$$F_2 = \sum b_{ik}(x_i y_k - x_k y_i) \\ (i = 1, 2, \dots, 2\mu; k = 2\mu + 1, 2\mu + 2, \dots, 2\rho).$$

Posons maintenant

$$x_k = \sum c_{kh} x'_h \\ (k = 2\mu + 1, 2\mu + 2, \dots, 2\rho; h = 2\mu + 1, 2\mu + 2, \dots, 2\rho),$$

d'où

$$F_2 = \sum b_{ik} c_{kh} (x_i y'_k - x'_k y_i).$$

Les conditions énoncées se réduisent à

$$(7) \quad \sum_k b_{ik} c_{kh} = 0 \pmod{k_i}$$

(en supposant $i = 2l$ ou $2l - 1$).

Le nombre total des congruences (7) est $2\mu(2\rho - 2\mu)$. Il est aisé de voir de quelle forme en est la solution générale; on trouve

$$c_{kh} = \sum_m d_{km} x_{mh}.$$

Dans cette expression, les d ont des valeurs déterminées; les x peuvent prendre toutes les valeurs entières positives ou négatives; enfin l'indice m varie, comme les indices k et h eux-mêmes, depuis $2\mu + 1$ jusqu'à 2ρ . Il résulte de là que la substitution

$$x_k = \sum c_{kh} x'_h$$

peut être regardée comme la résultante des deux substitutions suivantes :

$$(8) \quad x_k = \sum d_{km} x''_m,$$

$$(9) \quad x''_m = \sum x_{mh} x'_h.$$

La substitution (8) est la plus simple de toutes les substitutions linéaires qui satisfont aux congruences (7), pendant que (9) est une substitution linéaire quelconque à coefficients entiers.

Ainsi l'on obtiendra toutes les substitutions qui satisfont auxdites congruences en faisant suivre la plus simple d'entre elles d'une substitution quel-

conque à coefficients entiers. Nous pourrions donc nous borner à envisager la substitution (8) elle-même.

Appliquons donc à notre forme F la substitution (8); tous les coefficients de F_2 satisferont aux congruences (7). Par exemple, le coefficient du terme $x_i y_i - y_i x_i$ étant une des $2\rho - 2\mu$ dernières périodes, sera divisible par k_i , et ce terme s'écrira

$$a k_i (x_i y_i - y_i x_i),$$

de sorte qu'on pourra le faire disparaître en posant simplement

$$x_i = x'_i - a x_i,$$

c'est-à-dire par une substitution de déterminant 1.

Ce sera là la manière la plus simple de faire disparaître tous les termes de F_2 . Si, après avoir séparé, comme nous venons de le dire, les deux catégories de périodes, on applique à la forme F une substitution linéaire quelconque ne portant que sur les 2μ premières périodes, puis une substitution linéaire quelconque ne portant que sur les $2\rho - 2\mu$ dernières périodes, il est clair que, dans la forme ainsi transformée, les deux catégories de périodes seront encore séparées. On est ainsi conduit à une infinité de manières de faire disparaître tous les termes de F_2 , et il est aisé de voir qu'il n'y en a pas d'autres.

6. Occupons-nous maintenant de démontrer le second théorème de M. Weierstrass. Nous supposons qu'une intégrale est réductible aux intégrales elliptiques, et par conséquent $\mu = 1$. Dans le système primitif d'où nous partons, les $2\rho - 2$ dernières périodes sont nulles. Il s'agit de ramener ce système à un système normal, mais cette fois par une transformation de déterminant 1. Nous devons de plus supposer que dans le nouveau système les $2\rho - 3$ dernières périodes ne dépendent que des $2\rho - 2$ dernières périodes de l'ancien système (de façon qu'elles soient nulles dans l'intégrale réductible), et que la deuxième et la troisième nouvelle période ne dépendent que des $2\rho - 1$ dernières périodes de l'ancien système (de façon qu'elles soient commensurables entre elles dans l'intégrale réductible).

Quand la possibilité d'une pareille réduction sera établie, le théorème de M. Weierstrass sera démontré.

Nous avons encore notre forme

$$F = F_1 + F_2 + F_3$$



qu'il s'agit de réduire. Ici

$$F_1 = a_2(x_1 y_2 - x_2 y_1), \\ F_2 = \sum a_i(x_1 y_i - x_i y_1) + \sum b_i(x_2 y_i - x_i y_2).$$

Nous poserons d'abord

$$x_1 = x'_1, \\ a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_{2p} x_{2p} = x'_2, \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_{2p} x_{2p} = x'_3, \\ \beta_{1,3} x_3 + \dots + \beta_{1,2p} x_{2p} = x'_i \quad (i > 3).$$

C'est là une substitution linéaire satisfaisant aux conditions énoncées, *pourvu que son déterminant soit égal à 1*. Or, les coefficients $a_2, a_3, \dots, a_{2p}$ devant être premiers entre eux, puis que l'invariant de F est égal à 1, on pourra toujours choisir les α et les β de telle façon que ce déterminant soit égal à 1.

Après cette substitution la forme F se changera en

$$F' = F_1 + F_2 + F_3,$$

où

$$F_1 = x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1, \quad F_2 = \sum c_i(x'_2 y'_i - x'_i y'_2).$$

Il suffira pour faire disparaître F'_2 de poser

$$x'_i = x'_i + \sum c_i x'_1.$$

Après cette nouvelle transformation, la forme F deviendra

$$F'' = x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1 + F'_3.$$

Il reste à réduire F'_3 , mais de telle façon que les $2p - 3$ dernières périodes du nouveau système ne dépendent que des $2p - 3$ dernières périodes de l'ancien. Cela peut se faire absolument de la même manière.

Nous pouvons écrire, en effet, en supprimant les accents,

$$F'_3 = \sum d_i(x_3 y_i - x_i y_3) + \sum e_i(x_1 y_i - x_i y_1) + F'_4,$$

où i est plus grand que 3 et où F'_4 ne dépend que des $2p - 4$ dernières périodes. Nous poserons alors

$$x_3 = x'_3, \\ x'_4 = d_1 x_1 + d_2 x_2 + \dots + d_{2p} x_{2p}, \\ x'_i = \delta_{1,i} x_1 + \delta_{2,i} x_2 + \dots + \delta_{1,2p} x_{2p},$$

en choisissant les δ de façon que le déterminant de cette substitution linéaire soit égal à 1.

Il viendra après transformation

$$F'' = x'_3 y'_4 - x'_4 y'_3 + \sum f_i(x'_4 y'_i - x'_i y'_4) + F''_4;$$

F''_4 ne dépend que des $2p - 4$ dernières périodes. Nous poserons

$$x'_3 = x''_3 + \sum f_i x'_i;$$

d'où, après la transformation,

$$F'' = x''_3 y'_4 - x''_4 y'_3 + F''_4.$$

Il reste enfin à réduire F''_4 , mais cette fois par une substitution *quelconque* de déterminant 1, ce qui se fera aisément.

Le second théorème de M. Weierstrass est donc démontré.

7. Occupons-nous maintenant de généraliser ce résultat en supposant que, au lieu d'une intégrale réductible aux fonctions elliptiques, nous ayons μ intégrales réductibles au genre μ . Supposons, pour fixer les idées, $\mu = 2$, de telle façon que les $2p - 4$ dernières périodes de notre système primitif soient nulles pour nos μ intégrales. Notre forme F s'écrira encore

$$F = F_1 + F_2 + F_3$$

et nous pourrions supposer que F_1 est réduit de telle sorte que

$$F_1 = a_2(x_1 y_2 - x_2 y_1) + b_1(x_3 y_1 - x_1 y_3),$$

$$F_2 = \sum a_i(x_1 y_i - x_i y_1) + \sum b_i(x_2 y_i - x_i y_2) + \sum c_i(x_2 y_1 - x_1 y_2) + \sum d_i(x_1 y_i - x_i y_1) \\ (i > 4).$$

Posons

$$x_1 = x'_1, \quad x_2 = x'_2, \\ (10) \quad \begin{cases} a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_{2p} x_{2p} = x'_2, \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \dots + b_{2p} x_{2p} = x'_4, \end{cases} \\ x'_k = \sum a_{ik} x_k \quad (k = 2, 4, 5, 6, \dots, 2p; i = 3, 5, 6, \dots, 2p).$$

L'invariant de la forme F étant égal à 1, les déterminants contenus dans la matrice

$$\begin{vmatrix} a_2 & 0 & a_5 & a_6 & \dots & a_{2p} \\ 0 & b_1 & b_5 & b_6 & \dots & b_{2p} \end{vmatrix}$$

sont premiers entre eux. Il en résulte que l'on peut choisir les α , de telle sorte que le déterminant de la substitution linéaire (10) soit égal à 1.

Après cette transformation, la forme F deviendra

$$F' = F'_1 + F'_2 + F'_3,$$

où

$$F'_1 = x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1 + x'_3 y'_4 - x'_4 y'_3, \\ F'_2 = \sum c_i(x'_2 y'_i - x'_i y'_2) + \sum d_i(x'_4 y'_i - x'_i y'_4).$$



On posera alors

$$\left. \begin{aligned} x'_i &= x_i + \sum c'_j x_j, & x''_i &= x'_i + \sum d'_j x'_j \\ x'_2 &= x''_2, & x'_1 &= x''_1, & x'_i &= x''_i \end{aligned} \right\} \quad (i \geq 4),$$

et la forme F se réduira à

$$F'' = (x'_1 y'_2 - x'_2 y'_1 + x'_3 y'_4 - x'_4 y'_3) + F''_2,$$

F''_2 ne dépendant que des $2\rho - 4$ dernières périodes. Il reste à réduire F''_2 . Cette réduction une fois opérée, le système des périodes sera ramené à un système normal, et, ainsi qu'il est aisé de s'en assurer, l'une quelconque des $2\rho - 4$ dernières périodes s'exprimera linéairement à l'aide de la deuxième et de la quatrième par une expression à coefficients commensurables.

Or nous pouvons toujours supposer que la deuxième période est égale à 1 dans la première de nos deux intégrales réductibles et à zéro dans la deuxième, et que la quatrième période est égale à zéro dans la première de ces deux intégrales et à 1 dans la deuxième. Voici quel sera alors le tableau des périodes de ces deux intégrales

$$\begin{array}{ccccccc} A & 1 & B & 0 & a_5 & a_6 & \dots & a_{2\rho} \\ A' & 0 & B' & 1 & b_5 & b_6 & \dots & b_{2\rho} \end{array}$$

les a et les b étant commensurables.

Il s'agit maintenant de simplifier ce tableau en transformant les périodes, mais de façon qu'elles ne cessent pas d'être des périodes normales.

Or : 1° les périodes ne cesseront pas d'être normales si l'on applique à une période de rang impair et à la période de rang pair qui la suit une substitution linéaire à deux variables et de déterminant 1.

Ainsi l'on peut poser, par exemple,

$$(11) \quad \begin{aligned} a'_5 &= \alpha a_5 + \beta a_6, & a'_6 &= \gamma a_5 + \delta a_6, & \alpha\delta - \beta\gamma &= 1, \end{aligned}$$

et remplacer dans le tableau a_5 et a_6 par a'_5 et a'_6 ; le système de périodes ainsi défini sera encore normal.

On choisira les coefficients de cette substitution de telle façon que a'_6 soit nul; on opérera de la même manière sur chacune des $\rho - 2$ dernières paires de périodes, de façon à faire disparaître dans chacune d'elles les périodes de rang pair de la première intégrale; par conséquent on peut toujours supposer

$$a_6 = a_8 = a_{10} = \dots = a_{2\rho} = 0.$$

2° Posons

$$(12) \quad \begin{cases} a'_{2\rho-1} = \alpha a_{2\rho-1} + \beta a_{2\rho-2}, & a'_{2\rho-1} = \gamma a_{2\rho-1} + \delta a_{2\rho-2}, \\ a'_{2\rho} = \delta a_{2\rho-1} - \gamma a_{2\rho-2}, & a'_{2\rho} = -\beta a_{2\rho-1} + \alpha a_{2\rho-2}, \\ & \alpha\delta - \beta\gamma = 1. \end{cases}$$

Si, dans le système des périodes, on remplace

$$a_{2\rho-1}, \quad a_{2\rho}, \quad a_{2\rho-3}, \quad a_{2\rho-2}$$

par

$$a'_{2\rho-1}, \quad a'_{2\rho}, \quad a'_{2\rho-3}, \quad a'_{2\rho-2},$$

ce système restera normal.

Appliquons la substitution (12) en faisant

$$\mu = \rho, \quad \nu = \rho - 1.$$

En choisissant les coefficients de la substitution, nous pourrons faire disparaître $a_{2\rho-1}$, sans que $a_{2\rho}$ et $a_{2\rho-2}$ cessent d'être nuls.

On appliquera ensuite la même substitution, en faisant

$$\mu = \rho - 1, \quad \nu = \rho - 2,$$

et l'on fera disparaître $a_{2\rho-3}$.

Et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les a , excepté a_5 , soient nuls; on aura

$$a_6 = a_7 = a_8 = \dots = a_{2\rho} = 0.$$

Opérons maintenant sur les b . Appliquons la substitution (11) aux $\rho - 3$ dernières paires de périodes, de façon à faire disparaître dans chacune d'elles les périodes de rang pair, ce qui s'écrit

$$b_5 = b_{10} = \dots = b_{2\rho} = 0.$$

Nous ne pouvons opérer de même sur la paire $b_6 b_7$, sans quoi a_6 cesserait d'être nul.

Appliquons maintenant la substitution (12) aux deux dernières paires, de façon à faire disparaître $b_{2\rho-1}$, puis aux paires de rang $\rho - 2$ et $\rho - 1$, de façon à faire disparaître $b_{2\rho-3}$, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on ait

$$b_6 = b_8 = b_{10} = \dots = b_{2\rho} = 0.$$

On ne peut opérer sur les troisième et quatrième paires, de façon à faire disparaître b_7 , sans quoi a_7 cesserait d'être nul.

Toutes ces réductions faites, le tableau des périodes s'écrit

$$\begin{array}{ccccccc} A & 1 & B & 0 & a_5 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A' & 0 & B' & 1 & b_5 & b_6 & b_7 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}$$



Il reste à faire disparaître b_4 . Pour cela nous appliquerons la substitution (12) à la deuxième et à la troisième paire, de façon à faire disparaître la sixième période de la deuxième intégrale; le tableau des périodes s'écrit alors, après cette dernière transformation,

$$\begin{array}{ccccccc} A & 1 & B_1 & 0 & (\lambda + \mu B_1) & 0 & 0 \dots 0 \\ A' & 0 & B_1' & 1 & (\lambda' + \mu B_1') & 0 & v \dots 0 \end{array}$$

où λ , μ et v sont commensurables et il est aisé de voir que $A' = B_1$.

Le résultat ainsi obtenu se généralise aisément pour le cas de $\mu > 2$, la démonstration étant absolument la même. Pour énoncer ce théorème, je supposerai, pour fixer les idées, $\mu = 3$, $\rho = 7$, et j'imaginerai que le tableau des périodes ait été écrit sous sa forme habituelle (A).

On aura

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= \tau_{21} = \tau_{31} = \tau_{41} = \tau_{51} = 0, \\ \tau_{36} &= v_2, & \tau_{41} &= \lambda_1 + \lambda_2 \tau_{12} + \lambda_3 \tau_{13}, \\ \tau_{21} &= \mu_1 + \lambda_2 \tau_{11} + \lambda_3 \tau_{13}, & \tau_{31} &= v_1 + \lambda_2 \tau_{21} + \lambda_3 \tau_{23}, \\ \tau_{13} &= \lambda_4 \tau_{13}, & \tau_{23} &= \mu_2 + \lambda_4 \tau_{23}, & \tau_{33} &= v_3 + \lambda_4 \tau_{33}, \end{aligned}$$

les λ , les μ et les v étant commensurables. Ce qu'il faut surtout retenir, c'est qu'on peut choisir le système normal des périodes, de telle façon que les μ premières intégrales normales (cf. Clebsch et Gordan, *Abelsche Functionen*, p. 107), qui correspondent à ce système soient précisément μ des intégrales réductibles.

Dans ces μ intégrales normales, les périodes de rang $2\mu + 2$, $2\mu + 4$, $2\mu + 6$, ..., $2\rho - 2$, 2ρ sont nulles; de plus il y a des relations linéaires à coefficients entiers :

- 1° Entre les périodes de rang $2\mu + 1$, 2, 4, 6, ..., 2μ , 3, 5, 7, ..., $2\mu - 1$;
- 2° Entre les périodes de rang $2\mu + 3$, 4, 6, ..., 2μ , 5, 7, ..., $2\mu - 1$;
- 3° Entre les périodes de rang $2\mu + 5$, 6, 8, ..., 2μ , 7, 9, ..., $2\mu - 1$;
-
- $\mu - 1$ ° Entre les périodes de rang $4\mu - 3$, $2\mu - 2$, 2μ et $2\mu - 1$;
- μ ° Entre les périodes de rang $4\mu - 1$ et 2μ .

J'ai conservé pour les rangs des périodes le même mode de désignation que j'ai employé dans tout ce travail, de telle façon que la période de rang 2λ occupe la $\lambda^{\text{ème}}$ colonne dans le tableau (A), pendant que la période de rang $2\lambda - 1$ y occupe la $(\rho + \lambda)^{\text{ème}}$ colonne.

Ainsi se trouve généralisé le second théorème de M. Weierstrass, dont il est inutile de faire ressortir l'analogie avec l'un des plus beaux résultats de M. Picard.

8. La démonstration qui fait l'objet du paragraphe précédent peut se présenter sous une forme un peu différente.

Soient $x_1, x_2, \dots, x_{2\rho}$ un système de périodes normales de nos ρ intégrales abéliennes, et $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2\mu}$ un système primitif quelconque de périodes des μ intégrales réduites.

On aura, pour une quelconque des intégrales réductibles,

$$x_i = \sum_k a_{ik} \xi_k \quad (i = 1, 2, \dots, 2\rho; k = 1, 2, \dots, 2\mu),$$

les a étant des coefficients entiers.

Appliquons à nos périodes les substitutions (11) et (12), de façon que le nouveau système soit encore normal.

1° Appliquons à toutes les paires de périodes la substitution (11), de façon à faire disparaître $\alpha_{2,1}, \alpha_{4,1}, \dots, \alpha_{2\rho,1}$.

2° Appliquons ensuite aux deux dernières paires la substitution (12), de façon à faire disparaître $\alpha_{2\rho-1,1}$, puis aux paires de rang $\rho - 2$ et $\rho - 1$, cette même substitution, de façon à faire disparaître $\alpha_{2\rho-3,1}$, et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les $\alpha_{i,1}$ aient disparu, excepté $\alpha_{1,1}$.

3° Appliquons ensuite à toutes les paires de périodes, excepté à la première, la substitution (11), pour faire disparaître $\alpha_{1,2}, \alpha_{3,2}, \dots, \alpha_{2\rho,2}$.

4° Appliquons ensuite la substitution (12) aux deux dernières paires pour annuler $\alpha_{2\rho-1,2}$, puis aux paires de rang $\rho - 2$ et $\rho - 1$ pour annuler $\alpha_{2\rho-3,2}$, et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les $\alpha_{i,2}$ aient disparu, excepté $\alpha_{1,2}, \alpha_{3,2}$ et $\alpha_{5,2}$.

5° Appliquons la substitution (11) à toutes les paires, sauf aux deux premières, de façon à annuler $\alpha_{6,3}, \alpha_{8,3}, \dots, \alpha_{2\rho,3}$.

6° Faisons ensuite disparaître à l'aide de la substitution (12), tous les $\alpha_{i,3}$, excepté $\alpha_{1,3}, \alpha_{3,3}, \alpha_{5,3}, \alpha_{7,3}$ et $\alpha_{9,3}$.

En continuant de la sorte, on arrivera à avoir

$$(13) \quad \alpha_{i,k} = 0 \quad (i > 2k - 1).$$

Cela fait, nous allons chercher à faire disparaître les coefficients $\alpha_{i,k}$ ou l'indice i est pair et plus grand que 2μ ; il reste $\frac{\mu(\mu-1)}{2}$ coefficients qui ne sont pas encore nuls et qu'il faut annuler; mais cela ne pourra se faire qu'en faisant



reparaître quelques-uns des coefficients qui avaient disparu dans les simplifications précédentes. Il faut s'arranger pour que les coefficients α_{ik} qui reparaîtront ainsi aient tous l'indice i impair. Pour cela, il faut que les périodes ξ aient été choisies convenablement, comme on va le voir.

Le choix des périodes ξ est resté jusqu'ici entièrement arbitraire. Mais il est clair que nous aurions pu remplacer les ξ par tout autre système équivalent, rien de ce qui précède n'en aurait été changé. Nous pouvons donc supposer que le choix des périodes ξ ait été fait avant la réduction, de la façon la plus convenable pour notre objet.

Voici comment nous pouvons supposer que ce choix a été fait.

Considérons les $\frac{2\mu(2\mu-1)}{2}$ formes bilinéaires

$$\Phi_{pq} = \sum_k (\alpha_{ik-1,p} \alpha_{2k,q} - \alpha_{2k,p} \alpha_{ik-1,q}) \quad (k=1, 2, \dots, \mu).$$

Les substitutions (11) et (12) changent ces formes en elles-mêmes.

Il reste à voir ce qui arrive quand on remplace le système des ξ par un système équivalent.

Posons

$$\xi_p = \sum_r \beta_{pr} \xi'_r$$

avec

$$\alpha_i = \sum_k \alpha'_{ik} \xi'_k,$$

il viendra

$$\alpha'_{ir} = \sum_p \beta_{pr} \alpha_{ip}.$$

Nos formes Φ seront devenues

$$\Phi'_{pq} = \sum (\alpha'_{ik-1,p} \alpha'_{2k,q} - \alpha'_{2k,p} \alpha'_{ik-1,q})$$

ou

$$\Phi'_{pq} = \sum (\beta_{pr} \beta_{qr} - \beta_{qr} \beta_{pr}) \Phi_{pq}.$$

Supposons, en particulier, que la substitution qui fait passer des ξ aux ξ' ne porte que sur les $2\mu-1$ derniers ξ , de telle sorte que

$$\beta_{1,1} = 1, \quad \beta_{1,k} = \beta_{k,1} = 0 \quad (k=2, 3, \dots, 2\mu).$$

Il viendra

$$\Phi'_{1,s} = \sum \beta_{qs} \Phi_{1,q}.$$

On pourra donc toujours choisir les β de telle façon que

$$\Phi'_{1,s} = 0 \quad (s=2, 3, \dots, 2\mu-1).$$

En conséquence, on peut toujours supposer que les ξ aient été choisis de telle sorte que tous les $\Phi_{1,q}$ soient nuls, excepté $\Phi_{1,2\mu}$. De plus, cette propriété

ne sera pas altérée par une substitution linéaire ne portant que sur

$$\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{2\mu-1}.$$

En raisonnant de la même façon, on verrait qu'on peut trouver une substitution linéaire ne portant que sur $\xi_3, \xi_4, \dots, \xi_{2\mu-1}$, et telle que

$$\Phi'_{2,s} = 0 \quad (s=3, 4, \dots, 2\mu-2).$$

On peut donc toujours supposer que tous les $\Phi_{1,q}$ et les $\Phi_{2,q}$ sont nuls, sauf $\Phi_{1,2\mu}$, $\Phi_{2,2\mu-1}$, $\dots$, $\Phi_{2,2\mu-1}$. De plus, cette propriété n'est pas altérée par une substitution linéaire ne portant que sur

$$\xi_3, \xi_4, \dots, \xi_{2\mu-2}.$$

En continuant le même raisonnement, on verrait que l'on peut supposer que $\Phi_{p,q}$ est nul toutes les fois que

$$p+q < 2\mu+1.$$

J'aurais même pu, si cela avait été utile pour mon objet, montrer que l'on peut choisir les ξ de telle façon que les $\frac{\mu(\mu-1)}{2}$ formes $\Phi_{p,q}$ s'annulent, à l'exception de μ d'entre elles.

En effet, soient $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2\mu}$ les périodes d'une de nos μ intégrales, à l'aide desquelles s'expriment les périodes normales $x_1, x_2, \dots, x_{2\mu}$ de cette même intégrale; soient, pour une seconde intégrale, $y_1, y_2, \dots, y_{2\mu}$; $y'_1, y'_2, \dots, y'_{2\mu}$ les périodes correspondant aux ξ et aux x . On aura

$$\sum (x_{2k-1} y'_{2k} - x_{2k} y'_{2k-1}) = \sum \Phi_{pq} (\xi_p \eta_{1q} - \xi_q \eta_{1p}).$$

Or on aura pu toujours choisir les ξ de telle façon que la forme bilinéaire du second membre soit réduite, et n'ait par conséquent que μ termes. Je supposerai que les μ termes qui ne s'annulent pas sont ceux qui ont pour coefficients

$$\Phi_{1,2\mu}, \Phi_{2,2\mu-1}, \Phi_{3,2\mu-2}, \dots, \Phi_{\mu,2\mu+1}.$$

De plus, aucun de ces termes ne s'annulera, sans quoi l'invariant de notre forme bilinéaire serait nul; ce qui est impossible (cf. *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XCVII; Picard et Poincaré, Note du 3 décembre 1883).

On aura donc

$$(14) \quad \begin{cases} \Phi_{p,q} = 0 & \text{si } p+q \geq 2\mu+1, \\ \Phi_{p,q} \neq 0 & \text{si } p+q = 2\mu+1. \end{cases}$$

Les substitutions (11) et (12) n'altérant pas les formes Φ_{pq} , ces conditions



subsisteront quand j'aurai annulé, à l'aide de ces substitutions, tous les α_{ik} , où $i > 2k - 1$. Mais les conditions (13) et (14) entraînent les suivantes :

$$\alpha_{2h,k} = 0 \quad \text{si } h - k < 2\mu - 1.$$

Nous avons donc fait disparaître tous les α_{ik} lorsque l'indice i est plus grand que $2k - 1$, ou lorsque, étant pair, il est plus petit que $4\mu + 2 - k$. Cela posé, nous allons faire disparaître le coefficient $\alpha_{2\mu+2, \mu+2}$, en appliquant la substitution (12) aux $(\mu+1)^{\text{ème}}$ et $(\mu-1)^{\text{ème}}$ paires, puis le coefficient $\alpha_{2\mu+2, \mu+3}$ en appliquant la substitution (12) aux $(\mu+1)^{\text{ème}}$ et $(\mu-2)^{\text{ème}}$ paires, puis le coefficient $\alpha_{2\mu+2, \mu+4}$ en opérant de même sur les $(\mu+1)^{\text{ème}}$ et $(\mu-3)^{\text{ème}}$ paires, ..., puis enfin le coefficient $\alpha_{2\mu+2, 2\mu}$ en opérant sur les $(\mu+1)^{\text{ème}}$ et première paires.

On aura alors

$$\alpha_{2\mu+2,k} = 0,$$

quel que soit k .

On opérera de la même façon sur les $(\mu+2)^{\text{ème}}$ et $(\mu-2)^{\text{ème}}$ paires pour faire disparaître $\alpha_{2\mu+4, \mu+3}$, puis sur les $(\mu+2)^{\text{ème}}$ et $(\mu-3)^{\text{ème}}$ paires pour annuler $\alpha_{2\mu+4, \mu+4}$, ...; puis sur les $(\mu+2)^{\text{ème}}$ et première paires pour annuler $\alpha_{2\mu+4, 2\mu}$. On aura alors

$$\alpha_{2\mu+4,k} = 0,$$

quel que soit k .

