SUR L'INTÉGRATION ALGÉBRIQUE

DES

ÉQUATIONS LINÉAIRES

ET

LES PÉRIODES DES INTÉGRALES ABÉLIENNES.

Journal de Mathématiques, 5e série, t. 9, p. 139-212 (1903).

I. — Introduction.

Le présent Mémoire est le développement d'une Note que j'ai présentée à l'Académie des Sciences en 1883 (*Comptes rendus*, t. 97, 1883, 2e semestre, p. 984 et 1189).

Quand une fonction algébrique satisfait à une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels, les intégrales abéliennes jouissent de certaines propriétés curieuses et il y a entre leurs périodes quelques relations intéressantes.

On est conduit en passant, à ce résultat, qu'*étant donné un groupe fini* H *quelconque, on peut toujours trouver* (sauf un nombre fini d'exceptions) *un groupe fini de substitutions linéaires isomorphes à* H, *et dont les coefficients soient entiers.*

M. Frobenius, en 1896 et dans les années suivantes, a publié une série de Mémoires sur les *caractères* des groupes. Ses résultats peuvent être utilement appliqués à la question qui nous occupe et je crois devoir les rappeler rapidement; je profite d'ailleurs de l'occasion pour les rapprocher d'autres résultats obtenus par M. Cartan et pour faire voir combien les théories de ces deux savants mathématiciens s'éclairent mutuellement.

II. — Intégrabilité algébrique des équations linéaires.

Soit

$$\sum \frac{d^q y}{dx^q} P_q(x) = 0 \tag{1}$$

une équation linéaire d'ordre n dont les coefficients P_q sont des polynomes entiers. Supposons que l'intégrale générale de cette équation soit algébrique et soit

$$\theta(x, y) = 0 \tag{2}$$

l'équation algébrique qui définit cette intégrale générale. Bien entendu, ce polynome θ, outre les variables x et y, contiendra n constantes arbitraires d'intégration si l'équation (1) est d'ordre n.

L'équation (1) pourrait être intégrée par le procédé général. Posons

$$x = \varphi(z),$$

où $\varphi(z)$ est une fonction fuchsienne correspondant au groupe fuchsien G.

Si cette fonction fuchsienne est convenablement choisie (et cela peut se faire d'une infinité de manières), y sera une fonction zétafuchsienne de z.

Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des intégrales de (1) au nombre de n et linéairement indépendantes. On aura

$$y_1 = \zeta_1(z), \quad y_2 = \zeta_2(z), \quad \ldots, \quad y_n = \zeta_n(z),$$

les ζ étant des fonctions zétafuchsiennes. Quand z subira une substitution du groupe G, les ζ_i subiront une substitution linéaire appartenant au groupe H de l'équation linéaire (1). Le groupe H sera donc isomorphe à G.

Mais ici l'intégrale générale étant supposée algébrique, le groupe H sera d'*ordre fini*, de sorte que l'isomorphisme sera *mériédrique*. Parmi toutes les substitutions de G, il y en aura donc qui correspondront dans H à la substitution identique. L'ensemble de ces substitutions formera un groupe G′ qui sera un groupe fuchsien et qui sera un sous-groupe invariant du groupe G. Le groupe G n'est donc pas simple.

Ce groupe fuchsien G′ engendrera un système S′ de fonctions fuchsiennes; il est aisé de voir que le système S′ contiendra le système S des fonctions fuchsiennes engendrées par le groupe G; que x et y ou toute fonction rationnelle de x et de y est une fonction fuchsienne du système S′. Il en est de même de toute fonction rationnelle de $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

J'ai dit que le polynome θ contenait, outre les variables x et y, des constantes arbitraires d'intégration. Selon les valeurs que l'on attribuera à ces n constantes, trois cas pourront se présenter :

1° Ou bien les diverses déterminations de la fonction algébrique y pourront s'exprimer linéairement à l'aide de m d'entre elles, le nombre m étant $< n$; par conséquent, l'intégrale générale de l'équation (1) n'est pas une combinaison linéaire des diverses déterminations de la fonction algébrique y;

2° Ou bien l'intégrale générale de (1) est une combinaison linéaire des diverses déterminations de y; mais le groupe de l'équation algébrique $\theta(x, y) = 0$ est plusieurs fois transitif;

3° Ou bien enfin l'intégrale générale de (1) est une combinaison linéaire des diverses déterminations de y et le groupe de l'équation algébrique $\theta = 0$ est simplement transitif.

Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un système de n intégrales de (1) linéairement indépendantes.

Posons

$$u = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n.$$

Faisons décrire à x un contour fermé quelconque; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ subiront une transformation linéaire T, à savoir celle des transformations du groupe H qui correspond à ce contour; les y se changeront donc en $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$, et u se changera en

$$u' = \alpha_1 y'_1 + \alpha_2 y'_2 + \ldots + \alpha_n y'_n.$$

Peut-il arriver que u' soit identique à u? Les y' sont des fonctions linéaires des y; on aura donc

$$u' = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_n y_n,$$

les β étant des fonctions linéaires des α. Pour que $u = u'$, il faudrait que l'on eût

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n = \beta_n.$$

Cela peut arriver pour certaines valeurs des α, mais ces relations ne peuvent être satisfaites identiquement, quels que soient les α, à moins que l'on ait

$$y'_1 = y_1, \quad y'_2 = y_2, \quad \ldots, \quad y'_n = y_n,$$

c'est-à-dire que la transformation linéaire T ne se réduise à la substitution identique.

Ainsi u' sera différent de u, à moins que les α ne satisfassent à un système X de relations algébriques.

Soient $T_1, T_2, \ldots, T_\rho$ les transformations non identiques du groupe H; elles sont en nombre fini; à chacune d'elles correspond un système de relations algébriques entre les α. Si les α ne satisfont à aucun de ces systèmes, la fonction u n'est transformée en elle-même par aucune des transformations T, c'est-à-dire que si x décrit un contour fermé et que u revienne à sa valeur initiale, la transformation T sera identique et toutes les intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$ reviendront à leurs valeurs initiales.

Or u est une fonction algébrique de x, susceptible de plusieurs déterminations.

Si, x décrivant un contour fermé, l'une de ces déterminations revient à sa valeur initiale, il en sera de même de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et, par conséquent, de toutes les autres déterminations de u. Donc le groupe de la fonction algébrique u est simplement transitif.

Nous pouvons donc supposer que les constantes d'intégration aient été choisies de telle sorte que le groupe de l'équation algébrique

$$\theta(x, y) = 0$$

soit simplement transitif.

Mais pouvons-nous toujours choisir les α de telle façon que l'intégrale générale de (1) soit une combinaison linéaire des diverses déterminations de u?

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, le nombre des déterminations linéairement indépendantes de $u = \Sigma \alpha_i y_i$ sera $m < n$.

Donc u satisfera à une équation linéaire d'ordre m à coefficients rationnels. D'ailleurs, comme $y_1, y_2, \ldots, y_n$ reviennent à leur valeur initiale quand u revient à sa valeur initiale (pourvu que les α aient été choisis comme je viens de le dire), les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ seront des fonctions rationnelles de x et de u. Donc l'intégrale générale de (1) sera une fonction rationnelle de x et de l'intégrale générale d'une équation d'ordre moindre.

Je dirai alors que l'équation (1) est *imprimitive*.

Nous supposerons dans ce qui va suivre que l'équation (1) est *primitive* et que les constantes aient été choisies de telle sorte que la fonction algébrique y admette n déterminations linéairement indépendantes et que son groupe soit simplement transitif.

La question de l'intégrabilité algébrique des équations linéaires est liée à

celle des groupes finis contenus dans le groupe linéaire. M. Klein a résolu complètement la question en ce qui concerne le deuxième ordre. M. Jordan, dans le Tome 84 du *Journal de Crelle*, puis dans les *Mémoires de l'Académie de Naples*, a donné une méthode générale pour la recherche des groupes finis contenus dans le groupe linéaire et appliqué sa méthode au troisième ordre.

Une question se pose toutefois. Étant donné un groupe fini contenu dans le groupe linéaire à n variables, existe-t-il toujours une équation linéaire du $n^{\text{ième}}$ ordre intégrable algébriquement et correspondant à ce groupe? A cette question, comme on devait s'y attendre, l'on doit répondre affirmativement.

1. Disons quelques mots d'abord de la constitution des groupes discontinus. Je suppose un groupe discontinu dérivé d'un nombre fini p de substitutions fondamentales

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_p.$$

On obtiendra toutes les substitutions de ce groupe en combinant ces p substitutions.

A chacune de ces combinaisons

$$S_i^{\alpha_i} S_k^{\alpha_k} S_h^{\alpha_h} \ldots,$$

où $\alpha_i, \alpha_k, \alpha_h, \ldots$ sont des entiers positifs ou négatifs, correspondra une substitution du groupe, mais toutes ces combinaisons ne sont pas toujours distinctes. Il peut y avoir deux de ces combinaisons qui seront identiques, auquel cas il y aura une de ces combinaisons qui se réduira à la substitution identique.

On aura donc un certain nombre de relations de la forme

$$S_i^{\alpha_i} S_k^{\alpha_k} S_h^{\alpha_h} \ldots = 1. \tag{3}$$

Ce sont *les relations de structure* du groupe.

Toutes ces relations ne sont pas distinctes; elles peuvent toutes se déduire d'un certain nombre d'entre elles que l'on appelle *relations fondamentales*. Je renverrai pour plus de détails au paragraphe 3 de mon Mémoire *Sur les groupes fuchsiens* (*Acta mathematica*, t. I) (¹).

Quelles sont pour un groupe fuchsien les relations de structure et en particulier les relations fondamentales? Je me bornerai à rappeler le résultat que j'ai obtenu à la page 16 du Mémoire cité. Décomposons le demi-plan en polygones générateurs $R_0, R_1, \ldots, R_q, \ldots$; à chacun des côtés de R_0 correspondra une substitution du groupe fuchsien, de telle sorte que les substitutions qui correspondent à deux côtés conjugués soient inverses l'une de l'autre. A chaque côté de R_q nous ferons correspondre la même substitution qu'au côté correspondant de R_0.

(¹) *Œuvres de* H. POINCARÉ, t. II, p. 109.

Décrivons un contour *fermé* qui traverse nécessairement les régions $R_1, R_2, \ldots, R_k$ et en sort par les côtés $C_1, C_2, \ldots, C_k$ auxquels correspondent les substitutions $S_1, S_2, \ldots, S_k$; nous aurons alors

$$S_1 S_2 \ldots S_k = 1,$$

et nous obtiendrons ainsi toutes les relations de structure du groupe.

Pour obtenir toutes les relations fondamentales, il suffira de décrire des contours fermés infinitésimaux autour des divers sommets de R_0.

Les divers sommets d'un même cycle donneront d'ailleurs la même relation, de sorte qu'il y aura autant de relations fondamentales que de cycles.

Appliquons cette règle à un groupe fuchsien du genre o. Soient

$$\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p \alpha_{p+1} \beta_p \beta_{p-1} \ldots \beta_2 \beta_1 \alpha_0$$

les $2p+2$ sommets du polygone R_0. Le côté $\alpha_i \alpha_{i+1} = C_i$ sera conjugué du côté $\beta_i \beta_{i+1} = C_i'$ et la substitution S_i transformera C_i en C_i'. Les sommets formeront $p+2$ cycles, à savoir

$$\alpha_0, \quad \alpha_1 \beta_1, \quad \alpha_2 \beta_2, \quad \ldots, \quad \alpha_p \beta_p, \quad \alpha_{p+1},$$

et je supposerai que les sommes des angles des sommets de ces cycles soient respectivement

$$\frac{2\pi}{n_0}, \quad \frac{2\pi}{n_1}, \quad \frac{2\pi}{n_2}, \quad \ldots, \quad \frac{2\pi}{n_p}, \quad \frac{2\pi}{n_{p+1}}.$$

Alors les relations fondamentales correspondant à ces différents cycles seront

$$S_0^{n_0} = (S_1 S_0^{-1})^{n_1} = (S_2 S_1^{-1})^{n_2} = \ldots = (S_p S_{p-2}^{-1})^{n_p} = S_p^{n_{p+1}} = 1. \tag{4}$$

Cela posé, quels rapports y a-t-il entre les relations de structure de deux groupes isomorphes? Il est clair que si l'isomorphisme est holoédrique les relations seront les mêmes; mais si l'isomorphisme est mériédrique l'un des deux groupes aura toutes les relations de structure de l'autre et en admettra, en outre, encore d'autres. Réciproquement, cette condition est suffisante pour que les deux groupes soient mériédriquement isomorphes.

Cela posé, soit H un groupe d'ordre fini contenu dans le groupe linéaire;

supposons que ce groupe soit dérivé de $p+1$ substitutions

$$S_0,\quad S_1,\quad S_2,\quad \ldots,\quad S_p.$$

Ce groupe étant d'ordre fini, une quelconque de ses substitutions sera d'ordre fini.

Ce sera le cas, en particulier, pour les substitutions

$$S_0,\quad S_1S_0^{-1},\quad S_2S_1^{-1},\quad \ldots,\quad S_pS_{p-1}^{-1},\quad S_p^{-1}.$$

Il existera donc des entiers $n_0, n_1, \ldots, n_{p+1}$, tels que

$$(4\,bis)\qquad S_0^{n_0}=(S_1S_0^{-1})^{n_1}=(S_2S_1^{-1})^{n_2}=\ldots=(S_pS_{p-1}^{-1})^{n_p}=(S_p^{-1})^{n_{p+1}}=1.$$

Ces relations ne seront d'ailleurs pas les seules relations de structure du groupe H.

Cela posé, nous pouvons construire un polygone fuchsien R_0 de genre o, de telle façon que les sommes des angles des sommets des différents cycles soient respectivement

$$(5)\qquad \frac{2\pi}{n_0},\quad \frac{2\pi}{n_1},\quad \ldots,\quad \frac{2\pi}{n_{p+1}}.$$

Soit G le groupe fuchsien correspondant. Ses substitutions fondamentales $S_0, S_1, \ldots, S_p$ satisferont aux relations (4) qui seront ses seules relations fondamentales.

Donc le groupe H admettra les mêmes relations de structure que G et encore d'autres; donc H est mériédriquement isomorphe à G. Il existera donc dans G un sous-groupe fuchsien G′ formé des substitutions de G auxquelles correspond dans H la substitution identique.

D'un autre côté, reportons-nous au paragraphe 5 du Mémoire : *Sur les fonctions zétafuchsiennes* (*Acta mathematica*, t. V) [1], nous verrons que, le groupe G étant de la première famille et le groupe H contenu dans le groupe linéaire à n variables étant isomorphe à G, nous pouvons construire n fonctions zétafuchsiennes

$$\zeta_1(z),\quad \zeta_2(z),\quad \ldots,\quad \zeta_n(z)$$

qui subissent une substitution linéaire du groupe H quand la variable z subit la substitution correspondante du groupe fuchsien G. Ces fonctions ζ sont en même temps des fonctions fuchsiennes admettant le groupe fuchsien G′. Si donc on pose

$$y=\zeta(z),$$

(1) *Œuvres de* H. POINCARÉ, t. II, p. 412.

y va satisfaire à une relation algébrique

$$(2)\qquad \theta(x,y)=0$$

et à une équation différentielle d'ordre n à coefficients rationnels.

Ainsi, à la question posée plus haut, on doit faire une réponse affirmative; on peut même remarquer qu'elle comporte une infinité de solutions dépendant d'un grand nombre d'arbitraires :

1° On peut choisir de plusieurs manières dans le groupe H les substitutions auxquelles on fera jouer le rôle de

$$S_0,\quad S_1,\quad S_2,\quad \ldots,\quad S_p;$$

2° Il y a une infinité de polygones R_0 de genre o et de $2p+2$ sommets tels que les sommes des angles des différents cycles admettent les valeurs (5). Il reste encore $p-1$ arbitraires, et c'est ce que je puis traduire en disant que je peux choisir arbitrairement les $p+2$ points singuliers de la fonction algébrique définie par l'équation (2) ou, ce qui revient au même, ceux de l'équation linéaire (1).

Soit m le nombre des déterminations de y, ce sera en même temps le degré en y de l'équation $\theta=0$ et l'ordre du groupe H. Je désigne par q le *genre* de la relation (2).

Proposons-nous de calculer q. La surface du polygone R_0 sera

$$2\pi\left(p-\frac{1}{n_0}-\frac{1}{n_1}-\ldots-\frac{1}{n_{p+1}}\right).$$

Soit R_0' le polygone générateur du groupe G′; sa surface sera évidemment

$$2\pi m\left(p-\frac{1}{n_0}-\frac{1}{n_1}-\ldots-\frac{1}{n_{p+1}}\right)=2\pi m\left(p-\sum\frac{1}{n_i}\right).$$

On aura, d'autre part,

$$q=\frac{\nu+1-\mu}{2},$$

2ν étant le nombre des côtés de R_0' et μ le nombre de ses cycles.

D'un autre côté, la surface de R_0' sera

$$2\pi\left(\nu-1-\sum\frac{1}{\alpha_i}\right),$$

en supposant que la somme des angles des μ cycles soit

$$\frac{2\pi}{\alpha_1},\quad \frac{2\pi}{\alpha_2},\quad \ldots,\quad \frac{2\pi}{\alpha_\mu}.$$

Or $\nu = \mu - 1 + 2q$, nous pouvons donc écrire pour cette surface

$$2\pi\left[2q - 2 + \sum\left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right)\right].$$

L'autre expression peut de même s'écrire

$$2\pi m\left[-2 + \sum\left(1 - \frac{1}{n_i}\right)\right].$$

Donc

$$m\left[-2 + \sum\left(1 - \frac{1}{n_i}\right)\right] = \left[2q - 2 + \sum\left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right)\right]. \tag{6}$$

Considérons un des cycles de R_0 dont la somme des angles sera $\frac{2\pi}{n_i}$.

Soit A l'un de ses sommets; envisageons les différents transformés de A par les substitutions de G.

Considérons ceux de ces transformés qui sont intérieurs à R'_0 ou qui sont des sommets de R'_0; ces derniers se répartissent en cycles. Soit B un de ceux qui sont intérieurs à R'_0. Observons que R'_0 peut être décomposé en m polygones congruents à R_0 et que j'appellerai

$$R_0, \quad R_1, \quad \ldots, \quad R_{m-1}, \tag{7}$$

chacun d'eux étant transformé de R_0 par une des substitutions de G.

Si nous envisageons ceux de ces polygones qui ont un sommet en B, nous voyons que ce sommet est homologue à A ou à un des sommets du cycle auquel appartient A et que, parmi ces polygones, il y en aura n_i pour lesquels ce sommet sera homologue à A. Il y aura donc n_i substitutions de G qui changeront A en B.

Soit maintenant C un transformé de A qui soit un sommet de R'_0 et soit $\frac{2\pi}{\alpha_k}$ la somme des angles du cycle auquel appartient C. Parmi les m substitutions qui changent R_0 en l'un des polygones (7), il y en aura alors $\frac{n_i}{\alpha_k} = \beta_k$ qui changent A en C, ou en un des sommets du même cycle.

D'où il suit d'abord que n_i est divisible par α_k.

Convenons alors de prendre pour le point B

$$\alpha_k = 1, \qquad \beta_k = n_i;$$

nous aurons

$$\sum \beta_k = m, \tag{8}$$

la sommation étant étendue à tous les points tels que B et C. Et, en effet,

chacune des m substitutions qui changent R_0 en l'un des polygones (7) change A en l'un des points B ou C.

Remarquons que chaque cycle de R'_0 ne devra être représenté qu'une fois dans la somme $\sum \beta_k$, même si plusieurs points C appartiennent à ce cycle.

Toutes les considérations qui précèdent et, en particulier, les relations (6) et (8) s'appliqueraient à un sous-groupe *quelconque* de G. Mais il y a ici quelque chose de plus, car G′ est un sous-groupe *invariant*.

Il en résulte qu'une substitution quelconque de G change R'_0 en un polygone équivalent. Reprenons alors notre point A et ses transformés B et C. Soient C et C′ deux de ces transformés appartenant à deux cycles différents de R'_0.

Il y aura une substitution de G qui changera C en C′. Soit $\frac{2\pi}{\alpha}$ et $\frac{2\pi}{\alpha'}$ la somme des angles des deux cycles correspondants. Qu'est-ce que cela veut dire? Cela veut dire que, parmi les substitutions de G′, il y en aura une qui, *au point de vue non euclidien*, pourra être regardée comme une rotation d'un angle $\frac{2\pi}{\alpha}$ autour de C; donc, le sous-groupe étant invariant, la rotation d'angle $\frac{2\pi}{\alpha}$ autour de C′ devra appartenir à G′; de même, la rotation d'angle $\frac{2\pi}{\alpha'}$ autour de C devra appartenir à G′. Cela n'est possible que si $\alpha = \alpha'$.

Supposons maintenant que l'un des transformés de A soit un point B. Alors, la rotation d'angle $\frac{2\pi}{\alpha}$ autour de B appartiendra à G′; mais comme B est intérieur au polygone générateur de G′, cela n'est possible que si cette rotation se réduit à la substitution identique, c'est-à-dire si $\alpha = 1$.

Deux cas seulement sont donc possibles :

1° Ou bien aucun des transformés de A n'est intérieur à R'_0; dans ce cas, tous les α_k sont égaux entre eux, de même que tous les β_k; si k_i est le nombre des cycles correspondants, on aura

$$\beta_k = \frac{m}{k_i}, \qquad \alpha_k = \frac{n_i k_i}{m},$$

et, pour les cycles correspondants,

$$\sum\left(1 - \frac{1}{\alpha_k}\right) = k_i\left(1 - \frac{m}{n_i k_i}\right) = \frac{m}{\beta_k} - \frac{m}{n_i}.$$

2° Ou bien quelques-uns des transformés de A sont intérieurs à R_0, tous les

α sont égaux à 1, de sorte qu'on a, pour les cycles correspondants,

$$\sum\left(1-\frac{1}{\alpha_k}\right)=0.$$

Nous distinguerons donc parmi les cycles de R_∞, c'est-à-dire parmi les termes du premier membre de (6), deux cas :

1° Dans le premier cas, où $\beta_k=\frac{m}{k_i'}$, $\alpha_k=\frac{n_i k_i}{m}$, on aura, en étendant la sommation aux cycles correspondants de R_0',

$$\sum\left(1-\frac{1}{\alpha_k}\right)-m\left(1-\frac{1}{n_i}\right)=\frac{m}{\beta_k}-m;$$

2° Dans le second cas, où $\alpha_k=1$, $\beta_k=n_i$, on aura

$$\sum\left(1-\frac{1}{\alpha_k}\right)-m\left(1-\frac{1}{n_i}\right)=\frac{m}{n_i}-m=\frac{m}{\beta_k}-m.$$

Or, la relation (6) peut s'écrire

$$-2m-\sum\left[\sum\left(1-\frac{1}{\alpha_k}\right)-m\left(1-\frac{1}{n_i}\right)\right]=2q-2;$$

nous aurons donc

$$m\left[-2+\sum\left(1-\frac{1}{\beta_k}\right)\right]=2q-2, \tag{9}$$

les β étant des entiers.

Discutons cette relation à laquelle nous aurions peut-être pu parvenir plus rapidement par des considérations sur la division régulière des surfaces de Riemann.

Dans le cas de $q=0$, le second membre sera négatif et nous devrons avoir

$$\sum\left(1-\frac{1}{\beta_k}\right)<2.$$

Dans le cas de $q=1$, le second membre sera nul et nous devrons avoir

$$\sum\left(1-\frac{1}{\beta_k}\right)=2.$$

Dans le cas de $q>1$, le second membre sera positif, mais comme m est un entier plus grand que 1, nous devrons avoir

$$\sum\left(1-\frac{1}{\beta_k}\right)\leq 2+\frac{2q-2}{m}\leq q+1.$$

En tout cas $\sum\left(1-\frac{1}{\beta_k}\right)$ est limité; les β_k sont des entiers; nous pouvons

laisser de côté les termes pour lesquels $\beta_k=1$ et qui sont nuls. Donc β_k est au moins égal à 1, de sorte que $1-\frac{1}{\beta_k}$ est compris entre $\frac{1}{2}$ et 1.

Soit ρ le nombre des termes de la somme $\sum\left(1-\frac{1}{\beta_k}\right)$, on aura

$$\rho>\sum\left(1-\frac{1}{\beta_k}\right)\geq\frac{\rho}{2}.$$

Dans le cas de $q=0$, on aura donc

$$\rho<4,$$

c'est-à-dire $\rho=1$, 2 ou 3.

D'autre part,

$$\rho>\sum\left(1-\frac{1}{\beta_k}\right)=2-\frac{2}{m}>1.$$

Donc $\rho=2$ ou 3. Si $\rho=2$, on a

$$\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}=\frac{2}{m},$$

équation qui n'admet d'autre solution que

$$\beta_1=\beta_2=m,$$

si l'on observe que l'équation (8) exige

$$\beta_1\leq m.$$

Si $\rho=3$, on a

$$\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}+\frac{1}{\beta_3}>1,$$

qui admet comme solutions

$$\beta_1=\beta_2=2,\quad \beta_1=2,\quad \beta_2=3,\quad \beta_3=3,\ 4\text{ ou }5.$$

On retrouve ainsi les groupes connus de Klein et on n'en trouve pas d'autres.

Dans le cas de $q=1$, on a

$$\rho>\sum\left(1-\frac{1}{\beta_k}\right)>2\geq\frac{\rho}{2},$$

d'où $\rho=3$ ou 4, ce qui donne les solutions connues

$$\beta_1=2,\quad \beta_2=3,\quad \beta_3=6;\quad \beta_1=2,\quad \beta_2=\beta_3=4,$$
$$\beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_4=4.$$

Dans le cas de $q>1$, on aura

$$q+1>\frac{\rho}{2}$$

et $\rho > 2$; avec

$$\sum \frac{1}{\beta_k} = \rho - 2 - \frac{2q-2}{m},$$

d'où

$$\frac{2q-2}{m} + \sum \frac{1}{\beta_k} = \rho - 2$$

(d'où d'abord $\rho > 2$).

Or

$$\beta_k < m, \qquad \text{d'où} \qquad \sum \frac{1}{\beta_k} > \frac{\rho}{m},$$

d'où

$$\frac{2q-2+\rho}{m} < \rho - 2,$$

ce qui donne une limite inférieure de m.

Or, nous avons vu plus haut que β_k est un diviseur de m et égal à $\frac{m}{k_i}$, notre équation peut alors s'écrire

$$\sum k_i + 2q - 2 = m(\rho - 2).$$

Soient β_1 le plus grand des β_k et S la somme de tous les autres $\frac{1}{\beta_k}$, on pourra écrire

$$\frac{1}{\beta_1} + \frac{2q-2}{m} = \rho - 2 - S,$$

et, comme S est au plus égal à $\frac{\rho-1}{2}$,

$$\frac{1}{\beta_1} + \frac{2q-2}{m} > \frac{\rho-3}{2},$$

et, *a fortiori*, puisque $\beta_1 < m$,

$$\frac{2q-1}{\beta_1} > \frac{\rho-3}{2}.$$

Si $\rho > 3$, cette relation limitera β_1 et, par conséquent, tous les autres β_k; j'ajoute qu'elle limite ρ, car elle donne

$$\rho - 3 < 2q - 1,$$

puisque $\beta_1 \geq 2$.

Si $\rho = 3$, on ne pourra avoir $\beta_2 = \beta_3 = 2$, auquel cas on aurait $S = 1$ et, par conséquent,

$$\frac{1}{\beta_1} + \frac{2q-2}{m} = 0.$$

Le cas le plus défavorable est donc

$$\beta_2 = 2, \qquad \beta_3 = 3,$$

d'où

$$S = \frac{5}{6}.$$

On a donc

$$S < \frac{5}{6},$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{\beta_1} + \frac{2q-2}{m} > \frac{1}{6},$$

ce qui limite encore β_1 et, par conséquent, tous les autres β.

En résumé, POUR UN GENRE q DÉTERMINÉ, *nos groupes* H *se ramèneront à un nombre fini de types.*

III. — Propriétés des intégrales abéliennes.

Reprenons la relation algébrique

$$\theta(x, y) = 0, \tag{2}$$

dont le degré est m et le genre q.

Toute fonction rationnelle de x et de y sera une fonction fuchsienne de z admettant le groupe G'; soit maintenant

$$J = \int R(x, y)\, dx$$

une des q intégrales abéliennes de *première espèce* de la courbe algébrique (2); ce sera une fonction uniforme de z; cette fonction sera toujours finie et elle se reproduira à une constante près quand z subira une des substitutions du groupe G'.

Si donc nous appelons cette fonction K (z), nous aurons

$$K(zS) = K(z) + \omega,$$

où j'écris, pour abréger, zS au lieu de $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, la substitution

$$S = \left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$$

étant une des substitutions du groupe fuchsien G'. Quant à ω, c'est une constante qui n'est autre chose qu'une période de l'intégrale abélienne (J).

A chaque substitution de G' correspondra ainsi une période de (J); mais, bien entendu, pour certaines de ces substitutions, cette période sera nulle.

Si ω correspond à S et ω' à S', on voit que $\omega+\omega'$ correspondra à SS', de même qu'à S'S, et $m\omega+n\omega'$ à $S^{m_1}S'^{n_1}S^{m_2}S'^{n_2}\ldots$, pourvu que

$$\sum m_i = m, \qquad \sum n_i = n.$$

Soit maintenant σ une substitution de G n'appartenant pas à G'. Que sera-ce que $K(z\sigma)$? Ce sera évidemment encore une intégrale abélienne de première espèce.

Si nous changeons z en zS, $z\sigma$ se changera en $zS\sigma$, et il viendra

$$K(zS\sigma) = K(z\sigma) + \omega',$$

ω' étant la période de $K(z\sigma)$ correspondant à S.

Soient alors $S_1, S_2, \ldots, S_h$ les substitutions fondamentales de G'; soient $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_h$ les périodes correspondantes de $K(z)$, $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_h$, celles de $K(z\sigma)$; nous aurons

$$K(zS_i) = K(z) + \omega_i,$$
$$K(zS_i\sigma) = K(z\sigma) + \omega'_i.$$

Si, dans cette dernière équation, je change z en $z\sigma^{-1}$, il vient

$$K(z\sigma^{-1}S_i\sigma) = K(z) + \omega'_i.$$

Or, G' étant un sous-groupe invariant de G, la substitution $\sigma^{-1}S_i\sigma$ appartiendra aussi à G'; d'où il suit que ω'_i est une combinaison linéaire à coefficients entiers des ω_i.

Ainsi *les périodes de l'intégrale abélienne de première espèce* $K(z\sigma)$ *seront des combinaisons linéaires à coefficients entiers des périodes de l'intégrale abélienne de première espèce* $K(z)$ *et réciproquement.*

Introduisons maintenant les intégrales abéliennes de *seconde espèce;* ces intégrales seront encore des fonctions uniformes de z, mais elles admettront des pôles. Soit $P(z,a)$ une de ces intégrales, exprimée en fonction de z; elle sera définie par les conditions suivantes :

1° Elle sera fonction méromorphe de z dans tout le cercle fondamental;

2° Elle admettra comme pôles simples les points

$$z=a \quad \text{et} \quad z=aS \quad (S \text{ étant une des substitutions de G'}),$$

et elle n'en admettra pas d'autres;

3° Le résidu de la fonction

$$P(z,a)$$

sera égal à 1 pour le pôle $z=a$;

4° On aura, pour une substitution S quelconque de G,

$$P(zS, a) = P(z, a) + \varphi(a), \tag{3}$$

$\varphi(a)$ étant une constante ne dépendant que de a; de telle sorte qu'à chaque substitution de G' corresponde une période de l'intégrale P.

Ces conditions ne suffiraient pas pour déterminer P, puisque, si elles sont remplies par P, elles le seront par P+K, K étant une intégrale de première espèce.

On peut achever de définir P (à une constante près) en s'imposant encore une condition :

5° p des périodes de P choisies une fois pour toutes, et que j'appellerai les *périodes de première sorte*, devront être nulles.

Étudions les propriétés de ces fonctions P.

Quels sont les résidus de P pour ses différents pôles? Soit

$$\frac{dx}{dz} = \psi(z),$$

et soit A le résidu de P pour le pôle $z=aS$. Nous aurons

$$P(zS^{-1}, a) = P(z, a) + \varphi_1(a),$$

$\varphi_1(a)$ étant la période qui correspond à la substitution S^{-1}; et pour z très voisin de aS, le premier membre sera très voisin de $\frac{1}{zS^{-1}-a}$ et le second de $\frac{A}{z-aS}$, on aura donc sensiblement

$$\frac{1}{zS^{-1}-a} = \frac{A}{z-aS},$$

d'où

$$A = \frac{\psi(a)}{\psi(aS)}.$$

Les conditions énoncées plus haut suffisent pour déterminer P à une constante près, car, si deux fonctions y satisfaisaient, elles auraient mêmes pôles et mêmes résidus; leur différence $D(z)$ serait partout finie. On aurait d'ailleurs

$$D(zS) - D(z) = \text{const.}$$

Donc $D(z)$ serait une intégrale de première espèce et comme p des périodes devraient être nulles, cette intégrale se réduirait à une constante.

Cela posé, j'observe que, dans la relation (3), $\varphi(a)$ doit être une fonction uniforme de a, puisque, quand on se donne a, la fonction $P(z,a)$ est entiè-

rement déterminée à une constante près, et, par conséquent, la différence $P(zS, a) - P(z, a)$ entièrement déterminée. De plus, cette fonction est toujours finie, puisque, quel que soit a, il suffit de donner à z une valeur différente des divers points aS pour que $P(zS, a)$ et $P(z, a)$ soient finis.

Soit maintenant T une substitution quelconque de G′ et considérons

$$P(z, aT).$$

Cette fonction admet comme pôle le point aS avec le résidu

$$\frac{\psi(aT)}{\psi(aS)}.$$

On aura donc

$$P(z, aT) = \frac{\psi(aT)}{\psi(a)} P(z, a) + \text{const.},$$

et, par conséquent,

$$P(zS, aT) - P(z, aT) = \frac{\psi(aT)}{\psi(a)} [P(zS, a) - P(z, a)]$$

ou

$$\varphi(aT) = \frac{\psi(aT)}{\psi(a)} \varphi(a).$$

Considérons maintenant la fonction

$$\int \varphi(z)\, dz = \Phi(z).$$

Remarquons que x prend la même valeur pour $z = a$ et pour $z = aT$, de sorte que

$$dx = \psi(aT)\, d(aT) = \psi(a)\, da,$$

d'où

$$\varphi(aT)\, d(aT) = \varphi(a)\, da$$

ou, en intégrant,

$$\Phi(aT) = \Phi(a) + \text{const.}$$

Donc $\Phi(z)$ est une intégrale abélienne de première espèce.

Soit maintenant σ une substitution de G n'appartenant pas à G′, et changeons σ en $z\sigma$ dans la relation (3),

$$P(zS, a) = P(z, a) + \varphi(a), \tag{3}$$

il viendra

$$P(z\sigma S, a) = P(z\sigma, a) + \varphi(a). \tag{3a}$$

Or, le sous-groupe G étant invariant, on aura

$$\sigma S = S'\sigma,$$

S′ appartenant aussi à G′, d'où

$$P(zS'\sigma, a) = P(z\sigma, a) + \varphi(a), \tag{3 bis}$$

ce qui veut dire d'abord que la période de l'intégrale $P(z\sigma, a)$ qui correspond à S′ est égale à $\varphi(a)$; c'est-à-dire que *les périodes de* $P(z\sigma, a)$ *sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers de celles de* $P(z, a)$.

Nous aurons d'autre part

$$P(zS', a) = P(z, a) + \varphi'(a), \tag{3 ter}$$

$\varphi'(a)$ étant la période correspondant à S′, étant par conséquent une combinaison linéaire des périodes fondamentales de P.

Comparons maintenant les résidus des deux fonctions

$$P(z, a\sigma^{-1}), \quad P(z\sigma, a)$$

pour le pôle $z = a\sigma^{-1}$; pour z voisin de $a\sigma^{-1}$, ces deux fonctions se réduiront *sensiblement* à

$$\frac{1}{z - a\sigma^{-1}}, \quad \frac{1}{z\sigma - a}.$$

Or, on a sensiblement

$$\frac{1}{z\sigma - a} = \frac{1}{z - a\sigma^{-1}} \frac{\psi(a)}{\psi(a\sigma^{-1})}.$$

On aura donc sensiblement

$$P(z\sigma, a) = \frac{\psi(a)}{\psi(a\sigma^{-1})} P(z, a\sigma^{-1}). \tag{4}$$

Je veux dire que la différence des deux membres reste finie; comme chacun des membres est une intégrale de seconde espèce, la différence devra donc être une intégrale de première espèce. Devons-nous dire que cette intégrale se réduit à une constante? Il faudrait pour cela que toutes les périodes que nous avons appelées de première sorte fussent nulles. Supposons donc que S soit une substitution qui corresponde à une période de la première sorte; la fonction $\varphi(a)$ qui figure dans (3a) et (3 *bis*) sera nulle. Les périodes de la première sorte du second membre de (4) seront donc nulles. En sera-t-il de même pour le premier membre et, par conséquent, pour la différence des deux membres? Aura-t-on, en d'autres termes,

$$P(zS\sigma, a) = P(z\sigma, a)?$$

Le premier membre peut s'écrire $P(z\sigma S'', a)$, où S″ appartient à G′; la période $\varphi''(a)$ correspondant à S″ devrait être nulle; elle devrait être de la première sorte.

La condition pour que nous ayons le droit de dire que la différence des deux membres de (4) est une constante serait donc que σ transformât toutes les périodes de la première sorte en périodes de la première sorte. Comme il n'en sera pas ainsi en général, tout ce que nous avons le droit de dire, c'est que cette différence est une intégrale de première espèce que j'appellerai $K(z, a, \sigma)$.

L'équation (3 *bis*) devient alors

$$P(zS', a\sigma^{-1})\frac{\psi(a)}{\psi(a\sigma^{-1})} + K(zS', a, \sigma) = P(z, a\sigma^{-1})\frac{\psi(a)}{\psi(a\sigma^{-1})} + K(z, a, \sigma) + \varphi(a)$$

ou bien

$$\varphi(a\sigma^{-1}, S')\frac{\psi(a)}{\psi(a\sigma^{-1})} + \theta(S', a, \sigma) = \varphi(a, S),$$

en désignant par $\varphi(a, S)$ et $\Phi(a, S)$ les fonctions $\varphi(a)$ et $\Phi(a)$ qui correspondent à la substitution S et par $\theta(S, a, \sigma)$ la période de $K(z, a, \sigma)$ qui correspond à S.

Comme x est une fonction fuchsienne de z admettant le groupe G, elle reprend la même valeur pour $z = a$ et pour $z = a\sigma^{-1}$; on peut donc écrire

$$\varphi(a\sigma^{-1}, S')\,da\sigma^{-1} + \theta(S', a, \sigma)\,da = \varphi(a, S)\,da,$$

d'où

$$\int \theta(S', a, \sigma)\,da = \Phi(a, S) - \Phi(a\sigma^{-1}, S') + \text{const.} \tag{5}$$

Le résultat s'énonce donc sous une forme plus simple quand on compare les intégrales de seconde espèce

$$P(z, a), \quad P(z\sigma, a).$$

Alors la période de la première de ces intégrales qui correspond à S serait égale à $\varphi(a)$, de même que la période de la seconde intégrale qui correspond à S'.

Donc *les périodes fondamentales de* $P(z\sigma, a)$ *seraient des combinaisons linéaires à coefficients entiers des périodes fondamentales de* $P(z, a)$. Seulement, $P(z\sigma, a)$ ne rentrerait pas dans le type des intégrales $P(z, a)$, parce que ses périodes de première espèce ne seraient pas nulles en général.