On n'a qu'à continuer de la sorte pour avoir enfin

$$\alpha_{2h,k} = 0 \quad (h = \mu+1, \mu+2, \dots, p; k = 1, 2, \dots, 2\mu).$$

Il est clair en effet qu'en opérant dans l'ordre que je viens d'indiquer, on pourra faire disparaître des coefficients α_{ik} que l'on aura fait disparaître antérieurement, mais *seulement si l'indice i est impair*; on n'aura pas à craindre de faire disparaître des coefficients α_{ik} dont le premier indice sera pair.

Il résulte de là qu'après toutes ces transformations les périodes paires des $p - \mu$ dernières paires seront nulles dans nos μ intégrales réductibles. Mais ces μ intégrales ont été jusqu'ici choisies arbitrairement. On peut toujours les remplacer par μ quelconques de leurs combinaisons linéaires. Or le choix de ces combinaisons linéaires peut être fait de telle façon que, dans la première d'entre elles, la période de rang 2 soit égale à 1, et les périodes de rang 4, 6, 8, ..., 2μ égales à zéro; que dans la deuxième d'entre elles la période de rang 4 soit égale à 1 et les périodes de rang 2, 6, 8, ..., 2μ égales à zéro, ...; qu'enfin dans la $\mu^{\text{ème}}$ d'entre elles la période de rang 2μ soit égale à 1, et les périodes de rang 2, 4, 6, ..., $2\mu - 2$ égales à zéro.

Par conséquent, si nos μ intégrales sont choisies de la sorte, toutes les périodes de rang pair seront nulles dans chacune d'elles, excepté une qui sera égale à 1. *Ce seront donc des intégrales normales.* C. Q. F. D.

Ainsi se trouve démontré, par des méthodes purement arithmétiques, ce théorème si utile dans la théorie des fonctions abéliennes, ce qui prouve une fois de plus que l'analyste ne saurait se passer du secours de la Théorie des nombres.



SUR LA RÉDUCTION DES INTÉGRALES ABÉLIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 90, p. 833-835 (17 novembre 1884).

Si un système d'intégrales abéliennes de première espèce et de genre n contient plus de n intégrales réductibles aux intégrales elliptiques, il en contient une infinité.

Pour démontrer ce résultat, que les récentes découvertes de M. Picard laissaient prévoir, je supposerai $n = 3$, afin de fixer les idées.

Soient y_1, y_2, y_3 trois intégrales abéliennes, la première réductible aux intégrales elliptiques. M'appuyant sur un théorème de M. Weierstrass, je supposerai que le tableau des périodes normales de ces intégrales s'écrit :

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & G & h & 0 \\ 0 & 1 & 0 & h & G' & H \\ 0 & 0 & 1 & 0 & H & G' \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(pour } y_1), \\ \text{(pour } y_2), \\ \text{(pour } y_3). \end{array}$$

h étant commensurable.

Je dis que si l'intégrale $\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3$ est réductible, il en sera de même de $\nu \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3$ (ν étant un nombre commensurable quelconque).

En effet les périodes de l'intégrale $\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3$ s'écrivent

$$\begin{array}{lll} \omega_1 = \alpha, & \omega_2 = \beta, & \omega_3 = \gamma, \\ \omega_4 = G\alpha + h\beta, & \omega_5 = h\alpha + G'\beta + H\gamma, & \omega_6 = H\beta + G'\gamma. \end{array}$$

Pour que l'intégrale soit réductible, il faut et il suffit que ces périodes se réduisent à deux, c'est-à-dire qu'il y ait entre elles quatre relations linéaires à coefficients commensurables de la forme

$$(1) \quad A_1\omega_1 + B_1\omega_2 + C_1\omega_3 + A'_1\omega_4 + B'_1\omega_5 + C'_1\omega_6 = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

L'intégrale $\nu \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3$ a pour périodes

$$\begin{array}{lll} \omega'_1 = \nu \alpha, & \omega'_2 = \beta, & \omega'_3 = \gamma, \\ \omega'_4 = \nu G\alpha + h\beta, & \omega'_5 = \nu h\alpha + G'\beta + H\gamma, & \omega'_6 = H\beta + G'\gamma. \end{array}$$

Or les relations (1) peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} (1 \text{ bis}) \quad & \left[\frac{A_1}{\nu} + hB'_1 \left(\frac{1}{\nu} - 1 \right) \right] \omega'_1 + \left[B_1 + hA'_1 \left(1 - \frac{1}{\nu} \right) \right] \omega'_2 \\ & + C_1\omega'_3 + \frac{A'_1}{\nu} \omega'_4 + B'_1\omega'_5 + C'_1\omega'_6 = 0. \end{aligned}$$

Il y a donc, entre les six périodes ω' , quatre relations linéaires à coefficients commensurables. Donc l'intégrale $\nu \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3$ est réductible. c. q. f. d.

On déduit aisément de là que, si le système d'intégrales du troisième genre considéré contient plus de trois intégrales réductibles, il en contient une infinité. Si les quatre intégrales y_1, y_2, y_3 et $\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3$ sont réductibles, il en est de même de $\lambda \alpha y_1 + \mu \beta y_2 + \nu \gamma y_3$ (λ, μ et ν étant des coefficients commensurables quelconques).

D'après le théorème de M. Weierstrass, cité plus haut, on peut toujours choisir les périodes normales telles que le Tableau des périodes d'une intégrale réductible s'écrive (pour $n = 3$, par exemple) :

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & G & h & 0 \\ & & & & D & 0, \end{array}$$

où le nombre entier D est l'entier caractéristique de la réduction.

Il est toujours facile de déterminer cet entier. Supposons en effet, que $n = 2$ et qu'on ait trouvé pour les périodes normales d'une intégrale réductible

$$[\alpha, \beta, \lambda\alpha + \mu\beta, \lambda'\alpha + \mu'\beta],$$

λ, μ, λ' et μ' étant commensurables. L'entier caractéristique sera égal à $\mu - \lambda$ divisé par la plus grande commune mesure des six quantités $1, \lambda, \mu, \lambda', \mu'$ et $\lambda\mu' - \lambda'\mu$.

M^{me} Kowalevski, étudiant un système d'intégrales abéliennes du troisième genre, a rencontré quatre intégrales réductibles sans que sa méthode lui en ait fait découvrir d'autres. Ce fait, en apparence contraire à ce qui précède, s'explique aisément, car elle ne s'est occupée que des intégrales pour lesquelles l'entier caractéristique D est égal à 2.

Je terminerai par la remarque suivante :



Soit un système d'intégrales du second genre et soit

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & G \quad H \\ 0 & 1 & H \quad G' \end{array}$$

le tableau des périodes normales de ces intégrales. Pour que ce système contienne des intégrales réductibles, il faut et il suffit qu'il y ait entre les périodes G, H et G' une relation de la forme

$$(GG' - H^2) - \lambda G' - \mu' G + (\lambda' + \mu)H + \lambda\mu' - \lambda'\mu = 0,$$

les coefficients $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ étant commensurables.

D'où cette conclusion qu'un système *quelconque* d'intégrales abéliennes diffère toujours *infinitement peu* d'un système réductible.

SUR

LES INTÉGRALES DE DIFFÉRENTIELLES TOTALES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 99, p. 1145-1147 (29 décembre 1884).

La découverte récente de M. Picard sur les différentielles totales de première espèce a ouvert aux analystes une voie toute nouvelle où ils rencontreront sans aucun doute bien des propositions importantes. Aussi ne sera-t-il peut-être pas sans intérêt de signaler ici certains résultats partiels qui, bien que très faciles à démontrer, pourront être utiles aux géomètres qui s'occuperont de cette question.

J'ai cherché d'abord à déterminer quelles sont les surfaces du quatrième ordre qui possèdent des intégrales de première espèce. J'ai trouvé que toutes ces surfaces peuvent se ramener, par un changement linéaire de variables, soit à la surface réglée

$$x^2(a z^2 + 2 b z + c) + 2 x y(a' z^2 + 2 b' z + c') + y^2(a'' z^2 + 2 b'' z + c'') = 0,$$

qui admet l'intégrale

$$\int \frac{y dz}{x(a z^2 + 2 b z + c) + y(a' z^2 + 2 b' z + c')},$$

soit à la surface de révolution

$$(x^2 + y^2)^2 + 2(x^2 + y^2)Z_2 + Z_4 = 0$$

(Z_2 et Z_4 désignant deux polynômes de degré 2 et 4 en z), qui admet l'intégrale

$$\int \frac{dz}{x^2 + y^2 + Z_2}.$$

Il est ailleurs aisé de voir que toutes les surfaces réglées et toutes les surfaces de révolution admettent des intégrales de première espèce, à moins bien entendu qu'elles ne soient unicursales.

Si une surface admet une intégrale de première espèce u , réductible aux intégrales elliptiques, les courbes $u = \text{const.}$ sont algébriques.



Si l'on peut tracer sur une surface une courbe unicursale, et si u est une intégrale de première espèce quelconque de cette surface, la valeur de u sera la même tout le long de la courbe.

De même, si la surface admet un point conique de second ordre, dont le cône tangent soit indécomposable, la valeur de u en ce point conique sera déterminée.

Si l'on peut tracer sur une surface deux séries de courbes unicursales, elle n'aura pas d'intégrales de première espèce; si, sur une surface non unicursale, on peut tracer une série de courbes unicursales, de telle façon que par chaque point de la surface passe, en général, une seule de ces courbes, elle aura des intégrales de première espèce.

Supposons que l'équation d'une surface soit obtenue par l'élimination de deux paramètres a et b , entre les trois équations

$$\varphi(x, y, z, a, b) = 0,$$

$$\varphi_1(x, y, z, a, b) = 0,$$

$$\psi(a, b) = 0.$$

Si les trois polynômes φ , φ_1 , et ψ sont les plus généraux de leurs degrés, la relation $\psi = 0$ est de genre plus grand que 0; à un point de la surface correspond un seul système de valeurs des paramètres et, par conséquent, la surface admet des intégrales de première espèce.

Enfin le théorème d'Abel s'applique aux intégrales de différentielles totales.

Soient $M_1, M_2, \dots, M_q$ les points d'intersection de la surface avec la courbe

$$\frac{\alpha}{\lambda} = \frac{\beta}{\mu} = \frac{\gamma}{\nu},$$

α, β, γ étant des polynômes entiers en x, y, z et λ, μ, ν des constantes. Soient $u_1, u_2, \dots, u_q$ les valeurs d'une certaine intégrale de première espèce u en ces différents points.

Soient de même $M_1, M_2, \dots, M_q$ les points d'intersection de la surface avec la courbe

$$\frac{\alpha}{\lambda'} = \frac{\beta}{\mu'} = \frac{\gamma}{\nu'},$$

λ', μ', ν' étant de nouvelles constantes; soient $u'_1, u'_2, \dots, u'_q$ les valeurs de l'intégrale u aux points $M'_1, M'_2, \dots, M'_q$.

On aura

$$u_1 + u_2 + \dots + u_q = u'_1 + u'_2 + \dots + u'_q.$$

UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME D'ABEL

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 100, p. 40-42 (5 janvier 1885).

Le théorème d'Abel, appliqué à une courbe algébrique $f=0$ de degré m , peut s'énoncer ainsi :

Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_q, y_q)$ les points d'intersection de $f=0$ avec une autre courbe algébrique $\varphi=0$; soient $(x_1+dx_1, y_1+dy_1), (x_2+dx_2, y_2+dy_2), \dots, (x_q+dx_q, y_q+dy_q)$ les points d'intersection de la courbe f avec une courbe algébrique $\varphi+\varepsilon\psi=0$ infiniment peu différente de φ ; on aura

$$\sum_{v=1}^q P(x_v, y_v) \frac{df}{dy_v} = 0,$$

P désignant un polynôme quelconque d'ordre $m-3$, qui devra s'annuler aux points doubles de f , si les courbes φ et $\varphi+\varepsilon\psi$ vont passer par ces points doubles.

Considérons maintenant une courbe gauche, intersection complète de deux surfaces $f=0, f_1=0$ de degrés m et n . Soit (x_v, y_v, z_v) un quelconque des q points d'intersection de cette courbe avec une surface $\varphi=0$, et $(x_v+dx_v, y_v+dy_v, z_v+dz_v)$ un des points d'intersection de cette même courbe, avec une surface $\varphi+\varepsilon\psi=0$ infiniment voisine de la première. On aura

$$\sum_{v=1}^q P(x_v, y_v, z_v) \frac{df}{dy_v} \frac{df_1}{dz_v} = 0,$$

P désignant un polynôme quelconque d'ordre $m+n-4$.

Après avoir mis le théorème d'Abel sous cette forme, qui ne diffère pas essentiellement de la forme habituelle, il est aisé de l'étendre aux surfaces.



Soit $f = 0$ une surface de degré m . Soit (x_0, y_0, z_0) un de ses points d'intersection avec une courbe gauche, $(x_0 + dx_0, y_0 + dy_0, z_0 + dz_0)$ un de ses points d'intersection avec une courbe gauche infiniment voisine. On peut se demander quelles relations il y a entre les différentielles dx_0, dy_0, dz_0 .

Je me bornerai pour le moment aux courbes gauches qui sont l'intersection complète de deux surfaces $\varphi = 0, \varphi_1 = 0$, de degrés n et p .

On trouve alors

$$(1) \sum_{i=1}^q \frac{P_i \left(\frac{d\varphi}{dx_0} dx_0 + \frac{d\varphi}{dy_0} dy_0 + \frac{d\varphi}{dz_0} dz_0 \right)}{\Delta_i} = \sum_{i=1}^q \frac{Q_i \left(\frac{d\varphi_1}{dx_0} dx_0 + \frac{d\varphi_1}{dy_0} dy_0 + \frac{d\varphi_1}{dz_0} dz_0 \right)}{\Delta_i} = 0.$$

Dans ces formules P_i et Q_i désignent des polynômes de degré $m + p - 4$ et $m + n - 4$ en x, y, z , où l'on a remplacé ces variables par x_0, y_0, z_0 . Quant à Δ_i , c'est le déterminant fonctionnel de f, φ et φ_1 par rapport à x, y, z , où ces variables sont remplacées par x_0, y_0, z_0 .

Un cas particulier assez intéressant est celui où la surface f se réduit à un plan.

Soient alors $\varphi = 0, \varphi_1 = 0$ deux courbes de degré m et (x_0, y_0) un de leurs points d'intersection. Soit $(x_0 + dx_0, y_0 + dy_0)$ ce que devient ce point d'intersection, quand ces deux courbes varient infiniment peu. Il vient

$$\sum_{i=1}^{m^2} \frac{P(x_0, y_0) \left[\frac{d(\varphi + \lambda \varphi_1)}{dx_0} dx_0 + \frac{d(\varphi + \lambda \varphi_1)}{dy_0} dy_0 \right]}{\frac{d\varphi}{dx_0} \frac{d\varphi_1}{dy_0} - \frac{d\varphi_1}{dx_0} \frac{d\varphi}{dy_0}} = 0,$$

P étant un polynôme quelconque d'ordre $m - 3$, et λ une constante quelconque.

Le théorème s'applique même si la surface f n'a pas de point singulier, auquel cas il est aisé de voir qu'il ne peut y avoir d'intégrale de première espèce. Mais il contient, comme cas particulier, le résultat que j'ai énoncé dernièrement au sujet de ces intégrales. Si donc du est une différentielle totale de première espèce et si φ et φ_1 sont deux polynômes quelconques d'ordre n et p , on devra avoir

$$du = \frac{P d\varphi - Q d\varphi_1}{\Delta},$$

P et Q étant deux polynômes d'ordre $m + p - 4$ et $m + n - 4$, et Δ étant le déterminant fonctionnel de f, φ et φ_1 par rapport à x, y et z .

Le problème est beaucoup plus compliqué quand la courbe gauche dont il

s'agit n'est pas une intersection complète. Pour faire voir de quelle manière il devrait être traité dans ce cas, envisageons le cas particulier d'une cubique gauche.

Supposons d'abord que l'on fasse varier cette cubique, de telle façon que deux de ses $3m$ points d'intersection avec la surface f restent fixes. On pourra alors trouver deux surfaces du second ordre $\varphi = 0, \varphi_1 = 0$ qui passent par la cubique donnée et par la droite qui joint ces deux points fixes. La formule (1) reste vraie, si on l'applique à ces deux surfaces et aux points variables d'intersection de la surface f avec la cubique.

Si, ensuite, on fait varier la cubique d'une manière quelconque, on pourra toujours regarder cette variation comme la somme d'une variation où deux points A et B, communs à la cubique et à f , restent fixes, et d'une autre variation où deux points C et D, communs à la cubique et à f , restent fixes.



SUR LA RÉDUCTION DES INTÉGRALES ABÉLIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 102, p. 915-916 (19 avril 1886).

Le problème de la réduction des intégrales abéliennes de genre p à un genre inférieur μ a été, dans ces derniers temps, l'objet de nombreux travaux parmi lesquels nous citerons un grand nombre de Notes de M. Picard, insérées dans divers volumes des *Comptes rendus* et réunies ensuite dans le tome XI du *Bulletin de la Société mathématique de France*. J'ai moi-même donné, dans le même *Bulletin*, une généralisation d'un théorème de M. Weierstrass, relatif au cas de $\mu = 1$. M. Picard ayant montré que la simplification peut être poussée plus loin encore dans le cas de $p = 2, \mu = 1$, j'ai voulu voir s'il n'en était pas de même dans le cas général. Il en est effectivement ainsi.

Faisons $\mu = 3, p = 6$, pour fixer les idées; on peut amener le Tableau des périodes à la forme suivante :

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & B' & B'' & 0 & 0 & \frac{1}{a}, \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & B'' & A' & B & 0 & \frac{1}{ab} & 0, \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & B' & B & A & \frac{1}{abc} & 0 & 0, \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{abc} & G & H' & H'', \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{ab} & 0 & H'' & G' & H, \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & H' & H & G'. \end{array}$$

$a, b, \dots$ sont des nombres entiers.

Il y a des cas particuliers où la simplification peut encore être poussée plus loin.

Faisons, par exemple, $\mu = 2, p = 5$; on aura, en général,

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & B & 0 & \frac{1}{a} & 0, \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & B & C & \frac{1}{ab} & 0 & 0, \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{ab} & G & H' & H'', \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & H'' & G' & H, \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & H' & H & G'. \end{array}$$

Mais, si $a = 1$, on pourra ramener le Tableau des périodes à la forme suivante :

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & B & 0 & 0 & 0, \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & B & C & \frac{1}{b} & 0 & 0, \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b} & G & H' & H'', \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & H'' & G' & H, \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & H' & H & G'. \end{array}$$



SUR LA RÉDUCTION
DES
INTÉGRALES ABÉLIENNES
ET
LES FONCTIONS FUCHSIENNES

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 27, p. 281-336 (1909).

I. — Généralités sur la réduction.

Il est à peine nécessaire de rappeler ici les principes de la théorie de la réduction des intégrales abéliennes. Considérons une courbe algébrique C de genre p admettant p intégrales de première espèce $2p$ fois périodiques. Dans certains cas, il arrive que les périodes de q de ces intégrales ($q < p$) ne sont que des combinaisons linéaires à coefficients entiers de $2q$ périodes seulement. On dit alors que les intégrales abéliennes relatives à cette courbe sont susceptibles de réduction.

Soient

$$u_1, u_2, \dots, u_p$$

ces p intégrales. Soient

$$C_1, C_2, \dots, C_{2p}$$

$2p$ cycles distincts tracés sur la surface de Riemann correspondant à notre courbe. Quand on décrira le cycle C_k , l'intégrale u_i augmentera d'une constante α_{ik} , de sorte que chacune de nos p intégrales admettra $2p$ périodes

$$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{i,2p}.$$

Il y a réduction si l'on a

$$(1) \quad \alpha_{ik} = \sum_j m_{kj} \beta_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, q; k = 1, 2, \dots, 2p; j = 1, 2, \dots, 2q),$$

les m_{kj} étant $4pq$ nombres entiers et les β_{ij} étant $4q^2$ constantes quelconques.

L'un des cas les plus intéressants est celui où $q = 1$, c'est-à-dire où l'une des intégrales u , par exemple, u_1 , est réductible aux intégrales elliptiques. Les relations (1) se réduisent alors à

$$(1 \text{ bis}) \quad \alpha_{1k} = m_{k1} \beta_{11} + m_{k2} \beta_{12}.$$

Soient alors x et y les coordonnées d'un point quelconque M de la courbe C . Soient x' et y' deux fonctions doublement périodiques de u_1 admettant pour périodes β_{11} et β_{12} . Si nous regardons x' et y' comme les coordonnées d'un point M' , ce point M' va décrire une courbe algébrique C' de genre 1. A chaque point de la courbe C' correspond une valeur de u_1 intérieure au parallélogramme des périodes et une seule, et inversement. Or à chaque point M de C correspond une valeur de u_1 déterminée à une période près et une seule, et par conséquent un seul point M' , d'où il suit que x' et y' sont des fonctions rationnelles de x et y ; au contraire x et y ne sont pas des fonctions rationnelles de x' et y' sans quoi les deux courbes C et C' seraient de même genre. Les deux courbes C et C' sont donc liées par une transformation *unirationnelle*.

Réciproquement, envisageons deux courbes C et C' de genre p et 1 et telle que l'on passe de la première à la deuxième par une transformation unirationnelle. Je dis qu'une des intégrales de C est réductible aux intégrales elliptiques; en effet, la courbe C' étant de genre 1 admet une intégrale elliptique de première espèce

$$u_1 = \int R(x', y') dx',$$

R étant rationnel en x' et y' . Or x' et y' sont eux-mêmes, par hypothèse, des fonctions rationnelles de x et y , de sorte que

$$u_1 = \int R_1(x, y) dx,$$

R_1 étant rationnelle en x et y . Donc u_1 est l'une des intégrales abéliennes de première espèce de C ; et u_1 n'a que deux périodes distinctes. c. q. f. d.

Cette dernière proposition peut s'étendre au cas de $q > 1$. Supposons deux courbes C et C' de genre p et q ($q < p$) et telles que l'on puisse passer de C à C' par une transformation unirationnelle. La courbe C' étant de genre q admettra q intégrales abéliennes de première espèce

$$u_i = \int R_i(x', y') dx' \quad (i = 1, 2, \dots, q),$$

qui auront $2p$ périodes distinctes. Comme x' et y' sont rationnels en x et y ,



nous pourrions écrire

$$u_i = \int R_i(x, y) dx,$$

de sorte que les q intégrales u_i qui ont $2q$ périodes distinctes seront des intégrales abéliennes de première espèce de C . Les intégrales de C sont donc susceptibles de réduction.

La réciproque n'est pas vraie. D'abord s'il y a réduction, il peut se faire que les constantes β ne soient pas les périodes des intégrales abéliennes relatives à une courbe C' . On verrait assez aisément que ces constantes β doivent satisfaire aux conditions nécessaires pour être les périodes d'une fonction abélienne. Mais il peut très bien arriver que les périodes d'une fonction abélienne ne soient pas les périodes d'un système d'intégrales abéliennes relatives à une courbe algébrique. Un système de fonctions abéliennes de genre p dépend de $\frac{p(p+1)}{2}$ constantes; une courbe algébrique de genre p dépend de $3p-3$ constantes seulement. Les deux nombres ne sont égaux que pour $p=2$ et pour $p=3$. Donc, pour $p>3$ la fonction abélienne engendrée par une courbe algébrique n'est pas la fonction abélienne la plus générale. Elle peut s'appeler une fonction abélienne *spéciale*.

Eh bien, les constantes β seront toujours les périodes d'une fonction abélienne, mais pas toujours celles d'une fonction abélienne spéciale. Mais ce n'est pas tout. Supposons que les β soient les périodes d'une fonction abélienne spéciale, c'est-à-dire qu'il existe une courbe C' dont les intégrales abéliennes de première espèce aient précisément pour périodes les constantes β . Il ne s'ensuivra pas nécessairement que l'on puisse passer de C à C' par une transformation unirationnelle; ou tout au moins le raisonnement précédent ne permet pas de l'affirmer.

Reprenons en effet ce raisonnement et considérons q points

$$M_1, M_2, \dots, M_q$$

de la courbe C' . Soient d'autre part

$$u_1, u_2, \dots, u_q$$

les q intégrales de première espèce de C' . Soit u'_{ik} la valeur de l'intégrale u_i au point M_k , et posons

$$u'_{i1} + u'_{i2} + \dots + u'_{iq} = v'_i.$$

Nous savons que les valeurs de $v'_1, v'_2, \dots, v'_q$ suffisent pour déterminer (à l'ordre près) l'ensemble des q points M' et que, inversement, quand cet ensemble des q points M' nous est donné, on connaît les v'_i à une période près.

Maintenant ces q intégrales u_i sont aussi des intégrales abéliennes relatives à C , à savoir celles qui, par hypothèse, sont susceptibles de réduction; si donc nous envisageons q points

$$M_1, M_2, \dots, M_q$$

sur C et que nous désignons par u_{ik} la valeur de l'intégrale u_i en M_k , si nous posons

$$u_{i1} + u_{i2} + \dots + u_{iq} = v_i,$$

à chaque système de points $M_1, M_2, \dots, M_q$ correspondra un système de valeurs des v_i déterminé à une période près. Supposons qu'on fasse

$$v_i = v'_i;$$

cette égalité fera correspondre à un système $M_1, M_2, \dots, M_q$ de points de la courbe C un système de valeurs des v'_i déterminé à une période près, et par conséquent un système $M'_1, M'_2, \dots, M'_q$ de points de la courbe C' entièrement déterminé.

Soient x_i, y_i les coordonnées de M_i ; x'_i, y'_i celles de M'_i . Il résulte de ce qui précède que toute fonction rationnelle symétrique de

$$(x_1, y_1; x_2, y_2; \dots; x_q, y_q)$$

sera une fonction rationnelle et symétrique de

$$(x_1, y_1; x_2, y_2; \dots; x_q, y_q).$$

Mais il ne s'ensuit pas, sauf dans des cas exceptionnels (et c'est sur ce point que je veux insister), que x'_i, y'_i soient fonctions rationnelles de x_i, y_i ; x'_2, y'_2 étant les mêmes fonctions de x_2, y_2 ; etc.

D'autre part, il est presque inutile de rappeler que la transformation est unirationnelle et non birationnelle; et que, par conséquent, toute fonction rationnelle et symétrique des x_i, y_i n'est pas une fonction rationnelle et symétrique des x'_i, y'_i .

Les cas de réduction peuvent être ramenés à certaines formes canoniques simples par un choix convenable des périodes et des intégrales. Pour le faire bien comprendre, je vais montrer quel est, dans deux cas de réduction, le tableau des périodes normales ramené à sa forme canonique:



PREMIER EXEMPLE :

$$q = 1, \quad p = 3.$$

Cycles.....	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
Intégrale u_1	$2i\pi$	0	0	b	$\frac{2i\pi}{2}$	0
" u_2	0	$2i\pi$	0	$\frac{2i\pi}{2}$	a	b
" u_3	0	0	$2i\pi$	0	b	c

(α entier).

DEUXIÈME EXEMPLE :

Cycles.....	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8
Intégrale u_1	$2i\pi$	0	0	0	a	b	0	$\frac{2i\pi}{2}$
" u_2	0	$2i\pi$	0	0	b	c	$\frac{2i\pi}{2}$	0
" u_3	0	0	$2i\pi$	0	0	$\frac{2i\pi}{2}$	a'	b'
" u_4	0	0	0	$2i\pi$	$\frac{2i\pi}{2}$	0	b'	c'

(α, β entiers).

Ces deux exemples suffiront pour faire comprendre quel est le sens du théorème général, et la façon de ramener à la forme canonique. Je renverrai pour plus de détails à un de mes Mémoires (*).

Quoi qu'il en soit, rappelons ce que c'est qu'une fonction θ d'ordre k . Nous aurons p variables $u_1, u_2, \dots, u_p$ et $2p$ périodes, p de la première sorte, p de la deuxième sorte; la $k^{\text{ème}}$ période de la première sorte est égale à $2i\pi$ pour u_k et à zéro pour les autres variables; la $k^{\text{ème}}$ période de la deuxième sorte est égale à a_{hk} pour u_h . On a d'ailleurs

$$a_{kh} = a_{hk}.$$

Soient alors, les m étant des entiers,

$$P = \sum_i m_i u_i, \quad 2Q = \sum_{ij} a_{ij} m_i m_j.$$

(*) Sur les fonctions abéliennes (*American Journal of Mathematics*, vol. VIII, 1886, p. 289-342).

La fonction θ proprement dite est la fonction

$$\theta = \sum e^{P-Q}.$$

Une fonction θ d'ordre k sera de la forme

$$\theta = \sum \Lambda e^{\frac{P+P_0-Q}{2}},$$

où l'on aura $P_0 = \sum_i m_i b_i$, les b étant des constantes et où les Λ seront des coefficients dépendant des entiers m , mais assujettis à reprendre les mêmes valeurs quand les m augmentent de multiples de k .

Deux fonctions θ d'ordre k appartiennent au même faisceau, quand elles ont mêmes multiplicateurs, c'est-à-dire quand la forme P_0 est la même pour l'une et pour l'autre. Les fonctions θ d'un même faisceau s'expriment linéairement à l'aide de k^2 d'entre elles, puisque c'est là le nombre des valeurs distinctes que peut prendre le coefficient Λ .

Supposons maintenant qu'il y ait réduction; nous distinguerons alors les q premières variables que nous appellerons les u , et les $p-q$ dernières que nous appellerons les u' . Ainsi, dans le premier exemple ci-dessus nous aurons une variable u qui sera u_1 et deux variables u' qui seront

$$u'_1 = u_2, \quad u'_2 = u_3;$$

dans le deuxième exemple nous aurons deux variables u qui seront u_1 et u_2 et deux variables u' qui seront

$$u'_1 = u_3, \quad u'_2 = u_4.$$

De même, nous désignerons par m_i et m'_i les coefficients entiers qui correspondent à u_i et u'_i .

Nous pouvons alors poser

$$P = P_1 + P_2, \quad Q = Q_1 + Q_2 + Q_3.$$

P_1 représente la partie de P qui dépend seulement des m et P_2 celle qui dépend seulement des m' , de telle sorte que

$$P_2 = \sum m' u'.$$

De même, Q_1 représente la partie de Q qui dépend seulement des m , Q_2 celle qui dépend seulement des m' , et Q_3 celle qui dépend à la fois des m et des m' . Tous les termes de Q_1 sont du second degré par rapport aux m , tous ceux de Q_2 sont du second degré par rapport aux m' ; ceux de Q_3 sont du premier degré, d'une part par rapport aux m , d'autre part par rapport aux m' . Dans le



premier exemple ci-dessus on a donc

$$Q_3 = \frac{2i\pi}{\alpha} m_1 m'_1$$

et dans le deuxième exemple

$$Q_3 = \frac{2i\pi}{\alpha} m_1 m'_2 + \frac{2i\pi}{\alpha\beta} m_2 m'_1.$$

Nous observerons ensuite que e^{-Q_3} ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs distinctes. Cela tient à ce que les m et les m' , de même que α et β , sont des entiers. Dans le premier exemple, e^{-Q_3} ne change pas si m_1 ou m'_1 augmente de α , et comme il ne dépend d'ailleurs que de m_1 et m'_1 , il ne change pas quand les m et les m' augmentent de multiples de α ; dans le deuxième exemple, il ne change pas si m_1 ou m'_2 augmentent d'un multiple de α , ou si m_2 ou m'_1 augmentent de $\alpha\beta$. Il ne change donc pas si les m et les m' augmentent de multiples de $\alpha\beta$. Dans tous les cas il existe un nombre k tel que e^{-Q_3} ne change pas quand les m et les m' augmentent de multiples de k .

Cela posé, nous aurons

$$\Theta(u, u') = \sum e^{p_1 u + p_2 u' - Q_3}.$$

La sommation doit se faire par rapport aux m et aux m' . Regardons pour un instant les u comme donnés; posons alors

$$A = \sum e^{p_1 u - Q_3},$$

où la sommation se fait par rapport aux m seulement; A dépendra donc des u et des m' ; l'essentiel est de remarquer que A ne change pas quand les m' augmentent de multiples de k .

Posons

$$Q' = k Q_3;$$

Q' sera la forme quadratique formée avec des périodes de la deuxième sorte, k fois plus grandes que celles qui figurent au tableau primitif; et l'on aura

$$\Theta(u, u') = \sum A e^{p_1 u - \frac{Q'}{k}},$$

la sommation devant cette fois s'effectuer par rapport aux m' ; ce qui montre que Θ considérée comme fonction des u' est une fonction θ d'ordre k admettant comme périodes de la deuxième sorte celles qui ont servi à construire la forme Q' . Dans le premier exemple ci-dessus, ce sera une fonction θ d'ordre α admettant comme périodes

$$\begin{array}{cccc} 2i\pi & 0 & \alpha a & \alpha b \\ 0 & 2i\pi & \alpha b & \alpha c. \end{array}$$

Dans le deuxième exemple, ce sera une fonction θ d'ordre $\alpha\beta$ admettant pour périodes

$$\begin{array}{cccc} 2i\pi & 0 & \alpha\beta a' & \alpha\beta b' \\ 0 & 2i\pi & \alpha\beta b' & \alpha\beta c'. \end{array}$$

Remarquons que cette nouvelle manière d'envisager la réduction des périodes abéliennes est applicable non seulement aux fonctions θ spéciales (comme l'étaient les précédentes qui portaient de la considération de la courbe algébrique C), mais aux fonctions θ les plus générales.

II. — L'invariant de la réduction.

Soient α_{ij} les $2p$ périodes de nos intégrales abéliennes et reprenons la relation (1) du paragraphe précédent:

$$(1) \quad \alpha_{ik} = \sum_j m_{kj} \beta_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, q; k = 1, 2, \dots, 2p; j = 1, 2, \dots, 2q).$$

Je ne suppose nullement ici que les périodes choisies soient les périodes normales. Nous devons d'abord définir la forme bilinéaire $F(x, y)$ caractéristique de ce système de périodes. Pour cela soient

$$\begin{aligned} U &= p_1 u_1 + p_2 u_2 + \dots + p_p u_p, \\ U' &= p'_1 u_1 + p'_2 u_2 + \dots + p'_p u_p. \end{aligned}$$

deux combinaisons linéaires quelconques de nos p intégrales abéliennes. Soient

$$\begin{array}{cccc} x_1, & x_2, & \dots, & x_{2p}, \\ y_1, & y_2, & \dots, & y_{2p} \end{array}$$

les $2p$ périodes de U et de U' , de telle sorte que

$$x_j = \sum p_k \alpha_{kj}, \quad y_j = \sum p'_k \alpha_{kj}.$$

On aura entre les x et les y une certaine relation bilinéaire

$$(2) \quad F(x, y) = 0$$

qui subsistera quels que soient les coefficients p et p' ; et c'est le premier membre de cette relation qui sera la forme bilinéaire caractéristique.

Dans le cas des périodes normales, cette forme se réduit à

$$\sum (x_{2k-1} y_{2k} - x_{2k} y_{2k-1}).$$

Si la relation (1) a lieu de façon qu'il y ait réduction et que U soit une combinaison des intégrales réductibles, de telle sorte que

$$p_k = 0, \quad (k \geq q)$$



on pourra écrire

$$x_k = \sum_{ij} \mu_{ij} \alpha_{ik} = \sum_{ij} \mu_{ij} m_{ki} \zeta_{ij},$$

ou bien encore

$$(3) \quad x_k = \sum_j m_{kj} \omega_j, \quad \omega_j = \sum_i \mu_{ij} \zeta_{ij}.$$

Si nous substituons dans (2) à la place des x leurs valeurs tirées de la première équation (3), cette relation bilinéaire prend la forme

$$(4) \quad \sum \Pi_{ij} \omega_j = 0,$$

où

$$\Pi_j = \sum_{ik} \frac{d^2 F}{dx_k dy_i} m_{ki} y_i = F(m_{kj}, y_i)$$

est une combinaison linéaire des y .

Nous pouvons assujettir les coefficients μ^i , restés jusqu'ici arbitraires, aux $2q$ conditions

$$(5) \quad \Pi_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 2q),$$

qui sont des relations linéaires entre les μ^i , puisque les y sont des fonctions linéaires des μ^i . Si ces relations (5) étaient distinctes, elles admettraient $p - 2q$ solutions linéairement indépendantes, puisque nous aurions p inconnues μ^i entre lesquelles nous aurions $2q$ relations distinctes. Mais ces relations (5) ne sont pas distinctes, puisque les Π_j sont liés par les identités (4). Ces identités (4) sont au nombre de q , puisque U désigne une quelconque des intégrales abéliennes réductibles, de sorte que nous pouvons prendre indifféremment

$$U = u_1, \quad U = u_2, \quad \dots, \quad U = u_q.$$

Les équations (5) admettront donc $p - q$ solutions linéairement indépendantes.

Si ces équations sont satisfaites, l'intégrale abélienne U sera réductible au genre $p - q$. En effet, ses $2p$ périodes y seront liées par les $2q$ relations linéaires (5) qui sont à coefficients entiers, de sorte que ces périodes pourront s'exprimer linéairement à l'aide de $2p - 2q$ périodes distinctes que nous appellerons ζ et que nous pourrions écrire (les n étant des entiers)

$$(6) \quad y_i = \sum n_{ij} \zeta_j \quad (i = 1, 2, \dots, 2p; j = 1, 2, \dots, 2p - 2q).$$

En résumé, nous aurons d'une part q intégrales U réductibles au genre q et d'autre part $p - q$ intégrales U' réductibles au genre $p - q$.

Rapprochons les égalités (3) et (6), que nous écrirons

$$x_i = \sum m_{ik} \omega_k, \quad y_i = \sum n_{ij} \zeta_j,$$

et formons le déterminant des entiers m et n ; il aura $2p$ lignes et $2p$ colonnes, puisque les indices i, k et j varient respectivement de 1 à $2p$, de 1 à $2q$, de 1 à $2p - 2q$. Je remarque que ce déterminant sera un *invariant*, je veux dire qu'il ne changera pas : 1° si l'on remplace le système des périodes x par un autre système équivalent; 2° si l'on remplace les périodes ω , ou encore les périodes ζ par un système équivalent.

Je suppose, bien entendu, que le système des ω , de même que celui des ζ , a été choisi de la façon la plus simple possible; c'est-à-dire que : 1° si l'on forme le tableau des coefficients m , tous les déterminants formés en prenant $2q$ colonnes de ce tableau sont des entiers premiers entre eux; 2° que le tableau des coefficients n jouit de la même propriété.

Posons maintenant

$$(7) \quad \Pi_j = \sum h_{ij} y_i,$$

les coefficients

$$h_{ij} = \sum_k \frac{d^2 F}{dx_k dy_i} m_{ki}$$

seront des entiers. Rapprochons maintenant les équations (3) et (7), que nous écrirons

$$x_i = \sum m_{ij} \omega_j, \quad \Pi_j = \sum h_{ij} y_i,$$

et formons d'une part le tableau des m et d'autre part celui des h . Dans le premier tableau, m_{ij} occupera la j^{e} ligne et la i^{e} colonne; dans le deuxième tableau h_{ij} occupera la j^{e} ligne et la i^{e} colonne.

Soit D l'un quelconque des déterminants formés à l'aide du premier tableau et qui, d'après ce que nous venons de supposer, sont tous premiers entre eux. Soit D' le déterminant correspondant du deuxième tableau. Considérons la somme $\Sigma DD'$ et comparons-la au déterminant Δ des m et des n , qui, nous l'avons vu, est un invariant.

Les n seront définies par les équations

$$(8) \quad \sum_i h_{ij} n_{ik} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 2q; k = 1, \dots, 2p - 2q).$$

On a en effet

$$0 = \Pi_j = \sum h_{ij} y_i = \sum h_{ij} n_{ik} \zeta_k$$

et cette relation doit être une identité par rapport aux ζ_k



Formons le déterminant M des h et des n ; il aura $2p$ lignes et $2p$ colonnes. Soit D' l'un des déterminants formés avec $2q$ colonnes du tableau des h ; ce sera un mineur de M ; nous continuons à désigner par D le déterminant formé avec les *mêmes* colonnes du tableau des m . Je désignerai de même par D'' le déterminant du tableau des n correspondant à D' ; je veux dire par là celui que l'on obtient en supprimant dans le tableau des n les colonnes que l'on conserve dans le tableau des h quand on veut obtenir D' . Il résulte de là que D'' est aussi un mineur de M , et que l'on a, en développant le déterminant M ,

$$M = \Sigma D' D''.$$

On aura de même en développant le déterminant Δ

$$\Delta = \Sigma D D'.$$

Et enfin nous nous proposons d'étudier l'expression

$$J = \Sigma D D'.$$

Quelle est alors la signification des égalités (8); elles signifient que les déterminants D' et D'' sont proportionnels, c'est-à-dire que l'on a

$$D' = \lambda D''.$$

Par une hypothèse faite plus haut, les D'' sont des entiers premiers entre eux; les D' sont des entiers. Donc λ n'est pas autre chose que le plus grand commun diviseur de ces entiers.

Pour déterminer ce plus grand commun diviseur, nous remarquerons qu'il ne doit pas changer quand on remplace les périodes x par un système de périodes équivalent. Soit en effet un nouveau système de périodes x' ; les x' sont liés aux x par un système de relations linéaires à coefficients entiers et de déterminant 1; les x' et les y' sont liés respectivement aux x et aux y par les mêmes relations linéaires. La relation $F(x, y) = 0$ devient

$$(2 \text{ bis}) \quad F'(x', y') = 0,$$

$F'(x', y')$ étant ce que devient $F(x, y)$ quand on y remplace les x et les y par leurs valeurs en fonctions des x' et des y' .

Les relations (3), (4), (6), (7) deviennent

$$\begin{aligned} (3 \text{ bis}) \quad x' &= \Sigma m' \omega, \\ (4 \text{ bis}) \quad \Sigma H \omega &= 0, \\ (6 \text{ bis}) \quad y' &= \Sigma n' \zeta, \\ (7 \text{ bis}) \quad H &= \Sigma h' y' = \Sigma h y. \end{aligned}$$

On voit que les m et les m' sont liés entre eux par les mêmes relations linéaires que les x et les x' ; et que les h et les h' , à cause de l'identité

$$\Sigma h y = \Sigma h' y',$$

sont liés par les relations contragrédiées, c'est-à-dire par des relations qui sont comme les premières à coefficients entiers et de déterminant 1. Il résulte de là que ces transformations n'altéreront ni le plus grand commun diviseur des D , ni celui des D' . Nous pouvons donc supposer qu'on a choisi les périodes normales.

On a alors

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \Sigma (x_{2k-1} y_{2k} - x_{2k} y_{2k-1}), \\ H_j &= \Sigma (m_{2k-1, j} y_{2k} - m_{2k, j} y_{2k-1}), \\ h_{2k, j} &= m_{2k-1, j}, \quad h_{2k-1, j} = -m_{2k, j}, \end{aligned}$$

ce qui montre que dans ce cas les h ne sont autre chose que les m au signe et à l'ordre près; de sorte que les D ne sont autre chose que les D' au signe et à l'ordre près.

Or les D sont premiers entre eux, il en est donc de même des D' ; donc on a

$$\lambda = \pm 1.$$

Nous pouvons supposer $\lambda = 1$, quitte à permuter deux des ω . Il vient ainsi

$$D = D', \quad J = \Delta.$$

Ce qui montre que l'expression J est l'invariant cherché.

Appliquons cela aux deux exemples du paragraphe I; pour le premier il vient

$$\omega_1 = \frac{x_1 z}{x}, \quad \omega_2 = h_1, \quad U = u_1.$$

Le tableau des m est donc

$$\begin{array}{cccccc} (\omega_1) & & x & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ (\omega_2) & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

et, comme les périodes sont normales, celui des h est

$$\begin{array}{cccccc} & 0 & -1 & 0 & x & 0 & 0, \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0, \end{array}$$

Tous les D sont nuls sauf deux d'entre eux, qui sont respectivement égaux à 1 et à x ; de même, tous les D' sont nuls sauf deux d'entre eux, qui sont respectivement égaux à 1 et à x . Seulement le D qui est égal à x correspond au D' qui est égal à 1, tandis que le D qui est égal à 1 correspond à un D' qui est



égal à zéro et le D' qui est égal à 1 à un D qui est égal à zéro. Donc tous les DD' sont égaux à zéro excepté un d'eux qui est égal à x^2 et l'on a

$$J = \sum DD' = x^2.$$

Passons au deuxième exemple

$$U = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2, \quad \omega_1 = \frac{\pi i \mu_1}{2}, \quad \omega_2 = \frac{\pi i \mu_2}{2}, \\ \omega_3 = \mu_1 a + \mu_2 b, \quad \omega_4 = \mu_1 b + \mu_2 c.$$

Les périodes x sont respectivement :

$$2i\pi\mu_1, \quad 2i\pi\mu_2, \quad 0, \quad 0, \quad \mu_1 a + \mu_2 b, \quad \mu_1 b + \mu_2 c, \quad \frac{\pi i \mu_1}{2}, \quad \frac{\pi i \mu_2}{2},$$

ce qui donne pour le tableau des m

$$\begin{array}{l} (\omega_1) \quad \quad \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \\ (\omega_2) \quad \quad \quad 0 \quad 2\beta \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \\ (\omega_3) \quad \quad \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ (\omega_4) \quad \quad \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

et pour le tableau des h , les périodes étant normales,

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2\beta & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Le seul des produits DD' qui ne s'annule pas est celui où les déterminants D et D' sont formés avec les colonnes 1, 2, 5 et 6; et dans ce produit on a

$$D = D' = x^2 \beta.$$

On aura donc

$$J = \sum DD' = x^2 \beta.$$

Ainsi, si l'on choisit le système de périodes de façon à mettre le tableau des périodes réductibles sous la forme canonique, l'invariant J est un carré parfait. Car la démonstration que nous avons développée dans les deux exemples précédents s'applique évidemment à tous les cas. Or, cet invariant ne dépend pas du choix des périodes. Donc l'invariant J est toujours un carré parfait.

Jusqu'ici nous avons supposé que les périodes x et y étaient distinctes. Ne faisons plus cette hypothèse; les périodes x peuvent n'être pas distinctes et par conséquent leur nombre peut être plus grand que $2p$.

Il existera alors un système de $2p$ périodes distinctes x' , et nous aurons entre

les deux systèmes de périodes les relations

$$(9) \quad x_i = \sum_k \lambda_{ik} x'_k,$$

les λ étant entiers; et entre les périodes correspondantes y et y' les relations

$$(9 \text{ bis}) \quad y_i = \sum_k \lambda_{ik} y'_k.$$

Il existera encore une forme bilinéaire $F(x, y')$ telle qu'on aura pour deux intégrales abéliennes quelconques de première espèce

$$F(x, y) = 0.$$

Quand on remplacera, dans cette forme, les x et les y par leurs valeurs (9) et (9 bis), elle deviendra une forme bilinéaire en x' et y' que j'appellerai $F'(x', y')$, de sorte qu'on aura l'identité

$$F(x, y) = F'(x', y').$$

Nous conserverons les mêmes périodes ω et nous aurons la relation

$$(3^a) \quad x_k = \sum_j m_{kj} \omega_j$$

et de même avec les périodes x'

$$(3^b) \quad x'_k = \sum_j m'_{kj} \omega_j.$$

Les m et les m' sont entiers. Le tableau des m' a $2p$ colonnes et q lignes; celui des m a q lignes, mais peut avoir plus de $2p$ colonnes. On aura d'ailleurs

$$(10) \quad m_{ij} = \sum_k \lambda_{ik} m'_{kj}.$$

Nous avons d'autre part

$$F = \sum H_j \omega_j, \quad H_j = \sum h_{ij} y'_i,$$

et avec les périodes y'

$$H_j = \sum h'_{ij} y'_i,$$

d'où l'identité

$$\sum h_{ij} y'_i = \sum h'_{ij} y'_i = \sum h_{ij} \sum \lambda_{ik} y'_k = \sum \sum h_{ij} \lambda_{ik} y'_k,$$

d'où

$$(11) \quad h_{ij} = \sum_k \lambda_{ik} h'_{kj}.$$

Les relations (10) et (11) sont les relations linéaires qui lient les nombres m et h avec les nombres m' et h' qui jouent le même rôle par rapport aux périodes x' et y' . On voit que ces relations linéaires sont contragrédientes.

Considérons le tableau des m et désignons par

$$D(i_1, i_2, \dots, i_q)$$



le déterminant formé en prenant dans ce tableau les colonnes de rang $i_1, i_2, \dots, i_q$. Désignons par $D'(i_1, i_2, \dots, i_q)$ le déterminant formé de la même manière avec le tableau des h_i ; par $D_1(i_1, i_2, \dots, i_q)$ et $D'_1(i_1, i_2, \dots, i_q)$ les déterminants formés de la même manière avec les tableaux des m' et des h' . Soit ensuite

$$\begin{array}{cccc} i_1 & i_2 & \dots & i_q \\ k_1 & k_2 & \dots & k_q \end{array}$$

le déterminant obtenu de la façon suivante : on considère le tableau des λ , en plaçant λ_{ik} dans la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $k^{\text{ème}}$ colonne; on supprime ensuite dans ce tableau toutes les lignes sauf celles de rang $i_1, i_2, \dots, i_q$ (que l'on range dans l'ordre indiqué) et toutes les colonnes sauf celles de rang $k_1, k_2, \dots, k_q$.

On aura alors, en vertu des relations (10) et (11),

$$(10 \text{ bis}) \quad D(i_1, i_2, \dots, i_q) = \sum_k \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_q \\ k_1 & k_2 & \dots & k_q \end{vmatrix} D_1(k_1, k_2, \dots, k_q),$$

$$(11 \text{ bis}) \quad D'_1(k_1, k_2, \dots, k_q) = \sum_i \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_q \\ k_1 & k_2 & \dots & k_q \end{vmatrix} D'(i_1, i_2, \dots, i_q).$$

Formons l'invariant J d'après la règle énoncée plus haut

$$J = \sum_i D(i_1, i_2, \dots, i_q) D'(i_1, i_2, \dots, i_q),$$

ou, en vertu de (10 bis),

$$J = \sum_{ik} \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_q \\ k_1 & k_2 & \dots & k_q \end{vmatrix} D_1(k_1, k_2, \dots, k_q) D'(i_1, i_2, \dots, i_q),$$

ou, en vertu de (11 bis),

$$J = \sum_k D_1(k_1, k_2, \dots, k_q) D'_1(k_1, k_2, \dots, k_q).$$

Nous voyons que la transformation n'altère pas la forme de l'expression J . Or dans le cas des périodes x' et y' , J représente un invariant. Il sera donc encore un invariant dans le cas des périodes x et y . D'ailleurs dans le cas des périodes distinctes, le même calcul aurait pu servir pour démontrer les propriétés invariantes de l'expression $\sum DD'$.

Donc, la règle pour former l'invariant reste la même quand les périodes ne sont pas distinctes.

Il importe toutefois de faire attention au choix de la forme $F(x, y)$.

Nous ne devons pas prendre pour cette forme bilinéaire caractéristique toute forme qui s'annule en vertu des relations entre les périodes; sans quoi la définition s'appliquerait tout aussi bien, non seulement à la forme $F(x, y)$,

mais à la forme $aF(x, y)$, quel que soit le coefficient a . Il faut choisir la forme F de telle façon que, si les x' et les y' sont les périodes normales, on ait

$$F(x, y) = F'(x', y') = \sum (x'_{2l-1} y'_{2l} - x'_{2l} y'_{2l-1}).$$

Si les périodes x et y sont distinctes, cela veut dire que le discriminant de la forme F doit être égal à 1.

Ou bien encore, supposons que les périodes x et y n'étant pas distinctes, les périodes x' et y' soient distinctes, sans être forcément normales; nous devrons nous imposer la condition que, si l'on a

$$F(x, y) = F'(x', y'),$$

le discriminant de F' soit égal à 1.

Si les périodes x et y sont distinctes, les coefficients de $F(x, y)$ sont entiers. Si ces périodes ne sont pas distinctes, ils peuvent être fractionnaires, mais rien n'est d'ailleurs à modifier dans l'analyse qui précède.

Si les périodes x et y sont distinctes, la forme $F(x, y)$ se trouve entièrement déterminée par les conditions précédentes. Il n'en est plus de même si ces périodes ne sont pas distinctes. On a en effet entre les x certaines relations linéaires

$$X_1 = X_2 = \dots = X_m = 0$$

et les relations correspondantes entre les y

$$Y_1 = Y_2 = \dots = Y_m = 0;$$

et alors nous pourrions remplacer F par

$$F(x, y) + \sum (B_i X_i - A_i Y_i),$$

les A_i étant des fonctions linéaires quelconques des x , et les B_i des fonctions linéaires quelconques des y .

Il y a toutefois une condition complémentaire que nous devons imposer à la forme $F(x, y)$; cette forme doit s'annuler identiquement quand on y fait $x_i = y_i$. Si nous tenons compte de cette condition, nous ne pouvons plus choisir les fonctions linéaires A_i et B_i d'une façon tout à fait arbitraire; mais les B_i doivent être formés avec les y comme les A_i avec les x .



III. — Introduction des fonctions fuchsiennes.

Reprenons les deux courbes C et C' du paragraphe I, ayant respectivement pour genre p et q . Nous désignerons également par les lettres C et C' les surfaces de Riemann correspondantes. Nous supposons que ces courbes sont liées par une transformation unirationnelle, de telle façon qu'à un point de C correspond un point de C' et un seul, tandis qu'à un point de C' correspondent n points de C . Ce nombre n joue un rôle important dans la suite, et nous devons tout d'abord chercher quelle relation le lie à l'invariant de la réduction; ce sera là l'objet des premiers paragraphes qui vont suivre.

Nous avons vu au paragraphe I que la définition de la réduction peut être élargie, mais nous nous bornerons à l'étude des cas où il y a une transformation unirationnelle analogue à celle dont nous venons de parler.

Soient M un point mobile de C , et M' le point correspondant de C' . Supposons que M' décrive un contour fermé infiniment petit autour d'un point fixe A' de la surface de Riemann C' ; il peut arriver que M revienne à sa valeur initiale et décrive aussi un contour fermé; mais il peut arriver également que M ne revienne pas à sa valeur initiale, et que les n déterminations de M s'échangent entre elles. Dans ce cas A' est un point de ramification.

Imaginons par exemple que les n valeurs de M subissent une permutation se décomposant en α permutations circulaires permutant respectivement

$$v_1, v_2, \dots, v_\alpha$$

valeurs de M , de telle façon que

$$v_1 + v_2 + \dots + v_\alpha = n.$$

Alors au point A' , correspondront sur C seulement α points $A_1, A_2, \dots, A_\alpha$ correspondant à ces permutations circulaires.

Soit par exemple $n = 6$, et supposons que, quand M' tourne autour de A' ,

$$M_1, M_2, M_3, M_1, M_5, M_4$$

se changent respectivement en

$$M_2, M_3, M_1, M_3, M_1, M_4.$$

La permutation se décomposera en trois permutations circulaires

$$(M_1 M_2 M_3) (M_1 M_2) M_4$$

et l'on aura

$$v_1 = 3, \quad v_2 = 2, \quad v_3 = 1.$$

Quand le point M' tendra vers A' , M_1, M_2 et M_3 tendront vers A_1 ; M_4 et M_5 tendront vers A_2 ; et M_6 vers A_3 .