Pour aller plus loin, *cherchons la condition pour qu'il existe une fonction rationnelle* $F(x, y)$ *de* x *et de* y *qui satisfasse à une équation linéaire*

$$\sum \frac{d^q y}{dx^q} P_q(x) = 0 \tag{1}$$

d'ordre n. Cette fonction rationnelle sera évidemment égale à une fonction fuchsienne $\Phi(z)$ admettant le groupe G'. Si alors σ est une substitution

quelconque de G n'appartenant pas à G', $\Phi(z\sigma)$ satisfera à la même équation, de sorte que les m fonctions fuchsiennes $\Phi(z\sigma)$ ne seront pas linéairement indépendantes et s'exprimeront linéairement à l'aide de n d'entre elles. Il y aura donc entre ces m fonctions $(m - n)$ relations linéaires. Cette condition est d'ailleurs suffisante.

Soit alors β un des pôles de $\psi(z)$; soient

$$\sigma_1 = 1, \ \sigma_2, \ \sigma_3, \ \ldots, \ \sigma_m$$

m substitutions de G, distinctes par rapport à G', c'est-à-dire telles qu'aucune des combinaisons $\sigma_i\sigma_k^{-1}$ n'appartienne à G'. Considérons les pôles

$$\beta\sigma_1, \quad \beta\sigma_2, \quad \ldots, \quad \beta\sigma_m,$$

et soient

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_m$$

les résidus correspondants de $\Phi(z)$. Si l'un de ces points n'était pas un pôle de $\Phi(z)$, le résidu correspondant serait regardé comme nul.

Posons

$$b_i = a_i\,\psi(\beta\sigma_i),$$

de façon que

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_m$$

soient les résidus correspondants de la fonction rationnelle $F(x, y)$. Alors ces mêmes points seront encore des pôles pour $\Phi(z\sigma)$ avec les résidus

$$\frac{b_1(\sigma)}{\psi(\beta\sigma_1)}, \quad \frac{b_2(\sigma)}{\psi(\beta\sigma_2)}, \quad \ldots, \quad \frac{b_m(\sigma)}{\psi(b\sigma_m)},$$

les lettres $b_1(\sigma)$, $b_2(\sigma)$, $\ldots$, $b_m(\sigma)$ n'étant autre chose que les lettres b_1, b_2, $\ldots$, b_m placées dans un autre ordre. Il est aisé de voir ce que c'est que cet ordre. On aura

$$b_k(\sigma) = b_l$$

si l'on a

$$\sigma_i\sigma^{-1} = \sigma_k S,$$

S appartenant à G'.

En d'autres termes, les lettres $b_i(\sigma)$ ne sont autre chose que ce que deviennent les lettres b_i quand on les permute en leur faisant subir une des substitutions du groupe simplement transitif H de la relation algébrique (2) $\theta(x, y) = 0$.

Nous avons dit qu'il y a $(m - n)$ relations linéaires entre les fonctions $\Phi(z\sigma)$; il y aura les mêmes relations linéaires entre les résidus d'un même pôle, par exemple entre les $b_1(\sigma)$, les mêmes encore entre les $b_2(\sigma)$, les mêmes enfin entre les $b_m(\sigma)$.

Formons alors un déterminant à m lignes et m colonnes, où la $k^{\text{ième}}$ ligne sera formée par les $b_k(\sigma)$, de telle sorte que dans chaque ligne nous retrouvions les mêmes lettres $b_1, b_2, \ldots, b_m$ dans un ordre différent. C'est ce que M. Frobenius appelle un *déterminant de groupe* (Gruppendeterminant).

Il y aura les mêmes $(m-n)$ relations linéaires entre les éléments des diverses lignes de ce déterminant, c'est-à-dire que *le déterminant s'annulera ainsi que ses mineurs des* $(m-n-1)$ *premiers ordres*.

Nous venons de voir que la condition nécessaire pour qu'il y ait une fonction rationnelle $F(x,y)$ satisfaisant à une équation linéaire d'ordre n, c'est qu'il existe des nombres $b_1, b_2, \ldots, b_m$ dont le déterminant satisfasse à la condition que je viens d'énoncer. Je dis que cette condition est également suffisante.

Supposons en effet qu'elle soit remplie et soit $\Phi(z)$ une fonction fuchsienne quelconque; envisageons la combinaison

$$b_1\Phi(z\sigma_1^{-1}) + b_2\Phi(z\sigma_2^{-1}) + \ldots + b_m\Phi(z\sigma_m^{-1}) = \Theta(z).$$

Nous pouvons toujours choisir $\Phi(z)$ de telle façon que $\Theta(z)$ ne soit pas identiquement nulle; il suffit par exemple de supposer que $\Phi(z)$ admet le pôle $z=\beta$, sans admettre aucun des pôles

$$z=\beta\sigma_2, \qquad z=\beta\sigma_3, \qquad \ldots, \qquad z=\beta\sigma_m.$$

Cela posé, nous aurons

$$\Theta(z\sigma) = \sum b_i\Phi(z\sigma\sigma_i^{-1}) = \sum b_i\Phi(z\sigma_k^{-1}) = \sum b_k(\sigma)\Phi(z\sigma_k^{-1})$$

si l'on suppose

$$\sigma_i\sigma^{-1} = \sigma_k S = S'\sigma_k,$$

S et S′ appartenant à G′.

Ainsi $\Theta(z\sigma)$ est formé comme $\Theta(z)$, sauf que les coefficients b_k sont remplacés par les coefficients $b_k(\sigma)$.

Or, par hypothèse, il y a, entre les quantités $b_k(\sigma)$, $(m-n)$ relations linéaires de la forme

$$\sum A\, b_1(\sigma) = \sum A\, b_2(\sigma) = \ldots = \sum A\, b_m(\sigma) = 0. \tag{6}$$

On aura donc également les $(m-n)$ relations

$$\sum A\,\Theta(z\sigma) = 0,$$

ce qui veut dire que la fonction $\Theta(z)$ satisfera à une équation linéaire d'ordre n. C. Q. F. D.

Soit alors $K(z)$ une intégrale de première espèce quelconque; posons

$$J(z) = \sum b_i K(z\sigma_i^{-1});$$

$J(z)$ sera aussi une intégrale de première espèce et nous aurons

$$J(z\sigma) = \sum b_i K(z\sigma\sigma_i^{-1}) = \sum b_i K(z\sigma_k^{-1}S)$$
$$= \sum b_k(\sigma) K(z\sigma_k^{-1}S) = \sum b_k(\sigma) K(z\sigma_k^{-1}) + \text{const.},$$

car, S appartenant à G, on aura

$$K(zS) - K(z) = \text{const.}$$

On a donc, à cause des équations (6),

$$\sum A\, J(z\sigma) = \text{const.} \tag{7}$$

Observons, avant d'aller plus loin, qu'il résulte de nos définitions que

$$b_k(\sigma_k^{-1}\sigma_l) = b_1(\sigma_l) = b_l(\sigma_1) = b_l,$$

et d'ailleurs le sous-groupe G′ étant invariant, on aura, pour une substitution S quelconque de G′,

$$b_k(\sigma_l) = b_k(S\sigma_l) = b_k(\sigma_l S).$$

Soit alors

$$J(zS\sigma) - J(z\sigma) = \omega(\sigma).$$

Alors $\omega(\sigma)$ sera une constante, puisque ce sera une période de l'intégrale de première espèce $J(z)$ et l'on aura

$$\sum A\,\omega(\sigma) = 0,$$

en mettant en évidence les indices

$$\sum A_i\,\omega(\sigma_i) = 0. \tag{8}$$

Observons que $\omega(\sigma_1)$ est la période de $J(z)$ qui correspond à S, tandis que $\omega(b_i)$ est la période de $J(z)$ qui correspond à la substitution $\sigma_i^{-1}S\sigma_i$, laquelle appartient aussi au sous-groupe G′.

Donc $\omega(\sigma_k^{-1}\sigma_i)$ correspondra à la substitution $\sigma_i^{-1}\sigma_k S\sigma_k^{-1}\sigma_i$. Or, je puis répéter le même raisonnement qui m'a conduit à l'équation (8) en remplaçant S par $\sigma_k S\sigma_k^{-1}$; j'obtiendrai

$$\sum A_i\,\omega(\sigma_k^{-1}\sigma_i) = 0.$$

Si alors je pose

$$\omega(\sigma_k^{-1}\sigma_i) = \omega_k(\sigma_i),$$

j'aurai, en supprimant les indices i,

$$\sum A\,\omega_1(z) = \sum A\,\omega_2(z) = \ldots = \sum A\,\omega_m(z) = 0. \tag{9}$$

On voit qu'il y a entre les ω les mêmes relations qu'entre les b; les périodes de l'intégrale $J(z)$ peuvent donc jouer le rôle des b.

Tout ce qui précède deviendrait illusoire si $J(z)$ se réduisait à une constante.

Nous sommes donc conduit à nous poser la question suivante :

Peut-il arriver que, quelle que soit l'intégrale $K(z)$ choisie, on ait

$$\sum b_i K(z\sigma_i^{-1}) = \text{const.} \tag{10}$$

Soient alors a un nombre quelconque, $a\sigma_i^{-1}$ un de ses transformés, et soit

$$\frac{d(a\sigma_i^{-1})}{da} = c_i.$$

Soit $K'(z) = \frac{dK}{dz}$ la dérivée de K; nous aurons

$$\sum b_i \frac{d(z\sigma_i^{-1})}{dz} K'(z\sigma_i^{-1}) = 0,$$

ou, en faisant $z = a$,

$$\sum b_i c_i K'(a\sigma_i^{-1}) = 0,$$

quelle que soit l'intégrale $K(z)$ choisie; nous aurons en particulier

$$\sum b_i c_i \varphi(a\sigma_i^{-1}) = 0,$$

$\varphi(a)$ étant la fonction qui figure dans la relation (3), puisque nous avons vu que cette fonction est la dérivée d'une intégrale de première espèce.

Posons alors

$$\sum b_i c_i P(z, a\sigma_i^{-1}) = H(z);$$

nous aurons, en vertu de la relation (3),

$$H(zS) - H(z) = \sum b_i c_i \varphi(a\sigma_i^{-1}) = 0,$$

c'est-à-dire que toutes les périodes de $H(z)$ seront nulles, c'est-à-dire que $H(z)$ sera une fonction fuchsienne de z et une fonction rationnelle de x et de y.

Quant à ses pôles $z = a\sigma^{-1}$, ils correspondront tous à une même valeur de x, $x = x_0$, puisque x est une fonction fuchsienne de z admettant le groupe G, ne changeant pas par conséquent quand on change z en $z\sigma_i^{-1}$. Nous pouvons d'ailleurs supposer que x_0 est fini, puisque a est arbitraire. Tous les pôles sont d'ailleurs simples.

Il y a donc deux cas concevables :

1° Ou bien on peut choisir des intégrales de première espèce telles que, en formant avec leurs périodes un déterminant de groupe de la façon que nous avons dite, ce déterminant s'annule ainsi que ses mineurs des $(m - n - 1)$ premiers ordres.

2° Ou bien les nombres b sont tels que, pour toutes les intégrales de première espèce $K(z)$, on ait

$$\sum b_i K(z\sigma_i^{-1}) = \text{const.}$$

Nous verrons plus loin que les deux cas peuvent se réaliser.

Quoi qu'il en soit, nous devons retenir les résultats suivants :

a. Quand on passe de l'intégrale $K(z)$ à l'intégrale $K(z\sigma)$, les périodes de cette intégrale subissent une substitution linéaire. *L'ensemble de ces substitutions linéaires, dont les coefficients sont des entiers, forme un groupe isomorphe à* H.

b. Il y a entre les périodes des intégrales abéliennes un certain nombre de relations. On pourra obtenir de semblables relations de deux manières :

1° Si les nombres b ne sont pas tels que $\sum b_i K(z\sigma_i^{-1}) = \text{const.}$, on en obtiendra en écrivant que le déterminant de groupe formé comme nous l'avons dit est nul ainsi que ses mineurs des $(m - n - 1)$ premiers ordres.

2° On sait que, entre les périodes de deux intégrales quelconques de première espèce $K(z)$ et $K'(z)$, il y a une relation bilinéaire due à Riemann.

Si nous prenons $K'(z) = K(z\sigma)$, les périodes de $K'(z)$ seront des combinaisons linéaires à coefficients entiers de celles de $K(z)$. Si nous substituons ces combinaisons dans la relation de Riemann à la place des périodes de $K'(z)$, nous aurons entre les périodes de $K(z)$ une relation quadratique à coefficients entiers.

IV. — Étude d'un exemple particulier.

Avant d'aller plus loin, je veux appliquer ce qui précède à un exemple simple, et je choisirai un groupe qui a été étudié en détail par M. Klein. Je veux parler du groupe de la résolvante de Galois de l'équation modulaire du septième ordre. Le groupe de Galois de cette résolvante est isomorphe au groupe qui permute les lettres

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ \infty$$

de la manière suivante. Une substitution quelconque de ce groupe changera la lettre z (où $z = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ ou ∞) en z', où

$$z' \equiv \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \pmod 7,$$

α, β, γ, δ étant des entiers tels que

$$\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \pmod 7.$$

Ce groupe (qui est alors isomorphe à notre groupe H) est d'ordre 168 et peut être considéré comme dérivé de deux substitutions fondamentales

$$\Sigma_3 = (z,\ z+1), \qquad \Sigma_2 = \left(z,\ \frac{5z+2}{z+2}\right).$$

Entre ces deux substitutions, nous avons les relations fondamentales

$$\Sigma_2^2 = \Sigma_3^3 = (\Sigma_2\Sigma_3)^7 = 1, \tag{1}$$

et nous en avons encore d'autres, parmi lesquelles je citerai seulement la suivante :

$$(\Sigma_2\Sigma_3^2)^4 = 1.$$

Construisons maintenant le groupe fuchsien G, auquel H est mériédriquement isomorphe. Pour cela, nous n'aurons qu'à le faire dériver de deux substitutions fondamentales σ_2 et σ_3, entre lesquelles auront lieu les relations fondamentales suivantes, identiques aux relations (1) :

$$\sigma_2^2 = \sigma_3^3 = (\sigma_2\sigma_3)^7 = 1. \tag{1 bis}$$

Le polygone fuchsien correspondant R_0 est un quadrilatère formé de deux triangles symétriques l'un de l'autre (je veux dire symétriques au sens de la

Géométrie non euclidienne). Pour chacun de ces triangles, les trois angles sont :

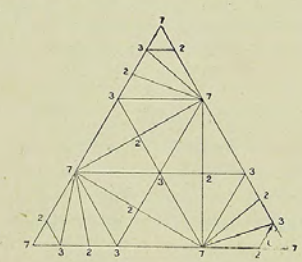
$$\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{7}.$$

Formons maintenant le sous-groupe G', ce sera encore un groupe fuchsien dont le polygone générateur R'_0 sera décomposable en 168 quadrilatères égaux à R_0 (toujours au point de vue non euclidien) ou en 336 triangles d'angles $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{7}$.

M. Klein a construit ce polygone qui a 14 côtés et est décomposable en 14 triangles équilatéraux égaux dont les angles sont égaux à $\frac{\pi}{7}$. Chacun de ces 14 triangles se décompose lui-même en 24 triangles dont les angles sont

$$\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{7}.$$

Il suffira de représenter ici l'un de ces triangles. J'ai fait cette représentation schématiquement en remplaçant les triangles curvilignes par des triangles rectilignes; j'ai marqué chaque point par les chiffres 2, 3 ou 7, selon que les angles des triangles qui y aboutissent sont $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{\pi}{7}$.



La décomposition de chaque triangle se déduit d'ailleurs aisément de celle du triangle contigu, si l'on observe que les deux figures représentant la décomposition de ces deux triangles sont symétriques par rapport au côté commun.

Il reste à définir la façon dont les quatorze côtés du polygone R'_0 sont conjugués.

Pour cela, numérotons ces côtés en faisant le tour du polygone dans le sens direct.

M. Klein a démontré que les côtés

$$1,10, \quad 3,12, \quad 5,14, \quad 7,2, \quad 9,4, \quad 11,6, \quad 13,8$$

sont conjugués.

On voit que les sommets forment deux cycles, l'un comprenant tous les sommets de rang pair, l'autre tous les sommets de rang impair. La somme des angles pour chacun de ces cycles est 2π. D'après la formule bien connue, le genre q est égal à 3.

Soit maintenant $K(z)$ une intégrale abélienne quelconque de première espèce engendrée par le groupe G′ et étudions ses périodes.

Soient :

ε_1	l'intégrale prise le long des côtés	1 et 2,
ε_2	»	3 et 4,
ε_3	»	5 et 6,
ε_4	»	7 et 8,
ε_5	»	9 et 10,
ε_6	»	11 et 12,
ε_7	»	13 et 14.

Ce seront des périodes; car, quand on a parcouru deux côtés consécutifs du polygone, on est passé d'un sommet de rang pair à un sommet de rang impair, c'est-à-dire *appartenant au même cycle*. De plus, on a

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4+\varepsilon_5+\varepsilon_6+\varepsilon_7=0,$$

car l'intégrale prise le long du polygone entier doit être nulle.

Soient maintenant

$$\zeta_1, \quad \zeta_2, \quad \zeta_3, \quad \zeta_4, \quad \zeta_5, \quad \zeta_6, \quad \zeta_7$$

les périodes qui correspondent aux substitutions qui changent respectivement les côtés

$$1 \text{ en } 10, \quad 2 \text{ en } 12, \quad 5 \text{ en } 14, \quad 7 \text{ en } 2, \quad 9 \text{ en } 4, \quad 11 \text{ en } 6, \quad 13 \text{ en } 8,$$

nous aurons

$$\zeta_1=-\varepsilon_6-\varepsilon_7, \quad \zeta_2=-\varepsilon_7-\varepsilon_1, \quad \zeta_3=-\varepsilon_1-\varepsilon_2, \quad \zeta_4=-\varepsilon_2-\varepsilon_3,$$
$$\zeta_5=-\varepsilon_3-\varepsilon_4, \quad \zeta_6=-\varepsilon_4-\varepsilon_5, \quad \zeta_7=-\varepsilon_5-\varepsilon_6.$$

Soit maintenant une seconde intégrale $K'(z)$ ayant pour périodes ε' et ζ', de sorte que l'on ait

$$\zeta'_1=-\varepsilon'_6-\varepsilon'_7, \quad \ldots.$$

L'intégrale

$$\int K'\,dK,$$

prise le long du polygone entier devra être nulle, de sorte qu'on aura

$$\zeta_1\alpha_1+\zeta_2\alpha_2+\zeta_3\alpha_3+\zeta_4\alpha_4+\zeta_5\alpha_7+\zeta'_5\alpha_9+\zeta'_6\alpha_{11}+\zeta'_7\alpha_{13}=0,$$

en désignant par α_i l'intégrale K prise le long du côté i, de telle sorte que

$$\alpha_1+\alpha_{10}=\alpha_2+\alpha_{12}=\ldots=0,$$
$$\varepsilon_1=\alpha_1-\alpha_7, \quad \varepsilon_2=\alpha_3-\alpha_9, \quad \varepsilon_3=\alpha_5-\alpha_{11}, \quad \varepsilon_4=\alpha_7-\alpha_{13},$$
$$\varepsilon_5=\alpha_9-\alpha_1, \quad \varepsilon_6=\alpha_{11}-\alpha_3, \quad \varepsilon_7=\alpha_{13}-\alpha_5.$$

En remplaçant les ζ' et les α en fonctions des ε' et des ε, on trouve

$$\begin{aligned}(2)\qquad &\varepsilon_1\varepsilon'_2-\varepsilon_2\varepsilon'_1+\varepsilon_1\varepsilon'_3-\varepsilon_3\varepsilon'_1+\varepsilon_1\varepsilon'_5-\varepsilon_5\varepsilon'_1+\varepsilon_1\varepsilon'_6-\varepsilon_6\varepsilon'_1+\varepsilon_2\varepsilon'_3\\ &-\varepsilon_3\varepsilon'_2+\varepsilon_2\varepsilon'_6-\varepsilon_6\varepsilon'_2+\varepsilon_4\varepsilon'_5-\varepsilon_5\varepsilon'_4+\varepsilon_4\varepsilon'_6-\varepsilon_6\varepsilon'_4+\varepsilon_5\varepsilon'_6-\varepsilon_6\varepsilon'_5=0,\end{aligned}$$

que je pourrai écrire sous la forme symbolique

$$(2\,bis)\qquad (12)+(13)+(15)+(16)+(23)+(26)+(45)+(46)+(56)=0.$$

Je remarque que, si nous posons

$$\varepsilon_1-\varepsilon_3-\varepsilon_6=\gamma_1, \quad \varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_5+\varepsilon_6=\gamma_2, \quad \varepsilon_4=\gamma_3,$$
$$\varepsilon_5+\varepsilon_6=\gamma_4, \quad \varepsilon_3=\gamma_5, \quad \varepsilon_6=\gamma_6,$$

la relation (2) devient

$$\gamma_1\gamma'_2-\gamma_2\gamma'_1+\gamma_3\gamma'_4-\gamma_4\gamma'_3+\gamma_5\gamma'_6-\gamma_6\gamma'_5=0,$$

c'est-à-dire que les périodes γ sont les *périodes normales*.

Examinons maintenant l'effet des diverses substitutions du groupe G. Parmi les points de notre polygone, nous distinguons, en particulier, les points (7), c'est-à-dire les points qui sont sommets de quatorze triangles avec un angle $\frac{\pi}{7}$; nous avons d'abord le centre de notre polygone, puis ses quatorze sommets; nous en avons, en outre, un sur chaque côté et un sur chacun des quatorze rayons allant du centre aux sommets. Mais les différents sommets de rang impair ne sont pas réellement distincts, puisqu'ils font partie d'un même cycle et qu'ils sont, par conséquent, *congruents*, c'est-à-dire transformables les uns dans les autres par une substitution du sous-groupe G′. De même pour les sommets de rang pair; de même enfin pour les deux points (7) situés sur deux côtés conjugués.

Nous aurons donc en tout vingt-quatre points (7) réellement distincts.

Considérons la substitution σ_3; c'est une rotation (au sens non euclidien) d'un angle $\frac{2\pi}{7}$ autour du centre du polygone. Cette rotation transforme les uns dans les autres les sommets de rang pair, de même que ceux de rang impair, de sorte qu'elle transforme chacun de ces sommets en un point congruent. Cela nous amène à distinguer parmi nos vingt-quatre points (7) ceux qui correspondent au centre et aux sommets du polygone; je les appellerai les *points* A.

Nous sommes donc conduits à répartir nos vingt-quatre points (7) en huit groupes comprenant chacun trois points (7) distincts; nous les appellerons les points A, les points B, ..., les points H.

Numérotons les sommets, les rayons du polygone dans le sens direct, comme nous avons fait pour les côtés; faisons de même pour les quatorze secteurs ou triangles dans lesquels on peut décomposer ce polygone, et cela de telle sorte que les sommets du côté 1 soient les sommets 1 et 2 et que le secteur 1 soit compris entre le côté 1 et les rayons 1 et 2.

Cela posé, les trois points B seront les points (7) qui se trouvent sur le côté 1 et sur les rayons opposés 6 et 13; les trois points C se trouveront sur le côté 3 et sur les rayons opposés 8 et 1; les trois points D se trouveront sur le côté 5 et sur les rayons opposés 10 et 3; et ainsi de suite.

Dans ces conditions, une rotation d'un angle multiple de $\frac{2\pi}{7}$ autour de l'un des points A change tout point A en un point A, et conserve, par conséquent, la lettre A, et permute circulairement les unes dans les autres les sept autres lettres; de même une rotation d'un angle multiple de $\frac{2\pi}{7}$ autour de l'un des points B conserve la lettre B et permute circulairement les unes dans les autres les sept autres lettres.

Plus généralement, une substitution quelconque de G permutera d'une certaine manière nos huit lettres; de telle sorte que si elle change, par exemple, un point A en un point B, elle changera tous les autres points A en des points B.

Ces permutations de 8 lettres formeront un groupe qui ne sera autre chose que notre groupe $\left(z, \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)$ de 168 substitutions.

Nous distinguerons en particulier la substitution σ_3 qui correspond à $(z, z+1)$, la substitution σ_2 qui correspond à $\left(z, \frac{5z+2}{z+2}\right)$, et la substitution σ_4 qui est une combinaison des deux premières et que je définirai comme il suit :

C'est une rotation d'un angle $\frac{2\pi}{3}$ autour du centre de figure du secteur 1, lequel secteur, représenté d'ailleurs sur la figure 1, est, comme nous le savons, un triangle équilatéral. Cette substitution conserve les lettres A et D et permute les autres de la façon suivante :

$$(A)(D)(GCB)(EFH).$$

Chacune des substitutions σ de G change R'_0 en un polygone R''_0 égal à R'_0 (au point de vue non euclidien) et qui pourrait tout aussi bien que R'_0 engendrer le groupe fuchsien G'.

Soient toujours $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_7$ les périodes de l'intégrale

$$K(z) = K(z\sigma_1)$$

et soit σ une substitution quelconque de G; quelles seront les périodes correspondantes de l'intégrale de première espèce $K(z\sigma)$? Si z décrit une courbe quelconque, $z\sigma$ décrira la transformée de cette courbe par σ; si donc z décrit deux côtés contigus de R'_0, $z\sigma$ décrira les deux côtés contigus correspondants de R''_0; la première période de $K(z\sigma)$ sera donc l'intégrale K prise le long des deux côtés 1 et 2 du polygone R''_0.

En appliquant cette règle, on trouve que les 7 périodes de $K(z\sigma_3)$ sont

$$\varepsilon_2, \quad \varepsilon_3, \quad \varepsilon_4, \quad \varepsilon_5, \quad \varepsilon_6, \quad \varepsilon_7, \quad \varepsilon_1;$$

celles de $K(z\sigma_3^2)$ sont

$$\varepsilon_3, \quad \varepsilon_4, \quad \varepsilon_5, \quad \varepsilon_6, \quad \varepsilon_7, \quad \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2,$$

et ainsi de suite; celles de $K(z\sigma_4)$ sont (lire le Tableau dans le sens horizontal)

$$\begin{array}{llll} \varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_5+\varepsilon_6, & \varepsilon_4+\varepsilon_5+\varepsilon_7+\varepsilon_1, \\ \varepsilon_6+\varepsilon_7+\varepsilon_2+\varepsilon_3, & \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_4+\varepsilon_5, \\ \varepsilon_3+\varepsilon_4+\varepsilon_6+\varepsilon_7, & \varepsilon_5+\varepsilon_6+\varepsilon_1+\varepsilon_2, \\ \varepsilon_7+\varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_4; \end{array}$$

celles de $K(z\sigma_2)$ sont

$$\begin{array}{llll} \varepsilon_4+\varepsilon_5, & \varepsilon_3+\varepsilon_6+\varepsilon_7, & -\varepsilon_3, & -\varepsilon_2-\varepsilon_5-\varepsilon_6, \\ \varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_5+\varepsilon_6, & -\varepsilon_6, & \varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4; \end{array}$$

celles de $K(z\sigma_2\sigma_3)$ seront

$$\begin{array}{llll} \varepsilon_5+\varepsilon_6, & \varepsilon_4+\varepsilon_7+\varepsilon_1, & -\varepsilon_4, & -\varepsilon_3-\varepsilon_6-\varepsilon_7, \\ \varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_6+\varepsilon_7, & -\varepsilon_7, & \varepsilon_2+\varepsilon_4+\varepsilon_5; \end{array}$$

et ainsi de suite.

Cela posé, reprenons la relation (2) et remplaçons $K'(z)$ successivement par $K(z\sigma_3)$, $K(z\sigma_3^2)$, $K(z\sigma_3^3)$, $K(z\sigma_2)$, $K(z\sigma_2\sigma_3)$, $K(z\sigma_4)$.

Nous pouvons supposer que K ait été choisi de telle sorte que les trois premières périodes soient 1, 0, 0; nous appellerons les trois suivantes x, y, z, de sorte que la septième sera $-1-x-y-z$.

Alors les six premières périodes seront :

pour $K(z)$,

$$1, \quad 0, \quad 0, \quad x, \quad y, \quad z;$$

pour $K(z\sigma_3)$,

$$0, \quad 0, \quad x, \quad y, \quad z, \quad -1-x-y-z;$$

pour $K(z\sigma_3^2)$,

$$0, \quad x, \quad y, \quad z, \quad -1-x-y-z, \quad 1;$$

pour $K(z\sigma_3^3)$,

$$x, \quad y, \quad z, \quad -1-x-y-z, \quad 1, \quad 0;$$

pour $K(z\sigma_2)$,

$$x+y, \quad -1-x-y, \quad 0, \quad -y-z, \quad 1+y+z, \quad -z;$$

pour $K(z\sigma_2\sigma_3)$,

$$y+z, \quad -y-z, \quad -x, \quad 1+x+y, \quad -1-x-y, \quad 1+x+y+z;$$

pour $K(z\sigma_4)$,

$$y+z, \quad -z, \quad -1-x-y, \quad 1+x+y, \quad -1-y \quad y+z+1.$$

On obtient ainsi, par la relation (2), six relations quadratiques en x, y, z qui sont (en changeant les signes au besoin) :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} x^2+2y^2+z^2+2yz+2xy+2y+x+1&=0,\\ x(x+y+z)&=y,\\ y^2+z^2+yz+x+2y+z+1&=0,\\ 0&=0,\\ (y+x)(z-1)-y(y+z)&=0,\\ y^2+xy+yz+x+y+1&=0. \end{aligned}\right.$$

Le point x, y, z doit donc se trouver sur cinq surfaces du second degré; or ces cinq surfaces n'ont que deux points communs qui nous sont donnés par

$$x=1, \quad z=-1, \quad y^2+y+2=0.$$

L'équation en y admet deux racines

$$y=T=\tau+\tau^2+\tau^4,$$
$$y=T'=\tau^3+\tau^5+\tau^6,$$
$$\tau=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7},$$

d'où

$$T+T'+1=0, \qquad TT'=2 \quad (1).$$

Au groupe H vont se trouver liés deux groupes *linéaires* remarquables, qui lui sont isomorphes.

Le premier est celui qui lie les périodes de $K(z\sigma)$ à celles de $K(z)$; par sa nature même, il ne peut contenir que des substitutions à coefficients entiers. Comme le nombre des périodes est de sept, mais qu'il n'y en a que six distinctes, c'est un groupe linéaire à six variables.

Nous prendrons les périodes ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, ε_5, ε_6, et nous trouverons, pour la substitution correspondant à σ_2,

$$\sigma_2'=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

et, pour la substitution correspondant à σ_3,

$$\sigma_3'=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Il est aisé de vérifier que le groupe dérivé de ces deux substitutions linéaires σ_2' et σ_3' est d'ordre 168 et isomorphe à H.

Le second groupe est celui des transformations que subissent les dérivées des intégrales abéliennes de première espèce; c'est un groupe linéaire à trois

(1) Quelle est celle de ces deux racines qui convient? Il suffit de se rappeler que si K_1 et K_2 sont les parties réelle et imaginaire de K, l'intégrale $\int K_1\,dK_2$ prise le long du périmètre du polygone est positive. Or cette intégrale, si $x=1$, $z=-1$, sera trois fois la partie imaginaire de y; nous devons donc prendre $y=T$.

variables; c'est celui que M. Jordan avait d'abord oublié dans son énumération, que M. Klein avait deviné et que M. Jordan avait enfin retrouvé dans une analyse plus complète.

Nous avons vu quelles sont les périodes de nos diverses intégrales :

$$\begin{array}{lllllllll}
K(z), & 1, & 0, & 0, & 1, & T, & -1, & T; \\
K(z\sigma_3), & 0, & 0, & 1, & T, & -1, & T, & 1; \\
K(z\sigma_3^2), & 0, & 1, & T, & -1, & T, & 1, & 0; \\
K(z\sigma_3^3), & 1, & T, & -1, & T, & 1, & 0, & 0.
\end{array}$$

Nous tirons de là

$$K(z\sigma_3^4) = K(z) + (T+1)K(z\sigma_3) + T\,K(z\sigma_3^2) + \text{const.},$$

car il est aisé de vérifier que les périodes de

$$K(z\sigma_3^4) - K(z) - (T+1)K(z\sigma_3) - T\,K(z\sigma_3^2)$$

sont nulles.

Il résulte de là que quand z se change en $z\sigma_3$ les dérivées des trois intégrales $K(z)$, $K(z\sigma_3)$, $K(z\sigma_3^2)$ subissent la substitution linéaire

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & T+1 & T \end{vmatrix},$$

dont la période est 7 (les racines de l'équation en S sont τ, τ^2, τ^4).

Voici maintenant les périodes des intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lllllllll}
K(z\sigma_2), & T+1, & -T-2, & 0, & 1-T, & T, & 1, & -1, \\
K(z\sigma_2\sigma_3), & T-1, & 1-T, & -1, & T+2, & -T-2, & T+1, & -T, \\
K(z\sigma_2\sigma_3^2), & -T-2, & T+1, & -T, & T-1, & 1-T, & -1, & T+2;
\end{array}$$

d'où les relations

$$\begin{aligned}
K(z\sigma_2) &= (T+1)K(z) + (T-2)K(z\sigma_3) + (-T-2)K(z\sigma_3^2) + \text{const.}, \\
K(z\sigma_2\sigma_3) &= (T-1)K(z) + (-2T-3)K(z\sigma_3) + (1-T)K(z\sigma_3^2) + \text{const.}, \\
K(z\sigma_2\sigma_3^2) &= (-T-2)K(z) + (2-T)K(z\sigma_3) + (T+1)K(z\sigma_3^2) + \text{const.},
\end{aligned}$$

ce qui veut dire que quand z se change en $z\sigma_2$, les dérivées de nos trois intégrales subissent la substitution linéaire

$$\begin{vmatrix} T+1 & T-2 & -T-2 \\ T-1 & -2T-3 & 1-T \\ -T-2 & 2-T & T+1 \end{vmatrix},$$

dont la période est 2.

Considérons maintenant l'intégrale suivante :

$$J_m = \sum_{p=0}^{p=6} K(z\sigma_3^p)\tau^m P,$$

où m prend l'une des valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Il est clair que si la première période de cette intégrale est ω, les autres seront

$$\omega\tau^{-m},\quad \omega\tau^{-2m},\quad \omega\tau^{-3m},\quad \omega\tau^{-4m},\quad \omega\tau^{-5m},\quad \omega\tau^{-6m}.$$

Mais il peut se faire que cette intégrale se réduise à une constante; c'est ce qui arrive si $\omega = 0$.

Or, il est aisé de vérifier que $\omega = 0$ pour

$$m = 0,\quad m = 1,\quad m = 2,\quad m = 4,$$

mais que $\omega \gtrless 0$ pour

$$m = 3,\quad m = 5,\quad m = 6.$$

Il y a donc des intégrales dont les sept périodes sont

$$\begin{array}{lllllll}
1, & \tau, & \tau^2, & \tau^3, & \tau^4, & \tau^5, & \tau^6, \\
1, & \tau^3, & \tau^4, & \tau^6, & \tau^8 = \tau, & \tau^{10} = \tau^3, & \tau^{12} = \tau^5, \\
1, & \tau^4, & \tau^8 = \tau, & \tau^{12} = \tau^5, & \tau^{16} = \tau^2, & \tau^{20} = \tau^6, & \tau^{24} = \tau^3;
\end{array}$$

mais il n'y en a pas dont les périodes soient

$$\begin{array}{lllllll}
1, & \tau^2, & \tau^6, & \tau^9, & \tau^{12}, & \tau^{15}, & \tau^{18}, \\
1, & \tau^3, & \tau^{10}, & \tau^{15}, & \tau^{20}, & \tau^{25}, & \tau^{30}, \\
1, & \tau^5, & \tau^{12}, & \tau^{18}, & \tau^{24}, & \tau^{30}, & \tau^{36}, \\
1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1.
\end{array}$$

Une dernière remarque :

L'intégrale $K(z)$ n'a que deux périodes distinctes, 1 et T; elle est donc réductible aux intégrales elliptiques. Les périodes de $K(z\sigma)$, où σ est une substitution quelconque de G, sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers des périodes de $K(z)$; il en est de même de celles de l'intégrale

$$U = \sum A\,K(z\sigma),$$

où les A sont des coefficients entiers quelconques et où la sommation s'étend aux 168 substitutions, σ, *distinctes* de G.

Les périodes de U sont donc des combinaisons linéaires à coefficients entiers de 1 et de T; cette intégrale est donc réductible aux intégrales elliptiques; *de*

sorte qu'il y a une infinité d'intégrales réductibles aux intégrales elliptiques.

V. — Théorèmes de Cartan et Frobenius.

Nous aurons besoin dans la suite de divers résultats obtenus par M. Cartan dans un Mémoire intitulé : *Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes* (*Annales de la Faculté de Toulouse*, t. XII) et par M. Frobenius dans une série de Mémoires publiés dans les *Sitzungsberichte* de l'Académie de Berlin de 1896 à 1901.

Rappelons ces résultats succinctement en insistant un peu sur certains points pour faire voir comment s'éclairent mutuellement les théorèmes de M. Cartan, d'une part, ceux de MM. Dedekind et Frobenius, d'autre part.

Considérons un système d'unités complexes

$$e_1, \quad e_2, \quad \ldots, \quad e_r,$$

dont la multiplication soit associative et non commutative; ces unités donneront naissance à un système S de nombres complexes. Je supposerai qu'il y a dans ce système un *module*, c'est-à-dire un nombre complexe

$$a = \sum a_i e_i$$

tel que l'on ait

$$ax = xa = x,$$

quel que soit le nombre complexe x.

Soient maintenant

$$x = \sum x_i e_i, \qquad y = \sum y_i e_i$$

deux nombres complexes quelconques, et soit

$$z = xy = \sum z_i e_i.$$

Il est clair que les z_i seront des fonctions linéaires des y_i, de sorte qu'à chaque nombre complexe x correspondra une transformation linéaire $\mathrm{T}(x)$ qui transformera les y_i en z_i et dont les coefficients seront des fonctions linéaires et homogènes des x_i.

Soit maintenant l'équation

$$xy = \omega y,$$

où ω est un nombre ordinaire; je puis l'écrire

$$(x - \omega a)\, y = 0,$$

ce qui exige que le déterminant de la transformation $\mathrm{T}(x - \omega a)$ soit nul. Ce déterminant, je l'appellerai $\Delta(x - \omega a)$.

L'équation

$$\Delta(x - \omega a) = 0$$

est une équation de degré r en ω que M. Cartan appelle l'*équation caractéristique*.

Si l'une des racines de cette équation est nulle, il existera un nombre y qui, multiplié (à gauche) par x, donne un produit nul, de telle sorte que

$$xy = 0$$

et que x peut s'appeler un diviseur de zéro (à gauche); mais M. Cartan ayant démontré qu'un diviseur de zéro (à gauche) est en même temps un diviseur de zéro (à droite), nous pourrons dire simplement un *diviseur de zéro*.

Si *toutes* les racines sont nulles, M. Cartan dit que x est *pseudonul*. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre soit pseudonul, c'est qu'une de ses puissances entières soit nulle.

Cela posé, supposons qu'on prenne pour unités complexes r nombres complexes quelconques du système S au lieu de $e_1, e_2, \ldots, e_r$. Soient

$$e'_1, \quad e'_2, \quad \ldots, \quad e'_r$$

ces nouvelles unités complexes qui seront des combinaisons linéaires des anciennes.

Soit

$$x = \sum x_i e_i = \sum x'_i e'_i, \qquad y = \sum y_i e_i = \sum y'_i e'_i,$$

$$z = xy = \sum z_i e_i = \sum z'_i e'_i.$$

Que deviendra la substitution $\mathrm{T}(x)$ qui changeait les y_i en z_i? elle devra être remplacée par une substitution $\mathrm{T}'(x)$ qui changera les y'_i en z'_i. Soit U la substitution linéaire qui change les y_i en y'_i; elle changera également les z_i en z'_i; de sorte qu'on aura

$$\mathrm{T}'(x) = \mathrm{U}^{-1}\,\mathrm{T}(x)\,\mathrm{U}.$$

c'est-à-dire que T' est la transformée de T par U.

On peut choisir les nouvelles unités complexes de façon à réduire le système S à sa forme la plus simple. C'est ce que M. Cartan a réussi à faire.

Pour cela, il introduit la notion de *sous-système;* l'ensemble des combinaisons linéaires de q nombres complexes appartenant à S formera un *sous-*

système σ de S si $q < r$; ce sous-système sera *semi-invariant à droite* si le produit (à droite) d'un nombre quelconque de σ par un nombre quelconque de S appartient à σ; on définit de même la semi-invariance à gauche; enfin on dit qu'un système est *invariant* s'il est semi-invariant à la fois à droite et à gauche.

Cela posé, M. Cartan a montré qu'un système *simple*, c'est-à-dire un système qui ne contient aucun sous-système invariant, ne peut être que ce qu'il appelle un p^2 ion, c'est-à-dire un système à p^2 unités e_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, p)$ avec la loi de multiplication

$$e_{ij}e_{jl} = e_{il}, \qquad e_{ij}e_{lk} = 0 \qquad (j \gtrless l).$$

Parmi les systèmes qui ne sont pas simples, il distingue d'abord les systèmes *semi-simples* qui admettent toutes les unités de plusieurs p^2 ions, et cela de telle façon que le produit de deux nombres complexes appartenant à deux p^2 ions différents soit toujours nul.

Enfin les systèmes qui ne sont ni simples, ni semi-simples, admettront toutes les unités d'un système semi-simple et, en outre, un certain nombre d'unités pseudonulles, dont les combinaisons linéaires forment un sous-système invariant dont tous les nombres sont pseudonuls.

Reprenons le déterminant $\Delta(x)$ que nous avons défini plus haut, et décomposons-le en facteurs irréductibles. A chacun des p^2 ions correspondra un de ces facteurs, qui sera de degré p et qui sera élevé à une puissance égale à p si le système est semi-simple et supérieure à p dans le cas contraire.

Tels sont les résultats de M. Cartan. Voyons comment ils peuvent être appliqués à la théorie des groupes.

Considérons un groupe d'ordre fini G; aux différentes substitutions faisons correspondre des unités complexes, dont la loi de multiplication soit la même que celle des substitutions. Je veux dire que, si les unités e_i, e_j, e_k correspondent respectivement aux substitutions σ_i, σ_j, $\sigma_i\sigma_j$, on ait

$$e_i e_j = e_k.$$

Cette loi est évidemment associative. Envisageons le système de nombres complexes S engendré par ces unités et, d'abord, formons l'équation caractéristique et le déterminant $\Delta(x)$ correspondant, ainsi que la substitution linéaire $T(x)$.

Soit

$$x = \sum x_i e_i, \qquad y = \sum y_k e_k, \qquad z = xy = \sum z_j e_j,$$

il vient

$$z = \sum x_i y_k e_j, \qquad z_j = \sum x_i y_k \qquad (e_j = e_i e_k).$$

Convenons d'adopter la notation si commode de M. Frobenius et de poser

$$x_l = x_{j,k} \qquad \text{si} \qquad e_l = e_k^{-1} e_j;$$

la transformation $T(x)$ s'écrira

$$z_j = \sum x_{j,k} y_k,$$

de telle sorte que l'élément de la $k^{\text{ième}}$ colonne et de la $j^{\text{ième}}$ ligne dans $\Delta(z)$ sera $x_{j,k}$.

Ce déterminant $\Delta(x)$ sera donc un de ceux que M. Frobenius appelle *déterminants de groupe;* nous en avons vu plus haut un exemple au paragraphe 3.

Ainsi l'on voit déjà apparaître un lien entre les travaux de M. Cartan, ceux de M. Frobenius et la question qui nous occupe ici.

Observons qu'il y a dans le système S certains nombres ξ qui jouissent de la propriété d'être *commutables* à tous les nombres du système; je veux dire que l'on aura

$$\xi x = x\xi,$$

x étant un nombre quelconque du système S.

Nous savons, en effet, que les substitutions du groupe G se répartissent en un certain nombre de *classes*, de telle façon que toutes les transformées d'une même substitution par toutes les substitutions de G appartiennent à une même classe.

La somme de toutes les unités complexes correspondant aux diverses substitutions d'une même classe sera un nombre commutable; et tous les nombres commutables seront des combinaisons linéaires des nombres ainsi obtenus.

Ces nombres commutables formeront évidemment un sous-système de nombres complexes à multiplication commutative. C'est ce sous-système que M. Frobenius a étudié dans son premier Mémoire [*Ueber Gruppencharaktere* (*Sitzungsberichte* de Berlin, t. II, 1896)].

Cela posé, on peut se demander si le système S est semi-simple au sens de M. Cartan. La réponse doit être affirmative; en effet, s'il n'était pas semi-simple, il contiendrait un sous-système invariant pseudonul. Or, si un pareil sous-système existait, il contiendrait au moins un nombre commutable. Soit,

en effet, $z = \sum x_i e_i$ un nombre quelconque de ce sous-système. Tous les coefficients x_i ne peuvent pas être nuls.

Supposons donc $x_k \gtrless 0$.

Soit s_k la substitution de G qui correspond à l'unité e_k, et désignons par e_k^{-1} l'unité qui correspond à la substitution inverse s_k^{-1}. Nous aurons

$$e_k e_k^{-1} = e_1,$$

e_1 étant l'unité qui correspond à la substitution identique. Le nombre

$$x e_k^{-1}$$

fait partie du sous-système, puisque ce sous-système est invariant. Dans ce nombre complexe, le coefficient de e_1 est égal à x_k. De même les nombres

$$e_j^{-1} x e_i^{-1} e_j$$

(où e_j est une quelconque de nos unités) feront partie du sous-système et le coefficient de e_1 sera égal à x_k. Enfin le nombre

$$y = \sum e_j^{-1} x e_k^{-1} e_j$$

fait partie du sous-système; *il devrait donc être pseudonul;* d'ailleurs le coefficient de e_1 est égal à $r x_k$ (r étant l'ordre du groupe G) et, par conséquent, différent de zéro. Donc le nombre y n'est pas nul. De plus, il est aisé de voir que ce nombre y est commutable.

Si donc il y avait un sous-système invariant pseudonul, il y aurait un nombre commutable pseudonul.

Or M. Frobenius a montré qu'il n'y avait pas de nombre commutable pseudonul, ou plutôt il a montré, ce qui revient au même, que le déterminant de certaines quantités qu'il appelle les $p_{\alpha\beta}$ n'est pas nul (*loc. cit.*, p. 990 et 991).

Donc *le système* S *est semi-simple et réductible à un certain nombre de* p^2 *ions*. Or on conclura immédiatement que chaque facteur irréductible du déterminant $\Delta(x)$ est affecté d'un exposant égal à son degré. C'est le théorème fondamental établi d'une manière un peu différente par M. Frobenius dans son second Mémoire [*Ueber die Primfactoren der Gruppendeterminante* (*Sitz.* de Berlin, t. II, 1896)].

Chaque p^2 ion contient un nombre commutable et un seul; si, en effet, les unités $e'_{\alpha\beta}$ de ce p^2 ion sont choisies de telle sorte que

$$e'_{ij} e'_{jl} = e'_{il}, \qquad e'_{ij} e'_{kl} = 0 \qquad (j \gtrless k),$$

le nombre

$$e'_{11} + e'_{22} + \ldots + e'_{pp}$$

sera commutable à toutes les unités du p^2 ion, et il n'y en aura pas d'autres.

Il sera d'ailleurs commutable également aux unités des autres p^2 ions; car nous savons que le produit de deux nombres appartenant à deux p^2 ions différents est toujours nul.

On peut conclure de là qu'il y a précisément autant de p^2 ions (ou autant de facteurs irréductibles de Δ) qu'il y a de nombres commutables distincts, c'est-à-dire qu'il y a de classes de substitutions dans le groupe G.

Cela posé, on peut appliquer au système S les procédés de M. Cartan et choisir de nouvelles unités

$$e'_1, \quad e'_2, \quad \ldots, \quad e'_r,$$

de façon à réduire le système autant que possible. On aura

$$r = \sum p^2,$$

la sommation s'étendant aux différentes valeurs de p correspondant aux différents p^2 ions; et les unités de chaque p^2 ion seront choisies de telle sorte que

$$e'_{ij} e'_{jl} = e'_{il}, \qquad e'_{ij} e'_{kl} = 0 \qquad (j \gtrless k),$$

et que le produit de deux unités appartenant à deux p^2 ions différents soit nul.

Que devient alors la substitution linéaire $T(x)$; elle se transforme, comme on l'a vu, en

$$T'(x) = U^{-1} T(x) U,$$

U étant la substitution linéaire qui, dans un même nombre complexe, lie les coefficients des nouvelles unités e' à ceux des anciennes unités e; et alors on voit que la substitution $T'(x)$ se décompose en plusieurs substitutions linéaires simultanées.

Désignons les unités nouvelles e' par une notation à trois indices $e'_{\alpha\beta\gamma}$; le premier indice représente le numéro du p^2 ion auquel appartient l'unité, les deux autres indices distinguent les unes des autres les diverses unités d'un même p^2 ion. La loi de multiplication est alors

$$e'_{\alpha\beta\gamma} e'_{\alpha\gamma\delta} = e'_{\alpha\beta\delta},$$

tous les autres produits étant nuls. Dans certains cas, le premier indice deviendra inutile et nous le supprimerons; quand il n'y aura que deux indices ce sera donc le premier indice qui aura été supprimé.

Cela posé, soit

$$x=\sum x_i e_i=\sum x'_{\alpha\beta\gamma}e'_{\alpha\beta\gamma}, \qquad y=\sum y'_{\alpha\beta\gamma}e'_{\alpha\beta\gamma}.$$

$$z=xy=\sum z'_{\alpha\beta\gamma}e'_{\alpha\beta\gamma}.$$

Il s'agit d'étudier la transformation $\mathrm{T}'(x)$ qui change les y' en z'. On trouve

$$z'_{\alpha\beta\gamma}=\sum x'_{\alpha\beta\delta}y'_{\alpha\delta\gamma},$$

la sommation s'étendant aux différentes valeurs de δ.

Ainsi les variables z' dépendront uniquement des variables y' qui ont même premier indice et même dernier indice que z, ce qui montre que la transformation $\mathrm{T}'(x)$ se décompose en $\sum p$ transformations linéaires partielles à p variables.

J'observe que si je conserve l'indice α et que je change l'indice γ, les coefficients $x'_{\alpha\beta\delta}$ ne changent pas. Les variables $y'_{\alpha\delta\epsilon}$ subissent donc *la même* transformation linéaire que les variables $y'_{\alpha\delta\gamma}$. Nos $\sum p$ substitutions linéaires partielles sont donc identiques p à p.

Nous devons nous poser maintenant une question. *Quand arrive-t-il que le déterminant $\Delta(x)$ est nul ainsi que tous ses mineurs des $(k-1)$ premiers ordres*? En effet, nous avons vu au paragraphe 3 que le déterminant de groupe formé par les quantités que nous avons appelées $b_i(\sigma)$ devait satisfaire à cette condition.

Si le déterminant $\Delta(x)$ y satisfait, il en sera de même du déterminant de la substitution $\mathrm{T}'(x)$ qui n'en est qu'un transformé.

Considérons notre $\alpha^{\text{ième}}$ p^2 ion et supposons que ce soit un p_α^2 ion. Supposons que le déterminant des p_α^2 quantités $x'_{\alpha\beta\gamma}$ soit nul ainsi que ses mineurs des $(k_\alpha-1)$ premiers ordres, mais que les mineurs d'ordre supérieur ne soient pas tous nuls.

Envisageons l'équation $xy=0$ qui peut s'écrire

$$\sum_\delta x'_{\alpha\beta\delta}y'_{\alpha\delta\gamma}=0.$$

Considérons en particulier celles de ces équations qui se rapportent à une valeur donnée de α et à une valeur donnée de γ; elles sont au nombre de p_α correspondant aux différentes valeurs de l'indice β. Comme les mineurs du

déterminant des x' sont nuls jusqu'à l'ordre $(k_\alpha-1)$; parmi ces équations, $(p_\alpha-k_\alpha)$ seulement sont distinctes, de sorte que nos p_α inconnues $y'_{\alpha\delta\gamma}$ dépendront encore de k_α arbitraires; il en sera de même des p_α inconnues $y'_{\alpha\delta\epsilon}$, de sorte que les p_α^2 inconnues y' relatives à notre $\alpha^{\text{ième}}$ p^2 ion dépendent de $k_\alpha p_\alpha$ arbitraires et que les r inconnues y' dépendent en tout de

$$\sum k_\alpha p_\alpha = k$$

arbitraires.

En d'autres termes, le déterminant de $\mathrm{T}'(x)$ [et par conséquent aussi le déterminant $\Delta(x)$] sera nul, ainsi que ses mineurs des $(k-1)$ premiers ordres.

En d'autres termes encore, l'équation $xy=0$ admet k solutions distinctes, de sorte qu'on a

$$xy^{(1)}=xy^{(2)}=\ldots=xy^{(k)}=0,$$

$y^{(1)}$, $y^{(2)}$, ..., $y^{(k)}$ étant k nombres complexes linéairement indépendants, c'est-à-dire que x est k fois diviseur de zéro.

Si nous multiplions x par r nombres complexes quelconques linéairement indépendants, les produits obtenus ne seront pas linéairement indépendants, puisque nous venons de voir que k de leurs combinaisons linéaires sont nulles; parmi ces produits, $(r-k)$ seulement seront distincts.

Donc x fait partie d'un sous-système semi-invariant à droite de $(r-k)$ nombres.

De même, x fera partie d'un sous-système semi-invariant à gauche de $(r-k)$ nombres. Mais il ne faudrait pas en conclure que x fait partie d'un sous-système invariant de $(r-k)$ nombres, car ces deux sous-systèmes semi-invariants ne sont pas identiques. Du reste, nous n'envisagerons ici que des sous-systèmes semi-invariants à droite.

Nous pourrons dire qu'un sous-système semi-invariant s de h nombres est *premier* quand il ne contiendra aucun sous-système semi-invariant de moins de h nombres, d'où il suit qu'on peut reproduire *tous* les nombres du sous-système s en multipliant un nombre *quelconque* x de ce sous-système par les divers nombres complexes y du système S. Car s'il n'en était pas ainsi, ceux des nombres de s qu'on obtiendrait en multipliant x par les divers nombres de S, ne reproduisant pas le sous-système s tout entier, formeraient un sous-système semi-invariant de moins de h nombres contenu dans s.

Dans un sous-système semi-invariant premier s, tous les coefficients $x'_{\alpha\beta\delta}$ qui ne sont pas nuls ont même premier indice α (et correspondent par conséquent

à un même p^2 ion). Et, en effet, supposons qu'il y ait dans s des nombres où deux coefficients x' dont les premiers indices α et α' soient différents, et qui ne soient pas nuls. Multiplions ces nombres par des nombres complexes

$$y' = \sum y'_{\alpha\beta\gamma} e'_{\alpha\beta\gamma},$$

où tous les coefficients y' soient nuls, sauf ceux dont le premier indice est α; dans les produits, les coefficients seront aussi tous nuls, sauf ceux dont le premier indice serait α, et ces produits formeront un sous-système semi-invariant contenu dans s; donc s ne serait pas premier.

Je dis maintenant que, dans le sous-système premier s, il y a, entre les p_α^2 coefficients $x'_{\alpha\beta\delta}$, des relations linéaires distinctes de la forme

$$\sum A_\beta x'_{\alpha\beta\delta} = 0, \tag{1}$$

où les A_β sont des coefficients constants ne dépendant pas des x' ni du second indice δ, et que ces relations sont au nombre de $(p_\alpha - 1)$, de sorte que, finalement, le sous-système se compose de p_α nombres distincts.

Et, en effet, soit X un nombre quelconque de notre sous-système premier s; tous les nombres du sous-système pourront être obtenus en multipliant l'un quelconque d'entre eux par d'autres nombres complexes, sans quoi ceux qu'on pourrait obtenir de cette façon formeraient un sous-système semi-invariant contenu dans s.

Considérons les nombres $Xe'_{\alpha\beta\gamma}$; ils font tous partie de s, ils ne peuvent pas être tous nuls, et, en effet, si l'on pose

$$e_1 = \sum C_{\alpha\beta\gamma} e'_{\alpha\beta\gamma},$$

il vient

$$X = Xe_1 = \sum C_{\alpha\beta\gamma} Xe'_{\alpha\beta\gamma}.$$

Les termes où le premier indice n'est pas égal à α sont déjà tous nuls; si ceux où ce premier indice est α étaient également tous nuls, il faudrait que X fût nul.

Soit donc $Xe'_{\alpha\beta\gamma} \geq 0$; le sous-système s pourra être obtenu en multipliant $Xe'_{\alpha\beta\gamma}$ par un nombre complexe quelconque. On obtient ainsi le sous-système semi-invariant

$$Xe'_{\alpha\beta_1}, \quad Xe'_{\alpha\beta_2}, \quad \ldots, \quad Xe'_{\alpha\beta_p},$$

qui se compose de p_α nombres et qui doit être identique à s.

Je dis maintenant que tout système semi-invariant non premier peut être décomposé en plusieurs sous-systèmes semi-invariants premiers n'ayant aucun nombre en commun et de telle façon que tout nombre du sous-système total puisse, d'une manière et d'une seule, être regardé comme une somme de nombres appartenant aux divers sous-systèmes composants.

Soit en effet X un nombre appartenant à un sous-système semi-invariant s non premier; nous aurons

$$X = \sum C_{\alpha\beta\gamma} Xe'_{\alpha\beta\gamma}.$$

Or $Xe'_{\alpha\beta\gamma}$ appartient à s et appartient en même temps au sous-système premier formé des nombres $Xe'_{\alpha\beta\delta}$ $(\delta = 1, 2, \ldots, p_\alpha)$.

Dans ses derniers Mémoires parus dans les *Sitzungsberichte* de Berlin de 1899 à 1901 et intitulés *Darstellung der Gruppen durch lineare Transformationen*, M. Frobenius cherche à former les groupes de substitutions linéaires isomorphes à un groupe fini donné. Ce problème pourrait être résolu en s'appuyant sur les principes suivants :

Soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ des variables indépendantes et φ un polynome linéaire et homogène par rapport à ces variables. Soit σ_i une substitution quelconque de G et e_i l'unité complexe correspondante. Soit G' un groupe de substitutions linéaires entre les n variables ξ, isomorphe à G, et σ'_i la substitution de G' correspondant à σ_i; soit φe_i ce que devient le polynome φ par cette substitution.

S'il n'y avait entre les fonctions linéaires φe_i aucune relation linéaire, le groupe G' pourrait être ramené à un groupe de permutations entre les φe_i, et, plus généralement, l'étude du groupe G' peut se ramener à celle des relations linéaires entre les φe_i.

Soit $X = \sum X_i e_i$ un nombre complexe quelconque; nous poserons

$$\varphi X = \sum X_i \varphi e_i,$$

et alors les relations linéaires cherchées seront de la forme

$$\varphi X = 0.$$

Il nous suffira de remarquer que l'ensemble des nombres X qui satisfont à cette relation forme un sous-système semi-invariant à gauche, et que, inversement, étant donné un sous-système semi-invariant à gauche, on peut s'en servir de cette façon pour définir un groupe linéaire G' isomorphe à G.

VI. — Applications du théorème de Frobenius.

Reprenons, comme dans les paragraphes 2 et 3 : 1° notre groupe fini H d'ordre m; 2° nos groupes fuchsiens G et G' et les fonctions fuchsiennes correspondantes; 3° les intégrales de première espèce $K(z)$ et les intégrales de seconde espèce $P(z, a)$. Conservons les mêmes notations, de telle sorte que σ désigne une substitution de G et S une substitution de G'.

Envisageons d'autre part, comme au paragraphe 5, le système d'unités complexes

$$e_1, \quad e_2, \quad \ldots, \quad e_m \tag{1}$$

correspondant au groupe H, de sorte qu'à chaque substitution de G correspond une substitution de H et, par conséquent, une des unités (1). Supposons qu'on ait réduit le système de nombres complexes correspondant, que j'appellerai *le système* Σ, à sa forme canonique (en le décomposant en p^2 ions), et soient

$$e'_{\alpha\beta\gamma}$$

les nouvelles unités complexes, le triple indice ayant même signification que plus haut.

Nous emploierons les notations suivantes : soit $F(z)$ une intégrale abélienne quelconque, combinaison des $K(z)$ et $P(z, a)$; considérons

$$F(z\sigma_i^{-1}),$$

σ_i étant une substitution de G. A cette substitution correspondra une unité complexe e_i, mais à cette unité correspondront plusieurs substitutions de G que j'appellerai $\sigma_i, \sigma'_i, \ldots$, et, par conséquent, plusieurs intégrales $F(z\sigma_i^{-1})$, $F(z\sigma_i'^{-1}), \ldots$; mais *toutes ces intégrales ne différeront les unes des autres que par des constantes;* car on aura $\sigma'_i = \sigma_i S$, S appartenant à G'. Si donc je conviens de poser

$$F(z\sigma_i^{-1}) = F(z)e_i,$$

la fonction $F(z)e_i$ sera définie *à une constante près*.

Soit maintenant

$$X = \sum X_i e_i = \sum X'_{\alpha\beta\gamma} e'_{\alpha\beta\gamma},$$

je conviendrai de poser

$$F(z)X = \sum X_i [F(z)e_i].$$

Nous aurons

$$[F(z)e_i]e_k = [F(z\sigma_i^{-1})]e_k = F(z\sigma_k^{-1}\sigma_i^{-1}) = F(z)(e_i e_k),$$

puisque $\sigma_i\sigma_k$ correspond à $e_i e_k$; et plus généralement

$$[F(z)X]Y = F(z)(XY),$$

de sorte que je pourrai écrire simplement $F(z)XY$.

Autre remarque : si $F(z)$ est une intégrale de première espèce, ou se réduit à une fonction algébrique (je veux dire une fonction algébrique de x et de y et, par conséquent, une fonction fuchsienne de z), ou se réduit à une constante, il en sera de même de $F(z)X$.

Si nous rapprochons ces deux remarques, nous verrons que, si l'on considère une fonction $F(z)$ quelconque, l'ensemble des nombres X qui seront tels que la fonction $F(z)X$ jouisse de l'une de ces trois propriétés, formeront un sous-système semi-invariant à droite; car il est clair que, si $F(z)X$ jouit d'une de ces propriétés, il en est de même de $F(z)XY$, quel que soit le nombre Y.

Par exemple, nous avons q intégrales de première espèce $K(z)$; supposons

$$q < m$$

et considérons les m intégrales

$$K(z\sigma_1), \quad K(z\sigma_2), \quad \ldots, \quad K(z\sigma_m); \tag{2}$$

il y aura entre elles au moins $(m - q)$ relations linéaires distinctes. Or une combinaison linéaire quelconque des intégrales (2) peut s'écrire d'après notre nouvelle notation

$$K(z)X,$$

X étant un nombre complexe du système Σ. Parmi ces combinaisons, il y en aura [pour le moins $(m - q)$] qui se réduiront à des constantes et les nombres X correspondants formeront un sous-système semi-invariant.

Supposons que, parmi les intégrales (2), il y en ait q' qui soient linéairement indépendantes; le nombre q' sera au plus égal au genre q; d'où $q' \leq q$.

Quoi qu'il en soit, le sous-système semi-invariant formé par les nombres X tels que $K(z)X = \text{const.}$ comprendra précisément $(m - q')$ nombres complexes linéairement indépendants.

Considérons maintenant l'ensemble des nombres X tels que l'on ait *à la fois* [pour toutes les intégrales (2)]

$$K(z\sigma_1)X = \text{const.}, \quad K(z\sigma_2)X = \text{const.}, \quad \ldots, \quad K(z\sigma_m)X = \text{const.}$$

Cet ensemble formera un sous-système non plus semi-invariant, mais *invariant*, car il est clair qu'on aura

$$K(z)YX = \text{const.}, \qquad K(z)YXZ = \text{const.},$$

Y et Z étant deux nombres complexes quelconques.

Cela posé, nous dirons qu'une intégrale de première espèce $K(z)$ *appartient* à un p^2 ion II si l'on a

$$K(z)X = \text{const.},$$

X étant un nombre complexe quelconque faisant partie d'un p^2 ion autre que II, et si la même relation n'a pas lieu pour *tous* les nombres complexes de II.

Il résulte de cette définition que toute intégrale de première espèce peut être regardée comme la somme de plusieurs autres dont chacune *appartient* à un p^2 ion déterminé.

Soit, en effet,

$$K(z) = K(zz_1) = K(z)e,$$

cette intégrale, nous pouvons écrire

$$e_1 = X_1 + X_2 + \ldots + X_p,$$

chacun des nombres X_i faisant partie d'un p^2 ion déterminé. Nous aurons alors

$$K(z) = K(z)X_1 + K(z)X_2 + \ldots + K(z)X_p.$$

Alors $K(z)X_i$ ou bien se réduira à une constante ou appartiendra au même p^2 ion que X_i; car on aura évidemment

$$K(z)X_iX_k = \text{const.},$$

si X_k fait partie d'un autre p^2 ion que X_i, puisque alors on aurait $X_iX_k = 0$, et, d'autre part, si X_i et X_k font partie du même p^2 ion, on n'aura pas la même relation, quel que soit X_k, puisqu'il y a un nombre X_k tel que $X_iX_k = X_i$.

Examinons maintenant ce qui se passe, s'il y a des p^2 ions auxquels n'appartient aucune intégrale de première espèce, et il y en aura forcément si $m > q$. Soit X un nombre d'un de ces p^2 ions et $K(z)$ une intégrale quelconque, on aura

$$K(z)X = \text{const.} \tag{3}$$

Considérons les périodes de nos intégrales; les périodes de $K(z\sigma_i^{-1})$ seront des combinaisons linéaires à coefficients entiers de celles de $K(z)$ et les coefficients entiers de ces combinaisons pourront être déterminés comme nous

l'avons vu au paragraphe 3. Celles de $K(z)X$ seront encore des combinaisons linéaires de celles de $K(z)$; mais les coefficients ne seront plus entiers; ces coefficients toutefois seront aisés à déterminer, puisque ce seront à leur tour des combinaisons linéaires à coefficients entiers des coefficients X_i du nombre complexe

$$X = \sum X_i e_i.$$

Si alors ω est une période de $K(z)$ et si ωX est la période correspondante de $K(z)X$, alors, en vertu de (3), on aura

$$\omega X = 0. \tag{4}$$

La relation (4) est une relation linéaire entre les périodes de $K(z)$ et, d'après nos hypothèses, ces relations doivent avoir lieu pour toutes les intégrales $K(z)$.

Or, nous savons qu'il existe q intégrales admettant chacune $2q$ périodes.

Parmi ces périodes, q peuvent être choisies arbitrairement; il y a donc entre les $2q$ périodes q relations qui restent vraies pour toutes les intégrales et il n'y en a que q.

Ces relations sont bien connues. Si $K(z)$ et $K'(z)$ sont deux intégrales quelconques, on sait qu'il y a entre les périodes de ces deux intégrales une relation bilinéaire à coefficients entiers, dite de Riemann, qui s'écrira, par exemple,

$$\omega_1\omega'_1 - \omega_2\omega'_2 + \omega_3\omega'_3 - \omega_1\omega'_1 + \ldots + \omega_{2q-1}\omega'_{2q} - \omega_{2q}\omega'_{2q-1} = 0,$$

si les ω_i sont les périodes normales de $K(z)$ et les ω'_i celles de $K'(z)$.

Si, dans ces relations bilinéaires, on prend pour $K'(z)$ successivement q intégrales de première espèce linéairement indépendantes, on aura, entre les périodes de $K(z)$, q relations linéaires distinctes et qui resteront les mêmes quelle que soit l'intégrale $K(z)$. *Il ne peut y avoir d'autre relation linéaire entre ces périodes.*

Donc, de deux choses l'une : ou bien la relation (4) sera une identité, et alors tous les coefficients de cette relation devront s'annuler, ce qui nous donnera *un certain nombre de relations linéaires à coefficients entiers entre les* X_i (c'est-à-dire entre les coefficients du nombre complexe $X = \sum X_i e_i$), *qui seront vraies pour tous les nombres complexes du* p^2 *ion considéré.*

Ou bien la relation (4) est l'une des relations dont nous venons de parler, que l'on obtient à l'aide d'une intégrale $K'(z)$ et dont les coefficients sont des périodes de cette intégrale $K'(z)$; et alors *il y aura une intégrale de première espèce dont les périodes seront des combinaisons linéaires à coefficients entiers des* X_i.

Pour savoir lequel de ces deux cas se présentera, je considère l'intégrale de seconde espèce $P(z, a)$ et je forme

$$P(z, a)X.$$

On démontrerait de la même manière : 1° que les nombres X tels que $P(z, a)X$ soit une fonction algébrique, forment un sous-système semi-invariant à droite; 2° que les nombres X tels que tous les $P(z\alpha, a)X$ soient des fonctions algébriques, forment un système invariant; 3° qu'une intégrale de seconde espèce quelconque peut toujours être décomposée en une somme d'une fonction algébrique et de plusieurs intégrales de seconde espèce appartenant chacune à un p^2 ion déterminé.

Il convient, bien entendu, de dire que $P(z, a)$ appartient au p^2 ion Π, si $P(z, a)X$ est algébrique quand X est un nombre complexe quelconque faisant partie d'un p^2 ion autre que Π et si cela n'est plus vrai quand X fait partie de Π (ou du moins pour tous les nombres complexes X faisant partie de Π).

Soit alors un p^2 ion auquel n'appartienne aucune intégrale de seconde espèce; soit $\varphi(a)$ l'une des périodes de $P(z, a)$ et $\varphi(a)X$ la période correspondante de $P(z, a)X$, on devra avoir

$$\varphi(a)X = 0, \tag{4 bis}$$

X étant un nombre quelconque du p^2 ion envisagé et quelle que soit l'intégrale $P(z, a)$.

La relation (4 *bis*) est une relation linéaire entre les périodes de $P(z, a)$ formée avec ces périodes comme la relation (4) l'était avec celles de $K(z)$. Mais ces périodes d'une intégrale de deuxième espèce peuvent être choisies arbitrairement.

Donc la relation (4 *bis*) est une identité, et il en est de même de la relation (4).

On est donc dans le premier cas et il y a entre les X_i des relations linéaires à coefficients entiers.

Soit maintenant un p^2 ion auquel n'appartienne aucune intégrale de

première espèce et auquel appartienne pourtant une intégrale de deuxième espèce. Alors la relation (4) ne pourra être une identité, sans quoi il en serait de même de (4 *bis*) et $P(z, a)X$ serait algébrique quelle que soit $P(z, a)$, contrairement à l'hypothèse.

On est donc dans le second cas et il y a une intégrale de première espèce dont les périodes sont des combinaisons à coefficients entiers des X_i.

Nous devons donc distinguer trois sortes de p^2 ions :

Première sorte : *Tous les* $P(z, a)X$ *sont des fonctions algébriques.*

Deuxième sorte : *Tous les* $P(z, a)X$ *ne sont pas des fonctions algébriques, mais tous les* $K(z)X$ *sont des constantes.*

Troisième sorte : *Tous les* $K(z)X$ *ne sont pas des constantes.*

Plaçons-nous à un autre point de vue. Considérons les unités complexes (1) $e_1, e_2, \ldots, e_m$: elles seront liées aux unités complexes nouvelles $e'_{\alpha\beta\gamma}$ par des relations linéaires à coefficients constants. On aura, par exemple,

$$e'_{\alpha\beta\gamma} = \sum A_i e_i,$$

et les coefficients A_i seront des nombres *algébriques*. Supposons que pour l'un des p^2 ions, que j'appellerai le p^2 ion Π_α, les coefficients A_i qui entrent dans les expressions des unités $e'_{\alpha\beta\gamma}$ soient des fonctions rationnelles à coefficients entiers d'une certaine racine ζ d'une équation algébrique L à coefficients entiers.

Plus généralement, supposons que le p^2 ion Π_α puisse être engendré par p^2 unités fondamentales e'', qui pourront être différentes des unités canoniques $e'_{\alpha\beta\gamma}$, et que l'on ait

$$e'' = \sum A_i e_i,$$

les A_i étant des fonctions rationnelles de ζ.

Il suffit pour cela que le nombre commutable qui fait partie de Π_α ait ses coefficients rationnels en ζ. En effet, on obtiendra les nombres de Π_α en multipliant ce nombre commutable par un nombre complexe quelconque. Si nous multiplions ce nombre commutable par des nombres complexes entiers, les produits auront leurs coefficients rationnels en ζ et l'on pourra choisir les p^2 unités fondamentales parmi les produits ainsi obtenus.

Soient $\zeta', \zeta'', \ldots$ les autres racines de cette équation L. Soit B_i ce que

devient A_i quand on y remplace ζ par ζ'; il existera un autre p^2 ion Π_δ dont les unités fondamentales seront

$$\sum B_i e_i.$$

Les p^2 ions Π_α, Π_δ et ceux qu'on formerait avec ζ'', ..., comme on a formé Π_δ avec ζ', seront dits *conjugués*.

Il peut arriver, il est vrai, que Π_α, Π_δ et tous les p^2 ions conjugués se confondent en un seul, et c'est ce qui arrive en particulier avec les quaternions ordinaires de Hamilton, si l'on veut faire dériver ces quaternions des unités canoniques $e'_{\alpha\beta\gamma}$; mais si l'on ne s'astreint pas à choisir ces unités canoniques comme unités fondamentales, on peut toujours supposer que tous les conjugués de Π_α sont distincts. Il suffit pour cela de prendre pour unités fondamentales p^2 produits du nombre commutable par des nombres complexes entiers.

Je dis que si un p^2 ion est de la première sorte, il en sera de même de tous ses conjugués.

En effet, la condition nécessaire et suffisante pour que Π_α soit de la première sorte, c'est que la relation (4), pour tous les nombres de ce p^2 ion, se réduise à une identité, c'est-à-dire que l'on ait *identiquement*, pour toutes les unités fondamentales de Π_α,

$$\omega e'' = o,$$

quelle que soit la période ω choisie, c'est-à-dire enfin que l'on ait, pour toutes ces unités fondamentales, certaines relations

$$\sum m_i A_i = o,$$

dont les coefficients m_i sont des entiers faciles à déterminer.

Mais, comme ces coefficients sont entiers, les relations devront subsister quand on y remplacera ζ par ζ'; on aura donc encore

$$\sum m_i B_i = o,$$

de sorte que Π_δ sera encore de la première sorte.

Remarquons maintenant que le nombre des intégrales de première espèce appartenant à un p^2 ion (d'ordre p) est toujours un multiple de p. Et, en effet, partons d'une intégrale $K(z)$ quelconque et formons les diverses intégrales $K(z)X$, où X est un nombre complexe du p^2 ion considéré; il y en

aura p^2, puisqu'il y a p^2 nombres X dans le p^2 ion, mais elles ne seront pas toutes distinctes; il peut y avoir en effet des relations de la forme

$$K(z)X = \text{const.} \tag{5}$$

Nous savons que les nombres X jouissant de cette propriété forment un sous-système semi-invariant à droite et il en est de même des nombres X jouissant de cette propriété et faisant partie de notre p^2 ion.

Or, les sous-systèmes semi-invariants faisant partie de ce p^2 ion peuvent être décomposés en un certain nombre de sous-systèmes semi-invariants *premiers* contenant chacun p nombres. Le nombre des relations (5) distinctes sera donc un multiple de p et il en sera de même par conséquent du nombre des intégrales $K(z)X$ *distinctes*.

Nous pouvons dire que les intégrales $K(z)X$ *dérivent* de l'intégrale $K(z)$, où X est un nombre quelconque du p^2 ion.

Il en résultera que le nombre des intégrales distinctes qui dérivent d'une même intégrale et qui appartiennent à un même p^2 ion, est un multiple de p.

Nous dirons qu'un système d'intégrales est *fermé*, si elles appartiennent à un même p^2 ion et si toutes les intégrales qui dérivent d'une intégrale du système font également partie du système. Nous dirons qu'un système fermé est *premier* s'il ne contient aucun système fermé plus petit.

Je dis alors qu'un système fermé premier quelconque se compose de p intégrales. Je n'ai qu'à répéter les raisonnements que j'ai faits au paragraphe 5 à propos des sous-systèmes semi-invariants premiers. Le système étant premier, toute intégrale du système pourra être regardée comme dérivant de l'une quelconque d'entre elles $K(z)$, ou encore de $K(z)e'_{\alpha\beta\gamma}$ [à moins que $K(z)e'_{\alpha\beta\gamma}$ ne se réduise à une constante]; mais cela ne peut pas être vrai de tous les $K(z)e'_{\alpha\beta\gamma}$, sans quoi

$$K(z) = K(z)e_1 = \sum C_{\alpha\beta\gamma} K(z) e'_{\alpha\beta\gamma}$$

se réduirait à une constante. Mais les intégrales dérivant de $K(z)e'_{\alpha\beta\gamma}$ sont les intégrales

$$K(z)e'_{\alpha\beta\delta} \qquad (\delta = 1, 2, \ldots, p),$$

et elles sont au nombre de p. C. Q. F. D.

Je dis maintenant qu'un système fermé quelconque peut être décomposé en systèmes premiers. Car si $K(z)$ est une intégrale quelconque du système, on

peut écrire

$$K(z) = K(z_1)e_1 = \sum C_{\alpha\beta\gamma} K(z) e'_{\alpha\beta\gamma}.$$

D'ailleurs nous pouvons toujours supposer que ces systèmes premiers sont distincts, c'est-à-dire qu'il n'y a entre les intégrales de ces systèmes premiers aucune relation linéaire, sans quoi on se servirait de ces relations linéaires pour éliminer les systèmes premiers qui ne seraient pas distincts des autres.

On en conclut aisément que *le nombre des intégrales d'un système fermé quelconque et*, en particulier, *le nombre total des intégrales distinctes appartenant à un p^2 ion, est toujours un multiple de p.*

Examinons maintenant les relations entre les périodes. Soit

$$K(zS\sigma_i^{-1}) - K(z\sigma_i^{-1}) = \omega e_i,$$

S appartenant à G′ et

$$\omega X = \sum X_i(\omega e_i)$$

si $X = \sum X_i e_i$. Quels sont les nombres complexes X pour lesquels on a

$$\omega X = 0 ?$$

1° Je suppose d'abord que ωX reste nul *quelle que soit l'intégrale* K pour une substitution S donnée de G′; on aura

$$\omega' e_i = K'(zS\sigma_i^{-1}) - K'(z\sigma_i^{-1}),$$

et, si l'on prend $K'(z) = K(z\sigma_k^{-1})$,

$$\omega' e_i = K(zS\sigma_i^{-1}\sigma_k^{-1}) = K(z\sigma_i^{-1}\sigma_k^{-1}) = \omega e_k e_i,$$

$$\omega' X = \sum X_i(\omega e_k e_i) = \omega e_k X.$$

Comme on doit avoir $\omega' X = 0$, on aura

$$\omega e_k X = 0,$$

et, par conséquent,

$$\omega Y X = 0,$$

quel que soit le nombre complexe Y.

Les nombres X *formeront un sous-système semi-invariant à gauche.*

2° Je suppose que ωX reste nul pour une intégrale K donnée *pour toutes les substitutions* S de G′.

Alors

$$\omega X e_k = \sum X_i \omega e_i e_k = \sum X_i [K(zS\sigma_k^{-1}\sigma_i^{-1}) - K(z\sigma_k^{-1}\sigma_i^{-1})].$$

Mais, G′ étant un sous-groupe invariant, on a

$$S\sigma_k^{-1} = \sigma_k^{-1} S',$$

S′ appartenant à G′, d'où

$$\omega X e_k = \sum X_i [K(z\sigma_k^{-1} S' \sigma_i^{-1}) - K(z\sigma_k^{-1}\sigma_i^{-1})]$$

$$= \sum X_i [K(zS'\sigma_i^{-1}) - K(z\sigma_i^{-1})].$$

Or nous pouvons poser

$$K(zS'\sigma_i^{-1}) - K(z\sigma_i^{-1}) = \omega' e_i,$$

ω' étant une période telle que, d'après notre hypothèse, $\omega' X$ soit nul; on aura donc

$$\omega X e_k = \sum X_i(\omega' e_i) = \omega' X = 0.$$

Donc ωe_k et ωXY seront nuls, Y étant un nombre complexe quelconque.