Cela posé, nous allons construire un système de fonctions fuchsiennes de la façon suivante :

Soient x, y les coordonnées de M , et x', y' celles de M' ; soit z une variable auxiliaire. Je veux que x, y, x', y' soient fonctions fuchsiennes de z ; que quand M décrit un contour fermé sur C , la variable z revienne à sa valeur primitive ou subisse une substitution linéaire; que quand M' décrit un contour fermé sur C' , la variable z revienne à sa valeur primitive ou subisse une substitution linéaire; que z soit d'ailleurs choisi de la façon la plus simple possible.

Supposons que M' décrive sur la surface de Riemann C' un contour fermé infiniment petit enveloppant un point de ramification A' ; il n'est pas possible que z revienne à sa valeur primitive, sans quoi x et y qui sont des fonctions fuchsiennes et par conséquent uniformes de z reviendraient à leurs valeurs initiales et A' ne serait pas un point de ramification.

Il faut donc que z subisse une substitution linéaire elliptique; quelle est la période de cette substitution, ou, en d'autres termes, au bout de combien de tours décrits sur le contour fermé, notre variable z reviendra-t-elle à sa valeur primitive? Il faut pour cela que toutes les déterminations de M soient revenues à leurs valeurs primitives. Il faudra donc ν tours, ν étant le plus petit commun multiple de

$$v_1, v_2, \dots, v_\alpha.$$

Qu'arrivera-t-il alors si le point M décrit sur C un contour fermé très petit autour de l'un des points.

$$A_1, A_2, \dots, A_\alpha?$$

Il arrivera que la variable z subira une substitution linéaire elliptique ayant respectivement pour période

$$\frac{\nu}{v_1}, \frac{\nu}{v_2}, \dots, \frac{\nu}{v_\alpha}.$$

Et en effet, quand M décrit $\frac{\nu}{v_1}$ tours autour de A_1 , M' en décrit ν autour de A' .

Si l'on regarde x et y comme fonctions fuchsiennes de z , on voit qu'elles admettent un certain groupe fuchsien G , engendré par un certain polygone fuchsien P . Si l'on regarde maintenant x' et y' comme fonctions de z , ce seront



encore des fonctions fuchsiennes admettant le groupe G , mais elles admettront également un autre groupe fuchsien G' contenant le groupe G , et formé des substitutions linéaires que subit z quand M' décrit sur C' un contour fermé. Ce groupe G' sera engendré par un polygone fuchsien P' , et comme G est un sous-groupe de G' , on voit que le polygone P est décomposable en n polygones congruents à P' . La question de la réduction des intégrales abéliennes est ainsi rattachée à celle de la décomposition des polygones fuchiens en un certain nombre de polygones congruents.

Nous voyons que le polygone P aura autant de cycles de sommets qu'il y a de points analogues à $A_1, A_2, \dots, A_2, \dots$; la somme des angles des sommets du cycle qui correspond au point A_i sera $\frac{2\pi v_i}{v}$. De même, le polygone P' aura autant de cycles de sommets qu'il y a de points de ramification A' , la somme des angles, pour le cycle correspondant à A' , étant $\frac{2\pi}{v}$.

Nous pourrions, si nous le voulions, construire les polygones P et P' de façon à leur donner un plus grand nombre de côtés et de cycles de sommets; nous pourrions en effet considérer sur la surface C' un certain nombre de points choisis d'une façon arbitraire et les traiter comme nous avons fait des points A' , bien que ce ne soient pas des points de ramification. La seule différence serait que les nombres $v_1, v_2, \dots, v_2$ seraient tous égaux à 1, de telle sorte que pour les cycles correspondant à un pareil point A' ou aux points A_i correspondants, la somme des angles serait 2π . C'est ainsi par exemple que le groupe fuchsien G , qui est engendré par un quadrilatère dont les côtés opposés sont conjugués et dont la somme des angles est π , peut être également engendré par un hexagone dont les côtés opposés sont conjugués, la somme des angles de rang pair étant π et celle des angles de rang impair étant 2π ; plus généralement, un groupe fuchsien G quelconque peut être engendré par une infinité de polygones fuchiens différents. Mais il n'y aurait là qu'une complication qui, la plupart du temps, serait inutile (sauf dans le cas où il n'y aurait aucun point de ramification A').

Cela posé, soient Q et Q' les nombres des cycles de sommets de P et P' ; soient $2N$ et $2N'$ le nombre de leurs côtés. On a, par la formule qui donne le genre d'un polygone fuchsien,

$$(1) \quad \begin{cases} 2p = N - Q + 1, \\ 2q = N' - Q' + 1. \end{cases}$$

D'un autre côté, on trouve pour la surface de P (au point de vue de la

géométrie non euclidienne)

$$2\pi(N-1) - 2\pi \sum \frac{v_i}{v},$$

$2\pi \frac{v_i}{v}$ étant la somme des angles d'un seul cycle et par conséquent $2\pi \sum \frac{v_i}{v}$ celle de tous les angles. On trouve de même pour la surface de P'

$$2\pi(N'-1) - 2\pi \sum \frac{1}{v}.$$

Ces formules supposent que tout sommet d'un des polygones congruents à P' est aussi un sommet de P . Elles ne seraient plus vraies si un de ces sommets, commun à plusieurs polygones congruents à P' , était à l'intérieur de P .

En tenant compte de (1), ces expressions peuvent s'écrire :

$$2\pi(Q + 2p - 2) - 2\pi \sum \frac{v_i}{v} = 2\pi \sum \left(1 - \frac{v_i}{v}\right) + 2\pi(2p - 2),$$

$$2\pi(Q' + 2q - 2) - 2\pi \sum \frac{1}{v} = 2\pi \sum \left(1 - \frac{1}{v}\right) + 2\pi(2q - 2),$$

Comme P est décomposable en n polygones congruents à P' , la première surface doit être égale à n fois la seconde, de sorte qu'on a

$$Q + 2p - 2 - \sum \frac{v_i}{v} = n \left(Q' + 2q - 2 - \sum \frac{1}{v} \right).$$

Mais pour un même point A' , nous avons

$$\sum v_i = n, \quad \sum \frac{v_i}{v} = n \frac{1}{v}$$

et pour tous les points A'

$$\sum \frac{v_i}{v} = n \sum \frac{1}{v}.$$

Il nous reste donc la formule

$$(2) \quad Q + 2p - 2 = n(Q' + 2q - 2).$$

Cette formule subsiste si, usant de la faculté dont je parlais tout à l'heure, on cherche à construire un polygone P d'un plus grand nombre de côtés, en prenant un point arbitraire sur C' et le traitant comme un point A' . Dans ce cas, en effet, Q augmente de n unités et Q' d'une unité.

Si l'on réunit un polygone II de $2N$ côtés à un autre polygone II' de $2N'$ côtés, de façon à former un polygone II'' de $2N''$ côtés et simplement connexe, il arrivera généralement que II et II' n'aient qu'un seul côté commun, qui sera

leur frontière commune, laquelle disparaîtra par l'annexion. On aura donc

$$N' = N + N' - 1.$$

Si exceptionnellement, II et II' ont deux côtés communs, ces deux côtés devront être consécutifs, sans quoi II' ne serait pas simplement connexe, et alors le sommet qui sépare ces deux côtés sera à l'intérieur de II'; on aura donc généralement

$$N' = N + N' - 1 - \mu,$$

μ étant le nombre des sommets communs à II et à II' qui sont à l'intérieur de II'.

Plus généralement, si avec trois polygones II, II', II'', de $2N$, $2N'$, $2N''$ côtés on forme un polygone II''' de $2N'''$ côtés, on aura

$$(N''' - 1) = (N - 1) + (N' - 1) + (N'' - 1) - \mu,$$

μ étant le nombre des sommets appartenant à deux ou plusieurs des polygones II, II', II'' qui seront à l'intérieur de II'''. Si nous appliquons cette formule à notre polygone P de $2N$ côtés formé de n polygones congruents à P' qui a $2N'$ côtés, il viendra :

$$(3) \quad N - 1 = n(N' - 1) - \mu,$$

μ étant le nombre des sommets de P', ou d'un polygone congruent, qui sont à l'intérieur de P. Ces sommets devront correspondre à un point A_i de C qui soit tel que

$$y = y_i.$$

A de pareils points, s'ils existent, peuvent également correspondre des cycles de sommets de P ayant des angles dont la somme est 2π .

Nous reviendrons sur ces hypothèses à la fin du paragraphe V.

IV. — Calcul de la forme bilinéaire caractéristique.

Imaginons un polygone fuchsien P, la courbe C correspondante, et le système des intégrales abéliennes de première espèce relative à cette courbe; et cherchons à déterminer, pour les périodes correspondant aux côtés du polygone P, la forme bilinéaire caractéristique dont il a été question au paragraphe II.

Nous emploierons les notations suivantes. Soient

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{2N}$$

les sommets consécutifs du polygone P en décrivant le périmètre de ce polygone

dans un certain sens. Soient

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2N}$$

les côtés consécutifs de P, de telle sorte que le côté γ_i soit le côté $\sigma_{i-1}\sigma_i$, et que le côté γ_i soit le côté $\sigma_{2N}\sigma_1$.

Soit U l'une des intégrales abéliennes de première espèce; soit x_i cette intégrale prise le long du côté γ_i , et soit z_i la valeur de l'intégrale U au sommet σ_i ; on aura

$$(1) \quad x_i = z_i - z_{i-1}$$

et pour que cette formule soit générale, nous conviendrons de poser

$$x_i = x_{2N+i}, \quad z_i = z_{2N+i}.$$

Si les deux sommets σ_2 et σ_3 appartiennent à un même cycle, la différence

$$z_3 - z_2 = x_{2N+1} + x_{2N+2} + \dots + x_3$$

sera une période.

Si les côtés γ_α et γ_β sont conjugués, on aura

$$(2) \quad x_\alpha = -x_\beta$$

ou

$$(2 \text{ bis}) \quad z_\alpha - z_{\alpha-1} = z_\beta - z_{\beta-1} = y_\beta.$$

Dans ce cas

$$z_{\beta-1} - z_\alpha = z_\beta - z_{\alpha-1} = y_\alpha$$

est une période, car les sommets $\sigma_{\beta-1}$ et σ_α , de même que les sommets σ_β et $\sigma_{\alpha-1}$, appartiennent à un même cycle. Si l'on permute les lettres α et β , il vient

$$z_{\alpha-1} - z_\beta = z_\alpha - z_{\beta-1} = y_\beta,$$

d'où

$$(3) \quad y_\alpha + y_\beta = 0.$$

Si l'on fait la somme des équations (2), on trouve que la somme des $2N$ quantités x doit être nulle

$$(4) \quad \sum x_i = 0.$$

Nous avons d'autres relations entre les y . Soient par exemple

$$\sigma_2, \sigma_3, \sigma_{\gamma_1}, \sigma_2$$

les sommets consécutifs d'un même cycle; les côtés γ_α et $\gamma_{\beta-1}$ seront conjugués



et l'on aura

$$\begin{aligned} yx &= z\beta - z\alpha, \\ y\beta &= z\gamma - z\delta, \\ y\gamma &= z\delta - z\gamma, \\ y\delta &= z\alpha - z\beta; \end{aligned}$$

$$(5) \quad yx + y\beta + y\gamma + y\delta = 0.$$

Il y aura autant de relations (5) que de cycles de sommets, soit Q leur nombre; le nombre des y est évidemment $2N$; ils se trouvent liés par N relations (3) et par Q relations (5). Ces $N + Q$ relations ne sont pas distinctes; car si l'on fait la somme des relations (3) et celle des relations (5) on trouve le même résultat, à savoir

$$\sum y_i = 0.$$

Il restera donc entre les y , $N + Q - 1$ relations qui cette fois seront bien distinctes. Car chacun des y figure une fois, et une seule, dans l'ensemble des relations (3); et une fois, et une seule, dans l'ensemble des relations (5).

Si nous désignons par A_i les premiers membres des relations (3), par B_i ceux des relations (5) et que nous cherchions si l'on peut avoir identiquement

$$\sum \alpha_i A_i + \sum \beta_i B_i = 0,$$

les α et les β étant des coefficients constants, chacun des y figurera dans l'un des A et dans un seulement, et, d'autre part, dans l'un des B et dans un seulement; il faudra que les deux coefficients α et β soient égaux et de signe contraire. Chacun des α correspond à l'une des relations (3) et par conséquent à une paire de côtés conjugués; chacun des β correspond à l'une des relations (5) et par conséquent à un cycle de sommets. Chaque côté appartenant à une paire, à chaque côté correspondra un α ; chaque sommet appartenant à un cycle, à chaque sommet correspondra un β ; et, d'après ce que nous venons de dire, le coefficient α qui correspond à un côté, et le coefficient β qui correspond soit au sommet suivant soit au sommet précédent, doivent être égaux et de signe contraire. D'où il suit que tous les α doivent être égaux à $+1$ (par exemple) et tous les β à -1 . Il n'y a donc pas entre les A_i et les B_i d'autre identité que la suivante

$$\sum A_i - \sum B_i = 0.$$

Il y a donc $N + Q - 1$ relations distinctes entre les y , et comme les y sont au nombre de $2N$, il y a $N - Q + 1$ quantités y distinctes. Le genre est alors

$$\frac{N - Q + 1}{2},$$

comme il convient.

Cela posé, considérons une seconde intégrale abélienne U' ; désignons par x', y', z' les quantités relatives à cette seconde intégrale et correspondant à celles que nous avons appelées x, y, z , en ce qui concerne la première. Il s'agit d'obtenir la forme bilinéaire

$$F(y, y').$$

Pour cela, prenons l'intégrale

$$\int U dU'$$

tout le long du périmètre de P ; cette intégrale devra être nulle. Soient γ_α et γ_β deux côtés conjugués, et deux éléments correspondants de ces côtés; soient U_α et U_β , U'_α et U'_β les valeurs de nos intégrales en deux points correspondants de ces côtés; on aura

$$U_\beta = U_\alpha + y_\alpha, \quad U'_\beta = U'_\alpha + y'_\alpha, \quad dU'_\beta = -dU'_\alpha.$$

Je mets le signe $-$ parce que si les deux côtés sont parcourus en suivant les points correspondants, ils seront parcourus en sens contraire. L'intégrale $\int U dU'$ prise le long de ces deux côtés se réduira donc à

$$\int (U_\beta - U_\alpha) dU' = \int y_\alpha dU'$$

le long du côté γ_β ; c'est-à-dire $y_\alpha x'_\beta$ ou $-y_\alpha x'_\alpha$.

L'intégrale se réduira donc à

$$-\sum y_\alpha x'_\alpha.$$

la sommation s'étendant à toutes les paires de côtés, en prenant un côté seulement dans chaque paire. Mais comme on a

$$y_\alpha = -y'_\beta, \quad x'_\alpha = -x'_\beta, \quad y_\alpha x'_\alpha = y'_\beta x'_\beta,$$

cela peut s'écrire

$$-\frac{1}{2} \sum y_\alpha x'_\alpha,$$

la sommation s'étendant à tous les côtés. Nous aurons donc

$$(6) \quad \sum y x' = 0,$$

ou, en vertu de (1) (appliquée à l'intégrale U'),

$$\sum y_\alpha (z'_\alpha - z'_{\alpha-1}) = 0,$$

ou, à cause de (3),

$$\sum y_\alpha z'_\alpha + \sum y_\beta z'_{\beta-1} = 0.$$



Tenant compte de la relation

$$z'_{\alpha-1} = z'_\beta + y'_\beta,$$

il vient

$$\sum y_\alpha z'_\alpha + \sum y_\beta z'_\beta + \sum y'_\beta y'_\beta = 0.$$

Mais on a

$$\sum y_\alpha z'_\alpha = \sum y_\beta z'_\beta, \quad \sum y_\alpha y'_\alpha = \sum y'_\beta y'_\beta.$$

En effet l'indice α peut prendre toutes les valeurs possibles depuis 1 jusqu'à $2N$; et quand il prend ces valeurs, l'indice β du côté conjugué prend également ces mêmes valeurs dans un autre ordre. Je puis donc écrire

$$(7) \quad 2 \sum y_\alpha z'_\alpha + \sum y_\alpha y'_\alpha = 0.$$

Nous devons vérifier d'abord que le premier membre de (7) est bien de la forme $F(y, y')$, F étant une forme bilinéaire. Choisissons en effet, dans chaque cycle de sommets, un sommet que nous appellerons le sommet *initial*. On aura alors, pour un sommet quelconque σ_α ,

$$z'_\alpha = z'_\alpha + Y'_\alpha,$$

σ_α étant le sommet initial du cycle et Y' une combinaison linéaire des y' ; de sorte que le premier membre de (7) devient

$$2 \sum y_\alpha z'_\alpha + 2 \sum y_\alpha Y'_\alpha + \sum y_\alpha y'_\alpha.$$

Il s'agit de démontrer que le coefficient de z'_α dans cette expression est nul, de telle sorte que cette expression ne dépend plus que des y et des y' . En effet, ce coefficient est égal à

$$2 \sum y'_\alpha,$$

la sommation s'étendant à tous les sommets du cycle, et cette somme est nulle en vertu des relations (5).

Il s'agit maintenant de vérifier sur le premier membre de (7) l'identité

$$(8) \quad F(y, y') + F(y', y) = 0$$

ou, ce qui revient au même, l'identité

$$F(y, y) = 0,$$

puisque

$$F(y, y') + F(y', y) = F(y + y', y + y') - F(y, y) - F(y', y').$$

Il est clair que

$$F(y, y) = 2 \sum y_\alpha z_\alpha + \sum y_\alpha^2.$$

Or on trouve

$$F(y, y) = 2 \sum z_\alpha (z_{\beta-1} - z_\alpha) + \sum (z_{\beta-1} - z_\alpha)^2$$

ou, en développant,

$$F(y, y) = \sum z_{\beta-1}^2 - \sum z_\alpha^2.$$

Or le second membre est évidemment nul puisque, quand l'indice α prend toutes les valeurs possibles il en est de même de l'indice $\beta - 1$, quoique dans un autre ordre.

En résumé nous avons entre les y et les y' une relation bilinéaire

$$2 \sum y z' + \sum y y' = 0.$$

Cela prouve que la forme caractéristique cherchée $F(y, y')$ est égale, à un facteur constant près, à $2 \sum y z' + \sum y y'$, et il reste à déterminer ce facteur constant.

Pour cela supposons que U' , au lieu d'être une intégrale de première espèce soit une intégrale de troisième espèce admettant pour points logarithmiques deux points M_0 et M_1 de la surface de Riemann C , le premier avec le résidu $+1$, le second avec le résidu -1 ; dans ce cas on aura

$$F(y, y') = 2i\pi(U_0 - U_1),$$

U_0 et U_1 étant les valeurs de U en M_0 et M_1 .

D'autre part, l'intégrale

$$\int U dU'$$

a aussi pour expression $2i\pi(U_0 - U_1)$, de sorte que

$$F(y, y') = \int U dU'.$$

Mais le premier membre de (7) n'est autre chose que le premier membre de (6), qui a été obtenue elle-même en multipliant par -2 l'expression

$$-\frac{1}{2} \sum y_\alpha z'_\alpha$$

qui représentait notre intégrale; on aura donc

$$F(y, y') = -\sum y z' - \frac{1}{2} \sum y y'$$

ou enfin, en tenant compte de (8),

$$(9) \quad F(y, y') = \sum y y' + \frac{1}{2} \sum y y',$$

ou encore

$$F(y, y') = \frac{1}{2} \sum (2y y' - y z').$$



V. — Mode de correspondance des côtés.

Représentons-nous le polygone P décomposé en un certain nombre n de polygones congruents à P' . Les côtés du polygone P' sont conjugués deux à deux, ils sont au nombre de $2N'$; le nombre total des côtés des divers polygones congruents à P' sera donc $2nN'$; parmi eux il y en aura $2N$ qui n'appartiendront qu'à un seul de ces polygones et qui feront partie du périmètre de P ; les autres appartiendront à deux des polygones congruents à P' et leur serviront de frontière commune.

Nous pourrions représenter ces $2nN'$ côtés par une notation à double indice

$$\gamma(x, \beta);$$

l'indice x variera de 1 à $2N'$ et se rapportera aux divers côtés de P' ; l'indice β variera de 1 à n et se rapportera aux divers polygones congruents à P' ; ainsi $P'(\beta)$ sera l'un des polygones congruents à P' ; $\gamma(x)$ sera l'un des côtés de P' et $\gamma(x, \beta)$ sera le côté de $P'(\beta)$ homologue au côté $\gamma(x)$ de P' .

Supposons alors que les côtés $\gamma(x)$ et $\gamma(x')$ de P' soient conjugués, et considérons un côté $\gamma(x, \beta)$; il existera alors toujours un côté $\gamma(x', \beta')$, et un seul, qui sera identique ou conjugué à $\gamma(x, \beta)$.

Si les deux côtés $\gamma(x, \beta)$, $\gamma(x', \beta')$ sont identiques, ils n'appartiendront pas au périmètre de P , mais ils feront la frontière commune de $P'(\beta)$ et $P'(\beta')$. Si les deux côtés $\gamma(x, \beta)$, $\gamma(x', \beta')$ sont conjugués, ils appartiendront au périmètre de P et ils représenteront deux côtés conjugués de P .

Nous pouvons alors envisager la substitution S_x qui change β en β' ; c'est une substitution qui change l'ordre des n lettres β . A chaque côté de P' correspond une pareille substitution et les substitutions correspondant à deux côtés conjugués S_x et $S_{x'}$ sont inverses l'une de l'autre.

Voyons maintenant comment les sommets de P se répartiront en cycles. Nous désignerons encore par $\sigma(x)$ celui des sommets de P' qui est compris entre $\gamma(x)$ et $\gamma(x+1)$, et par $\sigma(x, \beta)$ le sommet homologue de $P'(\beta)$. Considérons un des cycles de sommets de P , et soient

$$\sigma(x_1), \sigma(x_2), \dots, \sigma(x_m)$$

ces sommets. Considérons alors le sommet $\sigma(x_1, \beta_1)$; il sera identique ou conjugué au sommet $\sigma(x'_1 - 1, \beta'_1)$, où β'_1 sera le transformé de β_1 par la substitu-

tion S_{x_1} ; j'écris

$$\beta'_1 = \beta_1 S_{x_1}.$$

On aura d'ailleurs $x'_1 - 1 = x_2$, et je poserai pour plus de symétrie dans les notations

$$\beta_2 = \beta'_1 = \beta_1 S_{x_1}.$$

De même, le sommet

$$\sigma(x'_1 - 1, \beta'_1) = \sigma(x_2, \beta_2)$$

sera identique ou conjugué au sommet

$$\sigma(x'_2 - 1, \beta'_2) = \sigma(x_3, \beta_3),$$

où $\gamma(x'_2)$ est conjugué de $\gamma(x_3)$ et où

$$\beta_3 = \beta'_2 = \beta_2 S_{x_2},$$

et ainsi de suite; et enfin le sommet

$$\sigma(x_{m-1}, \beta_{m-1}) = \sigma(x_m, \beta_m)$$

sera identique ou conjugué au sommet

$$\sigma(x'_{m-1}, \beta'_{m-1}) = \sigma(x_1, \beta_m)$$

où

$$\beta_m = \beta_m S_{x_m} = \beta_1 S_{x_1} S_{x_2} \dots S_{x_m}.$$

Ainsi, pour obtenir β'_m en partant de β_1 , il faut appliquer aux n lettres β la substitution

$$\Sigma = S_{x_1} S_{x_2} \dots S_{x_m}$$

qui change leur ordre.

Soient alors

$$\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_q^*$$

les transformés successifs de β_1 par $\Sigma, \Sigma^2, \dots, \Sigma^q$; on finira par arriver à

$$\beta_q^* = \beta_1,$$

c'est-à-dire par retrouver la lettre initiale. Alors les divers sommets

$$\sigma(x_1, \beta_1), \sigma(x_1, \beta_1^*), \sigma(x_1, \beta_2^*), \dots, \sigma(x_1, \beta_{q-1}^*)$$

appartiendront à un même cycle, lequel comprendra en outre

$$\sigma(x_2, \beta_1 S_{x_1}), \sigma(x_2, \beta_1^* S_{x_1}), \sigma(x_2, \beta_2^* S_{x_1}), \dots,$$

$$\sigma(x_2, \beta_1 S_{x_1} S_{x_2}), \sigma(x_2, \beta_1^* S_{x_1} S_{x_2}), \dots$$

On sait qu'une permutation quelconque entre n lettres peut toujours être décomposée en un certain nombre de permutations circulaires; ici l'une des



permutations circulaires de Σ est la suivante :

$$\beta_1, \beta_1', \beta_2, \dots, \beta_{q-1}$$

et porte sur q lettres.

Supposons donc que Σ se décompose en λ semblables permutations circulaires; nous avons sur P' un cycle de m sommets. A ce cycle correspondront sur P , non pas un, mais λ cycles de sommets; et si une de ces permutations circulaires porte sur q lettres, le cycle correspondant comprendra qm sommets.

Il pourra se faire que plusieurs de ces sommets appartenant à divers polygones $P'(\beta)$ soient identiques; le nombre des sommets *distincts* de P sur ce cycle sera alors moindre que qm ; il pourra même se faire, et c'est une hypothèse que nous avons déjà envisagée au paragraphe III, que tous ces sommets soient identiques et que la somme de leurs angles soit 2π ; ce sommet n'appartiendra plus alors au périmètre de P , mais ce sera un point intérieur à P appartenant à la fois à plus de deux polygones $P'(\beta)$ et étant le point d'intersection des frontières de ces polygones.

VI. — Calcul de l'invariant.

Pour calculer notre invariant, nous devons d'abord chercher les nombres que nous avons appelés h et m au paragraphe II. Les nombres m se rapportent aux différents λ et par conséquent aux différents côtés. Au côté $\gamma(\alpha, \beta)$ qui est identique ou conjugué au côté $\gamma(\alpha', \beta')$ correspond une période $y'(\alpha, \beta)$, qui est l'intégrale U prise entre les sommets $\sigma(\alpha, \beta)$ et $\sigma(\alpha' - 1, \beta)$. Si les deux côtés $\gamma(\alpha, \beta)$ et $\gamma(\alpha', \beta')$ sont identiques et non conjugués, il en est de même des deux sommets $\sigma(\alpha, \beta)$ et $\sigma(\alpha' - 1, \beta')$ et l'on a

$$y'(\alpha, \beta) = 0$$

et de même pour l'intégrale U'

$$(1) \quad y'(\alpha, \beta) = 0.$$

On a dans tous les cas

$$y(\alpha, \beta) + y(\alpha', \beta') = 0,$$

ce qui n'est autre chose que l'équation (3) du paragraphe IV.

Les y peuvent s'exprimer en fonctions linéaires des périodes ω_j et l'on aura

$$(2) \quad y(\alpha, \beta) = \Sigma m(\alpha, \beta, j) \omega_j$$

et de même

$$y'(\alpha, \beta) = \Sigma m(\alpha, \beta, j) \omega_j$$

les $m(\alpha, \beta, j)$ étant entiers.