Les nombres X *formeront un sous-système semi-invariant à droite.*

Les nombres X pour lesquels $\omega X = 0$ pour toutes les intégrales $K(z)$ et pour toutes les substitutions S formeront évidemment un système invariant; ce système nous est déjà connu, puisqu'il est formé de tous les p^2 ions de la première sorte.

Nous avons vu au paragraphe 3 qu'au groupe H se rattachent deux groupes linéaires remarquables; étudions ces deux groupes de la façon que nous avons expliquée à la fin du paragraphe 3 et d'abord le groupe des transformations à coefficients entiers que subissent les périodes.

Il s'agit de rechercher les relations de la forme $\omega X = 0$, qui sont vraies pour toutes les intégrales $K(z)$ et pour une substitution S donnée; d'après ce que nous venons de voir, les nombres X formeront un sous-système invariant à gauche, comprenant d'abord tous les p^2 ions de la première sorte et comprenant encore d'autres nombres complexes.

De plus, on peut supposer, vu la nature du groupe, que tous les nombres X sont entiers.

Convenons donc de dire qu'un ensemble de nombres complexes entiers forme un *sous-système entier semi-invariant à gauche* quand tout nombre du sous-système multiplié à gauche par un nombre *entier* quelconque du système total fait encore partie du sous-système. Alors les nombres X formeront un sous-système *entier* semi-invariant à gauche.

Il est clair que, si l'on considère un p^2 ion et tous ses conjugués, leur ensemble formera un sous-système invariant, et que les nombres entiers de ce sous-système formeront un *sous-système invariant entier*. Les sous-systèmes invariants entiers formés de cette façon avec les p^2 ions de la première sorte feront évidemment partie du sous-système des nombres X, mais ce sous-système comprend encore d'autres nombres complexes.

Ce sous-système des nombres X peut être décomposé en *sous-systèmes semi-invariants entiers premiers*, si j'appelle ainsi les sous-systèmes semi-invariants entiers qui n'en contiennent pas d'autre plus restreint.

Comment peut-on former les sous-systèmes semi-invariants entiers premiers? Considérons un sous-système semi-invariant premier *non entier;* soit Σ ce sous-système, il appartiendra à un certain p^2 ion H et se composera de p nombres distincts (si p est l'ordre de H).

Soient Σ', Σ'', ... les sous-systèmes *conjugués* de Σ (au sens arithmétique donné plus haut à ce mot). L'ensemble des systèmes Σ, Σ', Σ'', ... formera un nouveau sous-système semi-invariant qui (à l'inverse de ce qui arrive pour chacun des systèmes partiels Σ, Σ', ...) contiendra des nombres entiers. Les nombres entiers de ce système formeront un sous-système semi-invariant entier que j'appelle Σ_1.

Voici comment on peut former les nombres de ce sous-système. Soit X un nombre de Σ, dont les coefficients X_i seront les fonctions rationnelles de la quantité algébrique ζ envisagée plus haut; soient X', X'', ... les nombres conjugués de X, où ζ est remplacé par ζ', ζ'', ... Soit ensuite R une fonction rationnelle quelconque de ζ; soient R', R'', ... les fonctions correspondantes de ζ', ζ'', ... Le nombre complexe

$$(X) = XR + X'R' + X''R'' + \dots$$

sera rationnel et, en le multipliant par un entier ordinaire convenable, on obtiendra un nombre entier complexe. On obtiendra de la sorte tous les nombres du sous-système Σ_1.

Maintenant, ce sous-système entier est-il premier? Il me suffit, pour le décider, de chercher si, en multipliant à gauche un nombre entier *quelconque* du sous-système par un nombre complexe convenable, on peut retrouver un nombre entier *quelconque* du sous-système.

Nous pouvons toujours supposer que tous les p^2 ions conjugués de H sont distincts.

Dans ce cas, tous les nombres X, X', X'', ... appartiennent à des p^2 ions distincts. Soient alors Y et Z deux nombres appartenant au même sous-système que X; soient S et U deux fonctions rationnelles de ζ; soient Y', Y'', ..., Z', Z'', ..., S', S'', ..., U', U'', ... leurs conjugués. Les nombres Y et X' appartenant à des p^2 ions différents, les produits tels que YX' seront nuls.

Cela posé, considérons les nombres complexes

$$(Y) = YS + Y'S' + Y''S'' + \dots,$$
$$(Z) = ZU + Z'U' + Z''U'' + \dots.$$

On aura alors

$$(YX) = YXRS + Y'X'R'S' + Y''X''R''S'' + \dots.$$

Or, le sous-système semi-invariant dont fait partie X étant premier, on peut choisir Y de façon que YX ou YXRS soit égal à un nombre quelconque du sous-système; nous supposerons donc

$$YXRS = ZU,$$

d'où, en changeant ζ en ζ', ζ'', ...,

$$Y'X'R'S' = Z'U', \qquad Y''X''R''S'' = Z''U'', \qquad \dots,$$

et enfin

$$(Z) = (Y)(X).$$

Or, (Z) et (X) sont deux nombres *quelconques* du système Σ_1; on peut néanmoins trouver un nombre (Y) qui, multiplié par (X), reproduise (Z). Donc notre sous-système est premier. C. Q. F. D.

Ces considérations suffisent pour nous faire comprendre l'origine et la nature du groupe linéaire à coefficients entiers dont il s'agit.

Passons à l'autre groupe : quand on change z en $z\sigma_i$, les intégrales de première espèce $K(z)$ subissent une substitution linéaire; nous avons posé

$$K(z\sigma_i^{-1}) = K(z)e_i, \qquad K(z)X = \sum X_i K(z)e_i.$$

L'étude du groupe en question revient à chercher les nombres X tels que $K(z)X = \text{const.}$; nous avons vu que ces nombres forment un sous-système semi-invariant à droite; ce sous-système comprend d'abord tous les p^2 ions de première et de deuxième sorte, puis un certain nombre de sous-systèmes semi-invariants premiers contenus dans les p^2 ions de la troisième sorte.

On s'étonnera peut-être que ce sous-système soit semi-invariant à droite, puisque nous avons vu à la fin du paragraphe 5 que les nombres complexes X

qui servent à la définition d'un groupe doivent former un sous-système semi-invariant à gauche.

Il est aisé de voir d'où vient la différence. Supposons qu'on ait posé

$$K(zz_i) = (K)e_i, \qquad (K)Y = \sum Y_i(K)e_i.$$

Nous nous serions retrouvés dans les mêmes conditions qu'à la fin du paragraphe 5, et les nombres Y auraient dû former un sous-système semi-invariant à gauche. C'est, en effet, ce qui arrive. Nous avons

$$(K)Y = \sum Y_i K(zz_i), \qquad K(z)X = \sum X_i K(zz_i^{-1}).$$

On aura donc $(K)Y = K(z)X$ si

$$Y = \sum X_i e_i^{-1}.$$

Soit maintenant

$$X' = Xe_k = \sum X_i' e_i, \qquad Y' = \sum X_i' e_i^{-1};$$

il est aisé de voir que $Y' = e_k Y$, ce qui prouve que si les X forment un sous-système semi-invariant à droite, les Y formeront un sous-système semi-invariant à gauche.

A la fin du paragraphe 3, nous avons été amenés à considérer certains nombres que nous avons appelés b_i et avec lesquels nous avons formé un déterminant de groupe. Ces nombres devaient être choisis de telle façon que ce déterminant s'annule ainsi que ses mineurs jusqu'à un certain ordre. Nous avons distingué ensuite deux cas suivant que les sommes $\sum b_i K(z\sigma_i^{-1})$ se réduisaient ou non à des constantes quelle que soit l'intégrale K choisie.

Je dis maintenant que les deux cas peuvent se présenter. Et, en effet, pour que notre déterminant s'annule ainsi que ses mineurs des premiers ordres, il suffit, par exemple, que le nombre $\sum b_i e_i$ appartienne à un p^2 ion. Alors le premier cas se présentera si ce p^2 ion est de la première ou de la deuxième sorte, et le second cas si le p^2 ion est de la troisième sorte.

VII. — Application à l'exemple du paragraphe IV.

Reprenons l'exemple du paragraphe 4, où le groupe H se composait de 168 substitutions. Ces 168 substitutions se répartissent en six classes (en groupant dans la même classe la substitution σ_i et ses transformées $\sigma_k^{-1}\sigma_i\sigma_k$); je désignerai ces six classes par les lettres E, P, Q, R, S, S_2 :

La classe	E	comprendra	1	substitution de période	1 (substitution identique σ_1).
»	P	»	24	»	7
»	Q	»	24	»	7
»	R	»	56	»	3
»	S	»	42	»	4
»	S_2	»	21	»	2
			168		

Désignons alors par les lettres

$$E = e_1, P, Q, R, S, S_2$$

les nombres complexes obtenus en faisant la somme des unités complexes correspondant aux diverses substitutions de la classe désignée par la même lettre. Ces six nombres seront commutables.

D'après M. Frobenius [*loco citato* (*Die Gruppencharactere*), *in fine*], le système des nombres complexes se décompose en six p^2 ions; chacun de ces p^2 ions contient un nombre commutable et un seul, et ce nombre suffit pour le caractériser, puisque tous les autres nombres du p^2 ion s'obtiennent en le multipliant par un nombre complexe quelconque. Nous avons donc six nombres commutables remarquables que j'appellerai

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= E + P + Q + R + S + S_2,\\
\alpha_2 &= 7E + R - S - S_2,\\
\alpha_3 &= 3E + T P + T' Q + S - S_2,\\
\alpha_4 &= 3E + T' P + T Q + S - S_2,\\
\alpha_5 &= 8E + P + Q - R,\\
\alpha_6 &= 6E - P - Q + 2S_2.
\end{aligned}$$

On a, comme au paragraphe 4,

$$2T = -1 + \sqrt{-7}, \qquad 2T' = -1 - \sqrt{-7}.$$

Je désignerai les six p^2 ions par les mêmes lettres que les nombres commutables correspondants et je trouverai que :

$p = 1$,	$p^2 = 1$	pour α_1;
$p = 7$,	$p^2 = 49$	pour α_2;
$p = 3$,	$p^2 = 9$	pour α_3;
$p = 3$,	$p^2 = 9$	pour α_4;
$p = 8$,	$p^2 = 64$	pour α_5;
$p = 6$,	$p^2 = 36$	pour α_6.
	168	

On voit que les nombres commutables α_1, α_2, α_5, α_6 sont rationnels, que les nombres α_3 et α_4 contiennent l'irrationalité $\sqrt{-7}$ et sont conjugués. Il en est donc de même des p^2 ions correspondants.

Nous savons qu'il y a trois intégrales abéliennes de première espèce et six intégrales de première et de deuxième espèces distinctes (c'est-à-dire telles qu'aucune de leurs combinaisons linéaires n'est algébrique).

Je vois d'abord que le p^2 ion α_1 est de première sorte, car il ne contient qu'un nombre α_1 qui est la somme de toutes les unités complexes, de sorte qu'on aura

$$\alpha_1 = \sum \varepsilon_i, \qquad \mathrm{P}(z, a)\alpha_1 = \mathrm{P}(z\sigma_i^{-1}, a);$$

si donc

$$\mathrm{P}(z, a) = \int \mathrm{Q}(x, y)\, dx,$$

on aura, en appelant $y_1, y_2, \ldots, y_m$ les diverses déterminations de y,

$$\mathrm{P}(z, a) = \sum \int \mathrm{Q}(x, y_1)\, dx = \int \mathrm{R}(x)\, dx,$$

R étant rationnel en x, de sorte que $\mathrm{P}(z, a)\alpha_1$ sera algébrique.

C. Q. F. D.

Je dis que les p^2 ions α_2, α_3, α_6 ne peuvent être de la troisième sorte, sans quoi le nombre des intégrales de première espèce serait, pour α_3, un multiple de 7, pour α_2 un multiple de 8, pour α_6 un multiple de 6, ce qui est impossible, puisque le nombre total des intégrales de première espèce n'est que de trois.

Comme il faut qu'il y ait au moins un p^2 ion de la troisième sorte, ce ne pourra être que α_3 ou α_4; ils ne pourront l'être tous les deux, sans quoi il y aurait au moins trois intégrales appartenant à α_3, au moins trois à α_4, en tout au moins six et il n'y en a que trois.

L'un des deux p^2 ions est donc de troisième sorte; l'autre ne peut être de la première sorte, car si un p^2 ion est de la première sorte, il en est de même de tous ses conjugués; il sera donc de la deuxième sorte.

Le nombre des intégrales de première et de deuxième espèces qui appartiennent à α_3 est un multiple de 3; de même pour celles qui appartiennent à α_4. Le nombre de ces intégrales qui appartiennent à α_2 et à α_4 est donc au moins six et, comme le nombre total est six, il faut conclure que tous les autres p^2 ions sont de la première sorte.

En résumé, sur nos six p^2 ions, quatre sont de la première sorte, un de la deuxième et un de la troisième.

VIII. — Remarques diverses.

Étant donné un groupe fini H, on peut, *d'une infinité de manières*, former les groupes fuchsiens G et G'. On engendrerait donc d'une infinité de manières les systèmes correspondants de fonctions fuchsiennes ou d'intégrales abéliennes.

La comparaison de ces différentes manières et de ces différents systèmes serait sans doute très intéressante.

Je me bornerai à la remarque suivante : on peut se demander à quoi correspondent les groupes linéaires à coefficients entiers que nous avons rencontrés; il suffit de se reporter à leur origine expliquée au paragraphe 3.

Soient G un groupe auquel H soit mériédriquement isomorphe, et G' le sous-groupe invariant de G auquel correspond dans H la substitution identique; soient s_i une substitution de H et σ_i la substitution correspondante de G.

Supposons maintenant que G' dérive de q substitutions fondamentales

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_q,$$

et soit S une combinaison quelconque de ces substitutions fondamentales. Alors

$$S' = \sigma_i^{-1} S \sigma_i$$

sera aussi une combinaison de ces substitutions fondamentales.

Soit maintenant G'' un groupe mériédriquement isomorphe à G', défini comme il suit; il admettra toutes les relations de structure de G', mais de plus toutes ses substitutions seront permutables. Si donc T est la substitution de G'' qui correspond à S et T' celle qui correspond à S', la substitution de G'' qui correspondra à SS' sera identique à celle qui correspondra à S'S, de sorte qu'on aura

$$TT' = T'T.$$

Il pourrait arriver que le groupe G'' ainsi défini se réduisît à la substitution identique, mais cela n'arrivera pas si G' est un groupe fuchsien de genre > 0.

Soient $T_1, T_2, \ldots, T_q$ les substitutions de G'' qui correspondent à $S_1, S_2, \ldots, S_q$; à S correspondra dans G'' une substitution

$$T = T_1^{\alpha_1} T_2^{\alpha_2} \ldots T_q^{\alpha_q},$$

où α_i est la somme des exposants de S_i dans la combinaison S_i, etc.; à

$S' = \sigma_i^{-1} S \sigma_i$ correspondra

$$T' = T_1^{\beta_1} T_2^{\beta_2} \dots T_q^{\beta_q},$$

où β_1 est la somme des exposants de S_1 dans la combinaison S', etc.

Il est aisé de voir que les β sont des combinaisons linéaires des α. A *chaque substitution s_i de* H *correspondra donc une transformation linéaire à coefficients entiers dont l'ensemble formera un groupe isomorphe à* H. Voilà la signification de ces groupes linéaires à coefficients entiers.

Faisons en passant une autre remarque; *tout groupe fini contenu dans le groupe linéaire conserve une forme quadratique définie positive, ou bien une forme à indéterminées conjuguées.*

Supposons en effet d'abord que le groupe soit réel, c'est-à-dire que toutes les substitutions du groupe aient leurs coefficients réels. Soient X_1 une forme linéaire quelconque de nos n variables, X_2, X_3, ..., X_h ses transformées; alors le groupe conservera la forme quadratique définie positive

$$X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_h^2,$$

qui ne peut être identiquement nulle.

Supposons que le groupe ne soit pas réel; soient G ce groupe, $x_1, x_2, \dots, x_n$ nos variables indépendantes; soit alors G_0 un groupe imaginaire conjugué du précédent portant sur les variables $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ imaginaires conjuguées des x.

Soit alors X_1 une forme linéaire quelconque des x; soient $X_2, X_3, \dots, X_h$ ses transformées par le groupe G; soit X_1^0 une forme linéaire des x_0, imaginaire conjuguée de X_1; soient X_2^0, X_h^0 ses transformées par les substitutions correspondantes de G_0. Alors la forme à indéterminées conjuguées

$$F = X_1 X_1^0 + X_2 X_2^0 + \dots + X_h X_h^0$$

sera invariante.

Soient y_i et z_i les parties réelle et imaginaire de x_i; alors G pourra être regardé comme un groupe réel portant sur les $2n$ variables y et z, et F sera une forme quadratique définie de ces $2n$ variables, de sorte qu'on est ramené au cas précédent.

Cette remarque bien simple pourrait peut-être simplifier l'application du théorème de M. Jordan; elle ramène en effet la recherche des groupes finis contenus dans le groupe linéaire à l'étude géométrique de la division régulière d'une sphère à plus de trois dimensions.

GROUPES CONTINUS

ANALYSE DES TRAVAUX DE H. POINCARÉ SUR LES GROUPES CONTINUS FAITE PAR LUI-MÊME.

Acta mathematica, t. 39, p. 90-92 (1913).

On vient de voir comment mes recherches sur l'algèbre m'avaient amené à m'occuper des groupes continus. C'est ainsi que j'avais montré [1] le lien qui unit ces groupes aux nombres complexes : j'avais énoncé à ce sujet un théorème dont, détourné par d'autres travaux, je n'ai jamais publié la démonstration, mais qui a été depuis démontré par M. Study.

Je me suis servi également des groupes continus dans un travail relatif aux géométries non euclidiennes [2].

Mais ce n'est que beaucoup plus récemment que j'ai abordé la théorie générale de ces groupes.

Lie avait démontré au sujet de ces groupes trois théorèmes fondamentaux. D'après le troisième de ces théorèmes, il existe toujours un groupe qui admet des équations de structure données pourvu que ces équations satisfassent aux conditions jacobiennes.

Lie a donné de ce théorème deux démonstrations. La première s'applique seulement aux groupes qui ne contiennent pas de substitutions permutables à toutes les autres substitutions. Elle ne laisse rien à désirer au point de vue de la simplicité. La seconde s'applique à tous les groupes; elle est beaucoup plus indirecte et plus compliquée.

Je me suis proposé de donner de ce troisième théorème une démonstration

[1] *Comptes rendus de l'Ac. des Sc.*, Paris, t. 99, 1884, p. 740-742.
[2] *Bulletin de la Société math. de France*, t. 15, 1887, p. 203-216.

directe et simple, applicable à tous les cas. J'y suis parvenu (178, 274) grâce à l'emploi d'une notation symbolique très abrégée.

Je dois dire quelques mots sur le caractère de cette démonstration. Étant données les équations de structure, c'est-à-dire les règles de la composition des substitutions infinitésimales, j'ai cherché à en déduire les règles de la composition des substitutions finies. Or ces règles s'expriment par des séries infinies; j'ai reconnu que ces séries pouvaient se sommer par des formules où n'entrent pas d'autres transcendantes que des exponentielles.

Je me plaçais ainsi au point de vue formel, en introduisant des formules qui, faisant complètement abstraction de la « matière » du groupe, sont également applicables à tous les groupes isomorphes. Mais ces formules elles-mêmes nous font connaître les transformations que subissent les paramètres qui définissent une substitution du groupe lorsque l'on compose cette substitution avec une autre substitution du groupe. Ces transformations forment un groupe isomorphe à celui que l'on proposait de former; ce groupe porte le nom de groupe paramétrique.

Nos formules nous permettent donc de former effectivement ce groupe paramétrique. Ainsi non seulement elles démontrent l'existence d'un groupe de structure donnée, mais elles donnent le moyen de le former effectivement. Lie avait démontré que la formation d'un pareil groupe pouvait se ramener à l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires. J'ai fait voir que non seulement on pouvait sans intégration former les substitutions infinitésimales du groupe, mais que dans le cas le plus défavorable, la formation des substitutions finies pouvait se ramener à une simple quadrature.

Dans le cas particulier auquel s'appliquait la première démonstration de Lie, les formules auxquelles on parvient sont assez simples, moins simples toutefois que celles de Lie. En tout cas, elles sont différentes et l'on ne voit pas immédiatement comment on peut passer des unes aux autres. La comparaison des deux sortes de formules n'en est que plus instructive. Elle nous fait retrouver un certain nombre de théorèmes de Killing. L'étude des formules obtenues nous fait d'ailleurs, même dans le cas général, retomber sur ces mêmes théorèmes.

BIBLIOGRAPHIE SPÉCIALE AUX GROUPES CONTINUS.

178. *Comptes rendus Ac. Sc.*, Paris, t. 128, 1899, p. 1065-1069.
274. *Cambridge Philosophical Transactions*, t. 18, 1900, p. 220-255.

SUR

LES GROUPES CONTINUS

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 128, p. 1065-1069 (1er mai 1899).

Je désirerais faire quelques observations au sujet de cette belle théorie des groupes continus, dont la Science est redevable au génie de notre regretté correspondant M. Lie. Je voudrais, en particulier, faire voir que l'on peut démontrer l'existence d'un groupe de structure donnée par un procédé un peu différent de celui qu'a employé ce grand géomètre.

Soit f une fonction quelconque de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et soient $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(n)}$, n fonctions de ces mêmes variables. Je poserai, suivant l'usage,

$$X(f) = X^{(1)}\frac{df}{dx_1} + X^{(2)}\frac{df}{dx_2} + \ldots + X^{(n)}\frac{df}{dx_n}.$$

On voit que $YX(f) = Y[X(f)]$ n'est pas égal, en général, à $XY(f)$: je supprimerai généralement l'indication (f) et j'écrirai X et YX au lieu de $X(f)$ et $YX(f)$. Un opérateur quelconque, combinaison des opérateurs X, Y, Z, se présentera sous la forme d'un *polynome symbolique* en X, Y, Z. Seulement, il convient d'observer que dans un produit symbolique on n'a pas le droit d'intervertir l'ordre des facteurs.

Ainsi XY n'est pas égal à YX; et $(X + Y)^2$ n'est égal ni à

$$X^2 + 2XY + Y^2$$

ni à

$$X^2 + 2YX + Y^2,$$

mais bien à

$$X^2 + XY + YX + Y^2.$$

Un polynome symbolique sera dit *normal* si tous les termes qui ne diffèrent que par l'ordre des facteurs ont même coefficient; en général, un

polynome symbolique ne peut pas être mis sous la forme d'une somme de puissances de polynomes linéaires; les polynomes normaux le peuvent seuls.

Je poserai, suivant l'usage,

$$XY - YX = [X, Y]$$

et je supposerai que nos opérateurs sont liés par certaines relations (que j'appellerai *relations de structure* parce qu'elles définissent la structure du groupe) et qui seront de la forme

$$[X, Y] = U,$$

U étant un polynome linéaire par rapport à nos opérateurs. Les coefficients de ces polynomes linéaires U ne seront pas quelconques; mais ils devront être choisis de façon à satisfaire aux *identités associatives*

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

Les relations de structure permettent de transformer les polynomes symboliques et l'on commence par démontrer que si les identités associatives ont lieu, on peut toujours transformer d'une manière, et *d'une seule*, un polynome symbolique quelconque en un polynome normal.

Cela posé, considérons n opérateurs $X_1, X_2, \ldots, X_n$, satisfaisant à un système de relations de structure et d'identités associatives; envisageons les substitutions infinitésimales qui changent f en $f + \varepsilon_k X_k(f)$, où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ sont n constantes infiniment petites, et les puissances de ces substitutions. On sait qu'une puissance quelconque de la substitution $1 + \varepsilon_k X_k$ est égale à

$$1 + \frac{t X_k}{1!} + \frac{t^2 X_k^2}{1!} + \frac{t^2 X_k^3}{3!} + \ldots,$$

où t est une constante et peut être représentée symboliquement par e^{tX_k}.

Considérons plus généralement une combinaison linéaire quelconque de ces substitutions infinitésimales

$$1 + \varepsilon_1 X_1 + \varepsilon_2 X_2 + \ldots + \varepsilon_n X_n;$$

une puissance quelconque de cette combinaison pourra s'écrire

$$1 + \frac{t_1 X_1 + t_2 X_2 + \ldots + t_n X_n}{1} + \ldots + \frac{(t_1 X_1 + \ldots + t_n X_n)^p}{p!} + \ldots,$$

les t sont des constantes, et se représentera symboliquement par

$$e^{t_1 X_1 + t_2 X_2 + \ldots + t_n X_n}.$$

Soient maintenant deux combinaisons linéaires

$$T = t_1 X_1 + \ldots + t_n X_n, \qquad V = v_1 X_1 + \ldots + v_n X_n.$$

Considérons l'opérateur

$$e^T e^V = e^T [e^V(f)].$$

Cet opérateur se présentera sous la forme d'une série dont tous les termes sont des polynomes symboliques en $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Grâce aux relations de structure, ces polynomes peuvent être transformés en polynomes normaux.

Je dis qu'une fois cette transformation faite, notre opérateur se présentera sous la forme d'une série symbolique

$$e^W = \sum \frac{W^p}{p!},$$

où

$$W = w_1 X_1 + w_2 X_2 + \ldots + w_n X_n.$$

Ce théorème serait évident si nous savions d'avance que le groupe existe; encore faudrait-il chercher à déterminer les w en fonction des t et des v, ou ce qu'on pourrait appeler les règles de multiplication des substitutions du groupe.

Mais nous voulons précisément démontrer l'existence du groupe dont nous ne connaissons que la structure.

Supposons d'abord que V soit infiniment petit, et soit $W = V + U_0$,

$$U_0 = u_1 X_1 + \ldots + u_n X_n$$

étant un opérateur infiniment petit. Posons maintenant

$$[T, U_0] = U_1, \qquad [T, U_1] = U_2, \qquad [T, U_2] = U_3, \qquad \ldots;$$

on trouvera aisément, en s'aidant des relations de structure et négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$V = \sum \frac{(-1)^q U_q}{q!}.$$

Cette équation nous donne les v en fonctions des u et des t, linéaires par rapport aux u, et l'on aura

$$v_i = \sum u_k \varphi_{i,k}(t_1, t_2, \ldots, t_n).$$

Les $\varphi_{i,k}$ sont des fonctions entières des t, d'une forme toute particulière; car elles s'expriment rationnellement en fonctions : 1° des t; 2° des racines $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ d'une équation de degré n en θ, dont le premier membre est un

polynome entier par rapport à θ et aux t; 3° et enfin des exponentielles e^{θ_1}, e^{θ_2}, ..., e^{θ_n}.

Cela posé, je vais démontrer, en me bornant à indiquer la marche générale et le principe de la démonstration, que $e^{\mathrm{T}}e^{h\mathrm{V}}$ est, quel que soit le coefficient h, de la forme e^{W}.

En effet, d'après ce que nous venons de voir, le théorème est vrai pour h infiniment petit; je dis maintenant que, s'il est vrai pour $h = h_0$, il sera vrai aussi pour $h = h_0 + \delta h$; car si l'on a

$$e^{\mathrm{T}}e^{h_0\mathrm{V}} = e^{\mathrm{W}_0},$$

on aura aussi, puisque δh est infiniment petit,

$$e^{\mathrm{W}_0}e^{\delta h\mathrm{V}} = e^{\mathrm{W}_0+\delta\mathrm{W}}, \tag{1}$$

ou, à cause de l'associativité,

$$e^{\mathrm{T}}e^{(h_0+\delta h)\mathrm{V}} = e^{\mathrm{W}_0+\delta\mathrm{W}}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Nous voyons en même temps, par l'équation (1), que les w, considérés comme fonctions de h, satisfont aux équations différentielles

$$v_i\,dh = \sum dw_k\,\varphi_{i,k}(w_1, w_2, \ldots, w_n). \tag{2}$$

On achèvera de déterminer les w en remarquant que w_k doit se réduire à t_k pour $h = 0$. Les règles de multiplication des substitutions du groupe sont donc établies, sans connaître autre chose que la structure de ce groupe.

L'existence du groupe est en même temps démontrée, puisque nous avons formé le groupe paramétrique.

La considération du groupe adjoint permettrait d'intégrer les équations (2) en termes finis ou du moins par quadrature.

SUR

LES GROUPES CONTINUS

Cambridge Philosophical Transactions, vol. 18, p. 220-255 (1899).

I. — Introduction.

La théorie des groupes continus, ce titre immortel de gloire du regretté Sophus Lie, repose sur trois théorèmes fondamentaux.

Le *premier théorème* de Lie nous apprend comment dans tout groupe continu il y a des substitutions infinitésimales et comment ce groupe peut être formé à l'aide des opérateurs

$$\mathrm{X}(f) = \Sigma(\mathrm{X}_i)\frac{df}{dx_i}.$$

Considérons r opérateurs de cette forme

$$\mathrm{X}_1(f), \quad \mathrm{X}_2(f), \quad \ldots, \quad \mathrm{X}_r(f); \tag{1}$$

et convenons de poser

$$\mathrm{X}_i\mathrm{X}_k - \mathrm{X}_k\mathrm{X}_i = (\mathrm{X}_i\mathrm{X}_k).$$

D'après le *second théorème* de Lie, si les symboles $(\mathrm{X}_i\mathrm{X}_k)$ sont liés aux opérateurs X_i par des relations linéaires de la forme

$$(\mathrm{X}_i\mathrm{X}_k) = \Sigma c_{iks}\mathrm{X}_s, \tag{2}$$

où les c sont des constantes, les r opérateurs (1) donneront naissance à un groupe.

Les relations linéaires (2) pourront s'appeler *relations de structure* puisqu'elles définissent la « structure » du groupe qui dépend uniquement des constantes c.

C'est le *troisième théorème* de Lie qui attirera surtout notre attention. Quelles sont les conditions pour qu'on puisse former un groupe de structure

donnée, c'est-à-dire trouver r opérateurs $X_1, X_2, \ldots, X_r$ satisfaisant à des relations de la forme (2) dont les coefficients c sont donnés?

On voit tout de suite que les coefficients c ne peuvent être choisis arbitrairement. On doit d'abord avoir

$$c_{kls} = -c_{lks}. \tag{3}$$

Ensuite, d'après la définition même du symbole $(X_l X_k)$, on a identiquement

$$((X_a X_b) X_c) + ((X_b X_c) X_a) + ((X_c X_a) X_b) = 0, \tag{4}$$

d'où résultent entre les c certaines relations connues sous le nom d'*identités de Jacobi* (1).

Une condition nécessaire pour que l'on puisse former un groupe de structure donnée, c'est donc que les coefficients c satisfassent à ces identités de Jacobi auxquelles il convient d'adjoindre les relations (3).

Le troisième théorème de Lie nous enseigne que cette condition est suffisante.

Pour la démonstration de ce théorème, nous devons distinguer deux familles de groupes.

Les *groupes de la première famille* sont ceux qui ne contiennent aucune substitution permutable à toutes les substitutions du groupe.

Les *groupes de la deuxième famille* sont ceux qui contiennent des substitutions permutables à toutes les substitutions du groupe.

En ce qui concerne les groupes de la première famille, la démonstration de Lie, fondée sur la considération du groupe adjoint, ne laisse rien à désirer par sa simplicité.

En ce qui concerne les groupes de la deuxième famille, Lie a donné une démonstration entièrement différente, beaucoup moins simple, mais qui permet cependant de former les opérateurs $X_t(f)$ par l'intégration d'équations différentielles ordinaires.

Dans une Note récemment insérée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, j'ai donné une démonstration nouvelle du troisième théorème de Lie.

Les résultats contenus dans cette Note étaient moins nouveaux que je ne le croyais quand je l'ai publiée.

D'une part, en effet, Schur avait, dans les *Berichte der k. sächsischen*

(1) L'identité (4) est l'identité de Jacobi; les relations entre les c qui en résultent sont dues S. Lie. J. D.

Gesellschaft der Wissenschaften 1891 et dans le tome 41 des *Mathematische Annalen*, donné du théorème en question une démonstration entièrement différente de celle de Lie.

Cette démonstration présente la plus grande analogie avec celle que je propose; mais elle n'a pour ainsi dire pas été poussée jusqu'au bout. Comme le fait remarquer Engel, le résultat dépend de séries que Schur forme et dont il démontre la convergence; au contraire Lie ramène le problème à l'intégration d'équations différentielles ordinaires.

Je suis arrivé comme Lie lui-même à des équations différentielles ordinaires qui même sont susceptibles d'être complètement intégrées.

D'autre part, Campbell a donné sous une autre forme quelques-unes des formules auxiliaires qui m'ont servi de point de départ (*Proceedings of the London Mathematical Society*, tome 28, page 381 et tome 29, page 612).

Il m'a semblé néanmoins que cette Note contenait encore assez de résultats nouveaux pour qu'il y eût quelque intérêt à la développer.

Je ramène en effet la formation d'un groupe, de structure donnée, à l'intégration d'équations différentielles simples, intégration qui peut se faire en termes finis.

Ces équations sont moins simples que celles que Lie a formées pour les groupes de la première famille; mais même dans ce cas, il peut y avoir intérêt à les connaître, car elles sont d'une forme différente et ne s'en déduisent pas immédiatement.

De plus elles sont applicables aux groupes de la deuxième famille et dans ce cas elles nous fournissent une solution du problème plus simple que celle de Lie.

II. — Définition des opérateurs.

Soit f une fonction quelconque de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Soit X un opérateur qui change f en

$$(X_1)\frac{df}{dx_1} + (X_2)\frac{df}{dx_2} + \ldots + (X_n)\frac{df}{dx_n},$$

où les (X_i) sont n fonctions données des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de sorte que

$$X(f) = \Sigma (X_i)\frac{df}{dx_i}.$$

Soient Y, Z, etc. d'autres opérateurs analogues de telle façon que

$$Y(f)=\Sigma(Y_i)\frac{df}{dx_i},\qquad Z(f)=\Sigma(Z_i)\frac{df}{dx_i},\qquad \ldots,$$

les (Y_i), les (Z_i), ... étant d'autres fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Dans ces conditions

$$X^2(f)=X[X(f)],\qquad XY(f)=X[Y(f)],$$
$$X^2Y(f)=X[XY(f)],\qquad XYZ(f)=X[YZ(f)],\qquad \ldots$$

seront des combinaisons linéaires des dérivées partielles des divers ordres de la fonction f, multipliées par des fonctions données des x_i.

Ainsi se trouveront définis de nouveaux opérateurs $X^2, XY, X^2Y, XYZ, \ldots$, qui sont des combinaisons des opérateurs simples X, Y, Z, ... On voit que ces produits symboliques obéissent à la loi associative, mais n'obéissent pas, en général, à la loi commutative, de sorte que XY ne doit pas être confondu avec YX.

Ces opérateurs sont ainsi symboliquement représentés par des monomes; mais on peut définir des opérateurs qui seront symboliquement représentés par des polynomes tels que

$$1+aX,\quad aX+bY,\qquad aX^2+2bXY+cY^2,\qquad \ldots,$$

en convenant d'écrire par exemple

$$(1+aX)(f)=f+aX(f);\qquad (aX+bY)(f)=aX(f)+bY(f),\qquad \ldots.$$

On voit que les polynomes opérateurs ainsi définis obéissent à la fois à la loi associative et à la loi distributive, de sorte qu'on aura

$$(aX+bY)(cX+dY)=acX^2+adXY+bcYX+bdY^2,$$

et en particulier

$$(X+Y)^2=X^2+XY+YX+Y^2,$$

expression qu'il ne faut pas confondre avec $X^2+2XY+Y^2$.

On peut aussi introduire des opérateurs qui seront représentés symboliquement par des séries infinies. Je citerai par exemple l'opérateur

$$f+\alpha(X+Y)(f)+\alpha^2(X+Y)^2(f)+\alpha^3(X+Y)^3(f)+\ldots,$$

que je représenterai symboliquement par

$$\left[\frac{1}{1-\alpha(X+Y)}\right](f),$$

ou plus simplement par

$$\frac{1}{1-\alpha(X+Y)},$$

et l'opérateur

$$f+\frac{\alpha}{1!}X(f)+\frac{\alpha^2}{2!}X^2(f)+\frac{\alpha^3}{3!}X^3(f)+\ldots,$$

que je représenterai par $e^{\alpha X}(f)$ ou simplement par $e^{\alpha X}$.

On peut se demander si l'emploi de ces opérateurs représentés par des séries est légitime et si la convergence des opérations est assurée.

Il y a des cas où cette convergence est certaine. C'est ainsi que Lie a démontré que

$$e^{tX}(f)=f(x_1', x_2', \ldots, x_n'),$$

où les x_i' sont définis par les équations différentielles

$$\frac{dx_i}{dt}=(X_i)(x_1', x_2', \ldots, x_n'),$$

et par les conditions initiales

$$x_i'=x_i \qquad \text{pour } t=0.$$

Les opérateurs définis par des séries symboliques obéissent évidemment aux lois distributive et associative, ce qui permet par exemple d'écrire des égalités telles que celle-ci :

$$(e^Y e^{aX} e^Z)(e^{-Z} e^{bX} e^Y)=e^Y e^{(a+b)X} e^Y.$$

Il y a aussi un cas où ils obéissent à la loi commutative. Soient

$$\Phi(X)=\Sigma a_n X^n,\qquad \Psi(X)=\Sigma b_n X^n$$

deux séries symboliques dépendant d'un seul opérateur élémentaire X.

On a alors

$$\Phi(X)[\Psi(X)(f)]=\Psi(X)[\Phi(X)(f)].$$

Les deux produits symboliques $\Phi(X)\Psi(X)$ et $\Psi(X)\Phi(X)$ sont en effet des sommes de monomes dont tous les facteurs sont égaux à X. Si tous les facteurs sont identiques, il est clair que l'ordre de ces facteurs est indifférent et que les opérations sont commutatives.

Mais cela ne sera plus vrai si les séries symboliques dépendent de plusieurs opérateurs élémentaires différents; il ne faudrait pas, par exemple, confondre

$$e^X e^Y=\Sigma\frac{X^m Y^n}{m!\,n!}$$

avec

$$e^Y e^X=\Sigma\frac{Y^n X^m}{m!\,n!},$$

ni avec

$$e^{X+Y}=\Sigma\frac{(X+Y)^p}{p!}.$$

III. — Calcul des polynomes symboliques.

Soient X, Y, Z, T, U, ..., n opérateurs élémentaires. Par leurs combinaisons on pourra former d'autres opérateurs représentés symboliquement par des monomes ou des polynomes.

Deux monomes seront dits *équipollents* lorsqu'ils ne diffèreront que par l'ordre de leurs facteurs; il en sera de même de deux polynomes qui seront des sommes de monomes équipollents chacun à chacun.

Nous appellerons *polynome régulier* tout polynome qui peut être regardé comme une somme de puissances de la forme

$$(\alpha X + \beta Y + \gamma Z + \ldots)^p.$$

Il résulte de cette définition :

1° Que si un polynome régulier contient parmi ses termes un certain monome, tous les monomes équipollents figureront dans ce polynome avec le même coefficient. Cette condition est suffisante pour que le polynome soit régulier.

2° Que parmi les polynomes équipollents à un polynome donné il y a un polynome régulier et un seul.

Le polynome

$$XY - YX$$

jouit de la même propriété que les opérateurs élémentaires, c'est-à-dire que

$$(XY - YX)(f)$$

est comme $X(f)$, $Y(f)$, etc. une combinaison linéaire des dérivées *du premier ordre seulement* de la fonction f multipliées par des fonctions données des x_i.

Nous supposerons que les opérateurs élémentaires et leurs combinaisons linéaires sont seuls à jouir de cette propriété. (Si cela n'avait pas lieu, nous introduirions parmi les opérateurs élémentaires tous ceux qui en jouiraient.) Nous devrons donc avoir des relations de la forme

$$XY - YX = (XY), \tag{1}$$

où (XY) est une combinaison linéaire des opérateurs élémentaires; nous reconnaissons là les relations de Lie, dites relations de structure

$$X_i X_k - X_k X_i = \Sigma c_{ikr} X_r.$$

Cela posé, deux polynomes seront *équivalents* lorsqu'on pourra les réduire l'un à l'autre en tenant compte des relations (1).

Par exemple le produit

$$P[XY - YX - (XY)]Q \tag{2}$$

(où le premier et le dernier facteurs P et Q sont deux monomes quelconques) est équivalent à zéro; et il en est de même des produits analogues et de leurs combinaisons linéaires. Les produits de la forme (2) sont ce que j'appellerai des *produits trinomes*.

La différence de deux monomes qui ne diffèrent que par l'ordre de deux facteurs consécutifs est équivalente à un polynome de degré moindre.

Soient en effet X et Y ces deux facteurs consécutifs. Nos deux monomes s'écriront

$$PXYQ, \quad PYXQ,$$

P et Q étant deux monomes quelconques, et leur différence

$$P[XY - YX]Q$$

sera équivalente à

$$P(XY)Q,$$

dont le degré est d'une unité plus petit, puisque (XY) est du premier degré, XY et YX du deuxième degré.

Soient maintenant M et M′ deux monomes équipollents quelconques, c'est-à-dire ne différant que par l'ordre des termes. On pourra trouver une suite de monomes

$$M, \quad M_1, \quad M_2, \quad \ldots, \quad M_p, \quad M',$$

dont le premier et le dernier sont les deux monomes donnés et qui seront tels que chacun d'eux ne diffère du précédent que par l'ordre de deux facteurs consécutifs. La différence $M - M'$, qui est la somme des différences $M - M_1$, $M_1 - M_2, \ldots, M_p - M'$, sera donc encore équivalente à un polynome de degré moindre.

Plus généralement, la différence de deux polynomes équipollents est équivalente à un polynome de degré moindre.

Je dis maintenant qu'*un polynome quelconque est toujours équivalent à un polynome régulier*.

Soit en effet P_n un polynome quelconque de degré n; il sera équipollent à un polynome régulier P'_n; on aura alors l'équivalence

$$P_n = P'_n + P_{n-1},$$

où P_{n-1} est un polynome de degré $n-1$ qui sera à son tour équipollent à un polynome régulier P'_{n-1}, d'où l'équivalence

$$P_{n-1} = P'_{n-1} + P_{n-2},$$

et ainsi de suite; on finira par arriver à un polynome de degré zéro, de sorte que nous pouvons écrire l'équivalence

$$P_n = P'_n + P'_{n-1} + P'_{n-2} + \dots,$$

dont le second membre est un polynome régulier.

On a donc un moyen de réduire un polynome quelconque à un polynome régulier en se servant des relations (1). Il reste à rechercher si cette réduction ne peut se faire que d'une seule manière.

Le problème peut encore se présenter sous la forme suivante : *un polynome régulier peut-il être équivalent à zéro?* Ou bien encore peut-on trouver une somme de *produits trinomes* de la forme

$$P[XY - YX - (XY)]Q, \tag{2}$$

qui soit un polynome régulier non identiquement nul? Toutes les sommes de pareils produits sont en effet équivalentes à zéro.

Le degré d'un produit trinome sera égal à 2 plus la somme des degrés des polynomes P et Q. Si je considère ensuite une somme S de produits (2), ce que j'appellerai le degré de cette somme S, ce sera le plus élevé des degrés des produits qui y figurent, quand même les termes du degré le plus élevé de ces différents produits se détruiraient mutuellement.

Le produit trinome (2) peut être considéré comme la somme de deux produits, le *produit binome*

$$P[XY - YX]Q, \tag{2 bis}$$

où je distinguerai le *monome positif* PXYQ et le *monome négatif* $-$PYXQ; et le produit

$$-P(XY)Q,$$

que j'appellerai le *produit complémentaire*.

Soit donc S une somme quelconque de produits trinomes de degré p ou de degré inférieur; je pourrai écrire

$$S = S_p - T_p + S_{p-1} - T_{p-1} + \dots + S_2 - T_2,$$

où S_k est une somme de produits binomes de degré k

$$P[XY - YX]Q, \tag{2 ter}$$

tandis que $-T_k$ est la somme des produits complémentaires correspondants

$$-P(XY)Q.$$

Il s'agit de savoir si la somme S peut être un polynome régulier sans être identiquement nulle. J'observe d'abord que si S est un polynome régulier, il doit en être de même de S_p; car S_p représente l'ensemble des termes de degré p dans S; tandis que $(S_{p-1} - T_p)$, $(S_{p-2} - T_{p-1})$, ..., $(S_2 - T_3)$, $-T_2$ représentent respectivement l'ensemble des termes de degré $p-1$, $p-2$, ..., 2, 1.

On voit immédiatement que S_p est équipollent à zéro; comme zéro est un polynome régulier, et que deux polynomes réguliers ne peuvent être équipollents sans être identiques, il faut que S_p soit identiquement nul.

Soit en particulier $p = 3$,

$$S_3 = \Sigma[XY - YX]Z - \Sigma Z[XY - YX],$$

le signe Σ signifie que l'on fait la somme du terme qui est explicitement exprimé sous ce signe et des deux termes qu'on en peut déduire en permutant circulairement les trois lettres X, Y, Z.

On aura

$$T_3 = \Sigma(XY)Z - \Sigma Z(XY),$$

puis

$$S_2 = \Sigma[(XY)Z - Z(XY)],$$
$$T_2 = \Sigma[(XY)Z],$$
$$S = S_3 - T_3 + S_2 - T_2 = \Sigma[XY - YX - (XY)]Z - \Sigma Z[XY - YX - (XY)] + \Sigma[(XY)Z - Z(XY) - ((XY)Z)].$$

Il est aisé de vérifier que S_3 et $S_2 - T_3$ sont identiquement nuls, de sorte que S se réduit à $-T_2$.

Or

$$T_2 = [(XY)Z] + [(YZ)X] + [(ZX)Y]$$

est un polynome de premier degré, car $[(XY)Z]$ comme (XY) lui-même est un polynome du premier degré.

Or, dans un polynome du premier degré, chaque terme ne contenant qu'un seul facteur, on n'a pas à se préoccuper de l'ordre des facteurs. Tout polynome du premier degré est donc un polynome régulier. Si donc le polynome T_2 n'est pas identiquement nul, la somme S sera égale à un polynome régulier qui ne sera pas identiquement nul.

Donc, pour qu'un polynome puisse être réduit d'une seule manière à un polynome régulier, il faut qu'on ait les identités suivantes :

$$[(XY)Z] + [(YZ)X] + [(ZX)Y] = 0. \tag{3}$$

On reconnaît là les *identités de Jacobi* qui jouent un si grand rôle dans la théorie de Lie.

[Si d'ailleurs ces identités n'avaient pas lieu, les opérateurs élémentaires seraient liés par les équations (3) qui ne seraient plus des identités; ils ne seraient plus linéairement indépendants; on pourrait donc en réduire le nombre.]

Les identités (3) sont donc la condition nécessaire pour que la réduction d'un polynome à un polynome régulier ne puisse se faire que d'une seule manière.

Il me reste à montrer que cette condition est suffisante.

Je dirai, pour abréger, une *somme régulière*, pour désigner une somme de produits trinomes qui est un polynome régulier.

Soit alors

$$S = S_p - T_p + S_{p-1} - T_{p-1} + \dots$$

une somme de produits trinomes; les deux premiers termes $S_p - T_p$ représentent la somme des produits trinomes du degré le plus élevé, c'est ce que j'appellerai la *tête* de la somme S.

J'ai distingué plus haut dans un produit trinome trois parties que j'ai appelées le monome positif, le monome négatif et le produit complémentaire. Je dirai qu'une somme de produits trinomes forme une *chaîne* si le monome négatif de chaque produit est égal et de signe contraire au monome positif du produit suivant. Le monome positif du premier produit et le monome négatif du dernier seront alors les *monomes extrêmes* de la chaîne.

Il résulte de cette définition que tous les monomes positifs d'une même chaîne ne diffèrent que par l'ordre de leurs facteurs.

Une chaîne sera *fermée* si les deux monomes extrêmes sont égaux et de signe contraire. Si $S_p - T_p$ est une chaîne fermée de produits trinomes (S_p représentant la somme des produits binomes et $-T_p$ celle des produits complémentaires), il est clair que S_p est identiquement nul puisque les monomes positifs et négatifs se détruisent deux à deux.

Nous avons vu que si S est une somme régulière, S_p est identiquement nul, d'où il résulte que la tête d'une somme régulière S se compose toujours d'une ou plusieurs chaînes fermées.

Si deux chaînes ont mêmes monomes extrêmes, leur différence est une chaîne fermée.

Nous nous servirons de cette remarque pour montrer qu'une chaîne fermée

peut toujours de plusieurs manières *se décomposer* en deux ou plusieurs chaînes fermées. Une chaîne fermée quelconque peut de plusieurs manières être regardée comme la différence de deux chaînes C et C′ ayant mêmes monomes extrêmes; soit alors C″ une troisième chaîne ayant mêmes monomes extrêmes. La chaîne fermée C − C′ se trouve ainsi *décomposée* en deux autres chaînes fermées C − C″ et C″ − C′.

Il s'agit de montrer que *toute somme régulière est identiquement nulle* et en effet, quand cela aura été démontré, il sera évident qu'un polynome régulier dont tous les coefficients ne seront pas nuls ne pourra être équivalent à zéro, puisque tout polynome régulier équivalent à zéro est par définition une somme régulière.

Supposons que le théorème ait été établi pour les sommes de degré $1, 2, \dots, p-1$; je me propose de l'étendre aux sommes de degré p.

Je remarque d'abord que si une somme régulière de degré p est identiquement nulle, il en sera de même de toutes les sommes régulières de degré p *qui ont même tête*. La différence de ces deux sommes serait en effet une somme régulière de degré $(p-1)$ qui serait identiquement nulle d'après notre hypothèse.

Il me suffira donc de former toutes les chaînes fermées de degré p et de montrer que chacune d'elles peut être regardée comme la tête d'une somme régulière identiquement nulle.

Toute somme régulière S d'ordre p a en effet pour tête une de ces chaînes fermées, par exemple S′; si donc je montre que l'une des sommes régulières dont la tête est S′ est identiquement nulle, il en sera de même de toutes les autres et en particulier de S.

Pour établir ce point, je vais *décomposer* la chaîne fermée envisagée en plusieurs chaînes fermées composantes.

Il me suffira de démontrer la proposition pour chacune des composantes.

J'appellerai *chaîne simple de la première sorte* toute chaîne où le premier facteur de tous les monomes, soit positifs, soit négatifs, sera partout le même.

J'appellerai *chaîne simple de la deuxième sorte* toute chaîne où le dernier facteur de tous les monomes sera partout le même.

Une chaîne simple peut d'ailleurs être ouverte ou fermée.

Il est évident que toute chaîne fermée peut être regardée comme la somme d'un certain nombre de chaînes simples, alternativement de la première et de la deuxième sorte.

Soient donc S une chaîne fermée, $C_1, C_2, \ldots, C_n$ des chaînes simples de la première sorte, $C'_1, C'_2, \ldots, C'_n$ des chaînes simples de la deuxième sorte, on aura

$$S = C_1 + C'_1 + C_2 + C'_2 + \ldots + C_n + C'_n,$$

le monome négatif extrême de chaque chaîne étant, bien entendu, égal et de signe contraire au monome positif extrême de la chaîne suivante, et le monome négatif extrême de C'_n égal et de signe contraire au monome positif extrême de C_1.

Soit X le premier facteur de tous les monomes de C_1, Z le dernier facteur de tous les monomes de C_1, Y le premier facteur de tous les monomes de C_2, T le dernier facteur de tous les monomes de C'_2 (je n'exclus pas le cas où deux des opérateurs X, Y, Z, T seraient identiques).

Soit alors C'' une chaîne simple de la deuxième sorte ayant son monome positif extrême égal et de signe contraire au monome négatif extrême de C'_2, dont tous les monomes ont pour dernier facteur T, et dont le monome négatif extrême a pour premier facteur X.

Soit C''' une chaîne simple de la première sorte dont tous les monomes ont pour premier facteur X et dont les monomes extrêmes sont respectivement égaux et de signe contraire au monome négatif extrême de C'' et au monome positif extrême de C_1.

La chaîne fermée S se trouvera décomposée en deux chaînes fermées composantes, à savoir :

$$S' = (C''' + C_1) + C'_1 + C_2 + (C'_2 + C''),$$
$$S'' = -C'' + C_2 + C'_2 + \ldots + C_n + C'_n - C'''.$$

S′ ne contient que quatre chaînes simples; car $(C''' + C_1)$ et $(C'_2 + C'')$ sont des chaînes simples; S″ contient deux chaînes simples de moins que S.

En poursuivant on finira par décomposer S en chaînes fermées composantes, formées seulement de quatre chaînes simples. Il nous suffit donc d'envisager les chaînes fermées formées de quatre chaînes simples comme par exemple S′.

Les monomes positifs extrêmes des quatre chaînes simples qui forment S ont respectivement pour premier et dernier facteurs

pour $C''' + C_1$,	X	et T,
» C'_1,	X	et Z,
» C_2,	Y	et Z,
» $C'_2 + C''$,	Y	et T.

Soient M_1, M'_1, M_2, M'_2 ces quatre monomes.

Tous ces monomes sont équipollents entre eux et équipollents à un certain monome que j'appellerai XYPZT.

Nous allons alors construire une série de chaînes simples, comprises dans le tableau suivant, où dans la première colonne se trouve la lettre qui désigne la chaîne, dans la seconde le monome extrême positif, dans la troisième le monome extrême négatif; je fais figurer dans le même tableau les quatre chaînes simples qui forment S′ et je pose pour abréger :

$$Q_1 = XYPZT; \quad Q'_1 = XYPTZ; \quad Q_2 = YXPTZ; \quad Q'_2 = YXPZT.$$

Nom de la chaîne.	Monome positif.	Monome négatif.	Nom de la chaîne.	Monome positif.	Monome négatif.
$C''' + C_1$	M_1	$-M'_1$	D_2	M_2	$-Q_2$
C'_1	M'_1	$-M_2$	D'_2	M'_2	$-Q'_2$
C_2	M_2	$-M'_2$	E_1	Q_1	$-Q'_1$
C'_2	M'_2	$-M_1$	E'_1	Q'_1	$-Q_2$
D_1	M_1	$-Q_1$	E_2	Q_2	$-Q'_2$
D'_1	M'_1	$-Q'_1$	E'_2	Q'_2	$-Q_1$

On peut supposer que tous les monomes de la chaîne D_1 ont pour premier et dernier facteurs X et T; de sorte que D_1 est à la fois une chaîne simple de première sorte et une chaîne simple de deuxième sorte. Il en est de même des autres chaînes D. On peut supposer de plus que les chaînes E se réduisent à un seul produit trinome de manière que par exemple

$$E_1 = XYP[ZT - TZ - (ZT)].$$

La chaîne fermée

$$S' = (C''' + C_1) + C'_1 + C_2 + C'_2$$

peut être décomposée en cinq chaînes fermées composantes, à savoir :

$$U_1 = C''' + C_1 + D'_1 - E_1 - D_1,$$
$$U'_1 = C'_1 + D_2 - E'_1 - D'_1,$$
$$U_2 = C_2 + D'_2 - E_2 - D_2,$$
$$U'_2 = C'_2 + C'' + D_1 - E'_2 - D'_2,$$
$$V = E_1 + E'_1 + E_2 + E'_2.$$

Il s'agit donc de montrer que chacune de ces cinq chaînes fermées est la tête d'une somme régulière identiquement nulle.

Pour les quatre premières, qui sont des chaînes *simples* fermées, le théorème est évident. On l'a supposé démontré, en effet, pour les chaînes fermées d'ordre

inférieur à p. Or il est clair que l'on a par exemple

$$U_1 = XH,$$

H étant une chaîne fermée d'ordre $(p-1)$.

Quant à V, ce sera la tête de la somme régulière

$$\begin{aligned}&[XY-YX-(XY)]PZT+YXP[ZT-TZ-(ZT)]-[XY-YX-(XY)]PTZ\\&-XYP[ZT-TZ-(ZT)]+(XY)P[ZT-TZ-(ZT)]\\&-[XY-YX-(XY)]P(ZT),\end{aligned}$$

qui est identiquement nulle.

Il reste à envisager ce qui se passe quand deux des opérateurs X, Y, Z, T sont identiques, par exemple X = Y, ou X = Z.

Nous devons alors distinguer le cas où les divers monomes positifs ou négatifs de notre chaîne contiennent deux facteurs identiques, l'un jouant le rôle de X et l'autre le rôle de Y (ou l'un le rôle de X et l'autre celui de Z); il n'y a alors rien à changer à l'analyse qui précède.

Et, d'autre part, le cas où ces monomes ne contiennent qu'un seul facteur X.

Le premier cas pourra seul se présenter si l'on suppose X = Z, ou X = T, et s'il y a plus de trois facteurs en tout.

Le second cas pourra au contraire se présenter si l'on suppose par exemple X = Y; mais on posera alors

$$Q_1 = Q'_2 = XPZT; \qquad Q'_1 = Q_2 = XPTZ.$$

La définition des diverses chaînes demeurera d'ailleurs la même et l'on constatera immédiatement que la chaîne V est identiquement nulle.

Le théorème est donc démontré pour les sommes d'ordre p, s'il l'est pour les sommes d'ordre moindre.

La démonstration précédente n'est toutefois pas applicable au cas de $p = 3$; car la chaîne V n'existe que s'il y a au moins quatre facteurs. Mais la seule chaîne fermée du troisième ordre est la chaîne $S_3 - T_3$ envisagée plus haut et nous avons vu qu'elle est la tête d'une somme régulière qui est identiquement nulle si les identités (3) ont lieu.

Le théorème est donc établi dans toute sa généralité.

Toute somme régulière est identiquement nulle.

Donc un polynome régulier qui n'est pas identiquement nul ne peut pas s'annuler en vertu des relations (1).

Donc, en résumé :

Si les identités (3) *ont lieu, les relations* (1) *permettent d'une manière, et d'une seule, de réduire un polynome quelconque à un polynome régulier.*

IV. — Problème de Campbell.

Soient

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_r$$

r opérateurs élémentaires; supposons qu'ils soient liés par les relations

$$(1) \qquad X_a X_b - X_b X_a = (X_a X_b),$$

$(X_a X_b)$ étant une combinaison linéaire des X_k; supposons de plus qu'on ait les identités

$$(3) \qquad ((X_a X_b) X_c) + ((X_b X_c) X_a) + ((X_c X_a) X_b) = 0.$$

D'après le deuxième théorème de Lie, ces opérateurs donnent naissance à un « groupe continu », qui admet r transformations infinitésimales indépendantes. Ces transformations infinitésimales changent f en

$$f + \varepsilon X_k(f),$$

ε étant une constante infiniment petite.

Soit

$$T = t_1 X_1 + t_2 X_2 + \ldots + t_r X_r$$

une combinaison linéaire de ces opérateurs. Les t_k sont des coefficients constants quelconques. La transformation finie la plus générale du groupe s'exprimera par le symbole

$$e^T(f).$$

Soient maintenant

$$\begin{aligned}T &= t_1 X_1 + t_2 X_2 + \ldots + t_r X_r,\\V &= v_1 X_1 + v_2 X_2 + \ldots + v_r X_r,\end{aligned}$$

deux combinaisons linéaires des X. Comme les transformations e^T forment un groupe, le produit

$$e^V e^T$$

devra également faire partie du groupe, de sorte que nous devrons avoir

$$(4) \qquad e^V e^T = e^W,$$

où

$$W = w_1 X_1 + w_2 X_2 + \ldots + w_r X_r$$

est une autre combinaison linéaire des X.

Les coefficients w sont évidemment des fonctions des v et des t.

Développons le produit

$$e^{V}e^{T}=\Sigma\frac{V^{m}T^{n}}{m!\,n!}.$$

Le terme général $\frac{V^{m}T^{n}}{m!\,n!}$ est un polynome d'ordre $(m+n)$. Par les relations (1) on peut le réduire à un polynome régulier, et cette réduction ne peut se faire que d'une seule manière.

Nous pouvons donc écrire

$$\frac{V^{m}T^{n}}{m!\,n!}=\Sigma_{p}\,W(p,\,m,\,n),$$

où $W(p, m, n)$ est un polynome régulier et homogène d'ordre $p(\leq m+n)$; on a donc

$$e^{V}e^{T}=\Sigma_{p,m,n}\,W(p,\,m,\,n).$$

Si nous réunissons les termes de même degré et que nous posions

$$W_{p}=\Sigma_{m,n}\,W(p,\,m,\,n),$$

il viendra

$$e^{V}e^{T}=\Sigma_{p}W_{p}.$$

Le second théorème de Lie, que je viens de rappeler, nous apprend que le second membre doit être de la forme e^{W}, et par conséquent que

$$W_{p}=\frac{W^{p}}{p!}. \tag{5}$$

C'est là une proposition dont la simplicité serait inattendue, si l'on ne connaissait pas la théorie des groupes.

Si l'on pouvait la démontrer directement on aurait, comme l'a remarqué Campbell, une nouvelle démonstration du second théorème de Lie.

Mais il y a plus; on aurait une nouvelle démonstration du *troisième théorème de Lie*.

Les égalités (1) nous font connaître des relations entre les opérateurs élémentaires et les combinaisons XY — YX; ce sont ces relations qui déterminent la *structure* du groupe. Cette structure est donc entièrement définie quand on connaît les r^{3} coefficients c des r^{2} fonctions linéaires (XY).

Mais ces r^{3} constantes c ne sont pas toutes indépendantes; tous les coefficients de (XX) doivent être nuls; les coefficients de (YX) sont égaux et de signe contraire à ceux de (XY). Enfin les constantes c doivent être choisies de telle façon que les identités (3) soient satisfaites. J'adjoins donc aux identités (3) les

identités suivantes qui sont évidentes :

$$(XX)=0,\qquad (XY)=-(YX). \tag{3 bis}$$

Le troisième théorème de Lie nous apprend qu'on peut toujours trouver un groupe de structure donnée, pourvu que les coefficients c qui définissent cette structure satisfassent aux identités (3) et (3 *bis*), c'est-à-dire aux identités de Jacobi.

Mais supposons inversement qu'on ait démontré directement l'identité (5) et par conséquent la formule (4). Les coefficients w seront donnés en fonctions de v et de t; et je puis écrire

$$w_{k}=\Phi_{k}(v_{i},\,t_{i}). \tag{6}$$

Pour former les fonctions Φ_{k}, il suffit de savoir former le polynome W, par conséquent de savoir former les polynomes $W(p, m, n)$, c'est-à-dire de savoir réduire un polynome quelconque à un polynome régulier; pour cela il suffit de connaître les coefficients c.

Soient

$$e^{V}e^{T}=e^{W};\qquad e^{W}e^{U}=e^{Z};\qquad e^{T}e^{U}=e^{Y},$$

où

$$U=\Sigma u_{k}X_{k},\qquad Z=\Sigma z_{k}X_{k},\qquad Y=\Sigma y_{k}X_{k}.$$

Le caractère associatif de nos opérateurs nous montre que l'on a

$$e^{V}e^{Y}=e^{Z},$$

d'où les relations suivantes :

$$\begin{aligned} &w_{k}=\Phi_{k}(v_{i},\,t_{i}),\qquad y_{k}=\Phi_{k}(t_{i},\,u_{i});\\ &z_{k}=\Phi_{k}(w_{i},\,u_{i})=\Phi_{k}(v_{i},\,y_{i}). \end{aligned} \tag{7}$$

Regardons dans les équations (6) les t comme des constantes; ces équations (6) définiront une transformation qui transforme $v_{1}, v_{2}, \ldots, v_{r}$ en $w_{1}, w_{2}, \ldots, w_{r}$. Les relations (7) nous enseignent que l'ensemble de ces transformations constitue un groupe, le groupe *paramétrique*.

(C'est ce que Lie appelle « die erste Parametergruppe ».)

Les substitutions infinitésimales de ce groupe sont :

$$X(f)=\Sigma\frac{df}{dv_{k}}\frac{d\Phi_{k}}{dt_{i}},$$

où dans $\Phi_{k}(v_{i}, t_{i})$ on annule les t après la différentiation.

Les r substitutions infinitésimales $X_{i}(f)$ sont linéairement indépendantes. Et en effet, pour qu'elles ne le fussent pas, il faudrait que le déterminant fone-

tionnel des Φ_k par rapport aux t fût nul quels que soient les v, quand les t s'annulent. Or cela n'a pas lieu, car ce déterminant devient égal à 1 quand les v s'annulent.

Ayant ainsi défini les opérateurs élémentaires $X_i(f)$, leurs combinaisons $T = \Sigma t_i X_i(f)$, e^T, etc. se trouvent définies elles-mêmes.

Ces opérateurs étant associatifs, on aura

$$e^V(f) = e^T e^U(f),$$

c'est-à-dire, en négligeant les quantités du troisième ordre par rapport aux t et aux u,

$$V = T + U + \frac{TU - UT}{2}.$$

D'autre part, d'après la manière dont ont été formées les fonctions Φ_k, on vérifie que

$$V = T + U + \frac{1}{2}(TU) = \Sigma t_i X_i + \Sigma u_k X_k + \frac{1}{2}\Sigma (t_i u_k - t_k u_i)(X_i X_k),$$

et la comparaison de ces deux identités donne

$$X_i X_k - X_k X_i = (X_i X_k),$$

où les coefficients des fonctions linéaires $(X_i X_k)$ sont bien les r^3 coefficients c donnés.

Le groupe ainsi formé a donc bien la structure donnée et le troisième théorème de Lie est démontré.

C'est au fond la démonstration de Schur.

Ce que j'appellerai le problème de Campbell consiste donc à démontrer directement la formule (5), ce qui démontre à la fois le second et le troisième théorème de Lie.

V. — Le symbole $\Phi(\theta)$.

Considérons r opérateurs élémentaires

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_r,$$

et une de leurs combinaisons linéaires

$$T = t_1 X_1 + t_2 X_2 + \ldots + t_r X_r.$$

Soit ensuite V un autre opérateur élémentaire qui pourra être ou ne pas être une combinaison linéaire des opérateurs X.

Supposons que les opérateurs V et X soient liés par des relations de la forme

$$VX_i - X_i V = b_{i,1} X_1 + b_{i,2} X_2 + \ldots + b_{i,r} X_r \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

on aura alors

$$VT - TV = \Sigma u_k X_k,$$

où

$$u_k = \Sigma b_{i,k} t_i.$$

Je poserai

$$VT - TV = \theta(T).$$

Donc $\theta(T)$ est, comme T, une combinaison linéaire des X ; et les coefficients de $\theta(T)$ se déduisent de ceux de T par une substitution linéaire.

Je poserai

$$\theta[\theta(T)] = \theta^2(T), \quad \ldots, \quad \theta[\theta^m(T)] = \theta^{m+1}(T).$$

de sorte que $\theta^m(T)$ sera, comme T, une combinaison linéaire des X, les coefficients de $\theta^m(T)$ se déduisant de ceux de T en répétant m fois cette même substitution linéaire.

Si maintenant

$$\Phi(\theta) = \Sigma g_k \theta^k$$

est un polynome ou une série ordonnée suivant les puissances croissantes de θ, j'écrirai

$$\Phi(\theta)(T)$$

au lieu de

$$\Sigma g_k \theta^k(T).$$

Considérons l'équation, dite *caractéristique*,

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} b_{11} - \theta, & b_{12}, & \ldots, & b_{1r} \\ b_{21}, & b_{22} - \theta, & \ldots, & \ldots \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ b_{r1}, & \ldots\ldots, & \ldots, & b_{rr} - \theta \end{vmatrix} = 0.$$

Si cette équation a toutes ses racines distinctes et si ces racines sont θ_1, θ_2, $\ldots$, θ_r, il existe r combinaisons linéaires des X_i, à savoir :

$$(2) \qquad Y_k = \Sigma \alpha_{ik} X_i,$$

telles que

$$VY_k - Y_k V = \theta_k Y_k.$$

Si alors

$$T = \Sigma t_i X_i = \Sigma t'_k Y_k,$$

on aura

$$\Phi(\theta)(T) = \Sigma \Phi(\theta_k) t'_k Y_k.$$

Si nous posons

$$\Phi(\theta)(T) = \Sigma h_i X_i,$$

nous voyons d'abord que les coefficients h_i sont des fonctions linéaires des t; ce sont d'autre part des fonctions des b; étudions ces fonctions.

Si $\Phi(\theta)$ est un polynome entier d'ordre p en θ, les h_i seront des polynomes entiers d'ordre p par rapport aux b. Si donc $\Phi(\theta)$ est une série ordonnée suivant les puissances de θ, les h_i se présenteront sous la forme de séries ordonnées suivant les puissances des b. Nous allons voir bientôt quelles sont les conditions de convergence de ces séries.

Des équations (2) on tire en effet

$$X_j = \Sigma \beta_{jk} Y_k,$$

d'où

$$t'_k = \Sigma \beta_{ik} t_i,$$

$$\Phi(0)(T) = \Sigma \Phi(\theta_k) t'_k \alpha_{ik} X_i,$$

d'où enfin

$$h_i = \Sigma t_j \Phi(\theta_k) . \alpha_{ik} \beta_{jk}.$$

Pour déterminer les produits $\alpha_{ik}\beta_{jk}$ faisons

$$\Phi(\theta) = \frac{1}{\xi - \theta};$$

ξ étant une constante quelconque.

On a alors

$$\frac{1}{\xi - \theta}(T) = \Sigma h_i X_i = H,$$

où

$$h_i = \Sigma \frac{t_j \alpha_{ik} \beta_{jk}}{\xi - \theta_k}.$$

Mais on a aussi

$$(\xi - \theta)(H) = T,$$

ce qui peut s'écrire

$$\xi h_i - \Sigma b_{ki} h_k = t_i.$$

De ces équations on peut tirer les h_i en fonctions des t et l'on trouve

$$h_i = \Sigma \frac{t_j P_{ij}}{F(\xi)}, \tag{3}$$

où P_{ij} est un polynome entier par rapport aux b et à ξ; quant à $F(\xi)$, c'est le premier membre de l'équation (1) où θ a été remplacé par ξ.

Le second membre de l'équation (3) est une fraction rationnelle en ξ; décomposons-la en éléments simples; il viendra

$$h_i = \Sigma \frac{t_j P^{\xi}_{ij}}{F'(\theta_k)(\xi - \theta_k)},$$

où P^{ξ}_{ij} est ce que devient P_{ij} quand on y remplace ξ par θ_k.

On a donc

$$\alpha_{ik}\beta_{jk} = \frac{P^{k}_{ij}}{F'(\theta_k)},$$

d'où enfin, pour une fonction $\Phi(\theta)$ quelconque,

$$\Phi(0)(T) = \Sigma \frac{t_j P^{k}_{ij} \Phi(\theta_k) X_i}{F'(\theta_k)}. \tag{4}$$

On voit que les h_i s'expriment *rationnellement* en fonctions des b, des θ_k et des $\Phi(\theta_k)$.

La formule (4) peut se mettre sous une autre forme; nous pouvons écrire

$$\Phi(0)(T) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{d\xi\, \Phi(\xi) \Sigma t_j P_{ij} X_i}{F(\xi)}, \tag{4 bis}$$

l'intégrale étant prise dans le plan des ξ le long d'un cercle de rayon assez petit pour que la fonction $\Phi(\xi)$ soit holomorphe à l'intérieur; nous le supposerons de plus assez grand pour que les points $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$ soient à l'intérieur du cercle. Cela nous amène à supposer en même temps que le rayon de convergence de la série $\Phi(\xi)$ est plus grand que le plus grand module des quantités $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$.

On a alors pour tous les points du contour d'intégration

$$|\xi| > |\theta_1|, \quad |\xi| > |\theta_2|, \quad \ldots, \quad |\xi| > |\theta_r|,$$

d'où il résulte que la fonction rationnelle

$$\frac{P_{ij}}{F(\xi)}$$

est développable suivant les puissances croissantes des b. Il en est donc de même des h_i.

Nous avons dit plus haut que les h_i sont développables en séries procédant suivant les puissances des b; et d'après ce qui précède, il suffit, pour que ces séries convergent, que le rayon de convergence de la série $\Phi(\xi)$ soit plus grand que la plus grande des quantités

$$|\theta_1|, \quad |\theta_2|, \quad \ldots, \quad |\theta_r|.$$

Si donc $\Phi(\xi)$ est une fonction entière, les h_i seront des fonctions entières des b.

Qu'arrive-t-il maintenant si l'équation caractéristique

$$F(\theta) = 0$$

a des racines multiples? Il est aisé de s'en rendre compte en partant du cas général et passant à la limite.

Je suppose par exemple que θ_1 soit une racine triple. Alors $F(\xi)$ contient le facteur $(\xi-\theta_1)^3$. Si je décompose le second membre de (3) en éléments simples, trois de ces éléments deviendront infinis pour $\xi=\theta_1$.

Soient

$$\frac{\Lambda_1^{(i)}}{\xi-\theta_1}+\frac{\Lambda_2^{(i)}}{(\xi-\theta_1)^2}+\frac{\Lambda_3^{(i)}}{(\xi-\theta_1)^3}$$

ces trois éléments simples. Alors il faudra, dans la formule (4), remplacer le terme

$$\Sigma\frac{t_j P'_{ij}\Phi(\theta_1)X_i}{F'(\theta_1)_0}$$

(qui n'aurait plus de sens dans le cas d'une racine multiple) par les trois termes suivants :

$$\Sigma\Lambda_1^{(i)}X_i\Phi(\theta_1)-(1!)\Sigma\Lambda_2^{(i)}X_i\Phi'(\theta_1)+(2!)\Sigma\Lambda_3^{(i)}X_i\Phi''(\theta_1).$$

On opérerait de même pour les autres racines multiples.

Donc les h_{ij}, dans le cas des racines multiples, sont des fonctions rationnelles des b, des θ_k, des $\Phi(\theta_k)$ et de leurs dérivées $\Phi'(\theta_k)$, $\Phi''(\theta_k)$, ...; on pousse jusqu'à $\Phi^{(p)}(\theta_k)$ si θ_k est une racine multiple d'ordre $p+1$.

Remarquons que je n'aurais pu faire ce raisonnement par passage à la limite, si je m'étais astreint dès le début à supposer que V est une combinaison linéaire des X, et que les X sont liés par les relations (1) et (3) du paragraphe IV (relations de structure et identités de Jacobi).

Alors, en effet, les cas où l'équation caractéristique a des racines multiples ne pourraient plus être regardés comme des cas particuliers de ceux où toutes les racines sont distinctes. On aurait pu, il est vrai, démontrer directement la formule (4 *bis*) et se servir de cette formule; mais j'ai préféré ne pas m'imposer au début cette hypothèse restrictive, quitte à l'introduire dans la suite du calcul, de façon à avoir le droit de raisonner par passage à la limite.

Quoi qu'il en soit, le cas le plus intéressant au point de vue des applications à la théorie des groupes, c'est celui où cette hypothèse restrictive est satisfaite. Supposons donc que V soit une combinaison linéaire des X

$$V=v_1X_1+v_2X_2+\ldots+v_rX_r.$$

Supposons de plus que les X soient liées par les relations (1) du paragraphe précédent

$$X_iX_j-X_jX_i=\Sigma c_{ijs}X_s,$$

et que les constantes c satisfont à des relations telles que les identités (3) du paragraphe précédent aient lieu.

On aura alors

$$\theta(T)=\Sigma c_{ijs}v_it_jX_s,$$

d'où

$$b_{t,k}=c_{1,t,k}v_1+c_{2,t,k}v_2+\ldots+c_{r,t,k}v_r.$$

Les résultats, démontrés dans le cas général, seront évidemment encore vrais dans ce cas particulier; si donc on pose

$$\Phi(\theta)(T)=\Sigma h_iX_i,$$

les h_i seront des fonctions linéaires des t, et des fonctions rationnelles des v, des θ_k, des $\Phi(\theta_k)$ et de quelques-unes de leurs dérivées. Les θ_k sont les racines d'une équation algébrique dont le premier membre est un polynome entier homogène de degré r par rapport aux v et à l'inconnue θ.

De plus les h_i dépendent linéairement des $\Phi(\theta_k)$ et de leurs dérivées.

Si $\Phi(\xi)$ est une fonction entière de ξ, les h_i sont des fonctions entières des v.

Dans tous les cas, le symbole $\Phi(\theta)(T)$ se trouve entièrement défini.

Je terminerai par deux remarques :

1° Si $X(\xi)$ est le produit des deux fonctions $\Phi(\xi)$ et $\Psi(\xi)$, on aura

$$\Phi(\theta)[\Psi(\theta)(T)]=\Psi(\theta)[\Phi(\theta)(T)]=X(\theta)(T).$$

2° Si l'on a

$$\Phi(\theta)(T)=U,$$

on aura

$$\frac{1}{\Phi(\theta)}(U)=T.$$

Cette dernière égalité n'a de sens que si $\Phi(\xi)$ ne s'annule pas pour $\xi=0$, de telle façon que $\frac{1}{\Phi(\theta)}$ soit développable suivant les puissances de θ.

VI. — Formules fondamentales.

Considérons l'expression

$$e^{-\alpha V}e^{\beta T}e^{\alpha V}, \tag{1}$$

V et T ayant même signification que dans le paragraphe précédent, tandis que α et β sont des constantes très petites. Développons cette expression en négli-

geant les termes du troisième ordre par rapport à α et β; il viendra

$$\left(1-\alpha V+\frac{\alpha^2 V^2}{2}\right)\left(1+\beta T+\frac{\beta^2 T^2}{2}\right)\left(1+\alpha V+\frac{\alpha^2 V^2}{2}\right)$$

ou

$$1+\beta T+\frac{\beta^2 T^2}{2}-\alpha\beta(VT-TV),$$

ou, avec la même approximation,

$$e^{\beta T-\alpha\beta(VT-TV)}.$$

On aura donc, toujours avec cette approximation,

$$e^{-\alpha V}e^{\beta T}e^{\alpha V}=e^{\beta U}, \qquad \text{où } U=T-\alpha\theta(T), \tag{2}$$

ou encore, avec la même approximation,

$$e^{-\alpha V}e^{\beta T}e^{\alpha V}=e^{\beta U}, \qquad \text{où } U=e^{-\alpha\theta}(T). \tag{2 bis}$$

Je me propose maintenant de démontrer que la formule (2 *bis*) est vraie quelque loin que l'on pousse l'approximation; et d'abord qu'elle est vraie quand on néglige le carré de β et qu'on pousse l'approximation par rapport à α aussi loin que l'on veut.

Supposons donc qu'on pousse l'approximation jusqu'aux termes en β et jusqu'aux termes en α^m inclusivement. Dans l'expression (1) nous remplacerons $e^{\beta T}$ par $1+\beta T$, $e^{\alpha V}$ et $e^{-\alpha V}$ par les $m+1$ premiers termes de leurs développements; en effectuant le produit (et négligeant dans ce produit α^{m+1}), nous obtiendrons un polynome symbolique que nous pourrons rendre régulier par les procédés du paragraphe III. Soit

$$\Phi(\alpha,\beta)=\Sigma A\,\Pi,$$

le polynome régulier ainsi obtenu; Π est un monome symbolique, et A son coefficient qui est un polynome entier en α et β.

Nous avons alors

$$\Phi(\alpha+d\alpha,\beta)=e^{-\alpha-d\alpha,V}e^{\beta T}e^{\alpha+d\alpha,V}=e^{-d\alpha.V}\Phi(\alpha,\beta)e^{d\alpha.V}. \tag{3}$$

En effectuant le produit du troisième membre de cette double égalité, et négligeant le carré de la différentielle $d\alpha$, on obtiendra un polynome régulier de même forme dont les coefficients sont eux-mêmes des polynomes du premier degré par rapport à $d\alpha$ d'une part, par rapport aux coefficients A d'autre part. Telle est la forme du polynome $\Phi(\alpha+d\alpha,\beta)$.