Considérons maintenant la valeur $z(\alpha, \beta)$ de l'intégrale U au sommet $\sigma(\alpha, \beta)$ et la valeur $z(\alpha_0, \beta_0)$ de U au sommet initial du cycle $\sigma(\alpha_0, \beta_0)$ tel qu'il a été défini au paragraphe IV, nous pourrions écrire

$$(3) \quad z(\alpha, \beta) = z(\alpha_0, \beta_0) + \Sigma k(\alpha, \beta, j) \omega_j$$

et de même

$$z'(\alpha, \beta) = z'(\alpha_0, \beta_0) + \Sigma k(\alpha, \beta, j) \omega_j',$$

les $k(\alpha, \beta, j)$ étant entiers.

Remplaçons les y' et les z par leurs valeurs dans

$$F(y, y') = \Sigma y' + \frac{1}{2} \Sigma y y'.$$

Observons que nous pouvons dans les sommes du second membre introduire les termes correspondant à des côtés $\gamma(\alpha, \beta)$, qui n'appartiennent pas au périmètre de P , mais servent de frontière commune à deux des polygones $P'(\beta)$. En effet, ces termes contiennent en facteur $y'(\alpha, \beta)$ qui est nulle dans ce cas en vertu de la relation (1). De plus, nos formules sont applicables comme nous l'avons vu au paragraphe IV, bien que les y ne soient pas des périodes distinctes. Le premier membre doit se réduire à :

$$F(y, y') = \Sigma H_j \omega_j.$$

Quant au second membre il va prendre la forme d'une expression linéaire par rapport aux $z(\alpha_0, \beta_0)$ et aux ω_j , puisque les seconds membres des coefficients (2) et (3) sont de cette forme. Mais le coefficient de $z(\alpha_0, \beta_0)$ est égal à

$$\Sigma y'(\alpha, \beta),$$

la sommation étant étendue à tous les sommets $\sigma(\alpha, \beta)$ du cycle dont $\sigma(\alpha_0, \beta_0)$ est le sommet initial. Or cette somme est nulle par la relation (5) du paragraphe IV. Donc les termes en $z(\alpha_0, \beta_0)$ disparaissent et le second membre est linéaire par rapport aux ω_j seulement. On trouve alors, en identifiant les coefficients de ω_j ,

$$H_j = \Sigma k(\alpha, \beta, j) y'(\alpha, \beta) + \frac{1}{2} \Sigma m(\alpha, \beta, j) y'(\alpha, \beta).$$

Mais on a, par la définition des nombres h ,

$$H_j = \Sigma h(\alpha, \beta, j) y'(\alpha, \beta),$$

d'où

$$(4) \quad h(\alpha, \beta, j) = k(\alpha, \beta, j) + \frac{1}{2} m(\alpha, \beta, j).$$



On a d'autre part

$$y'(z, \beta) = -y'(z', \beta') = z(z' - 1, \beta') - z(z, \beta) = z(z', \beta') - z(z - 1, \beta)$$

et par conséquent, en égalant les coefficients de ω_j ,

$$(5) \quad m(z, \beta) = -m(z', \beta') = k(z' - 1, \beta') - k(z, \beta) = k(z', \beta') - k(z - 1, \beta).$$

Il faudrait affecter les m et les k d'un troisième indice j qui serait le même pour tous les nombres qui figurent dans cette formule (5).

Comparons maintenant deux expressions telles que $z(z, \beta)$ et $z(z, \beta')$.

La dérivée de U prendra la même valeur en $z(z, \beta)$ et en $z(z, \beta')$ ou, plus généralement, en deux points correspondants des deux polygones $P'(\beta')$ et $P(\beta)$; et en effet nous avons supposé que l'intégrale U était réductible, c'est-à-dire qu'elle appartenait, non seulement à la courbe C , mais encore à la courbe C' . La différence des valeurs de U en ces deux points est donc une constante, et par conséquent la différence

$$z(z, \beta) - z(z, \beta')$$

ne dépend que des indices β et β' , et ne dépend pas de l'indice z . Il en est donc de même de la différence

$$k(z, \beta, j) - k(z, \beta', j).$$

Il résulte de là que nous pouvons écrire

$$k(z, \beta, j) = k(z, j) + k(\beta, j)$$

et considérer le nombre $k(z, \beta, j)$ comme la somme de deux autres nombres analogues dépendant, le premier seulement de l'indice z et le second seulement de l'indice β .

Cela posé, rappelons comment on forme l'invariant J : on dresse le tableau des m et celui des h ; on désigne par D l'un quelconque des déterminants obtenus en prenant $2q$ colonnes dans le premier tableau; par D' le déterminant obtenu en prenant les mêmes colonnes dans le deuxième tableau; et l'on a

$$J = \Sigma DD'.$$

Je dis que J ne changera pas quand dans le premier tableau on ajoutera la première colonne à la seconde, en même temps que dans le deuxième tableau on retranchera la seconde colonne de la première. Désignons en effet par D un déterminant tiré du tableau primitif des m ; par D' , Δ et Δ' les déterminants correspondants tirés du tableau primitif des h , du tableau modifié des m et du

tableau modifié des h . Il s'agit de montrer que

$$\Sigma DD' = \Sigma \Delta \Delta'.$$

Soient D_α l'un quelconque des déterminants qui ne contiennent ni la première ni la seconde colonne; D_β l'un quelconque des déterminants qui contiennent à la fois ces deux colonnes; D_γ l'un quelconque des déterminants qui contiennent la première colonne sans contenir la seconde et enfin D_γ^0 le déterminant obtenu en remplaçant dans D_γ la première colonne par la seconde. On aura

$$\begin{aligned} D_\alpha &= \Delta_\alpha, & D'_\alpha &= \Delta'_\alpha, & D_\beta &= \Delta_\beta, & D'_\beta &= \Delta'_\beta; \\ \Delta_\gamma^0 &= D_\gamma + D_\gamma^0, & \Delta'_\gamma &= D'_\gamma - D_\gamma^0, & \Delta_\gamma &= D_\gamma, & \Delta'_\gamma &= D_\gamma^0; \end{aligned}$$

d'où

$$D_\alpha D'_\alpha = \Delta_\alpha \Delta'_\alpha, \quad D_\beta D'_\beta = \Delta_\beta \Delta'_\beta, \quad D_\gamma D'_\gamma + D_\gamma^0 D_\gamma^0 = \Delta_\gamma \Delta'_\gamma + \Delta_\gamma^0 \Delta_\gamma^0;$$

et par conséquent

$$\Sigma DD' = \Sigma \Delta \Delta'.$$

On pourrait évidemment opérer de même sur d'autres colonnes quelconques.

Les colonnes de nos deux tableaux pourront être rangées dans un ordre tel que celle qui se rapporte à un côté $\gamma(\alpha, \beta)$ soit immédiatement suivie de celle qui se rapporte au côté conjugué $\gamma(\alpha', \beta')$. Nous aurons alors dans les deux tableaux, dans chaque colonne de rang impair, les nombres

$$m(\alpha, \beta, j), \quad h(\alpha, \beta, j)$$

et dans la colonne suivante les nombres

$$m(\alpha', \beta', j), \quad h(\alpha', \beta', j).$$

Faisons l'opération dont nous venons de démontrer la légitimité, d'abord sur les deux premières colonnes, puis sur les deux suivantes, et ainsi de suite. Alors dans les deux tableaux modifiés nous aurons dans chaque colonne de rang impair les nombres

$$m(\alpha, \beta, j), \quad h(\alpha, \beta, j) - h(\alpha', \beta', j)$$

et dans la colonne suivante les nombres

$$m(\alpha, \beta, j) + m(\alpha', \beta', j), \quad h(\alpha', \beta', j).$$

Mais

$$m(\alpha, \beta, j) + m(\alpha', \beta', j) = 0.$$

Nous pouvons alors supprimer toutes les colonnes de rang pair, et en effet tous les déterminants Δ qui contiennent une de ces colonnes sont nuls, puisque tous les termes de ces colonnes sont nuls dans le premier tableau modifié.



Il nous restera donc deux tableaux formés respectivement avec les nombres

$$m(\alpha, \beta, j), \quad h(\alpha, \beta, j) - h(\alpha', \beta', j)$$

et il s'agit de former la somme

$$\Sigma \Delta'$$

relative à ces deux tableaux.

On a d'abord

$$m(\alpha, \beta, j) = h(\alpha' - 1, j) + k(\beta', j) - k(\alpha, j) - k(\beta, j)$$

et

$$2h(\alpha, \beta, j) = h(\alpha' - 1, j) + k(\beta', j) + k(\alpha, j) + k(\beta, j),$$

$$2h(\alpha', \beta', j) = k(\alpha - 1, j) + k(\beta, j) + k(\alpha', j) + k(\beta', j),$$

d'où

$$2h(\alpha, \beta, j) - 2h(\alpha', \beta', j) = h(\alpha' - 1, j) + k(\alpha, j) - k(\alpha - 1, j) - k(\alpha', j),$$

ce qui montre que les nombres du deuxième tableau modifié et par conséquent les Δ' ne dépendent pas de l'indice β .

Chaque colonne dépendant de deux indices α et β , chaque déterminant dépendra de deux séries de $2q$ indices

$$\begin{matrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \dots, & \alpha_{2q} \\ \beta_1, & \beta_2, & \dots, & \beta_{2q}; \end{matrix}$$

je pourrai donc désigner l'un des déterminants Δ par ces indices, en l'écrivant

$$\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2q}; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2q})$$

ou simplement

$$\Delta(\alpha_i, \beta_i).$$

Nous pourrions écrire de même $\Delta'(\alpha_i, \beta_i)$; mais Δ' , comme nous venons de le voir, ne dépendant pas des β , nous écrirons simplement

$$\Delta'(\alpha_i)$$

et nous aurons

$$J = \Sigma \Delta(\alpha_i, \beta_i) \Delta'(\alpha_i).$$

La sommation doit s'effectuer, d'une part par rapport aux indices β , et d'autre part par rapport aux indices α . Nous pourrions écrire

$$H(\alpha_i) = \Sigma_{\beta} \Delta(\alpha_i, \beta_i),$$

la sommation s'effectuant seulement par rapport aux indices β , et l'on aura ensuite

$$J = \Sigma_{\alpha} H(\alpha_i) \Delta'(\alpha_i),$$

la sommation s'effectuant cette fois par rapport aux indices α .

Nous devons observer que les indices α doivent être tous différents, sans quoi

$\Delta'(\alpha_i)$ serait nul; en revanche deux ou plusieurs des β peuvent être identiques; car, si $\beta_1 = \beta_2$, par exemple, les nombres

$$m(\alpha_1, \beta_1, j), \quad m(\alpha_2, \beta_1, j)$$

n'en seront pas moins différents. De plus, on doit tenir compte de l'ordre des β et, par exemple, les deux combinaisons

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \dots, \beta_{2q}$$

et

$$\beta_2, \beta_1, \beta_3, \beta_4, \dots, \beta_{2q}$$

doivent être tenues pour différentes, puisque la première conduit aux nombres

$$m(\alpha_1, \beta_1, j), \quad m(\alpha_2, \beta_1, j)$$

et la seconde à

$$m(\alpha_1, \beta_2, j), \quad m(\alpha_2, \beta_2, j).$$

Cela nous indique comment doivent être faites les sommations.

J'écrirai

$$\Delta(\alpha_i, \beta_i) = [m(\alpha_i, \beta_i, j)]$$

voulant dire par là que $\Delta(\alpha_i, \beta_i)$ est un déterminant où l'élément de la $i^{\text{ème}}$ colonne et la $j^{\text{ème}}$ ligne est $m(\alpha_i, \beta_i, j)$. J'aurai alors, avec la même notation,

$$H(\alpha_i) = \Sigma_{\beta} \Delta(\alpha_i, \beta_i) = [\Sigma_{\beta} m(\alpha_i, \beta_i, j)].$$

Or

$$m(\alpha_i, \beta_i, j) = k(\alpha'_i - 1, j) - k(\alpha_i, j) + k(\beta'_i, j) - k(\beta_i, j),$$

ce que je puis écrire

$$m(\alpha_i, \beta_i, j) = m(\alpha_i, j) + k(\beta'_i, j) - k(\beta_i, j),$$

en posant

$$m(\alpha_i, j) = k(\alpha'_i - 1, j) - k(\alpha_i, j).$$

La sommation doit s'étendre aux n valeurs de β . Le terme $m(\alpha_i, j)$ étant indépendant de β , on a

$$\Sigma m(\alpha_i, j) = nm(\alpha_i, j).$$

D'autre part, quand β parcourt les valeurs 1, 2, ..., n , l'indice β' parcourt les mêmes valeurs dans un autre ordre, de sorte qu'on a

$$\Sigma k(\beta'_i, j) - \Sigma k(\beta_i, j) = 0$$

et qu'il reste simplement

$$\Sigma_{\beta} \Delta(\alpha_i, \beta_i) = n^{2q} [m(\alpha_i, j)]$$

ou

$$H(\alpha_i) = n^{2q} \Delta(\alpha_i),$$

en posant

$$\Delta(\alpha_i) = [m(\alpha_i, j)].$$



de sorte qu'il reste

$$J = n^{2q} \Sigma \Delta(x_i) \Delta'(x_i)$$

ou bien

$$J = n^{2q} J',$$

J' étant l'invariant relatif à la courbe C' et au polygone P' .

Examinons en particulier les deux exemples du paragraphe I. Dans le premier de ces exemples on a $q = 1$, et nous pouvons prendre pour périodes

$$\omega_1 = \frac{2i\pi}{\alpha}, \quad \omega_2 = h$$

et supposer que la courbe C' est une courbe de genre 1 admettant comme intégrale de première espèce u_1 , laquelle elle-même aura pour périodes fondamentales $\frac{2i\pi}{\alpha}$ et h ; nous reprenons les notations du paragraphe I, de sorte que les lettres α et h n'ont plus du tout la même signification qu'au début du présent paragraphe. Quoi qu'il en soit, les périodes ω_1 et ω_2 pouvant être regardées comme des périodes normales, on aura

$$J' = 1, \quad J = n^2$$

et d'après le paragraphe II

$$J = \alpha^2, \quad n = \alpha.$$

Mais nous pourrions également prendre d'autres périodes (de façon que toute fonction périodique admettant les périodes ω_1 et ω_2 admette nécessairement les périodes $\frac{2\pi i}{\alpha}$ et h), par exemple

$$\omega_1 = \frac{2i\pi}{\alpha^2}, \quad \omega_2 = \frac{h}{\gamma},$$

β et γ étant des entiers quelconques. Dans ce cas le tableau des nombres m s'écrit :

$$\begin{array}{ccccccc} 2\beta & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & \end{array}$$

et l'on a

$$J = \alpha^2 \beta^2 \gamma^2; \quad J' = 1, \quad J = n^2, \quad n = \alpha \beta \gamma.$$

Mais nous nous tiendrons à la première hypothèse, c'est-à-dire que parmi les systèmes de périodes ω qui conduisent à la réduction, nous choisirons toujours le plus simple; on aura alors

$$n = \alpha.$$

Passons au deuxième exemple. Ici $q = 2$, les intégrales u_1 et u_2 admettent

pour périodes

$$\begin{array}{cccccccc} 2i\pi & 0 & 0 & 0 & a & b & 0 & \frac{2i\pi}{\alpha} \\ 0 & 2i\pi & 0 & 0 & b & c & \frac{2i\pi}{\alpha^2} & 0 \end{array}$$

Nous pourrions donc prendre le tableau suivant des périodes ω :

$$(S) \quad \begin{cases} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ u_1 & \frac{2i\pi}{\alpha} & 0 & a & b \\ u_2 & 0 & \frac{2i\pi}{\alpha^2} & b & c \end{cases}$$

Mais ces périodes ne satisfont pas à la condition que doit remplir un système de périodes d'intégrales abéliennes engendrées par une courbe de genre 2. Nous devons donc chercher un autre système de périodes *sous-multiple* du premier. Je dis, pour abréger le langage, qu'un système de périodes S est *sous-multiple* d'un autre système S' , quand l'existence des périodes S entraîne celle des périodes S' , sans que la réciproque soit vraie.

Il est clair alors que parmi les systèmes sous-multiples de (S') , et satisfaisant à la condition fondamentale imposée aux périodes des intégrales abéliennes, le plus simple est le suivant :

$$(S') \quad \begin{cases} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ u_1 & \frac{2i\pi}{\alpha^2} & 0 & a & b \\ u_2 & 0 & \frac{2i\pi}{\alpha^2} & b & c \end{cases}$$

et que tous les autres ne sont que des sous-multiples de (S') . Nous pouvons alors supposer que u_1 et u_2 , regardées comme intégrales abéliennes relatives à la courbe C' , admettent les périodes S' . Alors le tableau des nombres m ne sera plus, comme au paragraphe II :

$$\begin{array}{cccccccc} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

mais bien

$$\begin{array}{cccccccc} 2\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 2\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$



On n'a donc plus, comme au paragraphe II, $J = \alpha^2 \beta^2$, mais

$$J = \alpha^2 \beta^2.$$

D'autre part, les périodes ω étant normales, on a

$$J' = 1, \quad J = n^2,$$

d'où

$$n = \alpha \beta.$$

Dans le premier exemple, nous avons trouvé $n = \alpha$, dans le deuxième nous trouvons $n = \alpha \beta$; la loi est évidemment générale et peut s'énoncer ainsi :

Le nombre n des polygones $P'(\beta)$ n'est autre chose que le nombre k relatif à la réduction et défini au paragraphe I; pourvu du moins que l'on choisisse le système des périodes ω de la façon la plus simple possible.

VII. — Autre mode de calcul.

On peut arriver à ce même résultat d'une manière plus simple, de sorte que je n'aurais pas pris un chemin aussi détourné si les propositions intermédiaires ne devaient pas nous être utiles dans la suite.

Soient U et U' deux intégrales abéliennes appartenant à la courbe C , à laquelle se rapporte le polygone P' ; la première sera de première espèce et la deuxième de troisième espèce; elle admettra deux points singuliers logarithmiques M_0 et M_1 avec les résidus $+1$ et -1 .

Prenons l'intégrale

$$\int U dU'$$

le long du périmètre P' ; elle sera égale à

$$2i\pi(U_0 - U_1),$$

U_0 et U_1 étant les valeurs de U aux points M_0 et M_1 ; le résultat serait encore le même si l'on intégrait le long du périmètre d'un quelconque des polygones appelés plus haut $P'(\beta)$, et en effet quand on passe du point M_0 intérieur à P' au point correspondant de $P'(\beta)$, la valeur de U_0 augmente d'une période; et quand on passe de M_1 au point correspondant de $P'(\beta)$, la valeur de U_1 augmente de la même période, de sorte que la différence $U_1 - U_0$ ne change pas.

D'autre part, cette même intégrale est égale à

$$\Phi(\omega, \omega'),$$

les ω étant les périodes de U par rapport à la courbe C , et les ω' étant les périodes correspondantes de U' , tandis que $\Phi(\omega, \omega')$ est la forme bilinéaire caractéristique relative à ces périodes. On a donc

$$\Phi(\omega, \omega') = 2i\pi(U_0 - U_1).$$

Prenons maintenant la même intégrale le long du périmètre de P , ce sera comme si on la prenait le long des divers polygones $P'(\beta)$ qui sont au nombre de n . On trouvera donc

$$2ni\pi(U_0 - U_1).$$

D'autre part l'intégrale sera égale à

$$F(y, y'),$$

les y étant les périodes de U par rapport à la courbe C , les y' étant les périodes correspondantes de U' , et $F(y, y')$ étant la forme bilinéaire relative à ces périodes. On aura donc

$$F(y, y') = 2ni\pi(U_0 - U_1),$$

d'où

$$F(y, y') = n\Phi(\omega, \omega').$$

Si nous prenons les périodes normales et le premier exemple du paragraphe I, nous aurons : pour

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6,$$

les valeurs

$$2i\pi, 0, 0, h, \frac{2i\pi}{\alpha}, 0;$$

pour

$$\omega_1, \omega_2,$$

les valeurs

$$\frac{2i\pi}{\alpha}, h;$$

d'où

$$y_1 = 2\omega_1, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 0, \quad y_4 = \omega_2, \quad y_5 = \omega_1, \quad y_6 = 0$$

avec les mêmes relations entre les y' et les ω' ; d'ailleurs

$$F(y, y') = y_1 y'_4 - y_4 y'_1 + y_2 y'_5 - y_5 y'_2 + y_3 y'_6 - y_6 y'_3,$$

$$\Phi(\omega, \omega') = \omega_1 \omega'_2 - \omega_2 \omega'_1,$$

d'où, en remplaçant les y et les y' par leurs valeurs en fonctions des ω et des ω' ,

$$F(y, y') = 2\Phi(\omega, \omega')$$

et

$$n = 2.$$

Passons au second exemple du paragraphe I; nous aurons (si $U = \lambda u_1 + \mu u_2$) :



pour

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8,$$

les valeurs

$$2i\pi\lambda, 2i\pi\mu, 0, 0, a\lambda + b\mu, b\lambda + c\mu, \frac{2i\pi\mu}{x_2^2}, \frac{2i\pi\lambda}{x_1^2};$$

pour

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4,$$

les valeurs

$$\frac{2i\pi\lambda}{x_1^2}, \frac{2i\pi\mu}{x_2^2}, a\lambda + b\mu, b\lambda + c\mu;$$

d'où

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1^2 \omega_1, & y_2 &= x_2^2 \omega_2, & y_3 &= 0, & y_4 &= 0, \\ y_5 &= \omega_3, & y_6 &= \omega_4, & y_7 &= \omega_1, & y_8 &= \omega_2 \end{aligned}$$

avec les mêmes relations entre les y' et les ω' ; d'ailleurs,

$$\begin{aligned} F(y, y') &= y_1 y'_5 - y_2 y'_4 + y_3 y'_6 - y_4 y'_3 + y_5 y'_7 - y_6 y'_2 + y_7 y'_8 - y_8 y'_1, \\ \Phi(\omega, \omega') &= \omega_1 \omega'_2 - \omega_2 \omega'_1 + \omega_3 \omega'_4 - \omega_4 \omega'_3. \end{aligned}$$

d'où

$$F(y, y') = x_1^2 \Phi(\omega, \omega')$$

et

$$n = x_1^2.$$

Les résultats du paragraphe précédent sont ainsi retrouvés et la méthode est évidemment générale.

VIII. — Cas où $q = 1$.

Je me propose maintenant d'étudier de plus près les circonstances de la réduction et je commence par rappeler et compléter les relations entre les nombres N , N' , Q , Q' , etc. Nous avons trouvé au paragraphe III les relations suivantes :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{cases} 2p = N - Q + 1, \\ 2q = N' - Q' + 1, \end{cases} \\ (2) \quad & Q + 2p - 2 = n(Q' + 2q - 2), \\ (3) \quad & N - 1 = n(N' - 1) - \mu. \end{aligned}$$

La formule (2) s'applique au cas où le nombre μ est égal à zéro, c'est-à-dire où il n'y a pas de sommet commun à plusieurs polygones $P'(\beta)$ qui se trouve à l'intérieur de P . Nous adopterons cette hypothèse; si d'ailleurs elle n'était pas satisfaite, et que ABCDA représentant le périmètre de P , un sommet commun E à plusieurs $P'(\beta)$ fût à l'intérieur de P , nous pourrions joindre AE et prendre pour périmètre de P la ligne fermée EABCD AE. Dans le polygone P modifié, E serait regardé comme un sommet, dont l'angle serait 2π , et le périmètre

comprendrait deux fois le côté EA, parcouru une fois dans le sens direct, une fois dans le sens rétrograde. Nous pouvons donc toujours supposer

$$\mu = 0.$$

Dans ce cas, la formule (3) devient

$$(3 \text{ bis}) \quad N - 1 = n(N' - 1),$$

elle est une conséquence immédiate des formules (1) et (2).

La formule (2) peut s'écrire

$$(4) \quad nQ' - Q = 2(p - 1) - 2n(q - 1).$$

Le premier membre de cette relation est susceptible d'une interprétation particulière. Nous avons vu au paragraphe V comment se forment les Q cycles de sommets de P . A chacun des Q' cycles de sommets de P' correspond une substitution

$$\Sigma = S_{2_1} S_{2_2} \dots S_{2_{n'}}.$$

portant sur n lettres. Cette substitution se décompose en un certain nombre de permutations circulaires. A chacune de ces permutations circulaires correspond un cycle de sommets de P . Il y a donc en tout Q' substitutions Σ , et le nombre total des permutations circulaires dont elles se composent est de Q .

Le nombre total des lettres est nQ' ; si alors λ_i est le nombre des permutations circulaires qui permutent i lettres, on aura

$$\Sigma \lambda_i = Q, \quad \Sigma i \lambda_i = nQ',$$

d'où

$$(5) \quad \Sigma (i - 1) \lambda_i = 2(p - 1) - 2n(q - 1).$$

Voyons en passant quelle est la relation de ces substitutions Σ avec les nombres ν , définis au paragraphe III. Chacun des points singuliers A' du paragraphe III correspond à un sommet de P' et par conséquent à une substitution Σ . Cette substitution permute n lettres correspondant aux n feuillets de la surface de Riemann C du paragraphe III ou aux n déterminations de M , c'est précisément la permutation que subissent ces n déterminations quand M' tourne autour de A' . Les points A , correspondant à divers sommets de P et par conséquent aux permutations circulaires en lesquelles se décompose Σ . On voit ainsi que ces permutations circulaires porteront respectivement sur

$$\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$$

lettres.



Nous allons examiner en particulier le cas où $q = 1$, c'est-à-dire celui où la courbe C est de genre 1, et où les intégrales abéliennes sont réductibles aux intégrales elliptiques.

La formule (5) devient alors :

$$(5 \text{ bis}) \quad \sum (i-1) \lambda_i = 2(p-1).$$

Ceci nous montre d'abord que p ne peut être nul, ce qui était d'ailleurs évident puisque alors C n'admettrait pas d'intégrale abélienne; si l'on supposait $p = 1$, tous les nombres i devraient être égaux à 1, c'est-à-dire que toutes nos substitutions Σ devraient se réduire à la substitution identique; il n'y aurait pas sur la surface de Riemann C de points de ramification A ; nous devrions prendre pour le polygone fuchsien un quadrilatère, à côtés opposés conjugués, dont la somme des angles serait 2π ; ce quadrilatère se réduirait alors à un parallélogramme rectiligne de la géométrie ordinaire; puisque la somme des angles serait 2π et non plus petite que 2π comme dans la géométrie non euclidienne; nous retomberions en définitive sur la théorie ordinaire de la transformation des fonctions elliptiques.

Examinons donc le cas de

$$q = 1, \quad -p > 1.$$

Deux hypothèses sont possibles :

1° Ou bien toutes les substitutions Σ se réduisent à une permutation entre deux lettres. Dans ce cas chacune de ces substitutions se décompose en un certain nombre de permutations circulaires, qui ne portent que sur une lettre, de sorte que le terme $(i-1)$ correspondant est nul, excepté pour l'une d'elles qui porte sur deux lettres, de sorte que le terme $(i-1)$ correspondant est égal à 1. Nous aurons donc dans le premier membre de (5 bis) autant de termes égaux à 1 qu'il y a de substitutions Σ , tous les autres termes étant nuls; ce premier membre est donc égal au nombre des substitutions Σ . A chacune de ces substitutions Σ correspond un cycle de sommets de P' . Si, comme nous l'avons supposé au paragraphe III, nous choisissons ce polygone P' de la façon la plus simple possible, il n'y en aura pas d'autres. Ainsi notre premier membre est égal au nombre de ces cycles et l'on a

$$(6) \quad Q' = 2p - 2$$

et par conséquent

$$(7) \quad N = 2p - 1.$$

La somme des angles sera π pour chacun de ces cycles (puisque le nombre ν est égal à 2). Les polygones P' ainsi définis seront des polygones P' de la première sorte.