D'autre part, on a

$$\Phi(\alpha+d\alpha,\beta)-\Phi(\alpha,\beta)=d\alpha\,\Sigma\frac{dA}{d\alpha}\Pi. \tag{3 bis}$$

Cette égalité, rapprochée de la remarque que nous venons de faire, montre que $\frac{dA}{d\alpha}$ est une combinaison linéaire des coefficients A.

Donc ces coefficients A, considérés comme fonctions de α, satisfont à des équations linéaires à coefficients constants.

De plus, pour $\alpha=0$ ils doivent se réduire aux coefficients de $e^{\beta T}$. Ces conditions suffisent pour les déterminer.

Or je dis que l'on peut y satisfaire en faisant (conformément à la formule 2 *bis*)

$$\Phi(\alpha,\beta)=e^{\beta U}; \qquad U=e^{-\alpha\theta}(T).$$

En effet cette formule nous donne

$$\Phi(\alpha+d\alpha,\beta)=e^{\beta U'}, \qquad U'=e^{-(\alpha+d\alpha.\theta}(T),$$

et il s'agit de vérifier que

$$e^{-d\alpha.V}e^{\beta U}e^{d\alpha.V}=e^{\beta U'}.$$

Or la formule (2 *bis*) démontrée quand on néglige d'une part le carré de β, d'autre part le carré de α, peut s'appliquer ici puisque nous négligeons le carré de β et celui de $d\alpha$. Nous avons donc

$$e^{-d\alpha.V}e^{\beta U}e^{d\alpha.V}=e^{\beta U''}, \qquad U''=e^{-d\alpha.\theta}(U),$$

d'où

$$U''=e^{-d\alpha.\theta}[e^{-\alpha\theta}(T)]=e^{-(\alpha+d\alpha)\theta}(T)=U'.$$

On a donc bien

$$\Phi(\alpha+d\alpha,\beta)=e^{-d\alpha.V}e^{\beta U}e^{d\alpha.V}=e^{\beta U'}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

La formule (2 *bis*) satisfait donc à nos équations différentielles, et comme ces équations ne comportent qu'une solution, cette formule se trouve vérifiée.

Poussons maintenant l'approximation aussi loin que nous voulons tant par rapport à β que par rapport à α.

Nous avons

$$\Phi(\alpha,\beta)=e^{-\alpha V}e^{\beta T}e^{\alpha V};$$

d'où

$$\Phi(\alpha,\beta+d\beta)=e^{-\alpha V}e^{\beta+d\beta,T}e^{\alpha V}=(e^{-\alpha V}e^{\beta T}e^{\alpha V})(e^{-\alpha V}e^{d\beta.T}e^{\alpha V}),$$

ou

$$\Phi(\alpha,\beta+d\beta)=\Phi(\alpha,\beta)\Phi(\alpha,d\beta).$$

Comme nous négligeons le carré de $d\beta$, je puis écrire

$$\Phi(\alpha,\beta+d\beta)=e^{d\beta.U}, \qquad U=e^{-\alpha\theta}(T);$$

d'où

$$\Phi(\alpha,\beta+d\beta)=\Phi(\alpha,\beta)e^{d\beta.U}. \tag{4}$$

Cette formule (4) représente sous forme condensée des équations différen-

tielles de même forme que les équations (3 *bis*), auxquelles doivent satisfaire les coefficients A de

$$\Phi(\alpha, \beta) = \Sigma A . \Pi.$$

C'est ainsi que la formule (4) représentait sous forme condensée les équations (3 *bis*).

On peut satisfaire à ces équations par la formule (2 *bis*); cette formule donne en effet

$$\Phi(\alpha, \beta + d\beta) = e^{\beta+d\beta . U} = e^{\beta U} e^{d\beta . U} = \Phi(\alpha, \beta)\, e^{d\beta . U}.$$

Les équations différentielles ne comportant comme les équations (3 *bis*) qu'une seule solution, la formule (2 *bis*) se trouve vérifiée dans tous les cas.

Cette formule (2 *bis*) n'est d'ailleurs que la traduction symbolique d'une formule bien connue et, si j'ai développé la démonstration, c'est uniquement pour mieux faire comprendre les symboles employés et pour faire connaître un mode de raisonnement applicable à des questions analogues; je veux parler de celui où s'introduisent les équations différentielles (3 *bis*) ou les équations analogues.

Il importe avant d'aller plus loin de préciser la portée de la démonstration que nous venons de donner. Pour qu'elle soit valable, il faut que tout polynome puisse être réduit d'une manière et d'une seule à être régulier. Or, d'après le paragraphe III, cela a lieu dans deux cas.

1° Si V et T sont des combinaisons linéaires des opérateurs X,

$$V = \Sigma v_i X_i, \qquad T = \Sigma t_i X_i,$$

et si ces opérateurs sont liés par des relations

$$X_i X_k - X_k X_i = \Sigma c_{ikr} X_r,$$

les constantes c satisfaisant aux identités

$$(X_a(X_b X_c)) + (X_b(X_c X_a)) + (X_c(X_a X_b)) = 0;$$

si, en d'autres termes, les opérateurs X définissent un groupe de Lie et si $e^{\alpha V}$, $e^{\beta T}$ sont deux transformations quelconques de ce groupe :

Dans ce premier cas la formule (2 *bis*) *est toujours vraie.*

2° Elle sera donc vraie en particulier si l'on suppose que

$$V;\ X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_r$$

sont $(r+1)$ opérateurs liés par les relations

$$VX_i - X_i V = \Sigma b_{ik} X_k \tag{5}$$

et

$$X_i X_k - X_k X_i = 0. \tag{6}$$

Ces relations entraînent en effet l'identité

$$(V(X_i X_k)) + (X_i(X_k V)) + (X_k(V X_i)) = 0,$$

en désignant suivant la coutume par (VX_i) et $(X_i X_k)$ les seconds membres des relations (5) et (6). On aura donc dans cette hypothèse

$$e^{-\alpha V} e^{\beta T} e^{\alpha V} = e^{\beta U}, \qquad U = e^{-\alpha\theta}(T). \tag{2 bis}$$

On aura de même en permutant V et T

$$e^{-\beta T} e^{\alpha V} e^{\beta T} = e^{\alpha W}, \qquad W = e^{-\beta\eta}(V), \tag{2 ter}$$

$e^{-\beta\eta}$ étant un symbole analogue à $e^{-\alpha\theta}$ et défini de la manière suivante : le symbole η est formé avec T comme le symbole θ avec V; on a donc, si Y est un opérateur quelconque,

$$\eta(Y) = TY - YT.$$

On aura donc

$$\eta(V) = TV - VT = -\theta(T),$$

et en vertu des relations (6)

$$\eta(X) = 0, \qquad \eta^2(V) = 0, \qquad \ldots, \qquad \eta^m(V) = 0,$$
$$e^{-\beta\eta}(V) = V - \beta\eta(V) = V + \beta\theta(T).$$

La formule (2 *ter*) devient ainsi

$$e^{-\beta T} e^{\alpha V} e^{\beta T} = e^{\alpha V + \alpha\beta\theta(T)}. \tag{2 quater}$$

Si l'on suppose maintenant que les relations (5) subsistent, mais que les relations (6) n'aient plus lieu, les formules (2 *bis*) et (2 *quater*) cesseront d'être vraies quels que soient α et β.

Cependant supposons que l'on regarde les opérateurs X comme très petits et qu'on en néglige les carrés; à ce degré d'approximation, les relations (6), dont les premiers membres sont du deuxième ordre par rapport aux X, se trouvent satisfaites d'elles-mêmes.

Les relations (2 *bis*) et (2 *quater*) sont donc vraies si l'on néglige les carrés des X, ou, ce qui revient au même, si l'on néglige le carré de T, ou encore si l'on néglige le carré de β (puisque T ne figure qu'affecté du facteur β).

Si donc V *et les* X *sont* $r+1$ *opérateurs liés par les relations* (5), *les relations* (2 *bis*) *et* (2 *quater*) *ont lieu aux quantités près de l'ordre de* β^2.

Au même degré d'approximation la formule (2 *quater*) peut s'écrire

$$e^{\alpha V+\alpha\beta\theta(T)} = e^{\alpha V} - \beta T\, e^{\alpha V} + e^{\alpha V}\beta T,$$

ou encore

$$e^{\alpha V+\alpha\beta\theta(T)} = e^{\alpha V} - e^{\beta T} e^{\alpha V} + e^{\alpha V} e^{\beta T},$$

ou en vertu de la relation (2 *bis*)

$$e^{\alpha V+\alpha\beta\theta(T)} = e^{\alpha V} - e^{\alpha V} e^{\beta U} + e^{\alpha V} e^{\beta T}, \qquad U = e^{-\alpha\theta}(T);$$

ou, toujours en négligeant le carré de β,

$$e^{\alpha V+\alpha\beta\theta(T)} = e^{\alpha V}(1 - \beta U + \beta T) = e^{\alpha V} e^{\beta(T-U)}.$$

Si nous posons

$$+\alpha\theta(T) = W, \qquad T - U = Y,$$

il vient

$$e^{\alpha V+\beta W} = e^{\alpha V} e^{\beta Y}, \qquad Y = \frac{1 - e^{-\alpha\theta}}{\alpha\theta}(W). \tag{7}$$

Soit

$$W = \Sigma w_i X_i$$

une combinaison linéaire quelconque des X_i; peut-on déterminer les coefficients t de la combinaison $T = \Sigma t_i X_i$ de telle façon que l'on ait

$$+\alpha\theta(T) = W?$$

Cela est évidemment toujours possible si le déterminant des coefficients b_{ik} n'est pas nul. Dans ce cas la formule (7) est vraie quel que soit W.

Si maintenant ce déterminant est nul, il suffit de partir du cas où ce déterminant n'est pas nul, de faire varier les coefficients b d'une manière continue de façon que ce déterminant devienne de plus en plus petit et de passer à la limite, pour démontrer que la formule (7) est encore vraie quel que soit W.

Si enfin V, au lieu d'être un opérateur indépendant des X, n'est qu'une combinaison linéaire des X, la formule (7) est évidemment encore vraie, puisqu'elle ne peut cesser de l'être par suite de l'introduction de nouvelles relations entre nos opérateurs.

Remarquons que ce raisonnement par passage à la limite n'aurait pas été possible, si nous nous étions astreint dès le début à supposer que V et T sont des combinaisons des opérateurs X, que les X définissent un groupe de Lie, que $e^{\alpha V}$ et $e^{\beta T}$ sont deux substitutions finies de ce groupe de Lie. Dans ce cas en effet le déterminant des b_{ik} aurait été constamment nul.

La formule (7) peut s'établir directement :

En effet, en négligeant le carré de β, on a

$$e^{\alpha V+\beta W} = \Sigma\frac{(\alpha V + \beta W)^n}{n!}$$

$$= e^{\alpha V} + \beta\Sigma\frac{\alpha^{n-1}}{n!}(V^{n-1}W + V^{n-2}WV + V^{n-3}WV^2 + \ldots + VWV^{n-2} + WV^{n-1}).$$

Or on trouve aisément

$$V^{n-1}W + V^{n-2}WV + \ldots + WV^{n-1}$$

$$= \frac{n!}{1!(n-1)!}V^{n-1}W - \frac{n!}{2!(n-2)!}V^{n-2}\theta(W)$$

$$+ \frac{n!}{3!(n-3)!}V^{n-3}\theta^2(W) - \ldots \pm \frac{n!}{(n-1)!\,1!}V\,\theta^{n-2}(W) \mp \frac{n!}{n!\,0!}\theta^{n-1}(W),$$

d'où

$$e^{\alpha V+\beta W} = e^{\alpha V} + \beta\Sigma\frac{\alpha^{n-1}}{n!}\left[\Sigma\frac{n!}{(n-p)!\,p!}V^{n-p}(-\theta)^{p-1}(W)\right],$$

ou

$$e^{\alpha V+\beta W} = e^{\alpha V} + \beta\Sigma\left[\frac{(\alpha V)^{n-p}}{(n-p)!}\,\frac{(-\alpha\theta)^{p-1}}{p!}(W)\right] = e^{\alpha V}\left[1 + \beta\Sigma\frac{(-\alpha\theta)^{p-1}}{p!}(W)\right],$$

ou enfin

$$e^{\alpha V+\beta W} = e^{\alpha V}(1+\beta Y) = e^{\alpha V} e^{\beta Y}, \qquad Y = \frac{1 - e^{-\alpha\theta}}{\alpha\theta}(W).$$

C. Q. F. D.

VII. — Formation des substitutions infinitésimales d'un groupe de structure donnée.

Soient donc $X_1, X_2, \ldots, X_r$, r opérateurs élémentaires liés par les relations

$$X_i X_k - X_k X_i = (X_i X_k) = \Sigma c_{iks} X_s, \tag{1}$$

les c étant des constantes telles que les identités de Jacobi du paragraphe III aient lieu.

Soient

$$T = \Sigma t_i X_i, \qquad U = \Sigma u_i X_i, \qquad V = \Sigma v_i X_i, \qquad W = \Sigma w_i X_i$$

diverses combinaisons linéaires de ces opérateurs.

Considérons le produit

$$e^{\alpha V} e^{\beta T};$$

effectuons ce produit qui sera une série de polynomes symboliques; réduisons chacun de ces polynomes à des polynomes réguliers en nous servant des relations (1); je me propose d'étudier la nouvelle série ainsi obtenue que j'appelle $\Phi(\alpha, \beta)$; le raisonnement sera le même que dans le paragraphe précédent, mais je le développerai un peu plus.

Tous les termes de cette série $\Phi(\alpha, \beta)$ sont des polynomes réguliers; et les coefficients de ces polynomes se présentent eux-mêmes sous la forme de séries développées suivant les puissances de α et de β. Je puis ordonner $\Phi(\alpha, \beta)$ suivant les puissances croissantes de β, en groupant tous les termes qui contiennent en facteur une même puissance de β. J'obtiens ainsi

$$\Phi(\alpha, \beta) = \Phi_0 + \beta\Phi_1 + \beta^2\Phi_2 + \dots.$$

D'autre part j'ai

$$\Phi(\alpha, \beta + d\beta) = e^{\alpha V}\, e^{\beta T}\, e^{d\beta . T} = \Phi(\alpha, \beta)\, e^{d\beta . T} = \Phi(\alpha, \beta)(1 + d\beta . T),$$

ou

$$\frac{d\Phi}{d\beta} = \Phi . T, \tag{2}$$

ou

$$m\Phi_m = \Phi_{m-1} . T; \tag{3}$$

ces conditions, jointes à

$$\Phi_0 = e^{\alpha V}, \tag{4}$$

suffisent pour déterminer Φ.

Or on y satisfait de la manière suivante : Faisons

$$\Phi(\alpha, \beta) = e^{W}, \qquad \Phi(\alpha, \beta + d\beta) = e^{W + dW};$$

soit η un symbole qui soit à W ce que θ est à V.

Il s'agit de satisfaire à l'équation (2) ou, ce qui revient au même, à

$$\Phi(\alpha, \beta + d\beta) = \Phi(\alpha, \beta)\, e^{d\beta . T};$$

on doit donc avoir

$$e^{W + dW} = e^{W}\, e^{d\beta . T}.$$

Or, en vertu de la formule (7) du paragraphe précédent, on satisfera à cette condition si l'on a

$$d\beta . T = \frac{1 - e^{-\eta}}{\eta}(dW). \tag{5}$$

Cette formule (5) représente symboliquement un système d'équations différentielles auxquelles doivent satisfaire les coefficients w_i.

En vertu de la formule (4 *bis*) du paragraphe V, ces équations peuvent s'écrire

$$t_i\, d\beta = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{d\xi}{\xi} \frac{1 - e^{-\xi}}{F(\xi)} \Sigma_j\, dw_j P_{ij} \qquad (i = 1, 2, \dots, r). \tag{5 bis}$$

Si l'on a

$$WX_i - X_i W = \Sigma c_{k,i,s} w_k X_s,$$

$F(\xi)$ est le déterminant dont l'élément est (pour la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $s^{\text{ième}}$ colonne)

$$-(c_{1,i,s} w_1 + c_{2,i,s} w_2 + \dots + c_{r,i,s} w_r),$$

sauf les éléments de la diagonale principale ($i = s$) qui sont égaux à

$$-(c_{1,i,i} w_1 + c_{2,i,i} w_2 + \dots + c_{r,i,i} w_r) + \xi;$$

les P_{ij} sont les mineurs de ce déterminant. L'intégrale du second membre de (5 *bis*) est prise dans le plan des ξ, le long d'un contour fermé enveloppant toutes les racines de l'équation $F(\xi) = 0$.

La condition (2) sera donc satisfaite si les w satisfont aux équations (5 *bis*); la condition (4) le sera également si les valeurs initiales des w pour $\beta = 0$ sont

$$w_i = v_i.$$

Les équations (5 *bis*) admettant toujours une solution telle que pour $\beta = 0$ on ait $w_i = v_i$, et d'autre part les conditions (2) et (4) suffisant pour déterminer Φ, on aura

$$\Phi(\alpha, \beta) = e^{W}, \qquad W = \Sigma w_i X_i,$$

les w étant des fonctions de β définies par les équations (5 *bis*) et les conditions initiales $w_i = v_i$.

La série $\Phi(\alpha, \beta)$ n'est donc autre chose qu'une exponentielle dont l'exposant est une combinaison linéaire des X_i; c'est le théorème que j'ai annoncé au paragraphe IV; et comme d'autre part ce théorème a été établi en s'appuyant simplement sur les relations (1) et en en faisant des combinaisons purement formelles, le problème de Campbell est résolu et le troisième théorème de Lie, en vertu de la remarque faite dans ce paragraphe IV, se trouve démontré

Il est aisé de se rendre compte de la forme relativement simple de ces équations (5 *bis*). Soient $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ les p racines distinctes de l'équation $F(\xi) = 0$; ce sont des fonctions algébriques des w, puisque $F(\xi)$ est un polynome entier par rapport à ξ et aux w. Les $\frac{dw_i}{d\beta}$ seront donnés par des équations linéaires dont les seconds membres seront des constantes; tandis que les coefficients des premiers membres seront des fonctions rationnelles des w, des ξ_k et des $e^{-\xi_k}$; ces coefficients ne dépendront d'ailleurs que linéairement des exponentielles $e^{-\xi_k}$; ce seront des fonctions symétriques des racines.

Résolvons ces équations par rapport aux $\frac{dw_i}{d\beta}$, nous trouverons

$$\frac{dw_j}{d\beta} = A_{1,j} t_1 + A_{2,j} t_2 + \dots + A_{r,j} t_r, \tag{6}$$

les coefficients A étant rationnels par rapport aux w, aux ξ_k et aux $e^{-\xi_k}$.

Le problème qui se pose à propos du troisième théorème de Lie est ainsi complètement résolu.

Il s'agit de trouver r opérateurs

$$X_1(f), \quad X_2(f), \quad \ldots, \quad X_r(f),$$

satisfaisant aux relations (1); on y satisfait en faisant

$$X_i(f) = A_{i,1}\frac{df}{dw_1} + A_{i,2}\frac{df}{dw_2} + \ldots + A_{i,r}\frac{df}{dw_r}.$$

Les équations (5 *bis*) peuvent se mettre sous plusieurs autres formes.

Soit

$$\Sigma c_{k,i,s}\, w_k = b_{i,s}.$$

On aura (puisque les P_{ij} sont les mineurs du déterminant F)

$$\xi P_{ij} - \Sigma b_{ki} P_{kj} = 0 \qquad \text{pour } i \gtrless j$$

et

$$\xi P_{ii} - \Sigma b_{ki} P_{ki} = F \qquad \text{pour } i = j.$$

Nos équations

$$t_i\, d\beta = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int d\xi \, \frac{1-e^{-\xi}}{\xi} \Sigma_j \frac{dw_j P_{ij}}{F} \tag{5 bis}$$

donnent

$$d\beta \Sigma_i t_i b_{ik} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int d\xi \, \frac{1-e^{-\xi}}{\xi . F} \Sigma_j \, dw_j \Sigma_i b_{ik} P_{ij},$$

d'où

$$d\beta \Sigma_i t_i b_{ik} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int d\xi (1-e^{-\xi}) \frac{\Sigma_j \, dw_j P_{kj}}{F} - \frac{dw_k}{2\pi\sqrt{-1}} \int d\xi \, \frac{1-e^{-\xi}}{\xi}.$$

La deuxième intégrale étant nulle, nous pouvons écrire tout simplement

$$d\beta \Sigma_i t_i b_{ik} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int d\xi (1-e^{-\xi}) \frac{\Sigma_j \, dw_j P_{kj}}{F} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r). \tag{5 ter}$$

D'autre part l'équation (5) peut s'écrire

$$\frac{dW}{d\beta} = \frac{\tau_i}{1-e^{-\tau_i}}(T), \tag{7}$$

d'où

$$\frac{dw_i}{d\beta} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\xi \, d\xi}{1-e^{-\xi}} \frac{\Sigma_j t_j P_{ij}}{F(\xi)},$$

ce qui donne

$$X_i(f) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\xi \, d\xi}{(1-e^{-\xi}) F(\xi)} \Sigma_j P_{ji} \frac{df}{dw_j}.$$

Cette dernière intégrale doit être prise le long d'un contour enveloppant toutes les racines de $F(\xi) = 0$, mais n'enveloppant pas les points

$$\xi = 2k\pi\sqrt{-1} \qquad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \text{ad inf.}).$$

VIII. — Formules de vérification.

Soit

$$e^{V+\partial V} = e^V e^Y,$$
$$V = \Sigma v_i X_i, \qquad \partial V = \Sigma \partial v_i X_i, \qquad Y = \Sigma \gamma_i X_i;$$

on aura, en vertu de la formule (7) du paragraphe VI,

$$Y = \frac{1-e^{-\theta}}{\theta}(\partial V)$$

[posant $\theta(T) = VT - TV$ comme dans le paragraphe V].

Soit maintenant

$$e^{-V} e^T e^V = e^U,$$

on aura, par la formule (2 *bis*) du paragraphe VI,

$$U = e^{-\theta}(T).$$

Soit

$$e^{-(V+\partial V)} e^T e^{V+\partial V} = e^{U'},$$

on aura

$$U' = e^{-(\theta+\partial\theta)}(T),$$

où $\theta + \partial\theta$ est un symbole qui est à $V + \partial V$ ce que θ est à V. On aura d'autre part

$$e^{U'} = e^{-Y} e^{-V} e^T e^V e^Y = e^{-Y} e^U e^Y,$$

d'où, en négligeant le carré de Y qui est infiniment petit,

$$e^{U'} = e^U - Y e^U + e^U Y = e^{U+UY-YU},$$

d'où

$$U' - U = UY - YU.$$

Si je conviens de poser

$$e^{-(\theta+\partial\theta)} - e^{-\theta} = \partial(e^{-\theta}),$$

il viendra

$$U' - U = \partial(e^{-\theta})(T).$$

Nous arrivons ainsi à la formule symbolique suivante :

$$\partial(e^{-\theta})T = [e^{-\theta}(T)]\left[\frac{1-e^{-\theta}}{\theta}(\partial V)\right] - \left[\frac{1-e^{-\theta}}{\theta}(\partial V)\right][e^{-\theta}(T)]. \tag{1}$$

Pour mieux expliquer le sens de cette formule, rappelons que nous avons trouvé plus haut

$$\Phi(\theta)(T) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int d\xi \, \Phi(\xi) \Sigma h_i X_i, \tag{2}$$

où les h_i sont des fonctions rationnelles des t, des v et de ξ données par les

équations

$$\xi h_i - \Sigma b_{ki} h_k = t_i, \qquad b_{ki} = c_{1,k,i} v_1 + c_{2,k,i} v_2 + \ldots + c_{r,k,i} v_r. \tag{3}$$

Alors on aura

$$\delta e^{-\theta}(\mathrm{T}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int d\xi\, e^{-\xi} \Sigma\, \delta h_i \mathrm{X}_i,$$

où les δh_i sont les accroissements que subissent les fonctions h_i quand les variables v_k subissent les accroissements δv_k.

Si alors les h_i' sont ce que deviennent les h_i quand on y remplace les t_k par les δv_k, la formule (1) pourra prendre la forme

$$2\pi\sqrt{-1}\,\Sigma \mathrm{X}_i \int d\xi\, e^{-\xi}\, \delta h_i = \Sigma (\mathrm{X}_i \mathrm{X}_k - \mathrm{X}_k \mathrm{X}_i) \int d\xi\, \frac{1 - e^{-\xi}}{\xi} h_k' \int d\xi\, e^{-\xi} h_i. \tag{1 bis}$$

Dans le premier membre le signe Σ se rapporte aux r valeurs de l'indice i; dans le deuxième membre aux $r(r-1)$ *arrangements* des deux indices i et k (l'arrangement i, k étant regardé comme différent de l'arrangement k, i).

Cette formule nous fait connaître un certain nombre de relations auxquelles doivent satisfaire les expressions $\mathrm{X}_i\mathrm{X}_k - \mathrm{X}_k\mathrm{X}_i$ ou $(\mathrm{X}_i\mathrm{X}_k)$. Ces relations sont curieuses; mais la plupart ont déjà été démontrées par Killing et il semble que les autres pourraient se démontrer facilement par les procédés de Killing. Je n'y insiste donc que comme procédé de vérification.

Les deux membres de cette équation sont d'une forme particulière.

Le premier membre est linéaire à la fois par rapport aux symboles X_i, par rapport aux t_i, aux δv_k, aux exponentielles $e^{-\theta_i}$ (les θ_i étant les racines de l'équation $\mathrm{F} = 0$). Les coefficients de cette fonction linéaire sont eux-mêmes des fonctions rationnelles des v et des θ_i.

Le second membre est linéaire à la fois par rapport aux symboles $(\mathrm{X}_i\mathrm{X}_k)$, par rapport aux t_i, aux δv_k, aux exponentielles $e^{-\theta_i}$ et $e^{-\theta_k - \theta_i}$ (θ_i et θ_k étant deux racines de $\mathrm{F} = 0$). Les coefficients de cette fonction linéaire sont encore rationnels par rapport aux v et aux θ_i.

Les θ_i étant les racines de l'équation $\mathrm{F} = 0$ sont des fonctions algébriques des v. Dans les deux membres de l'équation (1 *bis*) entrent en outre linéairement un certain nombre de fonctions transcendantes; il y a d'abord les exponentielles $e^{-\theta_i}$ et il y en a autant que l'équation $\mathrm{F} = 0$ a de racines distinctes. Il y a ensuite les exponentielles $e^{-\theta_i + \theta_j}$ qui peuvent être distinctes des précédentes, mais qui peuvent également ne pas en être toutes distinctes si l'une des

racines de l'équation $\mathrm{F} = 0$ est constamment égale à la somme de deux autres racines.

Supposons qu'il y ait q exponentielles et soient

$$e^{\eta_1}, \quad e^{\eta_2}, \quad \ldots, \quad e^{\eta_q}$$

ces exponentielles.

Les deux membres de l'équation (1 *bis*) seront alors des fonctions linéaires des produits de la forme

$$t_m \delta v_h e^{\eta_\mu}, \tag{4}$$

où m et h peuvent prendre les valeurs $1, 2, \ldots, r$, et où μ peut prendre les valeurs $1, 2, \ldots, q$.

Les coefficients de ces produits sont des fonctions algébriques des v, ne dépendant ni des t, ni des δv. Pour que l'identité puisse avoir lieu, il faut que l'on puisse égaler dans les deux membres de (1 *bis*) les coefficients d'un même produit (4).

Nous aurons ainsi un certain nombre de relations linéaires entre les symboles X_i d'une part, les symboles $(\mathrm{X}_i\mathrm{X}_k)$ d'autre part; les coefficients de ces relations linéaires sont des fonctions algébriques des v. Ces relations linéaires doivent être identiques aux relations de structure ou en être des conséquences.

J'examinerai seulement le cas particulier où $\mathrm{F}(\xi) = 0$ a toutes ses racines distinctes. Je puis alors supposer que les opérateurs élémentaires X_i ont été choisis de telle sorte que

$$\mathrm{V}\mathrm{X}_i - \mathrm{X}_i \mathrm{V} = \theta_i \mathrm{X}_i,$$

θ_i étant l'une de ces racines.

Égalons alors dans l'équation (1 *bis*) les coefficients de $t_m \delta v_h$; il vient

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \Sigma \mathrm{X}_i \int d\xi\, e^{-\xi} \frac{d^2 h_i}{dv_h\, dt_m} = (\mathrm{X}_m \mathrm{X}_h) \frac{1 - e^{-\theta_h}}{\theta_h} e^{-\theta_m}.$$

Le premier membre ne dépend que des exponentielles $e^{-\theta_i}$, mais le second membre, outre l'exponentielle $e^{-\theta_m}$, contient encore $e^{-\theta_h - \theta_m}$.

Égalons les coefficients de $e^{-\theta_h - \theta_m}$. Si $\theta_h + \theta_m$ n'est pas égal à une racine de $\mathrm{F} = 0$, cette exponentielle ne figurera pas dans le premier membre; nous aurons donc

$$(\mathrm{X}_m \mathrm{X}_h) = 0$$

On reconnaît là l'un des théorèmes de Killing.

Si au contraire $\theta_h + \theta_m$ est racine de $\mathrm{F} = 0$, l'exponentielle pourra figurer dans le premier membre et $(\mathrm{X}_m \mathrm{X}_h)$ pourra ne pas être nul.

Je n'insisterai pas sur les autres vérifications, ni sur le cas où les racines ne sont pas distinctes et où l'on retrouverait les autres théorèmes de Killing.

Je me bornerai à faire remarquer que la vérification de la formule (1 *bis*) n'est pas immédiate, et qu'il faut pour la faire avoir recours aux identités de Jacobi et aux théorèmes que Killing en a déduits.

IX. — Intégration des équations différentielles et formation des substitutions finies des groupes.

Soit

$$e^{V+dV} = e^{V} e^{d\Lambda}, \tag{1}$$

où

$$V = \Sigma v_i X_i, \qquad dV = \Sigma\, dv_i X_i, \qquad d\Lambda = \Sigma\, dx_i X_i.$$

On aura, en vertu de la formule (7) du paragraphe VI,

$$d\Lambda = \frac{1 - e^{-\theta}}{\theta}(dV). \tag{2}$$

Cette formule, identique sauf les notations à la formule (5) du paragraphe VII, comprend, sous la forme symbolique, r systèmes d'équations différentielles, ainsi que je l'ai déjà fait remarquer au paragraphe VII.

Annulons tous les dx, sauf dx_k; égalons ensuite les coefficients de X_1, X_2, ..., X_r dans la formule (2). Nous aurons r équations différentielles qui définiront

$$\frac{dv_1}{dx_k}, \quad \frac{dv_2}{dx_k}, \quad \ldots, \quad \frac{dv_r}{dx_k}$$

en fonctions des v. Ce sont là, comme nous l'avons vu au paragraphe VII, les équations différentielles qui définissent une des substitutions infinitésimales du groupe, si l'on prend les v comme variables indépendantes.

En donnant à l'indice k les valeurs 1, 2, ..., r, on obtiendra r systèmes d'équations différentielles correspondant aux r substitutions infinitésimales du groupe.

Nous devons prévoir que ces équations peuvent se ramener, au moins dans le cas des groupes de la première famille (*vide supra* paragraphe I), à des équations linéaires, puisque c'est là un résultat bien connu obtenu par Lie.

Voici le changement de variables qu'il faudrait faire pour retrouver ces équations; soit

$$U = \Sigma u_i X_i, \qquad e^{-V} e^{U} e^{V} = e^{L}, \qquad L = \Sigma l_i X_i,$$

on aura

$$L = e^{-\theta}(U). \tag{3}$$

Cette équation symbolique (3) nous apprend que les l_i sont des fonctions des v et des u, linéaires par rapport aux u, et nous permet de former ces fonctions. Si alors on pose

$$e^{-V-dV} e^{U} e^{V+dV} = e^{L+dL},$$

on aura

$$e^{L+dL} = e^{-d\Lambda} e^{L} e^{d\Lambda},$$

ou, puisque $d\Lambda$ est infiniment petit,

$$dL = L\, d\Lambda - d\Lambda . L. \tag{4}$$

Cette formule (4) représente symboliquement r systèmes d'équations différentielles qui ne sont autre chose que ce que deviennent les r systèmes d'équations différentielles représentées symboliquement par la formule (2) quand on prend les l_i pour variables nouvelles.

Celui de ces systèmes que l'on obtient en annulant tous les dx sauf dx_k s'écrit

$$\frac{dL}{dx_k} = L X_k - X_k L. \tag{4 bis}$$

Ces équations sont linéaires et à coefficients constants et s'intègrent immédiatement; ce sont celles auxquelles Lie arrive par la considération du groupe adjoint. Il importe de remarquer que la réduction des équations différentielles (2) aux équations (4) par le changement de variables (3) n'est pas immédiate et qu'on ne peut la faire qu'en tenant compte des identités de Jacobi. Considérons de plus près le cas des groupes de la deuxième famille. Nous pourrons alors choisir les opérateurs élémentaires X_i de telle manière qu'on en puisse distinguer de deux classes. Ceux de la deuxième classe seront permutables à tous les opérateurs, ce seront les X_i''; quant à ceux de la première classe que j'appellerai les X_i', ils seront caractérisés par la propriété suivante : aucune combinaison linéaire des X_i' ne sera permutable à tous les opérateurs.

Pour mettre en évidence cette distinction, j'écrirai quand il y aura lieu

$$\Sigma v_i X_i = \Sigma v_i' X_i' + \Sigma v_i'' X_i'', \qquad V' = \Sigma v_i' X_i', \qquad V'' = \Sigma v_i'' X_i'', \qquad V = V' + V''.$$

Les v_i' seront ainsi les coefficients des X_i' et les v_i'' ceux des X_i''. Les lettres u_i', u_i''; l_i', l_i''; U', U''; L', L'', etc. auront une signification analogue.

Il est clair qu'on aura

$$V'T - TV' = V'T'' - T'V' = 0,$$

d'où

$$\theta(\mathrm{T}) = \mathrm{VT} - \mathrm{TV} = \mathrm{V'T'} - \mathrm{T'V'}.$$

J'introduis alors un symbole nouveau : soit

$$\mathrm{V'T'} - \mathrm{T'V'} = \Sigma \lambda'_i \mathrm{X}'_i + \Sigma \lambda''_i \mathrm{X}''_i;$$

je poserai

$$\theta'(\mathrm{T}) = \Sigma \lambda'_i \mathrm{X}'_i, \qquad \theta''(\mathrm{T}) = \Sigma \lambda''_i \mathrm{X}''_i,$$

et je définis $\Phi(\theta')$ à l'aide de θ' comme j'ai défini $\Phi(\theta)$ à l'aide de θ. On a alors

$$\theta(\mathrm{X}'_i) = 0, \qquad \theta[\theta''(\mathrm{T})] = 0, \qquad \Phi(\theta)(\mathrm{T}'') = 0;$$

et l'on trouve aisément

$$\Phi(\theta)(\mathrm{T}) = \Phi(\theta)(\mathrm{T}') = \Phi(\theta')(\mathrm{T}') + \theta''\left[\frac{\Phi(\theta') - \Phi(0)}{\theta'}(\mathrm{T}')\right] + \Phi(0)\mathrm{T}''.$$

Remarquons que les expressions

$$\theta(\mathrm{T}), \quad \theta'(\mathrm{T}), \quad \theta''(\mathrm{T})$$

dépendent des v' et des t', mais sont indépendantes des v'' et des t''; et il en est de même de $\Phi(\theta)(\mathrm{T})$ si $\Phi(0)$ est nul.

Les l_i étant linéaires par rapport aux u, je puis écrire

$$l_i = \Sigma \frac{dl_i}{du_k} u_k.$$

Les $\frac{dl_i}{du_k}$ sont des fonctions des v. Voyons combien de ces fonctions sont indépendantes les unes des autres. Je dis d'abord que ces fonctions ne dépendent que des v'. Nous avons en effet (e^{Z} étant une substitution quelconque du groupe)

$$e^{\mathrm{V}'+\mathrm{V}''} = e^{\mathrm{V}'} e^{\mathrm{V}''}, \qquad e^{-\mathrm{V}''} e^{\mathrm{Z}} e^{\mathrm{V}''} = e^{\mathrm{Z}},$$

d'où

$$e^{\mathrm{L}} = e^{-\mathrm{V}''-\mathrm{V}'} e^{\mathrm{U}} e^{\mathrm{V}'+\mathrm{V}''} = e^{-\mathrm{V}''} e^{-\mathrm{V}'} e^{\mathrm{U}} e^{\mathrm{V}'} e^{\mathrm{V}''} = e^{-\mathrm{V}'} e^{\mathrm{U}} e^{\mathrm{V}'},$$

ce qui montre que L ne dépend que de V', mais pas de V''.

Je dis maintenant que le nombre des fonctions $\frac{dl}{du}$ indépendantes les unes des autres est précisément celui des variables v'. En d'autres termes, si l'on pose

$$e^{\mathrm{L}} = e^{-\mathrm{V}} e^{\mathrm{U}} e^{\mathrm{V}}, \qquad e^{\mathrm{L}_1} = e^{-\mathrm{V}_1} e^{\mathrm{U}} e^{\mathrm{V}_1},$$

l'identité $\mathrm{L} = \mathrm{L}_1$, si elle a lieu quel que soit U, entraîne l'identité $\mathrm{V}' = \mathrm{V}'_1$. Si en effet $\mathrm{L} = \mathrm{L}_1$, on aura, quel que soit U,

$$e^{\mathrm{V}_1} e^{-\mathrm{V}} e^{\mathrm{U}} e^{\mathrm{V}} e^{-\mathrm{V}_1} = e^{\mathrm{U}},$$

ce qui montre que $e^{\mathrm{V}} e^{-\mathrm{V}_1}$ est permutable à toutes les substitutions du groupe.

C'est donc une substitution qui ne dépend que des X''_i, de sorte que je puis écrire

$$e^{\mathrm{V}} e^{-\mathrm{V}_1} = e^{\mathrm{W}''},$$

W'' étant une combinaison linéaire des X''_i; on en tire

$$e^{\mathrm{V}} = e^{\mathrm{W}''} e^{\mathrm{V}_1} = e^{\mathrm{V}_1 + \mathrm{W}''},$$

d'où

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}_1 + \mathrm{W}'',$$
$$\mathrm{V}' = \mathrm{V}'_1, \qquad \mathrm{V}'' = \mathrm{V}''_1 + \mathrm{W}''.$$

Donc

$$\mathrm{V}' = \mathrm{V}'_1.$$

C. Q. F. D.

Nous pourrons prendre comme variables les $\frac{dl}{du}$ et les v'', au lieu des v' et des v''.

Les $\frac{dl}{du}$ sont définis par les équations (*4 bis*), qui étant par rapport à ces variables des équations linéaires à coefficients constants s'intègrent immédiatement.

Les équations (*4 bis*) nous font donc connaître les $\frac{dl}{du}$ et par conséquent les v' en fonctions de la variable α_k.

Pour obtenir les v'', revenons aux équations (2); si nous posons

$$1 - e^{-\theta} = \theta + \theta^2 \Psi(\theta),$$

elle peuvent s'écrire

$$d\Lambda' = dV' + \theta' \Psi(\theta')(dV'),$$
$$d\Lambda'' = dV'' + \theta'' \Psi(\theta')(dV').$$

On a

$$d\Lambda' = \Sigma d\alpha'_k \mathrm{X}'_k, \qquad d\Lambda'' = \Sigma d\alpha''_k \mathrm{X}''_k.$$

Si l'on annule tous les $d\alpha'$ et tous les $d\alpha''$ sauf $d\alpha''_i$, nos équations donnent simplement

$$v'_i = \text{const.}, \qquad v''_i = \text{const.} \qquad (i \gtrless k); \qquad v''_k = \alpha''_k + \text{const.}$$

Si l'on annule tous les $d\alpha'$ et tous les $d\alpha''$ sauf $d\alpha''_k$, les équations deviennent

$$\mathrm{X}'_k \, d\alpha'_k = dV' + \theta' \Psi(\theta')(dV'),$$
$$0 = dV'' + \theta'' \Psi(\theta')(dV').$$

La première de ces équations, équivalente aux équations (*4 bis*), est susceptible, comme nous l'avons vu, d'être ramenée à la forme d'un système d'équations linéaires à coefficients constants. L'intégration est immédiate et nous donne les v' en fonction de la variable α'_k.