2° On peut supposer, au contraire, que quelques-unes des substitutions Σ ne se réduisent pas à une permutation entre deux lettres; que, par exemple, l'une d'elles se réduit à une permutation circulaire entre trois ou plusieurs lettres, ou à deux permutations entre deux lettres. Alors le premier membre de (5 bis) contient plusieurs termes égaux à 1, ou un terme supérieur à 1 et correspondant à cette substitution, de sorte que l'on a

$$Q' < 2p - 2, \quad N < 2p - 1.$$

Les polygones P' ainsi définis seront des polygones P' de la deuxième sorte.

Les cas les plus simples sont ceux d'un quadrilatère dont les côtés opposés sont conjugués et dont la somme des angles est égale à π ; ou bien encore celui d'un hexagone dont les côtés opposés sont conjugués et qui a deux cycles de sommets, avec des sommes d'angles de π et de $\frac{2\pi}{3}$.

Nous verrons plus loin que les polygones P' de la deuxième sorte peuvent être regardés comme des dégénérescences de ceux de la première sorte.

Examinons surtout ceux de la première sorte. Pour déterminer un polygone de $2N' = 4p - 2$ côtés, il faut $8p - 7$ données. Mais notre polygone est assujéti à certaines conditions. D'abord les côtés conjugués doivent être égaux (au point de vue non euclidien), ce qui fait $N' = 2p - 1$ conditions; ensuite la somme des angles de chaque cycle doit être égale à π , ce qui fait $Q' = 2p - 2$ conditions. Il reste donc

$$(8p - 7) - (2p - 1) - (2p - 2) = 4p - 4$$

données arbitraires.

Mais ces données sont réelles, elles équivalent donc à $2p - 2$ données arbitraires complexes.

Comparons ce nombre à celui des périodes arbitraires de notre tableau. Le tableau des périodes peut être réduit à la forme canonique comme nous l'avons fait au paragraphe I; reportons-nous par exemple au premier exemple de ce paragraphe où $q = 1$, $p = 3$; nous voyons que dans ce tableau figurent quatre arbitraires h, a, b, c ; le nombre α est l'entier caractéristique de la réduction et ne doit pas être regardé comme arbitraire; c'est notre nombre n . En général,



nous aurons une arbitraire correspondant à h , et $\frac{p(p-1)}{2}$ arbitraires analogues à a, b, c ; en tout

$$\frac{p(p-1)}{2} + 1.$$

Ce nombre n'est pas égal à $2p-2$ et cela ne doit pas nous étonner, puisqu'un système quelconque de périodes ne correspond pas toujours à une courbe C , ou, pour parler le langage du paragraphe I, à des fonctions abéliennes spéciales. La différence

$$\frac{p(p-1)}{2} + 1 - (2p-2) = \frac{p^2-5p+6}{2}$$

est le nombre des conditions qu'il faut imposer à un système de périodes *réductibles* pour qu'il conduise à des fonctions abéliennes spéciales.

Considérons maintenant un système de périodes *quelconques*, non réductibles en général; le nombre des périodes arbitraires est

$$\frac{p(p+1)}{2}.$$

Le nombre des données arbitraires dont dépend une courbe C de genre p (modules) est

$$3p-3.$$

La différence

$$\frac{p(p+1)}{2} - 3p + 3 = \frac{p^2-5p+6}{2}$$

représente le nombre des conditions qu'il faut imposer à un système de périodes *quelconques* pour qu'il conduise à des fonctions abéliennes spéciales.

On remarquera que, comme il convient, ce nombre de conditions est le même dans les deux cas.

Si l'on avait pris un polygone de la deuxième sorte, on aurait eu $Q' < 2p-2$ et le nombre des arbitraires (réelles) eût été

$$(4N-3) - N' - Q' = 3N' - Q' - 3 = 2Q' < 4p-4.$$

Voyons, en nous plaçant à un point de vue entièrement différent, à quoi correspondent ces Q' points singuliers. Considérons la courbe C , qui sera de degré m et aura par conséquent

$$d = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - p$$

points doubles.

Soit u_1 l'intégrale abélienne de C qui est réductible aux intégrales elliptiques. Les points A correspondant aux sommets de P' seront ceux pour lesquels la

dérivée de cette intégrale $\frac{du_1}{dx}$ s'annulera. Ce seront donc les points d'intersection de C avec la courbe

$$\frac{du_1}{dx} = 0.$$

Cette courbe, adjointe à C , et passant par les d points doubles, est de degré $m-3$. Elle coupe C (en dehors des points doubles) en

$$m(m-3) - 2d = 2(p-1)$$

points. A chacun d'eux correspond en général une valeur de u_1 , et par conséquent un cycle de sommets de P' .

En général, ces $2p-2$ points d'intersection sont distincts et correspondent à autant de valeurs distinctes de u_1 . Le nombre des cycles de sommets de P' est donc

$$Q' = 2p-2.$$

Le polygone P' est alors de la première sorte, mais il peut se faire également que les deux courbes se touchent de façon que deux des points d'intersection se confondent (c'est le cas où l'une des substitutions Σ permute circulairement trois lettres), ou bien encore que deux de ces points correspondent à une même valeur de u_1 (c'est le cas où l'une des substitutions Σ permute à la fois deux lettres β_1 et β_2 , et deux autres lettres β_3 et β_4). Le nombre Q' est alors plus petit que $2p-2$ et le polygone P' est de la seconde sorte.

IX. — Cas de $q > 1$.

Nous avons alors à appliquer la formule

$$(1) \quad \Sigma(i-1)\lambda_i = 2(p-1) - 2n(q-1)$$

et nous ferons une première remarque; si

$$(2) \quad n > \frac{p-1}{q-1},$$

le premier membre de (1) doit être négatif, ce qui est absurde. Il est donc impossible de construire les polygones P et P' de façon à satisfaire à l'inégalité (2). Et cependant nous pouvons construire un tableau de périodes réductibles analogue, par exemple, au tableau relatif du deuxième exemple du paragraphe I. Dans ce tableau $q=2$, $p=4$ et $n=2$. Il est clair que nous pouvons



choisir les entiers α et β qui sont arbitraires de telle façon que le produit $\alpha\beta$ soit plus grand que 3, c'est-à-dire que $\frac{p-1}{q-1}$.

Nous pouvons donc construire un tableau de périodes réductibles, tel que l'inégalité (2) soit satisfaite, et cela non seulement pour $p=4$, $q=2$ mais quels que soient p et q , le résultat étant évidemment général. A la vérité, cela n'implique pas l'existence des courbes C et C' , puisque ces périodes pourraient engendrer des fonctions abéliennes *non spéciales*. Mais dans l'exemple choisi ($p=4$, $q=2$) il suffit d'une condition pour que les fonctions abéliennes engendrées soient spéciales et pour que la courbe C existe; et, en effet, pour $p=4$, on a $\frac{p^2-5p+6}{2}=1$. Comme il reste dans notre tableau plusieurs arbitraires, nous pourrions disposer de l'une d'elles de façon à satisfaire à cette condition, et la courbe C existera. Quant à la courbe C' , elle existe toujours puisque, pour $q=2$, on a $\frac{q^2-5q+6}{2}=0$.

Ainsi nous pourrions trouver un système de périodes réductibles, telles que C et C' existent et que l'inégalité (2) ait lieu. Il suffira pour cela, quel que soit n , que le nombre des arbitraires

$$\frac{q(q+1)}{2} + \frac{(p-q)(p-q+1)}{2}$$

soit plus grand que le nombre des conditions à remplir

$$\frac{p^2-5p+6}{2} + \frac{q^2-5q+6}{2}.$$

Qu'est-ce à dire? Ainsi que nous l'avons vu au paragraphe I, si l'on considère un système S' de q points de C' , on peut lui faire correspondre un système S de q points de C , de telle façon que toute fonction rationnelle symétrique des coordonnées des divers points de S' soit une fonction rationnelle symétrique des coordonnées des divers points de S . Mais il ne s'ensuit pas qu'à un point M' de C' , on puisse faire correspondre un point M de C , de telle sorte que toute fonction rationnelle des coordonnées de M soit une fonction rationnelle des coordonnées de M' .

Quand la seconde condition (qui entraîne la première) sera remplie, nous dirons que la courbe C est *multiple* de la courbe C' , et quand la première condition sera remplie sans que la seconde le soit, nous dirons que la courbe C est *pseudo-multiple* de la courbe C' .

L'analyse qui précède nous montre que pour des valeurs convenables de p , q et n il existe certainement des courbes pseudo-multiples.

Maintenant il peut se faire que

$$(3) \quad n = \frac{p-1}{q-1}.$$

Nous pouvons alors construire les polygones P' et P ; seulement le premier membre de (1) est nul, de sorte que tous les nombres i doivent être égaux à 1, c'est-à-dire que toutes les substitutions Σ doivent se réduire à la substitution identique. Alors il n'y a pas de point de ramification tel que A' sur C' . Si nous choisissons le polygone P' de la façon la plus simple possible, on n'aura qu'un seul cycle de sommets de P' et la somme des angles sera 2π ; on aura donc :

$$Q' = 1, \quad N' = 4q.$$

Nous dirons alors que le polygone P' est de la troisième sorte. L'exemple le plus simple est $q=2$, $p=3$, $n=2$; le polygone P' est un octogone dont les côtés opposés sont conjugués; le polygone P est un polygone de 14 côtés formé par la réunion de deux de ces octogones et dont les côtés opposés sont conjugués.

Supposons maintenant

$$(4) \quad n < \frac{p-1}{q-1};$$

nous pouvons alors faire deux hypothèses :

1° Ou bien toutes les substitutions Σ se réduisent à une permutation entre deux lettres; on a alors

$$\begin{aligned} \Sigma(i-1) \lambda_i &= Q' = 2(p-1) - 2n(q-1), \\ N' &= Q' + 2q - 1 = 2(p-1) - 2(n-1)(q-1) + 1. \end{aligned}$$

Le nombre des données arbitraires (réelles) qui définissent P' est

$$4N' - 3 - N' - Q' = 2Q' + 6q - 6 = 4(p-1) - (4n-6)(q-1)$$

et elles équivalent à

$$v = 2(p-1) - (2n-3)(q-1)$$

arbitraires complexes. Nous dirons dans ce cas que le polygone P' est de la première sorte.

2° Ou bien toutes les substitutions Σ ne se réduisent pas à une permutation



entre deux lettres; alors

$$Q' < 2(p-1) - 2n(q-1), \quad \gamma < 2(p-1) - (2n-3)(q-1).$$

Le polygone P' est alors de la deuxième sorte.

Nous pouvons, ainsi que nous l'avons fait pour le cas de $q=1$, comparer le nombre des arbitraires du polygone P' avec celui des périodes arbitraires. Nous nous bornerons au cas des polygones de la première sorte; on a alors

$$\gamma = 2(p-1) - (2n-3)(q-1)$$

données arbitraires complexes dans le polygone P' . Le nombre des arbitraires dans le tableau des périodes réductibles est

$$H = \frac{q(q+1)}{2} + \frac{(p-q)(p-q+1)}{2}.$$

Étant donné un tableau de périodes réductibles, à combien de conditions doivent satisfaire les périodes de ce tableau pour que l'on soit conduit à une courbe C multiple d'une courbe C' ? Le nombre cherché de ces conditions est $H - \gamma$.

Comparons-le avec le nombre

$$\frac{p^2 - 5p + 6}{2}$$

des conditions pour qu'un système *quelconque* de périodes conduise à des fonctions abéliennes spéciales, c'est-à-dire pour que la courbe C existe. La différence

$$H - \gamma - \frac{p^2 - 5p + 6}{2}$$

est égale à $(1-q)(p-q+2-2n)$.

On voit que l'égalité a lieu pour $q=1$, ainsi que nous l'avons vu dans le paragraphe précédent; en revanche elle n'a plus lieu en général pour $q > 1$.

1° Si

$$(5) \quad p = q + 2n - 2,$$

le nombre des conditions pour qu'un système de périodes *réductibles* engendre deux courbes algébriques C et C' telle que la première soit multiple de l'autre, est égal au nombre des conditions pour qu'un système de périodes *quelconques* engendre une courbe algébrique C .

2° Si

$$(6) \quad p < q + 2n - 2,$$

le premier nombre est supérieur au second; c'est-à-dire qu'il peut arriver que les conditions pour que C existe étant satisfaites, cette courbe C ne soit cependant pas multiple d'une courbe C' ; et cela peut s'expliquer de deux manières:

Ou bien la courbe C' n'existe pas. En effet, si nous avons q intégrales abéliennes réductibles n'ayant chacune que $2q$ périodes distinctes, il peut se faire que les périodes de ces q intégrales engendrent des fonctions abéliennes à q variables *non spéciales*.

Ou bien la courbe C' existe, mais la courbe C est seulement *pseudo-multiple* de C' . Le nombre des conditions pour que la courbe C' existe est

$$\frac{q^2 - 5q + 6}{2}.$$

Si donc

$$(7) \quad H - \gamma > \frac{p^2 - 5p + 6}{2} + \frac{q^2 - 5q + 6}{2},$$

il peut arriver que, les conditions pour que les courbes C et C' existent l'une et l'autre étant satisfaites, la courbe C ne soit cependant pas multiple de C' . Il est certain dans ce cas que C est pseudo-multiple de C' .

3° Si au contraire

$$(8) \quad p > q + 2n - 2,$$

le premier nombre est plus petit que le second.

Pour nous résumer: soit α le nombre des conditions pour que C existe, les périodes étant quelconques; soit β le nombre des conditions pour que C existe, les périodes étant réductibles; soit γ le nombre des conditions pour que C et C' existent, les périodes étant réductibles; et enfin δ le nombre des conditions pour que C soit multiple de C' . On aura certainement

$$\delta \geq \gamma \geq \beta, \quad \beta \leq \alpha.$$

Les égalités et inégalités (5), (6) et (8) entraînent respectivement les conséquences

$$\alpha = \delta, \quad \alpha < \delta, \quad \alpha > \delta.$$

Si l'on a $\alpha > \delta$, on a certainement $\delta > \beta$, et dans l'hypothèse (7) on a même $\gamma > \beta$; si l'on a $\alpha > \delta$, on a certainement $\alpha > \beta$; mais, même dans cette hypothèse, il peut très bien se faire que l'on ait par exemple

$$\alpha > \delta > \gamma > \beta,$$

ce qui entraînerait encore l'existence de courbes pseudo-multiples. Tout ce que

nous pouvons dire, c'est que l'existence de ces courbes, certaine dans l'hypothèse (7) et dans l'hypothèse (2), est possible, on pourrait presque dire probable, dans les autres hypothèses.

Plaçons-nous maintenant au même point de vue qu'à la fin du paragraphe précédent. Soit d'abord $q = 2$. Soient u et v les deux intégrales réductibles. La courbe C sera de degré m avec

$$d = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - p$$

points doubles. Les courbes

$$\frac{du}{dx} = \lambda \frac{dv}{dx}$$

seront des courbes adjointes de degré $m-3$ qui couperont C en $2p-2$ points en dehors des points doubles.

Supposons que la courbe C soit pseudo-multiple de C' ; soient $x'_1, y'_1; x'_2, y'_2$ un couple de points quelconques de C' ; et $x_1, y_1; x_2, y_2$ le couple de points correspondant de C . (Je prends un système de 2 points parce que $q = 2$.) Appelons K' et K ces deux couples; à un couple K correspond un seul couple K' ; mais à un couple K' correspondent plusieurs couples K . Dans quelle condition ces couples s'échangent-ils entre eux? Il y a certains couples qu'on peut appeler *couples de ramification*, parce que deux ou plusieurs couples K s'échangent, quand le couple K' subit un cycle de variations en tournant autour d'un de ces couples de ramification. Ce qui caractérise ces couples, c'est que le jacobien est nul :

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(x_1, x_2)} = 0.$$

Soient u_1 et u_2, v_1 et v_2 les valeurs des intégrales u et v aux points x_1 et x_2 ; soient

$$U = u_1 + u_2, \quad V = v_1 + v_2.$$

Si nous considérons deux couples K correspondant à un même couple K' et par conséquent susceptibles de s'échanger entre eux, les valeurs de U et V seront les mêmes pour ces deux couples. La condition précédente équivaut donc à :

$$\frac{\partial(U, V)}{\partial(x_1, x_2)} = \frac{du_1}{dx_1} \frac{dv_2}{dx_2} - \frac{du_2}{dx_2} \frac{dv_1}{dx_1} = 0,$$

ce qui signifie que les deux points x_1 et x_2 du couple de ramification sont sur une même courbe du faisceau

$$(9) \quad \frac{du}{dx} + \lambda \frac{dv}{dx} = 0.$$

Pour trouver les couples de ramification, il suffira donc de mener une courbe quelconque de ce faisceau et de prendre deux de ses points d'intersection avec C .

Supposons maintenant que la courbe C soit multiple de C' ; alors (x'_1, y'_1) sera une fonction uniforme de (x_1, y_1) . Si donc M' est un point de C' ; M_1 et M_2 deux des points de C qui correspondent à M' ; u_1, u_2 et v_1, v_2 les valeurs correspondantes des intégrales u et v , on aura

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2.$$

Soient alors A' un des points de ramification sur C' et A_1 le point correspondant de C ; on aura en A_1

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dx} = 0,$$

c'est-à-dire que A_1 devra être un des points bases du faisceau (9) en dehors des points doubles.

Supposons que le polygone P' soit de la première sorte, il y aura

$$Q' = 2(p-1) - 2n(q-1)$$

de ces points bases en dehors des points doubles, puisqu'il y a Q' points de ramification. Il restera donc pour une courbe quelconque du faisceau

$$2n(q-1)$$

points d'intersection en dehors des points bases et des points doubles.

Supposons maintenant que l'on considère deux points M_1 et M_2 correspondant à un même point M' et qu'on fasse varier d'une manière continue M_1, M_2 et M' ; il viendra

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2,$$

d'où

$$\frac{du_1}{dv_1} = \frac{du_2}{dv_2},$$

ce qui veut dire que les deux points M_1 et M_2 sont sur une même courbe du faisceau. Mais à un point M' , correspondent n points M qui sont tous sur une même courbe du faisceau. Les $2n(q-1)$ intersections de cette courbe avec C se répartissent donc en $2q-2$ groupes de n points; les n points de chaque groupe correspondent à un même point M' ; ainsi, à ces $2n(q-1)$ intersections correspondent sur C' seulement $2q-2$ points M' qui, correspondant à une même valeur de $\frac{du}{dv}$, sont tous sur une même courbe adjointe à C' , de degré $m'-3$ si C' est de degré m' .



Dans ce dernier cas, considérons un couple de points M_1 et M_2 sur C , situés sur une même courbe du faisceau, mais en dehors des points bases; considérons le couple correspondant M'_1 et M'_2 sur C' . Comme on a

$$\frac{\partial(U, V)}{\partial(x_1, x_2)} = 0,$$

on pourrait croire que

$$\frac{\partial(x'_1, x'_2)}{\partial(x_1, x_2)} = 0$$

et que ce couple est de ramification, ainsi qu'il arrive pour les courbes pseudo-multiples. Mais il n'en est rien, il y a exception dans ce cas. Nous avons, en effet,

$$\frac{\partial(U, V)}{\partial(x_1, x_2)} \cdot \frac{\partial(x'_1, x'_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \frac{\partial(U, V)}{\partial(x_1, x_2)}.$$

Le second membre peut s'annuler, soit quand le second facteur du premier membre s'annule, soit quand le premier facteur s'annule. Ici c'est ce premier facteur qui s'annule, puisque M_1 et M_2 sont sur une même courbe adjointe de degré $m' = 3$.

Si le polygone P' est de la deuxième sorte, le nombre Q' est plus petit que

$$2(p-1) - 2n(q-1),$$

mais le nombre des points bases situés sur C est toujours le même, en tenant compte du degré de multiplicité; soit parce que C touche toutes les courbes du faisceau, soit parce que deux points bases correspondent à un même point M' et par conséquent à un même sommet de P' . Si enfin P' est de la troisième sorte, il n'y aura pas de point de ramification et par conséquent pas de point base sur C . Le nombre total des intersections sera

$$2p - 2 = 2n(q-1)$$

se répartissant comme plus haut en $2q - 2$ groupes de n points.

Si, dans un cas quelconque, une courbe du faisceau devient tangente à C , c'est que deux de ces groupes se confondent, ou que deux points d'un même groupe se confondent. Dans le premier cas la courbe n'est pas simplement tangente à C , mais n fois tangente à C . Dans le deuxième cas, le contact ne peut avoir lieu qu'en un point base, puisque ce n'est que là que deux des points correspondant à M' peuvent s'échanger; et comme alors deux des points du groupe doivent venir se confondre au point base, comme d'ailleurs en un point base quelconque, on aura $\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dx} = 0$, ce qui veut dire que l'un des points

du groupe ne peut venir en ce point base sans qu'un autre point du groupe y vienne également; nous devons conclure :

Celle des courbes du faisceau qui touche C en un point base l'y rencontre en trois points confondus.

Le cas le plus simple est le suivant :

$$p = 3, \quad q = 2, \quad n = 2, \quad m = m' = 4.$$

La courbe C est du quatrième degré sans point double, la courbe C' du quatrième degré avec un point double; P' est de la troisième sorte. Les courbes adjointes à C' sont des droites passant par le point double; les courbes du faisceau (g) sont des droites passant par un point fixe B . Ce point fixe B n'est pas sur C puisque nous ne devons pas avoir de point base sur C . Si C est multiple de C' , toute droite passant par B coupera C en 4 points qui correspondront à 2 points de C' situés sur une même droite passant par le point double. Toute tangente menée à C par B sera une tangente double; il y en aura 6, correspondant aux 6 tangentes menées à C' par le point double. Donc, sur 28 tangentes doubles de C , il y en a 6 qui passent par un même point.

Soit maintenant

$$p = 4, \quad q = 2, \quad n = 2, \quad m = 5, \quad m' = 4;$$

P' est de la première sorte, $Q' = 3$; C est du cinquième degré avec 2 points doubles, C' du quatrième degré avec 1 point double. Les courbes du faisceau (g) sont des coniques passant par les 2 points doubles et par les $Q' = 3$ points bases. Ces coniques coupent C en 4 points en dehors des points doubles et des points bases; ces 4 points correspondent aux 2 intersections de C' avec une droite passant par le point double de C' .

Si C est multiple de C' , il y a 6 de ces coniques qui sont doublement tangentes à C ; celle de ces coniques qui touche C en un des points bases est osculatrice à C .

Terminons en supposant $q = 3$. Si C est pseudo-multiple de C' au lieu de systèmes de 2 points, il faudra envisager des triplets ou systèmes de 3 points, au lieu de 2 intégrales u et v , il en faudra considérer 3, u , v et w ; le faisceau (g) deviendra donc un réseau

$$(g \text{ bis}) \quad \frac{du}{dx} + h \frac{dv}{dx} + \mu \frac{dw}{dx} = 0.$$

Rien à changer d'ailleurs à ce qui précède; pour obtenir les triplets de ramifi-



cation on prendra une courbe quelconque de ce réseau et trois des points d'intersection de cette courbe avec C.

Supposons maintenant que C soit multiple de C'; en un point de ramification on aura

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dx} = \frac{dw}{dx} = 0;$$

c'est-à-dire que ce point sera l'un des points bases du réseau situé sur C.

Si M_1 et M_2 correspondent à un même point M' , on aura

$$\frac{du_1}{du_2} = \frac{dv_1}{dv_2} = \frac{dw_1}{dw_2},$$

ce qui montre que toute courbe du réseau qui passe par M_1 passe aussi par M_2 .

Si donc deux courbes du réseau se coupent sur C en un point, elles ont n points d'intersection sur C qui correspondent à un même point M' .

Un certain nombre des théorèmes précédents sont évidemment généraux; celui d'après lequel toute courbe du réseau en dehors des points bases et des points doubles coupe C en $2n(q-1)$ points qui se répartissent en $2q-2$ groupes de n points; celui d'après lequel toute courbe du réseau qui touche C en dehors des points bases touche C en n points, etc.

Le cas le plus simple est

$$p=5, \quad q=3, \quad n=2, \quad m=6, \quad m'=4;$$

P' est de la troisième sorte, C a 5 points doubles; C' n'en a pas. Le réseau est formé de cubiques passant par ces points doubles. Si nous envisageons toutes celles de ces cubiques qui passent par un point B de C, elles iront toutes passer par un autre point B₁ de C.

X. — Étude spéciale du cas elliptique.

Supposons $q=1$, d'où

$$Q'=2p-2.$$

Le cas le plus simple est $p=2$; d'où $Q'=2$, $N=3$, le polygone P' est un hexagone. Nous pouvons supposer d'abord que les côtés opposés sont conjugués, de telle façon que les côtés $\gamma(1)$ et $\gamma(4)$; $\gamma(2)$ et $\gamma(5)$; $\gamma(3)$ et $\gamma(6)$ soient conjugués. Les sommets se répartissent alors en deux cycles auxquels corres-

pondent les deux substitutions

$$(1) \quad \Sigma = S_1 S_2^{-1} S_3, \quad \Sigma' = S_1^{-1} S_2 S_3^{-1}$$

pour employer la notation du paragraphe V.

Mais on pourrait faire d'autres hypothèses sur la loi de conjugaison des côtés; ces hypothèses se ramènent à deux que j'écris :

$$(2) \quad 12, \quad 37, \quad 46,$$

$$(3) \quad 13, \quad 25, \quad 46.$$

Voici la signification de cette notation; quand j'écris 12 par exemple, je veux dire que les côtés $\gamma(1)$ et $\gamma(2)$ sont conjugués; de sorte que l'hypothèse des côtés opposés conjugués s'écrit

$$(4) \quad 14, \quad 25, \quad 36.$$

Dans l'hypothèse (2) les substitutions Σ relatives aux deux cycles s'écrivent

$$\Sigma = S_1^{-1}, \quad \Sigma' = S_1 S_2 S_3^{-1} S_1^{-1}$$

et dans l'hypothèse (3)

$$\Sigma = S_1 S_1, \quad \Sigma' = S_2 S_3^{-1} S_2^{-1} S_1^{-1}.$$

Seulement il est clair que ces deux dernières hypothèses ne sont pas distinctes de la précédente; si, en effet, les côtés de l'hexagone P' étaient conjugués d'après l'une des deux lois (2) ou (3), on mènerait l'une des diagonales de cet hexagone qui en partagerait la surface en deux parties P'_1 et P'_2 ; soient C un des côtés de P' appartenant à P'_1 et C' son conjugué que je supposerai appartenir à P'_2 ; soient S la substitution du groupe fuchsien qui change C en C', et P'_3 le transformé de P'_1 par cette substitution.

Nous pouvons remplacer le polygone $P' = P'_1 + P'_2$ par le polygone $P'_3 + P'_1$; ce nouveau polygone engendrera le même groupe fuchsien, et nous pourrions nous arranger pour que dans ce nouveau polygone les côtés opposés soient conjugués.

Revenons aux équations (1); les deux substitutions Σ et Σ' doivent se réduire à des permutations entre deux lettres, puisque le polygone P' est de la première sorte pour employer la terminologie du paragraphe précédent. Regardons ces deux substitutions comme données et proposons-nous de déterminer les substitutions S_1 , S_2 et S_3 . On trouvera successivement

$$S_2^{-1} S_3 = S_1^{-1} \Sigma, \quad S_1 \Sigma' = S_2 S_3^{-1}, \quad S_2 S_2^{-1} = \Sigma'^{-1} S_1^{-1},$$

$$\Sigma S_1^{-1} = S_1 S_2^{-1} S_3 S_1^{-1} = S_1 S_2^{-1} S_3 S_2^{-1} S_1 S_1^{-1} = S_1 S_2^{-1} \Sigma'^{-1} S_1^{-1} S_2 S_1^{-1},$$

$$\Sigma S_1^{-1} = (S_2 S_1^{-1})^{-1} (\Sigma'^{-1} S_1^{-1}) (S_2 S_1^{-1}).$$



La signification de cette identité est que les deux substitutions ΣS_1^{-1} et $\Sigma^{-1} S_1^{-1}$ sont semblables et que la première est la transformée de la deuxième par la substitution $S_2 S_1^{-1}$.