La seconde équation est équivalente à un système d'équations de la forme

$$dv'_i + dv'_1 F^i_1 + dv'_2 F^i_2 + \ldots + dv'_m F^i_m = 0,$$

les F étant des fonctions données des v'. En remplaçant les v' par leurs valeurs en fonctions de x'_k, elle prend la forme

$$dv''_i + \Phi(x'_k)\, dx'_k = 0$$

et s'intègre immédiatement par quadrature.

QUELQUES REMARQUES

SUR

LES GROUPES CONTINUS [1]

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 15 (1901).

I. — Introduction.

A l'occasion du jubilé de Sir G. G. Stokes, j'ai publié un Mémoire [2] où je me suis occupé des groupes finis et continus de Lie. C'est ce Mémoire que je citerai dans la suite sous le nom de « Mémoire de Cambridge ».

J'y ai entre autres choses donné une démonstration nouvelle de ce théorème de Lie, qu'il existe toujours des groupes de structure donnée, pourvu que cette structure satisfasse aux conditions dites de Jacobi.

J'ai mis sous une autre forme la formule de Lie pour la construction du groupe adjoint; j'ai donné ensuite les équations différentielles du groupe paramétrique, et j'ai montré que ces équations pouvaient s'intégrer, au moins par quadratures.

La première chose que j'aurai à faire sera donc de rappeler toutes ces formules.

Nous avons ainsi deux méthodes pour former le groupe, soit en partant du groupe adjoint, soit en partant du groupe paramétrique. Ces deux méthodes doivent conduire au même résultat. Mais il arrive ceci : quand on égale les résultats obtenus par ces deux méthodes, on n'obtient pas des identités immédiates, on obtient des propriétés plus ou moins cachées du groupe.

Beaucoup de ces propriétés étaient déjà connues; d'autres auraient pu être

[1] Présenté le 3 avril 1901, imprimé le 21 juin 1901.

[2] *Sur les groupes continus* [Memoirs presented to the Cambridge Philosophical Society on the occasion of the Jubilee of Sir George Gabriel Stokes, Bart., Hon, LL. D., Hon. Sc. D. Lucasian Professor (Cambridge, At the University Press, 1900), p. 220-255].

obtenues par une autre voie; il m'a paru qu'il pouvait y avoir quelque intérêt à les relier entre elles de cette manière.

Malheureusement je n'ai pu aller bien loin dans cette direction; j'ai fait très peu et je serai heureux si j'ai pu faire comprendre à peu près ce qu'il y aurait à faire.

Les singularités des relations finies qui définissent le groupe paramétrique, ainsi que celles des équations différentielles d'où elles dérivent, peuvent être étudiées au point de vue de la théorie des fonctions, mais je me suis borné à cet égard à de brèves indications.

Dans le cours de ce travail j'ai eu à envisager tantôt des transformations infinitésimales, tantôt des transformations finies. Les premières je les ai représentées, tantôt par le symbole

$$X = X(f) = (X_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (X_2)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + (X_r)\frac{\partial f}{\partial x_r},$$

tantôt par le symbole

$$e^{\varepsilon X}.$$

Les transformations finies étaient toujours représentées par le symbole exponentiel. Je crois qu'il ne peut pas résulter de là de confusion fâcheuse.

J'ai employé indifféremment les deux mots « substitution » et « transformation ». J'aurais pu tirer profit de cette double dénomination, soit en réservant l'un des noms pour les opérations du groupe envisagé et l'autre pour les opérations correspondantes du groupe adjoint, soit de bien d'autres manières. Au contraire, je n'en ai fait usage que comme un simple littérateur, pour éviter les répétitions de mots. J'ai eu tort, mais j'espère que ce n'est qu'un péché véniel.

II. — Formation du groupe adjoint.

La première des formules que je dois rappeler était connue depuis longtemps; je crois cependant devoir en parler pour familiariser le lecteur avec les notations employées.

Soit

$$X(f) = (X_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (X_2)\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + (X_r)\frac{\partial f}{\partial x_r}$$

un opérateur quelconque. Je conviendrai d'écrire

$$\begin{aligned} XY(f) &= X[Y(f)], \\ (XY) &= X[Y(f)] - Y[X(f)], \\ X^m(f) &= X[X^{m-1}(f)]. \end{aligned}$$

Si je considère la substitution infinitésimale qui change f en $1 + \varepsilon X(f)$, les puissances de cette substitution engendrent un groupe dépendant d'un seul paramètre t et dont la transformation la plus générale peut être représentée par la notation

$$e^{tX},$$

puisqu'elle change f en

$$f + \frac{t}{1}X(f) + \frac{t^2}{1.2}X^2(f) + \frac{t^2}{1.2.3}X^3(f) + \ldots$$

Si je considère maintenant un groupe continu G dérivant de r opérations

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_r,$$

la transformation la plus générale de ce groupe pourra être représentée par la notation

$$e^{T} \qquad (T = t_1X_1 + \ldots + t_rX_r).$$

Ces transformations formant un groupe, on devra avoir identiquement

$$e^{T}e^{U} = e^{V} \qquad \begin{cases} T = t_1X_1 + \ldots + t_rX_r, \\ U = u_1X_1 + \ldots + u_rX_r, \\ V = v_1X_1 + \ldots + v_rX_r, \end{cases}$$

les v étant des fonctions convenablement choisies des t et des u.

La même condition s'exprime, comme on le sait, d'une autre manière; on doit avoir

$$(1) \qquad (X_iX_k) = \Sigma_s c_{iks}X_s,$$

les c_{iks} étant des constantes.

Soient alors

$$V = \Sigma v_iX_i, \qquad T = \Sigma t_iX_i,$$

de sorte que e^{V} et e^{T} soient deux transformations quelconques du groupe; posons

$$e^{-V}e^{T}e^{V} = e^{T'},$$

e^{T} sera encore une substitution du groupe, de sorte qu'on aura

$$T' = t'_1X_1 + t'_2X_2 + \ldots + t'_rX_r.$$

On voit aisément qu'on doit avoir

$$e^{-V}Te^{V} = T',$$

ce qui montre que les t' sont des fonctions linéaires des t; c'est-à-dire qu'à chaque substitution e^{V} de G correspond une substitution linéaire qui change

les t en t'. C'est l'ensemble de ces substitutions linéaires qui constitue ce que l'on appelle le groupe *adjoint* de G.

Cela posé, nous avons

$$(\mathrm{VT}) = \Sigma b_{ik} t_i \mathrm{X}_k,$$

où

$$b_{ik} = c_{1,i,k} v_1 + c_{2,i,k} v_2 + \ldots + c_{r,i,k} v_r.$$

Formons l'équation caractéristique de Killing

$$(2) \qquad \mathrm{F}(\xi) = \begin{vmatrix} b_{11}-\xi & b_{12} & \ldots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22}-\xi & \ldots & b_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{r1} & b_{r2} & \ldots & b_{rr}-\xi \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre $\mathrm{F}(\xi)$ est un polynome homogène de degré r par rapport à ξ et aux v.

Soient maintenant P_{ij} les mineurs du déterminant $\mathrm{F}(\xi)$, de telle façon que

$$\xi \mathrm{P}_{ij} - \Sigma b_{ki} \mathrm{P}_{kj} = 0 \qquad (i \neq j),$$
$$\xi \mathrm{P}_{ii} - \Sigma b_{ki} \mathrm{P}_{ki} = -\mathrm{F}(\xi).$$

Ces mineurs seront des polynomes homogènes de degré $(r-1)$ par rapport à ξ et aux v.

Les racines de l'équation $\mathrm{F}(\xi)=0$ sont donc des fonctions algébriques des v, homogènes de degré 1 par rapport à ces variables.

Cela posé, la première formule que je voulais rappeler est la suivante :

$$(3) \qquad t'_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{e^{-\xi} \Sigma t_k \mathrm{P}_{ik}}{\mathrm{F}(\xi)} d\xi.$$

L'intégrale du second membre doit être prise le long d'un contour enveloppant toutes les racines de $\mathrm{F}(\xi)=0$.

On voit immédiatement quelle doit être la forme des coefficients de la substitution linéaire du groupe adjoint qui change T en T'.

Si les racines de l'équation (2) sont toutes distinctes, et si ces racines sont $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$, nos coefficients seront des combinaisons linéaires des exponentielles

$$e^{-\omega_1}, \quad e^{-\omega_2}, \quad \ldots \quad e^{-\omega_r}$$

ou plutôt seront de la forme

$$\Sigma e^{-\omega_p} \mathrm{R}(\omega_p),$$

R étant une fonction rationnelle homogène de degré zéro par rapport à ω_p et aux v. Je rappelle que l'une des racines $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ est toujours nulle.

Si les racines ne sont pas toutes distinctes, nos coefficients seront de la forme

$$(4) \qquad \Sigma e^{-\omega_p} \Pi_p(\omega_p),$$

$\Pi_p(\omega_p)$ étant une fonction rationnelle définie comme il suit :

Si ω_p est une racine d'ordre μ, le dénominateur sera homogène et de degré $(r-\mu)$ par rapport aux v et à ω_p, et le numérateur sera un polynome non homogène de degré $(r-1)$ par rapport aux mêmes variables et où les termes du degré le moins élevé seront de degré $(r-\mu)$.

Si les t sont regardés comme donnés, les t'_i seront des expressions de la forme (4). On pourra choisir les t de telle façon que dans ces expressions tous les termes disparaissent, sauf ceux qui contiennent en facteur l'exponentielle $e^{-\omega_p}$. On dira alors que la transformation T *appartient* à la racine ω_p par rapport à la transformation V.

Soit maintenant

$$e^{-\mathrm{V}} \mathrm{T} e^{\mathrm{V}} = \mathrm{T}', \qquad e^{-\mathrm{V}} \mathrm{U} e^{\mathrm{V}} = \mathrm{U}';$$

on aura aussi

$$e^{-\mathrm{V}} (\mathrm{TU} - \mathrm{UT}) e^{\mathrm{V}} = \mathrm{T'U'} - \mathrm{U'T'}.$$

Si T appartient à la racine ω_p et U à la racine ω_q, T' se réduira à $e^{-\omega_p}$ multiplié par une fonction algébrique, et U' à $e^{-\omega_q}$ multiplié par une fonction algébrique; de sorte que

$$\mathrm{T'U'} - \mathrm{U'T'}$$

se réduira à l'exponentielle

$$e^{-\omega_p - \omega_q}$$

multiplié par une fonction algébrique.

En d'autres termes,

$$\mathrm{TU} - \mathrm{UT} = (\mathrm{TU})$$

appartiendra à la racine $\omega_p + \omega_q$.

Si $\omega_p + \omega_q$ n'est pas racine de l'équation (2), on devra conclure que le crochet (TU) est nul.

Ce double théorème est dû, je crois, à Killing. La démonstration qui précède diffère de celle de Killing au moins pour la forme, et elle se présente d'une façon plus concise. Je rappellerai que dans le Mémoire cité de Cambridge j'ai été conduit (p. 251) à une démonstration assez détournée de ce même théorème (1).

La comparaison des deux expressions de (TU), où figure d'une part une

(1) Voir *Œuvres* de H. Poincaré, t. III, p. 207.

fonction dépendant de $\omega_p + \omega_q$ et d'autre part une somme dont chaque terme est le produit de deux fonctions dépendant respectivement de ω_p et ω_q, cette comparaison, dis-je, conduirait à d'autres conséquences sur lesquelles je n'insisterai pas.

La formule (3) montre que l'on a

$$t_i = \Sigma l_{ij} t_j,$$

les l étant des fonctions entières des v, et cette formule définit une substitution linéaire L qui appartient au groupe adjoint.

On peut se proposer inversement de *calculer les* v, *connaissant la substitution* L. Cela n'est pas toujours possible, cela ne peut se faire que si le groupe ne contient pas de transformations *distinguées*, c'est-à-dire permutables à toutes les transformations du groupe. S'il en est autrement, tout ce qu'on pourra faire, ce sera de calculer les b_{ik}.

Le calcul repose sur les principes suivants. Considérons l'équation

$$\Phi(e^{-\xi}) = \begin{vmatrix} l_{11} - e^{-\xi} & l_{12} & \dots & l_{1r} \\ l_{21} & l_{22} - e^{-\xi} & \dots & l_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{r1} & l_{r2} & \dots & l_{rr} - e^{-\xi} \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Soient Q_{ij} les mineurs de ce déterminant, de telle façon que

$$\begin{aligned} e^{-\xi} Q_{ij} - \Sigma l_{ki} Q_{kj} &= 0 \\ e^{-\xi} Q_{ji} - \Sigma l_{ki} Q_{ki} &= -\Phi(e^{-\xi}) \end{aligned} \qquad (i \neq j).$$

La puissance $\alpha^{\text{ième}}$ de la substitution linéaire L sera évidemment donnée par la formule

$$t_i' = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int e^{-\alpha\xi} \frac{e^{-\xi} d\xi}{\Phi(e^{-\xi})} \Sigma t_j Q_{ij}, \tag{6}$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour enveloppant une fois, et une seule, chacune des racines *proprement distinctes* de l'équation (5). Voici ce que j'entends par là. L'équation (5) admet une infinité de racines, mais toutes ces racines peuvent se déduire d'un nombre fini d'entre elles, car Φ ne change pas quand on augmente ξ d'un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$. Je ne considérerai donc pas comme proprement distinctes deux racines différant d'un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$ et je supposerai que notre contour est tracé de façon à ne pas envelopper à la fois ces deux racines.

La formule (6) est vraie quel que soit α, entier, fractionnaire, etc.; supposons

α infiniment petit. Alors la puissance $\alpha^{\text{ième}}$ de la substitution L se réduit à

$$t_i' = t_i - \alpha \Sigma b_{ji} t_j.$$

D'autre part, en vertu de la formule (6), elle se réduit à

$$t_i' = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int (1 - \alpha\xi) \frac{e^{-\xi} d\xi}{\Phi(e^{-\xi})} \Sigma t_j Q_{ij},$$

d'où

$$b_{ji} = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\xi e^{-\xi} d\xi}{\Phi(e^{-\xi})} Q_{ij}. \tag{7}$$

Cette formule nous montre d'abord que les b_{ji} ne sont pas toujours des fonctions uniformes des l. En effet, notre contour d'intégration doit envelopper une fois, et une seule, chacune des racines *proprement distinctes* de (5). Mais cela ne suffit pas pour déterminer ce contour et par conséquent les b_{ji}. Si, en effet, on remplace une des racines par cette racine augmentée d'un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$, on obtient un contour différent qui conduit à une valeur différente de b_{ji}.

Comment maintenant pourra-t-il arriver que les b_{ji} deviennent infinis, ou, plus généralement, cessent d'être des fonctions holomorphes des l?

Il est clair que, tant que le contour n'ira pas passer par un des points singuliers de la fonction sous le signe intégral, c'est-à-dire par une des racines de (5), les b resteront des fonctions holomorphes des l. Mais on pourra toujours maintenir ce contour à distance de ces racines, à moins que l'une de ces racines ne devienne infinie ou que deux de ces racines ne viennent à se confondre; et encore faut-il que les deux racines qui se confondent ainsi soient primitivement l'une à l'extérieur du contour, l'autre à l'intérieur. C'est alors, en effet, que le contour pris entre deux feux ne peut plus fuir devant les racines, et qu'en général les b cesseront d'être des fonctions holomorphes des l.

Cela peut encore s'énoncer autrement. Les racines de (5) ne sont autre chose que celles de l'équation de Killing augmentées d'un multiple arbitraire de $2\pi\sqrt{-1}$. Notre contour doit envelopper toutes les racines de l'équation de Killing et laisser en dehors les autres racines de l'équation (5). Alors, pour que les b restent des fonctions holomorphes, il suffit qu'une racine de l'équation de Killing (qui doit être intérieure au contour) ne se confonde pas avec une racine de (5) n'appartenant pas à l'équation de Killing (et qui doit rester extérieure au contour) : *Les b seront donc des fonctions holomorphes des l, à moins que deux des racines de l'équation de Killing ne diffèrent d'un*

multiple de $2\pi\sqrt{-1}$ *autre que zéro, ou que l'une de ces racines ne devienne infinie.*

Nous sommes donc conduits à distinguer parmi les substitutions linéaires finies du groupe adjoint certaines *substitutions singulières*, qui jouissent de cette propriété que deux racines de l'équation de Killing, sans être égales, diffèrent d'un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$.

En général, pour ces substitutions singulières, les b considérées comme fonctions des l seront infinies; c'est-à-dire que ces substitutions singulières ne seront pas une puissance d'une substitution infinitésimale du groupe. Mais il pourra se faire aussi que les b soient des fonctions indéterminées des l, de sorte que la substitution singulière sera une puissance d'une infinité de substitutions infinitésimales différentes.

La distinction entre les deux cas se rattache à la théorie des « Elementartheiler »; formons les équations différentielles linéaires

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \Sigma l_{ij}\xi_j.$$

On sait quelle est la forme de l'intégrale générale de ces équations; on a

$$\xi_i = \Sigma P(t)\, e^{\omega t},$$

ω étant l'une des racines de l'équation

$$\Phi(\omega) = 0$$

et $P(t)$ un polynome en t dont le degré est au plus égal à $\mu - 1$, si ω est une racine d'ordre μ.

Dans le cas d'une substitution singulière, deux racines de l'équation $\Phi(\omega) = 0$, ordinairement distinctes, viennent à se confondre. Soient ω_1 et ω_2 ces racines, μ_1 et μ_2 leur ordre, $P_1(t)$ et $P_2(t)$ les polynomes correspondants dont l'ordre est, au plus, $\mu_1 - 1$ et $\mu_2 - 1$.

Quand les racines se confondent, on a une racine ω_1 d'ordre $\mu_1 + \mu_2$, de sorte que les deux termes

$$P_1(t)\, e^{\omega_1 t} + P_2(t)\, e^{\omega_2 t}$$

seront remplacés par un terme unique

$$Q(t)\, e^{\omega_1 t},$$

où Q peut être de degré $\mu_1 + \mu_2 - 1$, mais peut être aussi de degré moindre.

Si le degré de Q ne dépasse pas celui de P_1 (ou celui de P_2, si P_2 est de degré plus grand que P_1), les b sont des fonctions indéterminées des l. Dans le cas contraire, les b deviennent infinis.

Nous devons aussi réserver le cas des substitutions que j'appellerai *singulières de la deuxième sorte*, c'est-à-dire de celles pour lesquelles une des racines ξ de l'équation de Killing devient infinie; pour cela il faut que l'une des racines $e^{-\xi}$ de l'équation (5) soit nulle ou infinie. Elle ne pourra devenir infinie si les l sont finis; il faut donc qu'elle devienne nulle, c'est-à-dire que le déterminant des l soit nul. C'est ce qui caractérise les substitutions singulières de la deuxième sorte.

Quelques exemples feront d'ailleurs mieux comprendre la nature des différentes sortes de substitutions singulières et justifieront ce que je viens de dire au sujet de la distinction des cas où les b sont, soit infinis, soit indéterminés.

Reprenons notre substitution L et son équation caractéristique

$$\Phi(S) = 0.$$

Si nous considérons les v comme les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace à $(r-1)$ dimensions, nous pouvons nous demander quels sont les points, ou les variétés planes à q dimensions qui ne sont pas altérés par la substitution L. Dans le cas général, où l'équation caractéristique a r racines distinctes, il y a r points qui sont conservés ainsi que les variétés planes à q dimensions définies par $(q+1)$ quelconques de ces r points. Soient $S_1, S_2, \ldots, S_r$ les r racines. A chacune de ces racines S_i correspondra un point M_i inaltéré par L. Si deux racines S_1 et S_2 viennent à se confondre, il arrivera en général que les deux points M_1 et M_2 tendront à se confondre et que la droite M_1M_2 tendra vers une droite D qui sera également inaltérée par L. En général le point $M_1 = M_2$ sera le seul point de D qui sera inaltéré; la substitution sera dite alors *parabolique*; mais il peut arriver aussi que tous les points de D soient inaltérés par L.

Étudions maintenant les b comme fonctions des l; ou, ce qui revient au même, étudions les puissances fractionnaires L^{α} de L. Soit ξ_i la racine de Killing qui correspond à S_i, de telle sorte que $S_i = e^{-\xi_i}$. Si l'équation caractéristique n'a pas de racine multiple, il n'y a pas de difficulté; il n'y en a pas non plus si S_1 devenant égal à S_2, ξ_1 est égal à ξ_2. Il reste donc à examiner le cas où ξ_1 est égal à ξ_2 plus un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$, de telle sorte que S_1 soit égal à S_2.

Si L est parabolique, on ne pourra pas former la substitution L^{α}. Si cette substitution existait en effet, aux deux racines distinctes ξ_1 et ξ_2 correspon-

draient deux points *distincts* M_1 et M_2 qui devraient être inaltérés par L^a et par conséquent par L. Or il n'en est pas ainsi puisque le seul point inaltéré de D est le point $M_1 = M_2$. Les équations qui donnent les b sont donc *impossibles*, c'est-à-dire que les b sont des fonctions qui deviennent infinies.

Dans le cas où tous les points de D sont inaltérés, il n'en est pas de même.

Choisissons, en effet, sur D deux points quelconques M_1 et M_2. Il y aura une substitution L^a, et une seule, qui conservera ces deux points inaltérés, les racines de Killing ayant pour valeurs ξ_1 et ξ_2; L sera une puissance de cette substitution. On pourra donc résoudre le problème d'une infinité de manières. C'est le *cas d'indétermination*.

Voyons encore le cas d'une racine triple $S_1 = S_2 = S_3$. Si trois racines S_1, S_2, S_3 tendent à se confondre, les trois points inaltérés M_1, M_2, M_3 tendent aussi en général à se confondre, les trois droites M_2M_3, M_3M_1, M_1M_2 tendent vers une limite commune D, le plan $M_1M_2M_3$ tend vers un plan P.

En général, le plan P étant invariant, la seule droite invariante de P est D, le seul point invariant de P est $M_1 = M_2 = M_3$. On verrait comme plus haut que nous sommes encore dans un cas d'impossibilité (sauf si les trois racines de Killing ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont égales, cas où il n'y a pas de singularité).

Il peut se faire aussi qu'il y ait dans P une droite D, et une seule, dont les points sont invariants, et sur D un point, et un seul, tel que toutes les droites de P qui passent par M soient invariantes.

Nous aurons alors impossibilité si les trois racines de Killing sont distinctes, indétermination si deux de ces racines sont égales, la troisième en différant d'un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$; et enfin il n'y aura pas de singularité si les trois racines sont égales.

Il peut arriver enfin que tous les points et toutes les droites de P soient invariants; on retombe alors sur le cas d'indétermination.

III. — Formation du groupe paramétrique.

J'avais donné en outre une seconde formule d'une forme analogue mais entièrement nouvelle. Supposons que l'on ait

$$e^{V} e^{T} = e^{V+dV},$$

$$V = \Sigma v_i X_i, \qquad T = \Sigma t_i X_i, \qquad dV = \Sigma dv_i X_i,$$

les t étant *infiniment petits*. Nous pourrons écrire

$$(1) \qquad t_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int d\xi \, \frac{1-e^{-\xi}}{\xi} \, \frac{\Sigma \, dv_j P_{ij}}{F(\xi)};$$

et d'autre part

$$(2) \qquad dv_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int d\xi \, \frac{\xi}{1-e^{-\xi}} \, \frac{\Sigma \, t_j P_{ij}}{F(\xi)}.$$

Les intégrales doivent être prises le long d'un contour enveloppant toutes les racines de l'équation de Killing $F(\xi) = 0$; pour l'intégrale (2), le contour est assujetti en outre à ne pas envelopper les racines de $1 - e^{-\xi} = 0$, la racine zéro exceptée.

La formule (2) nous apprend en outre que les substitutions du groupe G, ou plutôt de son *groupe paramétrique*, peuvent être mises sous la forme

$$(3) \qquad X_i(f) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\xi \, d\xi}{(1-e^{-\xi}) F(\xi)} \, \Sigma P_{ji} \frac{\partial f}{\partial v_j}.$$

Que signifient ces trois formules et d'abord la formule (1)?

Les t sont des fonctions linéaires des dv et les coefficients sont de la forme suivante :

$$\Sigma R_p(\omega_p) + \Sigma e^{-\omega_p} S_p(\omega_p),$$

où $R_p(\omega_p)$ et $S_p(\omega_p)$ sont des fonctions rationnelles de ω_p et des v. Le dénominateur commun de R_p et de S_p est un polynome homogène de degré r, divisible par ω_p^{μ}, si ω_p est une racine d'ordre μ. Le numérateur de K_p est un polynome homogène de degré $(r-1)$; celui de S_p est un polynome non homogène de degré $(r-1)$ dont les termes du degré le moins élevé sont de degré $(r-\mu)$.

Il y a exception pour la racine $\omega_p = 0$; pour cette racine les deux termes de la formule peuvent être réunis en un seul; le dénominateur est un polynome homogène de degré $(r-\mu)$ par rapport aux v, si zéro est une racine d'ordre μ; le numérateur est un polynome non homogène de degré $(r-1)$, dont les termes du degré le moins élevé sont d'ordre $(r-\mu)$.

Que nous apprend maintenant la formule (2)?

Elle montre que les dv sont des fonctions linéaires des t. Elle nous apprend aussi quelle est la forme des coefficients de ces fonctions linéaires qui sont en même temps les coefficients des $\frac{\partial f}{\partial v_j}$ dans les expressions des $X_i(f)$ [*voir* formule (3)].

Soit

$$D_0(\omega_p) = \frac{1}{1 - e^{-\omega_p}}$$

et $D_q(\omega_p)$ la $q^{\text{ième}}$ dérivée de $D_0(\omega_p)$ par rapport à ω_p; nos coefficients seront de la forme

$$\Sigma\left[D_0(\omega_p)Q_p^1 + D_1(\omega_p)Q_p^2 + \ldots + D_{\mu-1}(\omega_p)Q_p^\mu\right],$$

$Q_p^1, Q_p^2, \ldots, Q_p^\mu$ étant des fonctions rationnelles homogènes des v et de ω_p dont le dénominateur commun est d'ordre $(r-\mu)$ et dont les numérateurs sont d'ordre

$$r-\mu+1, \quad r-\mu+2, \quad \ldots, \quad r.$$

Pour la racine $\omega_p = 0$, la même formule pourra être conservée, seulement les $D_q(\omega_p)$ devront être remplacés par l'unité et les degrés des numérateurs des Q devront être abaissés d'une unité.

Nos coefficients seront donc des termes de l'une des deux formes suivantes :

1° Une fonction rationnelle des v (provenant de la racine $\omega_p = 0$).

2° Une puissance négative de $(1 - e^{-\omega_p})$ multipliée par une fonction rationnelle des v et de ω_p.

Exemple.

Un exemple simple fera d'ailleurs mieux comprendre la portée de cette formule (2).

Considérons le groupe des rotations d'un corps solide autour d'un point fixe.

Soit une rotation d'un angle 2θ autour de l'axe de cosinus directeurs α, β, γ; nous pouvons la représenter, en employant la notation des quaternions, par les quatre paramètres

$$\lambda = \cos\theta, \quad \mu = \alpha\sin\theta, \quad \nu = \beta\sin\theta, \quad \rho = \gamma\sin\theta.$$

Mais nous pouvons également la représenter par les trois paramètres

$$v_1 = x\theta, \quad v_2 = y\theta, \quad v_3 = z\theta.$$

Si alors t_1, t_2, t_3 représentent les paramètres d'une rotation infiniment petite, si λ, μ, ν, ρ ou v_1, v_2, v_3 définissent, non seulement une rotation finie, mais l'orientation où cette rotation finie amène le corps solide en partant de son orientation initiale, cette orientation variera si le corps subit la rotation infiniment petite t_1, t_2, t_3, de sorte que les λ et les v subiront des accroissements $d\lambda$ et dv. La théorie des quaternions nous donne (1)

$$\begin{aligned} d\lambda &= -\mu t_1 - \nu t_2 - \rho t_3, \\ d\mu &= \lambda t_1 - \rho t_2 + \nu t_3, \\ d\nu &= \rho t_1 + \lambda t_2 - \mu t_3, \\ d\rho &= -\nu t_1 + \mu t_2 + \lambda t_3. \end{aligned}$$

On en déduit, par exemple,

$$dv_1 = \theta\, dx + x\, d\theta = \frac{\theta\, d\mu}{\sin\theta} + \frac{\theta x\cos\theta\, d\lambda}{\sin^2\theta} - \frac{x\, d\lambda}{\sin\theta},$$

d'où

$$\begin{aligned} dv_1 = {} & t_1\left[\theta\cot\theta(1-x^2) + x^2\right] \\ & + t_2\left[-v_3 + xy(1-\theta\cot\theta)\right] \\ & + t_3\left[v_2 + xz(1-\theta\cot\theta)\right]. \end{aligned}$$

Comparons ce résultat avec ce que donne la formule (2). Nous aurons

$$\begin{aligned} X_1 &= -\mu\frac{df}{d\lambda} + \lambda\frac{df}{d\mu} + \rho\frac{df}{d\nu} - \nu\frac{df}{d\rho}, \\ X_2 &= -\nu\frac{df}{d\lambda} - \rho\frac{df}{d\mu} + \lambda\frac{df}{d\nu} + \mu\frac{df}{d\rho}, \\ X_3 &= -\rho\frac{df}{d\lambda} + \nu\frac{df}{d\mu} - \mu\frac{df}{d\nu} + \lambda\frac{df}{d\rho}; \end{aligned}$$

d'où

$$(X_2X_3) = 2X_1, \quad (X_3X_1) = 2X_2, \quad (X_1X_2) = 2X_3.$$

L'équation de Killing s'écrit

$$F(\xi) = \begin{vmatrix} -\xi & -2v_3 & 2v_2 \\ 2v_3 & -\xi & -2v_1 \\ -2v_2 & 2v_1 & -\xi \end{vmatrix} = 0;$$

elle admet trois racines, qui sont 0 et $\pm 2i\theta$.

On a

$$\begin{aligned} F(\xi) &= -\xi(\xi^2 + 4\theta^2), \\ P_{11} &= \xi^2 - 4v_1^2, \\ P_{12} &= 4v_1v_2 - 2\xi v_3, \\ P_{13} &= 4v_1v_3 + 2\xi v_2; \end{aligned}$$

et la formule (2) donne

$$dv_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{\xi\, d\xi}{1-e^{-\xi}}\,\frac{t_1(\xi^2 + 4v_1^2) + t_2(4v_1v_2 - 2\xi v_3) + t_3(4v_1v_3 + 2\xi v_2)}{-\xi(\xi^2 + 4\theta^2)}.$$

Les résidus sont :

(1) *Voir aux Notes.*

1° Pour la racine 0,

$$\alpha^2 t_1 + \alpha\beta t_2 + \alpha\gamma t_3;$$

2° Pour la racine $-2i\theta$,

$$-t_1\frac{\frac{1}{4}(v_1^2-0^2)}{\frac{1}{4}i\theta(1-e^{2i\theta})}-t_2\frac{\frac{1}{4}(v_1v_2+iv_3\theta)}{\frac{1}{4}i\theta(1-e^{2i\theta})}-t_3\frac{\frac{1}{4}(v_1v_3-iv_2\theta)}{\frac{1}{4}i\theta(1-e^{2i\theta})};$$

3° Pour la racine $2i\theta$,

$$-t_1\frac{\frac{1}{4}(v_1^2-0^2)}{\frac{1}{4}i\theta(e^{-2i\theta}-1)}-t_2\frac{\frac{1}{4}(v_1v_3-iv_2\theta)}{\frac{1}{4}i\theta(e^{-2i\theta}-1)}-t_3\frac{\frac{1}{4}(v_1v_3+iv_2\theta)}{\frac{1}{4}i\theta(e^{-2i\theta}-1)}.$$

En faisant la somme, on trouve :

1° Pour le coefficient de t_1,

$$\alpha^2+\frac{\frac{1}{4}(v_1^2-0^2)}{-\frac{1}{4}i\theta}\frac{e^{-2i\theta}+1}{e^{-2i\theta}-1}=\alpha^2-\theta\cot\theta(1-\alpha^2);$$

2° Pour le coefficient de t_2,

$$\alpha\beta+\frac{\frac{1}{4}v_1v_2}{-\frac{1}{4}i\theta}\frac{(e^{-2i\theta}+1)}{(e^{-2i\theta}-1)}-v_3=\alpha\beta-\theta\cot\theta.\alpha\beta-v_3;$$

3° Pour le coefficient de t_3,

$$\alpha\gamma+\frac{\frac{1}{4}v_1v_3}{-\frac{1}{4}i\theta}\frac{(e^{-2i\theta}+1)}{(e^{-2i\theta}-1)}+v_2=\alpha\gamma-\theta\cot\theta.\alpha\gamma+v_2.$$

On retrouve donc bien par la formule (2) les résultats auxquels conduisait la théorie connue des quaternions.

Si nous avons, comme nous l'avons supposé plus haut,

$$e^{\mathrm{V}}e^{\mathrm{T}}=e^{\mathrm{V}+d\mathrm{V}}$$

et si nous supposons

$$\mathrm{T}=\varepsilon\mathrm{V},$$

ε étant une constante infiniment petite, les deux substitutions V et T seront permutables, de sorte qu'on aura aussi

$$d\mathrm{V}=\varepsilon\mathrm{V}.$$

Si donc les équations linéaires qui lient les dv aux t s'écrivent

$$dv_i=\Sigma\mathrm{V}_{ki}t_k,$$

il viendra

$$v_i=\Sigma\mathrm{V}_{ki}v_k. \tag{4}$$

Ce sont là des relations importantes auxquelles les fonctions V_{ki} devront satisfaire identiquement et qu'il est d'ailleurs aisé de vérifier sur l'exemple simple que nous venons de traiter.

Relation entre le groupe paramétrique et le groupe adjoint.

Dans le paragraphe précédent nous avons donné les équations du groupe adjoint; dans celui-ci nous donnons celles du groupe paramétrique. Il est aisé de voir quelle relation il y a entre ces deux groupes.

Soient e^{V}, e^{T}, e^{U} trois transformations du groupe G : la première finie, les deux autres infinitésimales. Posons

$$e^{\mathrm{V}}e^{\mathrm{T}}=e^{\mathrm{V}+d\mathrm{V}};$$

la transformation qui change les v_i en v_i+dv_i appartient au groupe paramétrique, je continue à l'appeler e^{T}; c'est d'ailleurs la transformation

$$\Sigma t_k\mathrm{X}_k(f).$$

où les $\mathrm{X}_k(f)$ sont définies par la formule (3).

Posons encore

$$e^{-\mathrm{U}}\mathrm{V}\,e^{\mathrm{U}}=\mathrm{V}'$$

$$(\mathrm{V}=\Sigma v_i\mathrm{X}_i,\ \mathrm{V}'=\Sigma v_i'\mathrm{X}_i).$$

La transformation qui change les v_i en v_i' appartient au groupe adjoint; je la représenterai par e^{U_v} pour ne pas la confondre avec la transformation correspondante e^{U} du groupe paramétrique. Soit ensuite

$$\mathrm{T}=e^{-\mathrm{U}}\mathrm{T}\,e^{\mathrm{U}},\qquad d\mathrm{V}'=e^{-\mathrm{U}}d\mathrm{V}\,e^{\mathrm{U}};$$

je vois que la même transformation linéaire e^{U_v}, qui change les v_i en v_i', change les t_i en t_i' et les dv_i en dv_i'; et par conséquent les v_i+dv_i en $v_i'+dv_i'$.

On aura aussi

$$e^{-\mathrm{U}}e^{\mathrm{T}}e^{\mathrm{U}}=e^{\mathrm{T}},\qquad e^{-\mathrm{U}}e^{\mathrm{V}+d\mathrm{V}}e^{\mathrm{U}}=e^{\mathrm{V}'+d\mathrm{V}'},\qquad e^{-\mathrm{U}}e^{\mathrm{V}}e^{\mathrm{U}}=e^{\mathrm{V}'},$$

d'où

$$e^{\mathrm{V}'+d\mathrm{V}'}=e^{-\mathrm{U}}e^{\mathrm{V}+d\mathrm{V}}e^{\mathrm{U}}=e^{-\mathrm{U}}e^{\mathrm{V}}e^{\mathrm{T}}e^{\mathrm{U}}=e^{-\mathrm{U}}e^{\mathrm{V}}e^{\mathrm{U}}e^{-\mathrm{U}}e^{\mathrm{T}}e^{\mathrm{U}}=e^{\mathrm{V}'}e^{\mathrm{T}};$$

c'est-à-dire que la transformation e^{T}, qui appartient au groupe paramétrique, change les v_i' en $v_i'+dv_i'$.

Il est donc indifférent de faire subir aux v_i, d'abord la transformation e^{U_v} qui les change en v_i', puis la transformation e^{T} qui change les v_i' en $v_i'+dv_i'$; ou de faire d'abord la transformation e^{T} qui change les v_i en v_i+dv_i, puis la trans-

formation e^{U_0} qui change les $v_i + dv_i$ en $v'_i + dv'_i$; ce qui s'écrit

$$e^{U_0} e^{T} = e^{T} e^{U_0},$$

ou

$$e^{T'} = e^{-U_0} e^{T} e^{U_0},$$

ou, puisque les substitutions sont infinitésimales,

$$T' = T + (TU_0).$$

D'autre part, l'équation

$$e^{T'} = e^{-U} e^{T} e^{U}$$

nous donne

$$T' = T + (TU),$$

d'où

$$(TU_0) = (TU). \tag{5}$$

Pour l'intelligence de cette formule (5) il importe de se rappeler que

$$T = \Sigma t_k X_k(f) \quad \text{et} \quad U = \Sigma u_k X_k(f),$$

où les X_k sont donnés par la formule (3), tandis que les t_k et les u_k sont des coefficients constants. Quant à U_0 il est de la forme

$$U_0 = \Sigma u_k Y_k(f),$$

où

$$Y_k(f) = \Sigma Z_{ki} \frac{\partial f}{\partial v_i},$$

les Z_{ki} étant des fonctions linéaires des v.

C'est ce qu'on peut encore exprimer de plusieurs autres manières.

Reprenons les équations

$$dv_i = \Sigma V_{ki} t_k.$$

Faisons subir aux v, aux t et au dv une même substitution linéaire appartenant au groupe adjoint; soient v', t', dv' ce que deviennent les v, les t et les dv par suite de cette substitution. Soit V'_{ki} ce que devient V_{ki} quand on y change les v en v'; des équations proposées on pourra déduire alors

$$dv'_i = \Sigma V'_{ki} t'_k.$$

Ou bien encore, considérons l'expression

$$\Sigma u_i t_k V_{ki}.$$

C'est une forme bilinéaire par rapport aux u et aux t dont les coefficients sont des fonctions des v. Cette forme ne sera pas altérée quand on fera subir aux v et aux t une substitution linéaire du groupe adjoint, et aux u la substitution linéaire contragrédiente.

La formule (5) peut aussi s'interpréter comme il suit : *L'ensemble des transformations du groupe adjoint et du groupe paramétrique engendre aussi un groupe* Γ, *et dans ce groupe* Γ *le groupe paramétrique est un sous-groupe invariant*, et en effet (TU) fait aussi partie de ce sous-groupe.

Nos formules (1), (2) et (3) nous suggèrent encore différentes remarques qui nous seront utiles dans la suite.