Nous devons donc chercher à déterminer S_1^{-1} de telle façon que les deux substitutions ΣS_1^{-1} et $\Sigma^{-1} S_1^{-1}$ (ou ce qui revient au même dans ce cas particulier $\Sigma' S_1^{-1}$, puisque Σ' se réduisant à une permutation entre deux lettres, on a $\Sigma' = \Sigma^{-1}$) soient semblables.

Dans ce cas $S_1^{-1} \Sigma$ et $S_1^{-1} \Sigma'$ sont également semblables, puisqu'il est clair que ΣS_1^{-1} et $S_1^{-1} \Sigma = S_1^{-1} (\Sigma S_1^{-1}) S_1$ sont semblables.

Voyons comment on peut reconnaître que deux permutations entre n lettres sont semblables. Supposons que la substitution S se réduise à α permutations circulaires entre

$$p_1, p_2, \dots, p_\alpha \text{ lettres,}$$

de sorte que $p_1 + p_2 + \dots + p_\alpha = n$. Nous dirons alors que S répartit les n lettres en α cycles comprenant respectivement $p_1, p_2, \dots, p_\alpha$ lettres.

La condition nécessaire et suffisante pour que deux substitutions soient semblables est alors que les nombres $\alpha, p_1, p_2, \dots, p_\alpha$ soient les mêmes pour les deux substitutions et, quand cette condition sera remplie, il sera facile de trouver la transformation qui transforme l'une de ces substitutions dans l'autre.

Cela posé, imaginons que Σ permute deux lettres a et b et que S_1^{-1} admette α cycles de $p_1, p_2, \dots, p_\alpha$ lettres. Alors de deux choses l'une :

1° Ou bien a et b appartiennent à un même cycle de S_1^{-1} . Dans ce cas $S_1^{-1} \Sigma$ aura les mêmes cycles que S_1^{-1} ; seulement le cycle auquel appartiennent a et b se sera décomposé en deux, le premier commençant par a et le second par b . Si donc le cycle de S_1^{-1} avait p_1 lettres et que les deux lettres a et b s'y rencontrent à un intervalle de q lettres, les deux cycles nouveaux auront respectivement $p_1 - q$ et q lettres.

2° Ou bien a et b appartiennent à deux cycles différents de S_1^{-1} ayant respectivement p_1 et p_2 lettres; dans ce cas dans $S_1^{-1} \Sigma$, ces deux cycles se fondront en un seul qui aura $p_1 + p_2$ lettres.

D'où la règle suivante pour former S_1^{-1} ; supposons que Σ permute les lettres a et b et que Σ' permute les lettres c et d ; alors S_1^{-1} devra satisfaire à l'une des conditions suivantes :

1° Ou bien les quatre lettres a, b, c, d appartiendront à un même cycle

de S_1^{-1} et y occuperont les rangs

$$R_a, R_b, R_c, R_d,$$

de telle façon que

$$R_a - R_b = R_c - R_d,$$

c'est-à-dire que les deux distances ab et cd soient les mêmes.

2° Ou bien que ces deux couples de lettres ab et cd soient dans deux cycles différents, que ces deux cycles aient le même nombre de lettres, et que les distances ab et cd soient les mêmes.

3° Ou bien que les quatre lettres a, b, c, d appartiennent à quatre cycles C_a, C_b, C_c, C_d ayant respectivement N_a, N_b, N_c, N_d lettres et de telle façon que

$$\begin{aligned} C_a &\leq C_b, & C_c &\leq C_d, \\ N_a &= N_c, & N_b &= N_d \end{aligned}$$

(ou $N_a = N_d, N_b = N_c$).

On voit de combien de manières on peut déterminer S_1 et ce qu'il y reste d'arbitraires.

Une fois S_1 déterminée, nous connaissons les deux substitutions semblables $\Sigma S_1^{-1}, \Sigma' S_1^{-1}$ et il nous sera facile de déterminer la substitution $S_2 S_1^{-1}$ qui les transforme l'une dans l'autre. Nous aurons donc S_2 et nous en déduirons immédiatement S_2 .

Le problème comporte donc en général un grand nombre de solutions.

Lorsqu'on en connaîtra une, voyons comment nous pourrions construire le polygone P . Partons de l'hexagone P' . Le polygone P sera formé de n hexagones $P'(1), P'(2), \dots, P'(n)$, congruents à P' . Représentons symboliquement ces n hexagones par n points $A_1, A_2, \dots, A_n$. Supposons que la substitution S_1 change A_2 en A_3 , nous joindrons les deux points A_2 et A_3 par un trait continu; ces traits continus seront ce que j'appellerai les lignes L_1 . Nous définirons de même les lignes L_2 et les lignes L_3 , à l'aide des substitutions S_2 et S_3 . Une condition à remplir, c'est qu'en suivant les lignes L_1, L_2 et L_3 , on puisse passer d'un quelconque des points A à un autre, c'est-à-dire que le groupe dérivé de S_1, S_2, S_3 , que j'appellerai le groupe (S_1, S_2, S_3) , soit transitif.

Si cette condition est remplie, on pourra en général aller d'un des points A à un autre par plusieurs chemins différents. Pratiquons alors des coupures dans quelques-unes des lignes L_1, L_2, L_3 jusqu'à ce qu'on ne puisse plus aller d'un point A à un autre que d'une seule manière sans revenir sur ses pas. Nous disposerons alors les hexagones $P'(x)$ de la façon suivante : supposons que A_x

et A_3 soient reliés par une ligne L_i non affectée de coupure; alors les deux hexagones $P'(x)$ et $P'(\beta)$ seront contigus de telle façon que le $(i+3)^{\text{ème}}$ côté de $P'(x)$ coïncide avec le $i^{\text{ème}}$ côté de $P'(\beta)$. Si la ligne L_i est affectée d'une coupure, ces deux hexagones ne seront plus contigus, mais le $(i+3)^{\text{ème}}$ côté de $P'(x)$ et le $i^{\text{ème}}$ côté de $P'(\beta)$ seront deux côtés conjugués du périmètre de P .

Il est possible de choisir S_i de plusieurs manières, de façon à satisfaire aux équations (1) et de telle sorte que le groupe (S_1, S_2, S_3) soit transitif. Mais il est aisé de comprendre que toutes ces manières ne sont pas essentiellement distinctes. Nous supposons en effet $p=2$ et nous nous donnons l'entier n de telle façon que le tableau des périodes réduites s'écrive

$$\begin{array}{ccc} 2i\pi & 0 & a \\ 0 & 2i\pi & b \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{2i\pi}{n} \\ \frac{2i\pi}{n} \end{array}$$

Il dépend donc de deux constantes a et b qui sont arbitraires. Ces deux constantes définissent la courbe C qui varie d'une manière continue, quand les constantes varient elles-mêmes d'une manière continue. Les courbes C réduites forment donc une seule série analytique.

Si nous nous donnons les substitutions S_1, S_2, S_3 et le polygone P , nous pourrions construire le polygone P . Ce dernier polygone et par conséquent la courbe C varient alors d'une façon continue quand les éléments de P' varient d'une façon continue. Les courbes C ainsi obtenues forment donc une série analytique.

Partons maintenant d'autres substitutions S_1, S_2, S_3 ; nous obtiendrons encore une série analytique de courbes C ; mais cette série sera identique à la première puisqu'il n'y en a qu'une.

On doit donc pouvoir passer des substitutions S_1, S_2, S_3 aux substitutions S'_1, S'_2, S'_3 en transformant l'hexagone P' comme nous l'avons expliqué au début de ce paragraphe; c'est-à-dire en le coupant par une diagonale qui le divise en deux polygones P'_1 et P'_2 et remplaçant $P' = P'_1 + P'_2$ par $P'_2 + P'_3, P'_3$ étant l'un des transformés de P'_1 . Il s'agit de voir ce que deviennent dans ces conditions les substitutions S_1, S_2, S_3 , mais pour cela je préfère traiter le problème d'une façon un peu plus générale. Supposons que P' soit un polygone de $2N'$ côtés, N' étant quelconque; supposons que $\gamma(x)$ et $\gamma(\beta)$ soient conjugués, et soit S_x la substitution correspondante. Soient $\gamma(a), \gamma(b)$ deux côtés conjugués appartenant l'un à P'_1 , l'autre à P'_2 , et soit S_a la substitution correspondante. Suppo-

sons que P'_3 soit le transformé de P'_1 par la transformation T_a du groupe fuchsien qui change $\gamma(a)$ en $\gamma(b)$.

Soient S'_x les diverses substitutions relatives au nouveau polygone; S'_x se rapportera à $\gamma(x)$, si ce côté appartient à P'_2 et par conséquent fait partie du périmètre de $P'_2 + P'_3$; S'_x se rapportera au transformé de $\gamma(x)$ par T_a , si $\gamma(x)$ appartient à P'_1 et que son transformé appartenant à P'_3 fasse partie du périmètre de $P'_2 + P'_3$. Dans ces conditions, ni $\gamma(a)$, ni son transformé $\gamma(b)$, ne font partie du périmètre de $P'_2 + P'_3$; nous aurons en revanche dans le nouveau polygone deux nouveaux côtés qui seront la diagonale menée dans P'_1 , et sa transformée par T_a . Ce sera, par définition, à cette paire de côtés que se rapportera la substitution S'_a .

Cela posé, on aura

$$S'_a = S_a,$$

et quand aux autres substitutions S'_x , on aura

$$(5) \quad \begin{cases} S'_x = S_x & \text{si } \gamma(x) \text{ et } \gamma(\beta) \text{ appartiennent tous deux à } P_2, \\ S'_x = S_a S_x S_a^{-1} & \text{si } \gamma(x) \text{ et } \gamma(\beta) \text{ appartiennent tous deux à } P_1, \\ S'_x = S_x S_a^{-1} & \text{si } \gamma(x) \text{ appartient à } P_1 \text{ et } \gamma(\beta) \text{ à } P_2, \\ S'_x = S_x S_a & \text{si } \gamma(x) \text{ appartient à } P_2 \text{ et } \gamma(\beta) \text{ à } P_1. \end{cases}$$

Si nous supposons en particulier que P' soit un hexagone à côtés opposés conjugués, que la diagonale joigne deux sommets opposés et que les côtés $\gamma(a), \gamma(b)$ soient adjacents à cette diagonale, on aura

$$(5 \text{ bis}) \quad S'_1 = S_1, \quad S'_2 = S_1 S_2, \quad S'_3 = S_1 S_3.$$

Nous devons donc prévoir que si les équations (1) admettent deux solutions et que pour ces deux solutions le groupe (S_1, S_2, S_3) soit transitif, on peut passer de l'une de ces solutions à l'autre par une série de transformations de la forme (5 bis) ou (5). Il serait intéressant de retrouver ce résultat par une vérification directe.

Supposons maintenant $p=3$; le polygone P' sera un décagone. Soit par exemple

$$12, 38, 49, 5, 10, 67$$

la loi de conjugaison des côtés. On aura pour les substitutions Σ

$$(6) \quad \Sigma_1 = S_2, \quad \Sigma_2 = S_2^{-1}, \quad \Sigma_3 = S_2 S_1^{-1} S_2 S_1^{-1}, \quad \Sigma_4 = S_1 S_2^{-1} S_2 S_1^{-1}.$$

Des équations (6) on déduit

$$\Sigma_4 \Sigma_1 = S_2^{-1} S_1 S_2^{-1}, \quad \Sigma_2 \Sigma_1 = S_2 S_1^{-1} S_2.$$



Ces équations sont de même forme que les équations (1), on en déduirait donc que

$$\Sigma_2 \Sigma_1 S_2^{-1} \text{ et } (\Sigma_1 \Sigma_2)^{-1} S_2^{-1} = \Sigma_2^{-1} \Sigma_1^{-1} S_2^{-1} = \Sigma_2 \Sigma_1 S_2^{-1}$$

sont deux substitutions semblables. Il serait possible d'en déduire S_2 et ensuite les autres substitutions. Mais je ne ferai pas le calcul jusqu'au bout.

Ici encore, et pour la même raison, les courbes C réductibles ne forment qu'une seule série analytique et par conséquent si les équations (6) admettent deux solutions (conduisant à un groupe transitif), on peut passer d'une solution à l'autre par une série de transformations de la forme (5).

Soit enfin $p=4$; notre polygone P' aura 14 côtés. Nous ne pouvons plus démontrer de la même manière que les courbes C réductibles ne forment qu'une seule série analytique. Si, en effet, nous formons le tableau des périodes réductibles

$$\begin{array}{cccccccc} 2i\pi & 0 & 0 & 0 & h & \frac{2i\pi}{n} & 0 & 0 \\ 0 & 2i\pi & 0 & 0 & \frac{2i\pi}{n} & a & b & c \\ 0 & 0 & 2i\pi & 0 & 0 & b & d & e \\ 0 & 0 & 0 & 2i\pi & 0 & c & e & f \end{array}$$

les sept constantes h, a, b, c, d, e, f ne sont plus arbitraires. Il faut leur imposer une relation, si nous voulons que les fonctions abéliennes engendrées soient spéciales et que la courbe C existe. Cette relation représente une surface de l'espace à sept dimensions, si nous regardons nos sept constantes comme les coordonnées d'un point dans cet espace; et nous ne savons pas si cette surface n'est pas décomposable.

Il serait d'autant plus intéressant de vérifier si, lorsque les équations analogues à (1) et à (6) admettent deux solutions (conduisant toutes deux à un groupe transitif), on peut toujours passer d'une de ces solutions à l'autre par une série de transformations de la forme (5).

XI. — Cas de dégénérescence.

Comme nous savons que, tout au moins si $p=2$ ou 3, les courbes C ne forment qu'une série analytique, nous devons prévoir que les polygones P' de la deuxième sorte ne seront que des dégénérescences de ceux de la première sorte. Pour nous en rendre compte, voyons ce qui arrive lorsqu'un polygone P dégénère de telle sorte que deux de ses côtés conjugués se réduisent à zéro.

Soient $\gamma(\alpha)$ et $\gamma(\beta)$ les deux côtés conjugués qui se réduisent à zéro; soient $\sigma(\alpha), \sigma(\alpha-1), \sigma(\beta), \sigma(\beta-1)$ leurs sommets; de telle sorte que $\sigma(\alpha)$ et $\sigma(\beta-1)$ d'une part, $\sigma(\alpha-1)$ et $\sigma(\beta)$ d'autre part, appartiennent à un même cycle. Deux cas sont à distinguer suivant que les quatre sommets appartiennent ou non à un même cycle. Si ces quatre sommets n'appartiennent pas à un même cycle, le genre g du polygone P' ne change pas par suite de la dégénérescence; dans le cas contraire, ce genre diminue d'une unité.

Plaçons-nous dans le premier cas, qui est le plus intéressant; avec la dégénérescence les sommets qui nous intéressent font partie de deux cycles différents K et K' ; le premier de ces cycles commencerait par exemple par le sommet $\sigma(\beta)$ et se terminerait par le sommet $\sigma(\alpha-1)$, d'où l'on reviendrait au sommet $\sigma(\beta)$. La substitution Σ correspondante s'écrit

$$\Sigma = S_1 S_2 \dots S_{\beta-1} S_{\alpha} S_{\alpha-1} \dots S_{\beta}$$

Les substitutions S_i , etc. correspondant à divers côtés de P' et la dernière S_{α} au côté $\gamma(\alpha)$. Le cycle K' commencerait par $\sigma(\beta-1)$ suivi de $\sigma(\alpha)$ et des autres sommets du cycle; à ce cycle correspondrait la substitution

$$\Sigma' = S_{\beta} S_{\beta-1} \dots S_{\alpha}$$

la première des substitutions S du second membre étant $S_{\beta} = S_{\alpha}^{-1}$ et correspondant au côté $\gamma(\beta)$.

Après la dégénérescence, les deux cycles se confondent en un seul où l'on rencontre successivement $\sigma(\beta-1) = \sigma(\beta)$, puis les divers sommets du cycle K , et enfin

$$\sigma(\alpha-1) = \sigma(\alpha),$$

puis les sommets consécutifs du cycle K' . La substitution correspondante est

$$\Sigma_1 = S_1 S_2 \dots S_{\beta-1} S_{\alpha} S_{\alpha-1} \dots S_{\beta} S_{\beta-1} \dots S_{\alpha} S_{\alpha-1} \dots S_{\beta} S_{\beta-1} \dots S_{\alpha} = \Sigma \Sigma'.$$

Je dis que le genre p ne pourra pas augmenter par la dégénérescence. Nous avons en effet, comme au paragraphe VIII,

$$\Sigma(i-1)\lambda_i = 2(p-1) - 2n(j-1).$$

Il s'agit donc de montrer que $\Sigma(i-1)\lambda_i$ ne peut pas augmenter par la dégénérescence, c'est-à-dire que cette somme $\Sigma(i-1)\lambda_i$, étendue aux divers cycles de lettres de Σ_1 , ne peut être plus grande que la même somme étendue aux cycles de lettres de Σ et de Σ' . A chacune de nos n lettres faisons correspondre un symbole de β_i ; égalons ceux de ces symboles qui correspondent à un même



cycle de lettres de la substitution Σ par exemple; soit h le nombre des équations symboliques distinctes ainsi obtenues; ce nombre h ne sera autre chose que la somme $\Sigma(i-1)\lambda_i$ étendue aux divers cycles de lettres de Σ ; puisque si l'un de ces cycles est formé de i lettres, cela nous fera $(i-1)$ équations et, s'il y a λ_i cycles de i lettres, cela fera en tout $\Sigma(i-1)\lambda_i$ équations. Soient h' et h_1 les nombres analogues relatifs à Σ' et à Σ_1 ; je me propose de montrer que

$$h + h' \geq h_1.$$

Les équations symboliques relatives à Σ_1 sont des conséquences de celles qui sont relatives à Σ et à Σ' ; si en effet Σ change a en b , et que Σ' change b en c , Σ_1 changera a en c ; cela nous donnera l'équation symbolique $\beta_a = \beta_c$ engendrée par Σ_1 , laquelle sera une conséquence de l'équation $\beta_a = \beta_b$ engendrée par Σ , et de $\beta_b = \beta_c$ engendrée par Σ' . Cela me permet d'écrire l'inégalité précédente; je ne mets pas simplement le signe d'égalité, pour deux raisons: 1° d'abord parce que, si les équations dues à Σ , sont toutes des conséquences de celles qui sont dues à Σ et à Σ' , il ne s'ensuit pas que toutes ces conséquences soient elles-mêmes des équations dues à Σ_1 ; 2° parce qu'il peut se faire que les équations dues à Σ ne soient pas toutes distinctes des équations dues à Σ' .

Le cas le plus simple, est celui où Σ se réduit à une permutation entre deux lettres et où il en est de même de Σ' . En d'autres termes Σ et Σ' contiendront chacune un cycle de deux lettres, tous les autres cycles n'ayant qu'une lettre. Alors deux cas peuvent se présenter: 1° ces deux cycles de deux lettres ont une lettre commune; 2° ils n'ont pas de lettre commune. Dans le premier cas Σ_1 aura un cycle de trois lettres, et dans le second cas deux cycles de deux lettres.

Considérons les courbes C et C' correspondant au cas de dégénérescence et formons le polygone P , en nous astreignant, comme nous l'avons fait, à choisir ce polygone de la façon la plus simple possible; ce sera un polygone de la deuxième sorte, et l'on aura

$$Q' = 2(p-1) - 2n(q-1) - 1.$$

Deux des cycles de sommets qui existent dans le cas général se seront confondus en un seul. Soient: P' le polygone dans le cas général; P_0 ce que devient ce polygone par la dégénérescence; P_1 le polygone le plus simple qui peut engendrer les courbes C et C' dans le cas de la dégénérescence. P' possèdera deux cycles K et K' correspondant à Σ et Σ' ; sur P_0 , de même que sur P_1 , ces deux cycles sont confondus en un seul K_1 qui correspond à Σ_1 . La somme des angles de K est égale à π de même que celle des angles de K' ; quant à la

somme des angles de K_1 , elle est égale à zéro sur P_0 , tandis que sur P_1 , elle est égale à $\frac{2\pi}{3}$ si Σ_1 a un cycle de trois lettres, et à π si Σ_1 a deux cycles de deux lettres.

Soit par exemple $q=1$, $p=2$; le polygone P' est un hexagone à côtés opposés conjugués, la somme des angles est 2π ; dans les cas de dégénérescence, ce polygone se réduit à la limite à un quadrilatère à côtés opposés conjugués, et dont la somme des angles est zéro. Mais le quadrilatère P_0 ainsi obtenu n'est pas le plus simple qui puisse engendrer les courbes C et C' ; ce quadrilatère le plus simple P_1 est encore à côtés opposés conjugués, mais la somme des angles est $\frac{2\pi}{3}$ ou π .

On voit ainsi que si les courbes C forment une série analytique continue, il n'en est pas de même des polygones P' les plus simples susceptibles de les engendrer. Si l'on considère une série continue de courbes C , et la série des polygones P' les plus simples correspondants, cette série présentera une discontinuité au moment de la dégénérescence.

XII. — Polygones doublement réductibles.

Soient $q=1$, $p=2$; nous avons une courbe C de genre 2 qui est multiple d'une courbe C' de genre 1, mais si la courbe C admet une intégrale abélienne réductible aux intégrales elliptiques, elle en admet une seconde, c'est-à-dire qu'il y a une seconde courbe C'' de genre 1 dont C est multiple. Existe-t-il un système de fonctions fuchsiennes engendrant à la fois les trois courbes? Soit G un groupe fuchsien de genre 2, et engendrant la courbe C , c'est-à-dire tel qu'entre deux des fonctions fuchsiennes attachées à ce groupe, il y ait précisément la relation algébrique représentée par la courbe C . Peut-on choisir ce groupe G , de telle sorte qu'il soit contenu dans un autre groupe fuchsien G' de genre 1, et engendrant la courbe C' , et qu'il soit en même temps contenu dans un troisième groupe fuchsien G'' de genre 1 et engendrant la courbe C'' ? Alors le groupe G peut être regardé comme engendré par un polygone P décomposable en n polygones congruents entre eux et congruents au polygone P' qui engendre la courbe C . En même temps le groupe G peut être regardé comme engendré par un polygone P_1 équivalent à P ; par ce mot équivalent, je veux dire que P et P_1 peuvent être décomposés en un même nombre de parties et de telle façon que chacune des parties de P_1 ne soit autre chose que la transformée de la partie correspondante de P par une des substitutions de G . D'autre part, P_1



pourra être décomposé en n polygones congruents entre eux et congruents au polygone P' qui engendre la courbe C' .

Nous allons voir bientôt que cela n'est pas toujours possible. Reprenons les trois surfaces de Riemann C, C', C'' : à un point de la deuxième correspondent n points de la première et de même à un point de la troisième correspondent n points de la première. Soient : M' un point de C' ; $M_1, M_2, \dots, M_n$ les points correspondants de C . Si deux de ces points M_i se confondent, le point M' est un point de ramification de C' et l'on définirait de même ceux de C'' . Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ ceux de C' ; et soient $B_1, B_2, \dots, B_n$ ceux de C'' . Aux points $A_1, A_2, \dots, A_n$ correspondront l'un des cycles de sommets de P' ; mais ce n'est pas tout. Considérons B_1' ; à ce point correspondront sur C , n points $B_{11}, B_{12}, \dots, B_{1n}$ dont deux au moins sont confondus. Soit B_{11} un de ces n points qui ne se confond avec aucun autre (s'il en existe, ce qui arrivera en général); à ce point correspondra sur C' un point B_1' , qui devra encore correspondre à un cycle de sommets de P' . A ce point B_1' , correspondront sur C , n points parmi lesquels B_{11} ; soit D_1 un autre de ces points auquel correspondra sur C' un point D_1' ; à D_1' correspondront sur C , n points dont le point D_1 ; soit E_1 un autre de ces points; soit E_1 le point correspondant de C' ; je dis qu'à E_1 correspondra encore un cycle de sommets de P' et ainsi de suite; on poursuivrait ainsi indéfiniment.

Voici comment on verrait par exemple que B_{11} correspond à un cycle de sommets de P' . Soient z la variable qui figure dans nos fonctions fuchsiennes; M, M', M'' les points correspondants sur C, C', C'' , de telle sorte que les coordonnées de ces trois points soient des fonctions fuchsiennes de z . Supposons que z tourne autour d'un certain point z_0 , en même temps que M, M' et M'' tournent respectivement autour de B_{11}, B_{11}' et B_1' . Supposons que quand z fait α tours, M, M' et M'' en fassent respectivement β, γ, δ . Comme B_1' correspond à un cycle de sommets de P' , on devra avoir en ce point

$$\frac{dM'}{dz} = 0.$$

D'autre part, comme B_{11} ne se confond avec aucun autre point B_{1k} , et qu'en ce point, par conséquent, M est fonction uniforme de M' , on aura

$$\frac{dM'}{dM} \neq 0.$$

Comme M' est fonction uniforme de M , on aura

$$\frac{dM}{dM'} \neq 0.$$

De ces relations

$$\frac{dM}{dM'} \neq 0, \quad \frac{dM'}{dM} \neq 0, \quad \frac{dM'}{dz} = 0,$$

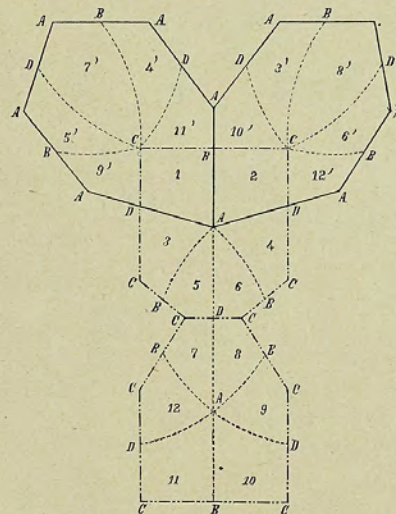
on déduira

$$\frac{dM}{dz} = 0,$$

ce qui veut dire que z_0 est aussi un sommet du polygone P' .

En général on serait conduit à attribuer à P' une infinité de cycles de sommets, ce qui veut dire que le problème que nous nous étions proposé est impossible.

Cette impossibilité n'a pas lieu dans le cas de $n = 2$; en effet nous n'avons



que deux points B_{11} et B_{12} qui doivent se confondre, et il n'existe pas de point B_{11} ne se confondant avec aucun autre; ce que nous venons de dire ne s'applique donc pas.



Reportons-nous à la figure, sur laquelle je vais d'abord donner quelques explications. Les proportions et les courbures n'y sont pas observées, *même grossièrement*. On ne doit s'attacher qu'aux positions relatives des lignes et des points au point de vue de l'*Analysis situs*. Toutes les lignes, droites ou courbes, qui y sont tracées représentent des *droites non euclidiennes*, c'est-à-dire des arcs de circonférences orthogonales au cercle fondamental. Quand je parlerai de ligne droite, d'égalité ou de symétrie, j'entendrai toujours ces mots *au sens non euclidien*.

Le polygone P est décomposé en deux hexagones P' et P₁; les contours de ces deux hexagones sont figurés en trait plein, leurs sommets sont désignés par la lettre A. Le polygone P₁, équivalent à P, est décomposé en deux hexagones P'' et P₁'; les contours sont représentés en trait mixte — · — · —, leurs sommets sont désignés par la lettre C.

Quand un hexagone a ses côtés opposés égaux et que la somme des angles de rang pair est égale à la somme des angles de rang impair (ce qui arrive ici où les côtés opposés sont conjugués et où ces deux sommes d'angles sont égales à π) cet hexagone possède un centre de symétrie. Ici le polygone P', formé des quadrilatères 1, 11', 4, 7', 5', 9', et le polygone P₁', formé des quadrilatères 2, 10', 3', 8', 6', 12', admettent pour centres de symétrie deux sommets C du polygone P'; le polygone P'' formé des quadrilatères 1, 2, 3, 4, 5, 6, a pour centre de symétrie un sommet A commun à P' et à P₁'; le polygone P₁', formé des quadrilatères 7, 8, 9, 10, 11, 12, possède un centre de symétrie que j'appelle encore A.

Les points B et D sont les milieux des côtés de P', P₁, P'', P₁'. Notre figure se trouve décomposée en 22 quadrilatères numérotés de 1 à 12, et de 3' à 12'. Ces quadrilatères présentent les symétries suivantes :

1, 7'; 4', 9'; 11', 5'	sont symétriques par rapport à C ₁ (sommet C du quadrilatère 1)
3', 12'; 2, 8'; 6', 10'	» C ₉
1, 10'; 2, 11'; 3', 9'	» B ₁
8', 5'; 6', 7'; 12', 4'	» B ₁
1, 6'; 2, 5'; 4, 3	» A ₁
5, 8'; 6, 7'; 3, 9	» D ₅
1, 10'; 2, 11'; 4, 12	» D ₅
7, 10'; 8, 11'; 9, 12	» A ₇
3, 9'	» D ₁
4, 12'	» D ₂

D'où les égalités suivantes :

$$(A) \quad \begin{cases} 1 = 10' = 10, & 6 = 6' = 7 = 7', \\ 4 = 12 = 4' = 12', & 3 = 9 = 3' = 9', \\ 2 = 11 = 11', & 5 = 8 = 5' = 8'. \end{cases}$$

Ces égalités ont lieu de telle sorte que les sommets A, B, C, D de deux quadrilatères égaux se correspondent. On aura d'autre part

$$1 = 6, \quad 4 = 3, \quad 2 = 5,$$

mais de telle sorte que les sommets ABCD d'un des quadrilatères correspondent aux sommets ADCB de l'autre. Il en résulte que dans le tableau des égalités (A), les sept quadrilatères de la première ligne sont égaux entre eux, de même que les huit de la deuxième ou les sept de la troisième.

Les quadrilatères 4 et 4', 5 et 5', etc. sont transformés l'un de l'autre par une substitution du groupe G, et c'est pour cela que les deux polygones

$$P = P_1 + P', \quad P_1 = P_1' + P''$$

sont équivalents.

Il est clair que la surface du cercle fondamental peut être décomposée en quadrilatères tous égaux à l'un des trois quadrilatères 1, 2 ou 3, de telle façon que tout sommet de l'un des quadrilatères soit un centre de symétrie de la figure. On peut les assembler 6 à 6 de façon à réaliser la décomposition du cercle fondamental en polygones congruents à P'; on peut les assembler d'une seconde manière 6 à 6 de façon à réaliser la décomposition du cercle fondamental en polygones congruents à P'.

Considérons la courbe C'; les sommets A de rang pair de l'hexagone P' correspondront à un point M₁ de cette courbe, les sommets A de rang impair à un autre point M₂ de cette courbe. Soient u_1 et u_2 les arguments elliptiques de ces deux points. Le point C, centre de symétrie de P', correspondra sur C' à un point M₃ d'argument elliptique $\frac{u_1 + u_2}{2}$, tandis que les arguments elliptiques des milieux B et D des côtés seront encore $\frac{u_1 + u_2}{2}$ à une demi-période près. L'argument elliptique de tous les points C sera le même.

Considérons maintenant les arguments elliptiques sur la courbe C'; nous trouverons encore que ceux de tous les points A sont les mêmes; que ceux des sommets C de rang pair de P' sont les mêmes; que ceux des sommets C de rang impair sont les mêmes; que celui d'un point A est moyenne arithmétique entre celui d'un sommet C de rang pair et celui d'un sommet C de rang impair.



Nous remarquerons que l'hexagone P' est quelconque, de telle sorte que le résultat est général et nous l'énoncerons sous la forme suivante :

Supposons que la courbe C de genre 2 soit multiple de la courbe C' de genre 1, de telle façon qu'à chaque point de C corresponde un point de C' et à chaque point de C' , deux points de C : il existera une autre courbe C'' de genre 1, telle qu'à chaque point de C corresponde un point de C'' et à chaque point de C'' deux points de C .

Il y aura sur C' deux points M_1 et M_2 à chacun desquels correspondront sur C deux points confondus en M_1 pour le premier, en M_2 pour le second; soient M_1' et M_2' les points de C'' qui correspondent à M_1 et M_2 .

Il y aura de même sur C'' deux points N_1 et N_2 à chacun desquels correspondront sur C deux points confondus en N_1 pour le premier, en N_2 pour le second; soient N_1' et N_2' les points de C' qui correspondent à N_1 et N_2 .

Les points N_1 et N_2 sont identiques, de même que les points M_1' et M_2' .

Nous pouvons supposer que C' et C'' sont deux cubiques. La tangente à C' au point $N_1 = N_2$ et la droite $M_1' M_2'$ se coupent sur C . La tangente à C'' au point $M_1' = M_2'$ et la droite $N_1' N_2'$ se coupent sur C'' .

Un cas particulier intéressant est celui où l'hexagone P' est régulier et où nos trois quadrilatères sont égaux. Le cercle fondamental se trouve alors subdivisé en une infinité de quadrilatères égaux. Ces quadrilatères engendreront alors un groupe fuchsien Γ , qui est de genre zéro, et un système de fonctions fuchsiennes de la classe de celles qui sont engendrées par la série hypergéométrique. Le groupe Γ contient comme sous-groupes G' , G'' et G . Considérons une fonction fuchsienne quelconque engendrée par Γ ; ce sera une fonction rationnelle à la fois des coordonnées du point M , de celles du point M' et de celles du point M'' . A une valeur de cette fonction correspondront 12 points M sur la courbe C , 6 points M' sur la courbe C' , et 6 points M'' sur la courbe C'' .

SUR LA RÉDUCTION

DES

INTÉGRALES ABÉLIENNES

ET

LA THÉORIE DES FONCTIONS FUCHSIENNES

Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und Mathematischen Physik, gehalten zu Göttingen vom 22-28 April 1909, Leipzig und Berlin, 1910 (Vierter Vortrag).

Messieurs, j'ai l'intention de vous parler aujourd'hui de la réduction des intégrales abéliennes en tant qu'elle est liée à la théorie des fonctions automorphes et, en particulier, des fonctions fuchsiennes.

Un système de fonctions abéliennes de p variables et $2p$ périodes est dit *réductible* quand il se laisse ramener à un système de q variables et $2q$ périodes avec $q < p$. Il est tout d'abord ici important de distinguer deux cas :

Dans le *premier cas*, le système S de fonctions abéliennes de p variables peut être engendré par une *courbe algébrique* de genre p ; de même, le système S' à q variables a pour origine un domaine algébrique de genre q .

On sait bien que ce premier cas n'est pas le cas général, car la courbe C ne dépend que de $3p - 3$ constantes essentielles, alors que les fonctions abéliennes de p variables renferment $\frac{p(p+1)}{2}$ paramètres. C'est ce qui nous amène à distinguer le *deuxième cas*, celui où l'un au moins des systèmes S , S' ne provient pas d'un domaine algébrique.

Dans la conférence d'aujourd'hui, je me restreindrai *exclusivement* au premier cas. Mais là encore, il me faut distinguer deux cas. Nous basons notre étude sur la considération des deux courbes algébriques C et C' ; dans le cas de la réductibilité, il existe entre elles une *correspondance* algébrique. C'est cette correspondance qui va décider de la nouvelle distinction.



Dans le premier cas, en vertu de la correspondance, à chaque point M de C est associé un point M' de C' et un seul, pendant qu'à tout point de C' correspondent n points de C. Je nomme n le *nombre caractéristique* de la correspondance et dis que C est une *courbe multiple* de C'.

Ce premier cas n'est pas le plus général, qui est en fait le deuxième. La correspondance n'a plus lieu entre deux points M et M', mais entre deux groupes de points M₁, ..., M_r de C avec les coordonnées x₁, y₁, ..., x_r, y_r et M'₁, ..., M'_s de C' avec les coordonnées x'₁, y'₁, ..., x'_s, y'_s.

A chaque groupe de C, correspond un et un seul groupe de C' pendant qu'inversement à un groupe de C' sont associés, en général, plusieurs groupes de C. Je dis alors que C est une *courbe pseudo-multiple* de C'.

Dans le premier cas, x' et y' sont des fonctions rationnelles de x et y, alors que, dans le deuxième, on peut seulement affirmer que toute fonction symétrique des couples (x₁, y₁, ..., x_r, y_r) est une fonction rationnelle de (x₁, y₁, ..., x_s, y_s). Il est facile de voir que chaque courbe C qui est multiple de C' est aussi courbe pseudo-multiple de C'. Mais, inversement, j'ai pu former plusieurs exemples montrant que toute courbe pseudo-multiple de C' n'est pas multiple de C'.

Je ne veux pas ici insister sur ce point, d'autant plus que les considérations qui suivent s'appliquent expressément au premier cas.

Dans le cas de la réductibilité de nos intégrales, il est possible d'amener le tableau de leurs périodes à une certaine *forme normale*. Les deux exemples suivants donneront une idée de cette forme.

1° q = 1, p = 3. Le tableau des périodes peut être réduit à la forme suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} 2i\pi & 0 & 0 & h & \frac{2i\pi}{2} & 0 & \\ 0 & 2i\pi & 0 & \frac{2i\pi}{2} & a & b & \\ 0 & 0 & 2i\pi & 0 & b & c & \end{array}$$

2° q = 2, p = 4. Les périodes normalisées sont ici :

$$\begin{array}{cccccccc} 2i\pi & 0 & 0 & 0 & a & b & 0 & \frac{2i\pi}{2} \\ 0 & 2i\pi & 0 & 0 & b & c & \frac{2i\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2i\pi & 0 & 0 & \frac{2i\pi}{2} & a' & b' \\ 0 & 0 & 0 & 2i\pi & \frac{2i\pi}{2} & 0 & b' & c' \end{array}$$

Les nombres α et β représentent dans les deux tableaux des nombres entiers.

Je définis maintenant un deuxième *nombre caractéristique* κ . Il désigne l'ordre de la fonction thêta de q variables en laquelle, dans le cas de la réductibilité, est transformée une fonction thêta du premier ordre de p variables.

Dans le premier exemple, on a $\kappa = \alpha$, et dans le deuxième $\kappa = \alpha\beta$. Les deux *nombre caractéristique* n et κ sont toujours égaux. J'ai trouvé deux démonstrations de cette proposition que j'exposerai maintenant dans leurs traits essentiels.

Première démonstration. — Soient M et M' deux intégrales abéliennes de première, seconde ou troisième espèce de la courbe C. J'imagine la surface de Riemann correspondante découpée d'une manière canonique par $2p$ rétro-sections issues d'un point et ne partageant pas la surface. Les intégrales M et M' possèdent alors les périodes suivantes :

$$\begin{array}{ll} (M) & x_1, x_2, \dots, x_{2p}, \\ (M') & y_1, y_2, \dots, y_{2p}. \end{array}$$

Il me faut maintenant définir une *forme bilinéaire* caractéristique fondamentale. Je pose donc

$$F(x, y) = \int M dM',$$

où l'intégrale est prise le long du contour total de la coupure. Si les x et les y sont des périodes normales, $F(x, y)$ prendra la forme

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^p (x_{2k-1} y_{2k} - x_{2k} y_{2k-1}).$$

Si je suppose que M soit l'une des intégrales réductible, ses $2p$ périodes pourront s'exprimer sous forme linéaire à coefficients entiers avec seulement $2q$ périodes $\omega_1, \dots, \omega_{2q}$. J'ai donc alors

$$x_k = \sum_{j=1}^{2q} m_{kj} \omega_j \quad (k = 1, 2, \dots, 2p),$$

où les m_{kj} sont des nombres entiers.

Si M et M' sont maintenant des intégrales de première espèce, on sait qu'on a

$$F(x, y) = 0.$$

En remplaçant dans cette équation les x par leur expression en ω , on obtient



une équation bilinéaire entre les y et les ω , qui peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{j=1}^{2q} H_j \omega_j = 0.$$

Soient alors $u_1, \dots, u_p$, p intégrales de première espèce linéairement indépendantes de la courbe C ; nous pouvons poser

$$\begin{aligned} U &= \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \dots + \mu_p u_p, \\ U' &= \mu'_1 u_1 + \mu'_2 u_2 + \dots + \mu'_p u_p. \end{aligned}$$

Les coefficients, encore indéterminés, μ' seront choisis de façon à satisfaire aux $2q$ équations linéaires

$$H_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 2q).$$

Si l'on observe que ces $2q$ équations ne sont pas linéairement distinctes, mais qu'il existe entre elles q relations

$$\sum H_j \omega_j = 0,$$

on reconnaît facilement que M' est aussi réductible et que, de même que M appartient à un système linéaire de q intégrales réductibles, M' est aussi l'élément d'un système linéaire de $(p - q)$ intégrales réductibles. Mais ceci est seulement dit en passant.

Remarquons maintenant que H_j est une fonction linéaire des y_k , de telle sorte qu'on peut écrire

$$H_j = \sum_{i=1}^{2p} h_{ij} y_i \quad (j = 1, 2, \dots, 2q),$$

où les h_{ij} sont des nombres entiers. Avec les m_{ik} et les h_{ij} , on peut former deux tableaux ayant chacun $2q$ colonnes et $2p$ lignes et tirer de chacun d'eux certains déterminants à $2q$ lignes. Je désigne par D l'un de ces déterminants formés avec les m et par D' le déterminant correspondant formé avec les mêmes lignes de h . En posant $J = \Sigma DD'$ (où le signe Σ s'étend à tous les déterminants tels que D), J est, au sens que l'on va dire, un nombre invariant. Il ne change pas si l'on remplace un quelconque des systèmes de périodes x ou ω par un système équivalent.

Deux systèmes de périodes sont équivalents quand chacun d'eux s'exprime sous forme linéaire à coefficients entiers avec les éléments de l'autre. On peut alors démontrer, d'une part, que $J = x^2$ et, d'autre part, que $J = n^2$.

On peut donc en conclure $x = n$.

C'est la première démonstration.

Deuxième démonstration. — Elle est essentiellement plus courte. Elle repose sur la comparaison des deux formes bilinéaires $F(x, y)$ et $\Phi(\omega, \omega')$ qui correspondent à C et à C' .

On a, d'une part,

$$F(x, y) = x \Phi(\omega, \omega'),$$

et, d'autre part,

$$F(x, y) = n \Phi(\omega, \omega'),$$

d'où l'on conclut $n = x$.

J'en viens maintenant au lien de la théorie de la réduction avec la théorie des fonctions fuchsienues.

On sait que chaque courbe algébrique C définit un système de fonctions fuchsienues. Le fait que C est une courbe multiple de C' peut aussi s'exprimer de la manière suivante : Il est toujours possible, de diverses façons, d'associer à C' un groupe à cercle limite G' (Grenzkreisgruppe) et à C un tel groupe G , de telle sorte que G soit un sous-groupe de G' . Si C est, en particulier, multiple n fois de C' , G sera un sous-groupe d'indice n de G' .

On obtiendra, par suite, un domaine fondamental de G en prenant n domaines fondamentaux de G' , convenablement choisis, dérivés de l'un d'eux par des transformations de G' et contigus. Le polygone P de G paraît donc partagé en n polygones $P'(\beta)$, qui sont congruents au polygone P' de G' au sens de la géométrie non euclidienne.

Je désigne par $\gamma(x)$ les côtés du polygone P' , et par $\gamma(x, \beta)$ les côtés homologues du polygone $P'(\beta)$. Ces côtés $\gamma(x, \beta)$ sont, ou à l'intérieur, ou sur la frontière de P .

Admettons que le côté $\gamma(x')$ se déduise de $\gamma(x)$ par une opération du groupe G' . Si $\gamma(x, \beta)$ se trouve sur la frontière de P , il existera un autre côté $\gamma(x', \beta')$ de cette frontière qui sera conjugué de $\gamma(x, \beta)$ par une opération de G . Mais si $\gamma(x, \beta)$ est intérieur à P , il n'existe pas un tel côté $\gamma(x', \beta')$ différent de $\gamma(x, \beta)$, car $\gamma(x, \beta)$ et $\gamma(x', \beta')$ coïncident et forment un côté commun à $P'(\beta)$ et à $P'(\beta')$. Quoi qu'il en soit, dans les deux cas correspond à chaque côté $\gamma(x)$ de P' une permutation des n nombres $1, 2, \dots, n$.

Une discussion tout à fait semblable peut se faire pour les sommets de P' . De même, que les côtés s'associent par couples, les sommets se partagent en cycles, de telle sorte que tous les sommets d'un cycle dérivent de l'un d'eux par des opérations de G' . A chacun de ces cycles, on peut de nouveau associer



une permutation déterminée des nombres $1, 2, \dots, n$ qui peut, d'ailleurs, s'obtenir avec les permutations associées aux côtés.

Supposons que P possède $2N$ côtés et Q cycles de sommets; soient $2N'$ et Q' les nombres correspondants pour P' .

La permutation correspondant à un cycle de sommets de P' se laisse décomposer en permutations circulaires. Supposons que pour l'ensemble des cycles de P' , on obtienne ainsi λ_i permutations circulaires de i nombres. On aura les relations suivantes :

$$\begin{aligned} 2p &= N - Q + 1, \\ 2q &= N' - Q' + 1, \\ Q + 2p - 2 &= n(Q' + 2q - 2), \\ n(Q' - Q) &= 2(p - 1) - 2n(q - 1), \\ Q &= \sum \lambda_i, \quad nQ' = \sum i\lambda_i. \end{aligned}$$

Les considérations générales que nous venons de développer nous permettent de déduire une suite de propositions belles et importantes sur la *géométrie non euclidienne des polygones formés d'arcs de cercle* et sur la *géométrie des courbes algébriques*. J'indiquerai quelques exemples de ces propositions sans m'attacher à les démontrer en détail, les principes des démonstrations étant contenus dans les résultats précédents :

$$(I) \quad p = 3, \quad q = 2, \quad n = 2, \quad m = m' = 4.$$

Par les lettres m et m' , on désigne les ordres des courbes C et C' . La courbe C n'a pas de point double, C' a un point double.

Des vingt-huit tangentes doubles de C , il y en a six qui passent par un point extérieur à la courbe.

$$(II) \quad p = 4, \quad q = 2, \quad n = 2, \quad m = 4, \quad m' = 5.$$

C a deux points doubles, C' un seul. Si l'on égale à zéro la différentielle de l'intégrale réductible de première espèce, on obtient un *faisceau de coniques*, dont les quatre points-base sont les deux points doubles de C et deux autres points de cette courbe.

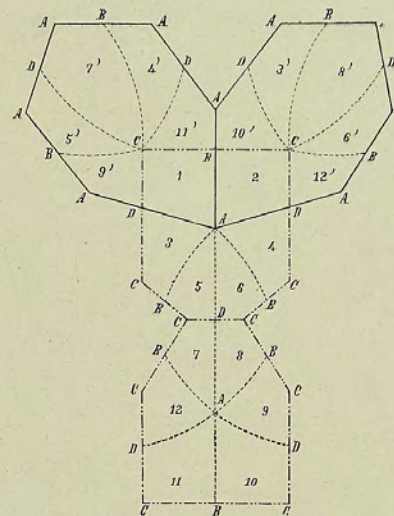
Six de ces coniques touchent C deux fois. Celle de ces coniques qui touche C en un point base y est osculatrice :

$$(III) \quad p = 2, \quad q = 1, \quad n = 2.$$

La courbe C est une *courbe multiple de deux courbes* différentes C' et C'' . Il existe un groupe fuchsien G auquel on peut associer un premier polygone P_1

constitué par deux polygones d'un groupe G' , correspondant à C' et aussi un second polygone P_2 composé de deux polygones d'un groupe G'' correspondant à C'' .

La figure schématique ci-dessous servira à la compréhension des rapports mutuels de ces éléments.



Les deux domaines fondamentaux P_1 et P_2 sont représentés par les polygones avec les sommets respectifs A et C . Chacun d'eux se décompose en deux hexagones qui sont les domaines fondamentaux de G' et de G'' . Pour faire apparaître plus nettement l'équivalence de P_1 et P_2 , on a lié les centres de symétrie de ces hexagones au milieu des côtés de telle sorte que tous les polygones soient formés, d'une manière visible, de quadrilatères.

Je passe maintenant aux propositions de géométrie des courbes algébriques

que cet exemple illustre. Si l'on marque sur C' un point M' , il lui correspond deux points M_a et M_b sur C . A chacun de ceux-ci correspond un point de C'' , soit M_a', M_b' .

On peut conclure de même, qu'en général, à chaque point de C' correspondent deux points de C .

La correspondance (C', C) a, d'ailleurs, deux points de ramification M_1', M_2' , à chacun desquels ne correspond qu'un point de C et par suite, qu'un point de C' ; soient M_1'', M_2'' ces points.

De même, la correspondance (C', C) possède deux points de ramification N_1', N_2' , à chacun desquels ne correspond qu'un point de C' ; soient N_1'', N_2'' ces points.

Nous pouvons alors énoncer la première proposition en disant : N_1' et N_2' d'une part, M_1'' et M_2'' d'autre part coïncident.

La deuxième proposition suppose que C' et C'' sont des courbes de troisième ordre.

Menons en N_1' (qui est aussi N_2') la tangente à C' et aussi la sécante $M_1' M_2'$. Ces deux droites se coupent sur C' .

De même, si l'on mène en M_1'' (qui est aussi M_2''), la tangente à C'' et si l'on prend son point d'intersection avec la sécante $N_1' N_2'$, on obtient un point de C' .

Ces quelques exemples font reconnaître suffisamment combien nombreux sont les cas particuliers.

SUR

LES RÉSIDUS DES INTÉGRALES DOUBLES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 102, p. 202-204 (18 janvier 1886).

Il y a le plus grand intérêt à tenter de généraliser les théories de Cauchy sur les intégrales prises entre des limites imaginaires et les résidus des fonctions d'une variable : c'est l'objet des considérations suivantes.

Soient

$$\xi = x + iy, \quad \eta = z + it$$

deux variables imaginaires et

$$F(\xi, \eta) = P + iQ$$

une fonction de ces variables. Posons ensuite, pour définir le contour [ou surface] d'intégration,

$$x = \tilde{x}_1(u, v), \quad y = \tilde{y}_1(u, v), \quad z = \tilde{z}_1(u, v), \quad t = \tilde{t}_1(u, v),$$

u et v étant deux paramètres arbitraires réels. Soient maintenant $[X, Y]$, $[X, Z]$, ..., diverses fonctions de x, y, z et t ; nous supposons

$$[X, Y] = -[Y, X], \quad [X, X] = 0.$$

Soit

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{dx}{du} \frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv} \frac{dy}{du}$$

le déterminant fonctionnel de x et y par rapport à u et v . Considérons l'intégrale double

$$\int \int \left\{ [X, Y] \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} + [X, Z] \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} + [X, T] \frac{\partial(x, t)}{\partial(u, v)} + [Y, Z] \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + [Y, T] \frac{\partial(y, t)}{\partial(u, v)} + [Z, T] \frac{\partial(z, t)}{\partial(u, v)} \right\} du dv.$$

Quand on permutera u et v , l'intégrale changera de signe : je dirai alors qu'on change le sens de l'intégration. Considérons trois fonctions entières quel-



conques de x, y, z et t et envisageons-les comme les coordonnées d'un point M dans l'espace. Faisons varier ensuite u et v : si, quelles que soient les fonctions entières considérées, le point M décrit une surface fermée, je dirai que le contour d'intégration est fermé.

Les conditions d'intégrabilité, c'est-à-dire les conditions pour que l'intégrale soit nulle, toutes les fois que le contour d'intégration est fermé, sont au nombre de quatre. L'une d'elle est

$$\frac{d[X, Y]}{dz} + \frac{d[Y, Z]}{dx} + \frac{d[Z, X]}{dy} = 0,$$

et les autres s'en déduisent par permutation des lettres x, y, z, t ; X, Y, Z, T . Nous posons alors

$$\begin{aligned} \iint F(\xi, \eta) d\xi d\eta = \iint \left[(P + iQ) \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} + (iP - Q) \frac{\partial(x, t)}{\partial(u, v)} \right. \\ \left. + (iP - Q) \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + (P + iQ) \frac{\partial(y, t)}{\partial(u, v)} \right] du dv. \end{aligned}$$

Il est aisé de voir que les conditions d'intégrabilité sont remplies.

J'envisagerai le cas où la fonction $F(\xi, \eta)$ est rationnelle et je l'écrirai sous la forme

$$F(\xi, \eta) = \frac{\varphi(\xi, \eta)}{\psi(\xi, \eta)\theta(\xi, \eta)},$$

en décomposant le dénominateur en ses facteurs.

Il ne faut pas que la fonction F devienne infinie en un point du contour d'intégration. En exprimant que ψ ou θ s'annule en un point de ce contour, on obtient quatre équations algébriques à quatre inconnues. On doit s'arranger pour que ces quatre équations n'aient aucune solution réelle.

Je ne puis exposer ici le mode de représentation, grâce auquel on peut s'affranchir de l'hypergéométrie et reconnaître, à l'aide de la Géométrie ordinaire, si l'intégrale, prise le long d'un contour fermé, est réellement nulle. Je me bornerai à indiquer quelles sont les différentes périodes de l'intégrale double, c'est-à-dire les valeurs qu'on obtient en prenant l'intégrale le long d'un contour fermé. Ces périodes sont de trois sortes :

1° Les périodes de la première sorte sont égales à $2\pi iH$, H étant une période de première espèce de l'intégrale abélienne

$$\int \frac{\varphi(\xi, \eta) d\xi}{\psi(\xi, \eta) \frac{d\eta}{d\xi}},$$

relative à la courbe algébrique

$$\theta(\xi, \eta) = 0.$$

Il en est de même pour la seconde courbe algébrique,

$$\psi(\xi, \eta) = 0.$$

2° Les périodes de la seconde sorte se rapportent aux points d'intersection des deux courbes

$$\psi(\xi, \eta) = 0, \quad \theta(\xi, \eta) = 0.$$

Elles ont pour valeur

$$\pm 4\pi^2 \frac{\varphi(\xi, \eta)}{\frac{d\psi}{d\xi} \frac{d\theta}{d\eta} - \frac{d\psi}{d\eta} \frac{d\theta}{d\xi}},$$

ξ et η étant les coordonnées du point d'intersection.

3° Les périodes de la troisième sorte se rapportent, par exemple, aux points doubles de la courbe

$$\theta(\xi, \eta) = 0.$$

Elles ont pour valeur

$$\pm 4\pi^2 \frac{\varphi(\xi, \eta)}{\psi(\xi, \eta) \sqrt{\left(\frac{d^2\theta}{d\xi^2}\right)^2 - \frac{d^2\psi}{d\xi^2} \frac{d^2\theta}{d\eta^2}}},$$

ξ et η étant les coordonnées du point double.

Ainsi se trouve confirmé, et en même temps complété et précisé, un beau résultat obtenu dernièrement par M. Stieltjes au sujet d'une généralisation des formules de Cauchy et de Lagrange.