Supposons que notre groupe G admette un certain nombre de transformations infinitésimales distinguées, c'est-à-dire permutables à toutes les transformations du groupe. Soient X_{m+1}, X_{m+2}, ..., X_r ces transformations que j'appellerai pour abréger les X'', tandis que les autres transformations X_1, X_2, ..., X_m s'appelleront les X'. Comme au dernier paragraphe du Mémoire cité de Cambridge, j'appellerai les t' et les v' ceux des coefficients t et v qui affectent les X', et les t'' et les v'' ceux qui affectent les X'', et je poserai par exemple

$$V = V' + V'', \qquad V' = \Sigma v' X', \qquad V'' = \Sigma v'' X''.$$

Si nous envisageons alors le déterminant de Killing nous verrons que les $(r-m)$ dernières colonnes sont entièrement composées de zéros sauf les termes de la diagonale principale qui se réduisent à $-\xi$. Il en résulte que

$$\frac{P_{ij}}{F(\xi)} = 0 \qquad (i > m,\ i \neq j),$$

$$\frac{P_{ii}}{F(\xi)} = \frac{1}{\xi} \qquad (i > m).$$

La formule (2) nous donne alors, pour $i > m$,

$$dv_i = t_i + \Sigma \lambda_k t_k \qquad (k \leq m).$$

C'est d'ailleurs ce qui est presque évident; car V'' et T'' étant permutables à toutes les substitutions du groupe, on a (pour $T' = 0$)

$$e^{V+dV} = e^{V} e^{T} = e^{V} e^{T''} = e^{V+T''},$$

d'où

$$dV = T'', \qquad dV' = 0, \qquad dV'' = T'';$$

ce qui équivaut à la formule que nous venons de trouver.

Cela posé, je reprends la formule

$$e^{V+dV} = e^{V} e^{T}$$

et je dis que *les dv ne peuvent jamais s'annuler tous à la fois*. Si cela arrivait en effet, on aurait $dV = 0$, d'où

$$e^{V} = e^{V} e^{T},$$

et si U est une substitution quelconque du groupe

$$e^{-V}\,U\,e^{V} = e^{-T}\,e^{-V}\,U\,e^{V}\,e^{T},$$

en posant

$$e^{-V}\,U\,e^{V} = U',$$

cela devient

$$U' = e^{-T}\,U'\,e^{T}.$$

Mais U′ est une substitution quelconque du groupe. En effet, quelle que soit U′, nous pourrons toujours poser

$$U = e^{V}\,U'\,e^{-V},$$

puisque U est arbitraire. La formule précédente signifie donc que T est une transformation distinguée, ou, avec nos notations, que $T = T'$. Mais on ne peut avoir (à moins que T ne se réduise à zéro)

$$T = T', \qquad dV = 0;$$

car nous avons vu plus haut que pour $T = T'$ on a

$$dV = T''.$$

La proposition est donc démontrée.

Soit maintenant

$$e^{U}\,e^{W} = e^{V},$$

$$U = \Sigma u_i X_i, \qquad W = \Sigma w_i X_i, \qquad V = \Sigma v_i X_i.$$

On peut se demander *dans quels cas les v cessent d'être des fonctions holomorphes des u et des w.*

A trois transformations e^{U}, e^{W}, e^{V} correspondent trois substitutions linéaires du groupe adjoint; soient A_0, A_1, L ces trois substitutions. Soient λ^0_{ij}, λ^1_{ij}, l_{ij} leurs coefficients. Il est clair que L sera la résultante de A_0 et A_1 et par conséquent que les l sont des polynomes du premier degré tant par rapport aux λ^0 que par rapport aux λ^1.

La formule (3) du paragraphe II nous apprend que les λ^0 et les λ^1 sont des fonctions entières des u et des w; il en est donc de même des l. D'autre part, la formule (7) du paragraphe II et la discussion de cette formule qui termine ce même paragraphe nous apprend que les b_{ik} ne cessent d'être des fonctions holomorphes des l que quand L est une substitution singulière. Si donc cette dernière circonstance ne se présente pas, les b_{ik} sont des fonctions holomorphes des u et des w.

Distinguons maintenant parmi les v ce que nous venons d'appeler les v' et

les v''. Les b_{ik}, comme je viens de l'expliquer, ne dépendent que des v' et pas des v'' : ce sont d'ailleurs des fonctions linéaires des v'. La connaissance des b_{ik} en fonctions des u et des w nous fournit donc un certain nombre d'équations linéaires entre les v'. Il reste à savoir si ces équations suffiront pour déterminer les v', c'est-à-dire si les déterminants formés à l'aide de ces équations ne seront pas tous nuls.

Si cela arrivait c'est que les b_{ik} reprendraient les mêmes valeurs pour deux systèmes différents de valeurs des v', c'est-à-dire qu'il existerait deux transformations

$$V_1 = V'_1 + V''_1, \qquad V_2 = V'_2 + V''_2$$

(sans que V'_1 soit égal à V'_2) et telles que l'on ait, quel que soit T,

$$(V_1\,T) = (V_2\,T);$$

et comme

$$(V''_1\,T) = (V''_2\,T) = 0,$$

on aurait

$$(V'_1\,T) = (V'_2\,T),$$

ou

$$(V'_1 - V'_2,\ T) = 0;$$

c'est-à-dire que $V'_1 - V'_2$ serait une transformation distinguée; ce qui est impossible, puisque V_1 et V'_2 sont supposés correspondre à des valeurs différentes des v'.

Donc nos déterminants ne sont pas tous nuls; donc de nos équations linéaires nous tirerons les v' en fonctions holomorphes des u et des w.

J'ajouterai que les λ^0 et les λ^1, et par conséquent les v' dépendent seulement des u' et des w', et pas des u'' et des w''.

Passons maintenant aux v'' (1); nous avons, d'après la formule (1),

$$dw_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int d\xi\, \frac{1-e^{-\xi}}{\xi} \sum \frac{dv_j\,P_{ij}}{F(\xi)}$$

ou, en posant

$$\frac{1-e^{-\xi}}{\xi} = 1 + \xi\,\psi(\xi),$$

$$dw_i - dv_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \xi\, d\xi\, \psi(\xi) \sum \frac{dv_j\,P_{ij}}{F(\xi)},$$

(1) H. Poincaré a signalé plus tard [*Nouvelles remarques sur les groupes continus* (*Rendiconti...*, t. 25, 1908, et *Œuvres*, t. 3)] que le premier membre dw_i doit être remplacé par l'expression analogue à celle qui figure au second membre, mais où les v_i sont remplacés par les w_i. Il prouve que la conclusion fondamentale, en italiques au bas de la page suivante, n'est pas altérée (J. D.).

Je suppose que les indices 1, 2, ..., m correspondent aux transformations non distinguées, c'est-à-dire aux v', aux u' et aux w', et que les indices $m+1$, $m+2$, ..., r correspondent aux transformations distinguées, c'est-à-dire aux v'', aux u'' et aux w''. Soit $i > m$; alors, si $j > m$, le rapport

$$\frac{P_{ij}}{F(\xi)}$$

sera égal à zéro ou à $\frac{1}{\xi}$, suivant que i est différent de j ou égal à j. En tout cas le terme correspondant de l'intégrale est nul, la fonction sous le signe intégral étant une fonction entière de ξ.

Nous pourrons donc ne conserver dans le second membre que les termes en dv_j où $j < m+1$, c'est-à-dire les termes qui dépendent des dv', et écrire

$$(6) \qquad du_i'' - dv_i'' = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \xi\, d\xi\, \psi(\xi) \sum \frac{dv_j' P_{ij}}{F(\xi)} \qquad (i > m, j < m+1).$$

Cette formule est tout à fait équivalente à la dernière formule de la page 254 du Mémoire cité de Cambrige.

Le second membre ne dépend que des v'; ce doit être une différentielle exacte, soit $d\Theta_i(v_1', v_2', \ldots, v_m')$.

L'équation (6) nous donne alors

$$v_i'' = w_i'' - \Theta_i(v_1', v_2', \ldots, v_m') + \text{const.}$$

Pour $w = 0$ on doit avoir $v = u$, ce qui détermine la constante, et il vient

$$(7) \qquad v_i'' = w_i'' + u_i'' - \Theta_i(v_1', v_2', \ldots, v_m') + \Theta_i(u_1', u_2', \ldots, u_m').$$

Comment les v'' pourraient-ils cesser d'être fonctions holomorphes des u et des w?

J'observe que $\xi\psi(\xi)$ est une fonction entière de ξ. Donc, en vertu d'une remarque faite à la page 238 du Mémoire cité de Cambridge (1), les dérivées

$$\frac{\partial\Theta_i}{\partial v_j'}$$

seront des fonctions entières des v'. Il en sera donc de même des Θ_i. Donc les v'' ne pourront cesser d'être des fonctions holomorphes que si les v' cessent eux-mêmes de l'être, c'est-à-dire si la substitution L est singulière.

En résumé : *les v seront des fonctions holomorphes des u et des w, à moins que la substitution* L *ne soit singulière.*

(1) Ce tome, page 194.

Quand je dis singulière je veux dire singulière de la première sorte; le cas de ce que j'ai appelé, à la fin du paragraphe précédent, substitutions singulières de la deuxième sorte, ne se présentera jamais. Et en effet ce serait le cas où le déterminant de la substitution L serait nul. Or cela n'arrivera pas puisque c'est le produit des déterminants des deux substitutions composantes A_0 et A_1, qui sont tous deux différents de zéro.

IV. — Groupes de rang zéro.

Il y a un cas où les formules se simplifient considérablement, c'est celui où l'équation de Killing a toutes ses racines nulles, c'est-à-dire celui où le groupe G est de rang nul. Dans ce cas, $F(\xi)$ se réduisant à $(-\xi)^r$ l'intégrale (3) du paragraphe II prend la forme suivante : nous avons sous le signe intégral, au numérateur $e^{-\xi}$ multiplié par un polynome entier par rapport aux v et à ξ, et au dénominateur ξ^r.

Il en résulte que les coefficients de la substitution linéaire du groupe adjoint qui change T en T$'$ seront des polynomes entiers par rapport aux v.

Les formules (1), (2) et (3) du paragraphe III subissent des simplifications analogues. Les fonctions sous le signe intégral se réduisent en effet à des polynomes entiers par rapport aux v et à ξ, divisés par ξ^r et multipliés par l'une des deux fonctions

$$\frac{1-e^{-\xi}}{\xi}, \qquad \frac{\xi}{1-e^{-\xi}}.$$

Il résulte de là que les t sont des fonctions linéaires des dv et les dv des fonctions linéaires des t, et que les coefficients de ces deux substitutions linéaires inverses sont des polynomes entiers par rapport aux v.

On en conclut immédiatement que le déterminant de l'une ou de l'autre de ces substitutions linéaires se réduit à une constante. En effet, ce déterminant est un polynome entier par rapport aux v; et comme les coefficients de la substitution inverse sont aussi des polynomes, il faut que ce déterminant divise tous ses mineurs du premier ordre. Il divisera donc aussi toutes ses dérivées partielles du premier ordre; et cela n'est possible que s'il se réduit à une constante.

La formule (3) nous apprend donc que l'on a

$$X_i(f) = \Sigma\, W_{ik} \frac{df}{dv_k'},$$

les W_{ik} étant des polynomes entiers par rapport aux v.

Ces polynomes jouissent d'une propriété intéressante; si en effet on a

$$t_i = \varepsilon v_i,$$

ε étant une constante infiniment petite, les deux transformations T et V sont permutables, de sorte que l'on a

$$dv_i = t_i = \varepsilon v_i.$$

Or

$$dv_i = \Sigma W_{ki} t_k.$$

Donc on a identiquement

$$\Sigma_k W_{ki} v_k = v_i. \tag{1}$$

D'autre part, les transformations X_i doivent engendrer un groupe. Donc les crochets $(X_i X_j)$ doivent être des combinaisons linéaires des X_i.

Soit m le plus grand degré des polynomes W_{ki}, et soit W_{ki}^m l'ensemble des termes de degré m de W_{ki}, et en général W_{ki}^q l'ensemble des termes de degré q.

Soit

$$X_i^m(f) = \Sigma W_{ik}^m \frac{\partial f}{\partial v_k}. \tag{2}$$

Considérons le crochet $(X_i^m X_j^m)$; ce crochet représentera l'ensemble des termes de degré $2m-1$ dans le crochet $(X_i X_j)$.

Supposons d'abord $m > 1$. Le crochet $(X_i X_j)$, qui est une combinaison des X_s, ne contient pas de terme de degré supérieur à m, et comme $2m-1 > m$ il faut que

$$(X_i^m X_j^m) = 0.$$

Cela veut dire que *les transformations* X_i^m *engendrent un groupe* G^m *dont toutes les transformations sont permutables*.

D'autre part, la relation (1) nous donne

$$\Sigma W_{ki}^m v_k = 0. \tag{1 bis}$$

Cela veut dire que la transformation

$$\Sigma t_k X_k^m$$

du groupe G^m n'altère pas le point

$$v_1 = t_1, \quad v_2 = t_2, \quad \ldots, \quad v_r = t_r,$$

ni d'ailleurs aucun des points

$$v_1 = \lambda t_1, \quad v_2 = \lambda t_2, \quad \ldots, \quad v_r = \lambda t_r,$$

quelle que soit la constante λ.

Cela nous avertit déjà que le groupe G^m est intransitif. En effet, un point quelconque étant inaltéré par ∞^1 transformations, les ∞^r transformations du groupe ne pourront transformer ce point qu'au plus en ∞^{r-1} points différents.

Avant d'aller plus loin, signalons quelques-unes des propriétés du groupe G^m et des fonctions W_{ki}^m.

Nous avons vu au paragraphe précédent que si

$$T = \Sigma t_k X_k(f)$$

est une substitution de notre groupe G; si

$$U = \Sigma U_k X_k(f)$$

est une autre substitution de ce même groupe, et U_0 la substitution correspondante du groupe adjoint, on a la formule

$$(TU_0) = (TU).$$

Comme (TU) appartient aussi au groupe G, nous pouvons poser

$$(TU) = T' = \Sigma t'_k X_k(f).$$

Nous poserons

$$T^q = \Sigma t_k X_k^q, \qquad T'^q = \Sigma t'_k X_k^q,$$

en définissant comme plus haut les fonctions W_{ki}^q et les symboles X_i^q. On aura alors

$$(T^m U_0) + (T^{m-1} U_0) + \ldots + (T^1 U_0) + (T^0 U_0) = T'^m + T'^{m-1} + \ldots + T'^1 + T'^0.$$

Or T^q et T'^q sont homogènes de degré q par rapport aux v, U_0 (comme appartenant au groupe adjoint dont toutes les substitutions sont linéaires) est homogène de degré 0 par rapport aux v, et par conséquent $(T^q U_0)$ est homogène de degré q, de sorte qu'on aura

$$(T^q U_0) = T'^q$$

et en particulier

$$(T^m U_0) = T'^m.$$

Cela signifie que *le groupe* G^m *est permutable aux substitutions du groupe adjoint*.

Cherchons maintenant les *invariants* du groupe G^m.

La condition nécessaire et suffisante pour que le point $v_1, v_2, \ldots, v_r$ ne soit pas altéré par la substitution T^m, c'est que l'on ait

$$\Sigma W_{ki}^m t_k = 0. \tag{3}$$

Ce sont des équations linéaires par rapport aux t, et le déterminant de ces

équations est nul comme le prouvent les relations (1 *bis*). Ces équations (3) déterminent les points qui ne sont pas altérés par la substitution T^m. Je remarque que *l'ensemble* de ces points ne sera altéré par aucune des transformations de G^m, je veux dire que ces transformations transformeront ces points les uns dans les autres. Si, en effet, M est un point inaltéré par T^m, et si e^u est une substitution quelconque du groupe G^m, qui change M en M_1, le point M_1 sera inaltéré par la transformation $e^{-u}T^m e^u$, c'est-à-dire par T^m puisque les substitutions du groupe G^m sont permutables. Donc e^u change le point M inaltéré par T^m en un autre point inaltéré par T^m. C. Q. F. D.

Revenons aux équations (3). J'ai dit que le déterminant était nul. Supposons que les mineurs des $k-1$ premiers ordres soient tous nuls également, mais que ceux du $k^{ième}$ ordre ne soient pas tous nuls à la fois. Conservons alors $r-h$ des équations (3); les autres en seront des conséquences; et adjoignons-y $h-1$ équations linéaires quelconques à coefficients constants entre les t. Nous aurons ainsi $r-1$ équations, qui détermineront les rapports des t_k d'une manière et d'une seule, et la substitution

$$T^m = \Sigma t_k X_k^m$$

n'altérera pas le point $v_1, v_2, \ldots, v_r$; cette substitution et ses puissances seront d'ailleurs les seules substitutions du groupe G^m qui n'altèrent pas ce point et qui satisfassent à nos $h-1$ équations linéaires à coefficients constants.

De nos équations nous tirerons les rapports des t_k en fonction des v. Si une substitution quelconque du groupe G^m change les v en v', les transformations qui n'altèrent pas le point v'_i devront être les mêmes que celles qui n'altèrent pas le point v_i. Donc nos $r-1$ équations doivent encore donner les mêmes valeurs des rapports des t_k quand on y remplacera les v par les v'. En d'autres termes, les rapports des t_k tirés de nos équations devront être des invariants du groupe G^m.

Nous pouvons, pour former nos $h-1$ équations supplémentaires à coefficients constants, nous borner à égaler à zéro $h-1$ des paramètres t_k. Dans ce cas les autres t_k sont entre eux comme des mineurs d'ordre h de notre déterminant.

En résumé : *les rapports des mineurs d'ordre h du déterminant des équations* (3) *sont des invariants du groupe* G^m.

Le nombre des invariants distincts du groupe G^m doit être précisément h; car notre groupe contient ∞^r transformations. Chacun des ∞^r points $v_1, v_2, \ldots,$

v_r de l'espace demeure inaltéré par ∞^h transformations; il peut donc être changé en ∞^{r-h} autres points de l'espace. Il y a donc h invariants, et h seulement.

J'ai dit plus haut que le déterminant des W_{ik} se réduit à une constante. Il est aisé de voir d'abord que cette constante est égale à 1. On a en effet (1) :

$$\Sigma W_{ki} v_k = v_i$$

et par conséquent, en égalant dans les deux membres les termes du premier degré,

$$\Sigma W_{ki}^0 v_k = v_i.$$

d'où l'on déduit :

$$W_{ii}^0 = 1, \qquad W_{ki}^0 = 0 \qquad (i \neq k),$$

ce qui montre que quand les v s'annulent, c'est-à-dire quand les W_{ik} se réduisent aux W_{ik}^0, le déterminant se réduit à 1. Comme ce déterminant est une constante, il est toujours égal à 1.

Voyons quels sont ses mineurs. Si la formule (1) du paragraphe précédent s'écrit :

$$t_i = \Sigma U_{ki} dv_k,$$

nous avons vu que les U_{ki} sont des polynomes et, le déterminant étant égal à 1, ces polynomes ne sont autre chose que les mineurs en question.

Comparons maintenant les formules (1) et (2) du paragraphe précédent. Nous verrons que les polynomes W_{ki} et U_{ki} sont les uns et les autres les résidus d'une certaine intégrale et que les quantités sous le signe intégral diffèrent seulement par un certain facteur, qui est

$$\frac{1-e^{-\xi}}{\xi}$$

pour l'une des intégrales et

$$\frac{\xi}{1-e^{-\xi}}$$

pour l'autre. Développons donc ces deux facteurs :

$$\frac{1-e^{-\xi}}{\xi} = \Sigma A_m \xi^m, \qquad \frac{\xi}{1-e^{-\xi}} = \Sigma B_m \xi^m.$$

Soit

$$F(\xi) = \xi^r, \qquad P_{ij} = \Sigma P_{ij}^m \xi^{r-1-m};$$

P_{ij}^m sera un polynome homogène de degré m par rapport aux v.

Nous avons défini plus haut W_{ki}^q. De même, U_{ki}^q sera l'ensemble des termes

de degré q du polynome U_{ki}; nous trouvons alors :

$$2\pi\sqrt{-1}\,U^q_{ki} = \int d\xi\,(\Sigma\,\Lambda_h\xi^h)P^q_k\xi^{-q-1}, \tag{4}$$

$$2\pi\sqrt{-1}\,W^q_{ki} = \int d\xi\,(\Sigma\,B_h\xi^h)P^q_k\xi^{-q-1}; \tag{5}$$

d'où

$$U^q_{ki} = \Lambda_q P^q_k, \qquad W^q_{ki} = B_q P^q_k.$$

Les deux polynomes homogènes U^q_{ki} et W^q_{ki} ne diffèrent donc que par un facteur constant facile à déterminer.

Entre les éléments W_{ki} de notre déterminant et ses mineurs U_{ki} nous avons les relations bien connues :

$$\Sigma_k U_{ki} W_{jk} = 0 \qquad (i \neq j),$$
$$\Sigma_k U_{ki} W_{ik} = 1.$$

En égalant les termes du degré le plus élevé, il vient :

$$\Sigma_k U^m_{ki} W^m_{jk} = 0,$$

quels que soient i et j; et puisque U^m_{ki} ne diffère de W^m_{ki} que par un facteur numérique constant :

$$\Sigma_k W^m_{ki} W^m_{jk} = 0. \tag{6}$$

De là une propriété remarquable du groupe G^m. Considérons un point particulier

$$c^0_1,\quad c^0_2,\quad \ldots,\quad c^0_r$$

et cherchons parmi les transformations du groupe G^m celles qui conservent ce point c^0_i. Soit W^{m0}_{ki} ce que devient W^m_{ki} quand on y remplace les c_i par les c^0_i. Les substitutions cherchées seront données par les équations :

$$\Sigma_k t_k W^{m0}_{ki} = 0,$$

lesquelles, en vertu de la formule (6), admettent pour solutions :

$$t_k = W^{m0}_{jk} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r). \tag{7}$$

Combien, parmi les solutions ainsi obtenues, y en aura-t-il de distinctes?

Le déterminant des W est, comme nous l'avons dit, nul ainsi que ses mineurs des $h-1$ premiers ordres. Cela fera donc $r-h$ solutions distinctes. Comme le problème en comporte h, on devra avoir :

$$r - h \leq h,$$

de sorte que h est au moins égal à $\frac{r}{2}$.

La relation (6) nous montre encore que si les dv_i satisfont aux relations

$$dv_i = \Sigma\,W^m_{ki}t_k,$$

qui définissent le groupe G^m, on aura :

$$\Sigma\,W^m_{ji}\,dv_i = 0. \tag{8}$$

Les équations (8), dont $r-h$ sont distinctes, peuvent être regardées comme les équations différentielles des invariants du groupe G^m.

Mais la formule (6) n'est qu'un cas particulier d'une formule beaucoup plus générale. Soit, en effet,

$$h^{(q)}_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int d\xi\,.\,\xi^q\,\Sigma\,\frac{h_j P_{ij}}{F(\xi)}. \tag{9}$$

On déduira de là :

$$h^{(q)}_i = \Sigma\,h_j V^q_{ji}, \tag{10}$$

les V^q_{ji} étant des polynomes homogènes de degré q par rapport aux v, et l'on verrait, en raisonnant comme plus haut, que V^q_{ji} ne diffère de W^q_{ji} et de U^q_{ji} que par un facteur numérique constant facile à calculer.

Quant à la signification des $h^{(q)}$, elle est facile à comprendre. D'après ce que nous avons vu dans le Mémoire cité de Cambridge, si l'on pose

$$V = \Sigma\,v_j X_j, \qquad H = \Sigma\,h_i X_j, \qquad H^{(q)} = \Sigma\,h^{(q)}_i X_i,$$

on aura

$$H^{(1)} = (VH), \qquad H^{(q)} = (VH^{(q-1)}).$$

Si donc on change h_i en $h^{k_i}_i$ dans la formule (9), il faudra changer h^q_i en h^{q+k}_i; on a donc

$$h^{q+k}_i = \Sigma\,h^{k_i}_j V^q_{ji}. \tag{11}$$

Comparons alors trois formules qui ne diffèrent des précédentes que par les notations :

$$h^{p+q}_i = \Sigma V^{p+q}_{ji}\,h_j, \qquad h^{p+q}_i = \Sigma V^q_{ki}\,h^p_k, \qquad h^p_k = \Sigma V^p_{jk}\,h_j;$$

nous trouverons

$$\Sigma_k V^q_{ki} V^p_{jk} = V^{p+q}_{ji},$$

ou, puisque les V ne diffèrent des W que par un facteur constant :

$$\Sigma_k W^q_{ki} W^p_{jk} = C W^{p+q}_{ji}, \tag{6 bis}$$

C étant un facteur numérique dépendant de p et de q.

Si $p+q$ est plus grand que m, $W_{ji}^{p,q}$ doit être nul; de sorte que

$$\Sigma_k W_{ki}^{q} W_{jk}^{p} = 0,$$

formule dont l'équation (6) n'est qu'un cas particulier.

La formule (6 *bis*) nous donne un procédé simple pour former les polynomes W.

On a en particulier :

$$\Sigma W_{ki}^{m} W_{ij}^{q} = 0,$$

de sorte que des équations du groupe G^m :

$$dv_i = \Sigma W_{ki}^{m} t_k,$$

on pourra déduire :

$$\Sigma W_{ij}^{q} dv_i = 0, \qquad (8\ bis)$$

nouvelle forme des équations différentielles des invariants du groupe G^m. On a, en particulier,

$$\Sigma W_{ij} dv_i = 0. \qquad (8\ ter)$$

Il est à remarquer que les équations (8) et (8 *bis*) ne sont que des conséquences des équations (8 *ter*); car, en vertu de (6 *bis*),

$$\Sigma W_{ij}^{q} dv_i = \Sigma \left[W_{ij}^{q-1} (\Sigma W_{ij} dv_i) \right].$$

Autre remarque : Nous avons vu plus haut que dans l'expression

$$e^{V+dV} = e^{V} e^{t}$$

dV ne peut jamais s'annuler. Si donc nous reprenons nos équations différentielles

$$dv_i = \Sigma W_{ki} t_k,$$

nous voyons que les r polynomes

$$\Sigma W_{k1} t_k, \quad \Sigma W_{k2} t_k, \quad \ldots, \quad \Sigma W_{kr} t_k$$

ne peuvent s'annuler tous à la fois, et cela quels que soient les coefficients arbitraires $t_1, t_2, \ldots, t_r$.

Où, pour employer le langage géométrique, les équations

$$\Sigma W_{ki} t_k = 0$$

représentent r variétés à $r-1$ dimensions dans l'espace à r dimensions. Ces r variétés ne peuvent se couper qu'à l'infini.

Ces équations différentielles peuvent d'ailleurs s'intégrer aisément, et nous

allons voir quelle est la forme de l'intégrale générale. Soit

$$e^{U} e^{W} = e^{V}$$

et cherchons à exprimer les v en fonctions des u et des w.

Soient Λ_0, Λ_1, L les substitutions linéaires du groupe adjoint correspondant aux transformations e^{U}, e^{W}, e^{V}; soient λ_{ij}^{0}, λ_{ij}^{1}, l_{ij} leurs coefficients.

Les λ_{ij}^{0} nous seront donnés en fonctions des u, à l'aide de la formule

$$\lambda_{ij}^{0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{d\xi\, e^{-\xi} P'_{ij}}{(-\xi)^r},$$

où P'_{ij} est ce que devient P_{ij} quand on y remplace les v par les u; car $F(\xi)$ se réduit à $(-\xi)^r$. Le dénominateur est indépendant des u; le numérateur est un polynome entier par rapport aux u. Donc les λ^{0} sont des polynomes entiers par rapport aux u.

De même, les λ_{ij}^{1} seront des polynomes entiers par rapport aux w, de sorte que les l seront des polynomes entiers par rapport aux u et aux w.

Calculons maintenant les b_{ji} en fonction des l à l'aide de la formule (7) du paragraphe II; cette formule s'écrit :

$$b_{ji} = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\xi\, e^{-\xi}\, d\xi}{(1-e^{-\xi})^r} Q_{ij},$$

car $\Phi(e^{-\xi})$ se réduit à $(1-e^{-\xi})^r$. Le seul facteur dépendant des l est Q_{ij}, qui est un polynome entier. Donc les b sont des polynomes entiers par rapport aux l, et par conséquent par rapport aux u et aux w.

Nous avons vu que les v' sont liés aux b_{ij} par des équations linéaires; les v' sont donc aussi des polynomes entiers par rapport aux u et aux w.

[Reprenons maintenant la formule (6) du paragraphe III (1). Elle peut s'écrire

$$dw_i' - dv_i' = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \xi\, d\xi\, \psi(\xi) \Sigma \frac{dv_j P_{ij}}{(-\xi)^r},$$

car

$$F(\xi) = (-\xi)^r.$$

Ici encore P_{ij} est un polynome entier par rapport aux v', de sorte que le second membre est un polynome entier par rapport aux v'; on déduit de là, en revenant

(1) La formule (6) du paragraphe III n'est pas exacte; *cf.* Note de la page 231. Les conclusions entre crochets sont à reprendre (J. D.).

à la formule (7) du paragraphe III :

$$v_i'' = w_i'' + u_i'' - \Theta_i(v_k') + \Theta_i(u_k'),$$

que Θ_i est un polynome entier par rapport aux v'.

Donc les v'' sont des polynomes entiers par rapport aux u et aux w. Ainsi *les v sont des polynomes entiers par rapport aux u et aux w*; c'est-à-dire que si l'on intègre les équations différentielles

$$dv_i = \Sigma\, W_{ki}\, l_k,$$

en cherchant à exprimer les v en fonctions des w, les intégrales seront des polynomes entiers.]

V. — Étude plus détaillée du groupe paramétrique.

Reprenons l'équation

$$e^U e^W = e^V$$

du paragraphe III et étudions de plus près les v regardés comme fonctions des u et des w. Nous conserverons aux lettres Λ_0, Λ_1, L, λ_{ij}^0, λ_{ij}^1, l_{ij} la même signification qu'à la fin du paragraphe III.

Nous avons vu dans quel cas les b_{ik} cessent d'être des fonctions holomorphes des l et par conséquent des u et des w; examinons plus complètement les singularités qui peuvent se produire, et pour cela reprenons la formule (7) du paragraphe II. Cette formule est susceptible de simplification.

Le contour d'intégration doit envelopper toutes les racines de l'équation de Killing en laissant en dehors ces mêmes racines augmentées d'un multiple de $2i\pi$. Nous pouvons donc supposer que ce contour est un rectangle dont l'un des côtés, parallèle à l'axe des quantités réelles, est très grand, tandis que l'autre, parallèle à l'axe des quantités imaginaires, est égal à $2i\pi$.

Désignons par $\psi(\xi)$ la fonction sous le signe intégral. Si l'intégrale prise le long des petits côtés du rectangle tendait vers zéro, quand les grands côtés tendent vers l'infini, notre intégrale

$$\int \psi(\xi)\, d\xi,$$

prise le long du rectangle entier, pourrait être remplacée par l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\psi(\xi) - \psi(\xi + 2i\pi)]\, d\xi$$

prise le long de l'un des grands côtés (par exemple le long de l'axe des quantités réelles).

Les choses ne sont pas tout à fait aussi simples. Nous avons, en effet,

$$\psi(\xi) = \frac{\xi\, e^{-\xi} Q_{ij}}{\Phi(e^{-\xi})}.$$

Pour $\xi = +\infty$, $e^{-\xi}$ et par conséquent $\psi(\xi)$ tendent vers zéro; mais pour $\xi = -\infty$, $e^{-\xi}$ tend vers l'infini. L'expression

$$\frac{e^{-\xi} Q_{ij}}{\Phi(e^{-\xi})}$$

est le quotient de deux polynomes de même degré en $e^{-\xi}$; elle tend donc vers une limite finie et déterminée que j'appelle A.

Modifions alors légèrement la formule (7); l'intégrale

$$\frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \xi\, \frac{e^{-\xi}\, d\xi}{e^{-\xi} - 1}$$

prise le long du rectangle est nulle, puisque à l'intérieur du rectangle le dénominateur ne s'annule que pour $\xi = 0$, et qu'alors le numérateur s'annule. Je puis donc écrire :

$$b_{ij} = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \xi\, d\xi\, e^{-\xi} \left[\frac{Q_{ij}}{\Phi(e^{-\xi})} - \frac{\Lambda}{e^{-\xi} - 1} \right]. \tag{7 bis}$$

Je poserai

$$e^{-\xi} \left[\frac{Q_{ij}}{\Phi(e^{-\xi})} - \frac{\Lambda}{e^{-\xi} - 1} \right] = \theta(\xi)$$

et je vois que θ tend vers zéro, aussi bien pour $\xi = -\infty$ que pour $\xi = +\infty$. Alors si les grands côtés du rectangle sont très grands, l'intégrale (7 *bis*), prise le long des petits côtés, est nulle. On aura donc

$$b_{ij} = \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, [\xi\, \theta(\xi) - (\xi + 2i\pi)\, \theta(\xi + 2i\pi)],$$

l'intégrale étant prise le long de l'un des grands côtés. Mais la fonction $\theta(\xi)$ est périodique, de sorte que $\theta(\xi) = \theta(\xi + 2i\pi)$. C'est ce qui nous permet d'écrire tout simplement :

$$b_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(\xi)\, d\xi. \tag{7 ter}$$

Nous avons vu qu'une singularité peut se produire quand deux racines de l'équation de Killing diffèrent d'un multiple de $2i\pi$.

Soient donc ω_1 et ω_2 deux de ces racines et je suppose qu'à un moment donné la différence $\omega_1 - \omega_2$ devienne égale à $2mi\pi$.

Originairement le chemin d'intégration, que j'appelle C, passe entre les deux points ω_1 et $\omega_2 + 2mi\pi$; et c'est à l'instant où ces deux points se confondent qu'il peut y avoir une singularité. Considérons un second chemin C', ayant mêmes extrémités que C, mais laissant les deux points ω_1 et $\omega_2 + 2mi\pi$ d'un même côté. Le point $\omega_2 + 2mi\pi$ se trouvera par exemple entre ces deux chemins C et C'. L'intégrale prise le long de C sera alors égale à l'intégrale prise le long de C' plus $2\pi\sqrt{-1}R_2$, R_2 étant le résidu de $\theta(\xi)$ relatif à la racine $\omega_2 + 2mi\pi$, ou, ce qui revient au même, à la racine ω_2. J'écrirai

$$J(C) = J(C') + 2\pi\sqrt{-1}R_2,$$

en désignant par J(C) l'intégrale le long du chemin C.

Quand les points ω_1 et $\omega_2 + 2mi\pi$ se confondent, J(C') reste holomorphe. La singularité provient donc uniquement du terme en R_2.

Supposons que les u ou les w tournent autour des valeurs qui correspondent à la singularité. Il pourra arriver :

1° Ou bien que les deux points ω_1 et $\omega_2 + 2mi\pi$ tournent autour l'un de l'autre, mais sans s'échanger. Dans ce cas R_2 et par conséquent J(C) reviennent à leur valeur initiale. Les b_{ij} restent donc des fonctions uniformes des u et des w. Seulement ces fonctions peuvent devenir infinies parce qu'en général le résidu R_2 croît indéfiniment quand les deux points ω_1 et $\omega_2 + 2mi\pi$ tendent l'un vers l'autre.

2° Ou bien que les deux points ω_1 et $\omega_2 + 2mi\pi$ s'échangent. Dans ce cas R_1 se change en R_1 et par conséquent J(C) en

$$J(C) + 2\pi\sqrt{-1}(R_1 - R_2).$$

Les b_{ij} ne sont plus des fonctions uniformes des u et des w.

Il est clair d'ailleurs que, tant que les b_{ij} restent fonctions uniformes des u et des w, il en est de même des v. Cela est évident pour les c' que l'on déduit des b_{ij} à l'aide d'équations du premier degré; [cela l'est également pour les c'' puisque les Θ_i sont des fonctions entières des c' (*cf.* la fin du § III)] (1).

Plaçons-nous donc dans le cas où les v cessent d'être des fonctions uniformes des u et des w, et supposons que, les u et les w revenant à leurs valeurs

(1) L'uniformité des v n'est pas établie ici; *voir* la Note antérieure, page 231.

initiales après avoir décrit des contours fermés, les v_i ne reviennent pas à leurs valeurs initiales, mais à des valeurs différentes que nous appellerons v_i^0; j'écrirai d'ailleurs :

$$V = \Sigma v_i X_i, \qquad V_0 = \Sigma v_i^0 X_i.$$

Alors, en faisant varier les u et les w d'une manière continue, on a pour les valeurs initiales

$$e^U e^W = e^V,$$

et pour les valeurs finales

$$e^V e^W = e^{V_0}.$$

Considérons maintenant les substitutions Λ_0, Λ_1, L du groupe adjoint, qui correspondent à e^U, e^W, e^V. Leurs coefficients λ^0, λ^1, l sont des fonctions entières des u et des w; ils reviendront donc à leurs valeurs initiales quand les u et les w auront décrit des contours fermés. Donc la substitution L, qui correspond à e^{V_0}, est la même que celle qui correspond à e^V.

Considérons maintenant la transformation

$$e^V e^{-V_0};$$

la substitution correspondante du groupe adjoint sera

$$LL^{-1},$$

c'est-à-dire l'unité. En d'autres termes, *la transformation $e^V e^{-V_0}$ sera permutable à toutes les transformations du groupe*. Elle peut d'ailleurs dans certains cas se réduire à la transformation identique.

Les transformations finies qui jouissent de cette propriété s'appelleront les transformations *spéciales*. Elles forment dans le groupe proposé un sous-groupe invariant discontinu. Toutes les racines de l'équation de Killing sont, pour ces transformations spéciales, des multiples de $2i\pi$.

Il ne faut pas confondre ces transformations spéciales avec les transformations infinitésimales qui sont permutables à toutes les transformations du groupe et qui, comme nous l'avons vu, existent dans certains groupes.

Tous les groupes contiennent-ils des transformations spéciales? Soit d'abord une transformation e^V, et supposons que les racines correspondantes de l'équation de Killing soient toutes distinctes et commensurables entre elles. On pourra alors choisir la constante α de telle sorte que l'équation de Killing correspondant à $e^{\alpha V}$ ait toutes ses racines multiples de $2i\pi$. La transformation $e^{\alpha V}$ sera alors évidemment spéciale.

Mais ce que nous venons de dire ne s'appliquerait pas toujours au cas où

l'équation de Killing aurait des racines multiples. En effet, on sait qu'une substitution linéaire peut toujours être ramenée à une forme appelée canonique, mais que deux cas peuvent se présenter. Tantôt la forme canonique est la suivante :

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix},$$

les nombres a, b, c, d pouvant être égaux ou différents. Tantôt elle est analogue à l'une des suivantes :

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & e_2 & b \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & a & 0 & 0 \\ e_2 & e_3 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix}, \quad \dots$$

les nombres e n'étant pas tous nuls.

Dans le premier cas, je dirai, pour abréger le langage, que la substitution linéaire est *ordinaire;* dans le second cas qu'elle est *parabolique*.

Or aucune puissance d'une substitution parabolique ne peut se réduire à la substitution unité.

Si alors notre groupe admet une transformation spéciale $e^{\alpha V}$, celle-ci sera une puissance d'une certaine transformation infinitésimale e^V; si L est la substitution du groupe adjoint qui correspond à e^V, celle qui correspond à $e^{\alpha V}$ sera L^α. Comme $e^{\alpha V}$ est spéciale, L^α se réduira à la substitution unité. Donc L ne peut être parabolique.

Si l'équation de Killing a des racines multiples, il peut arriver que les substitutions du groupe adjoint soient paraboliques, de sorte qu'on peut se demander s'il n'y a pas des groupes qui ne contiennent pas de transformations spéciales. On peut en citer au moins un exemple : ce sont les groupes de rang zéro.

Soit maintenant e^W une transformation spéciale quelconque,

$$\tau_1, \quad \tau_2, \quad \dots, \quad \tau_r$$

les racines correspondantes de l'équation de Killing; ce seront des multiples de $2i\pi$. Soit e^U une transformation quelconque,

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \dots, \quad \omega_r$$

les racines correspondantes de l'équation de Killing; posons :

$$e^U e^W = e^V$$

et soient

$$\omega'_1, \quad \omega'_2, \quad \dots, \quad \omega'_r$$

les racines de l'équation de Killing correspondant à e^V.

Si Λ_0, Λ_1 et L sont les substitutions du groupe adjoint correspondant à e^U, e^W, e^V, on aura

$$\Lambda_0 \Lambda_1 = L, \qquad \Lambda_1 = 1;$$

d'où

$$\Lambda_0 = L.$$

Cela nous montre que les ω' ne diffèrent des ω que par des multiples de $2i\pi$.

Faisons varier les u d'une manière continue, les v varieront aussi d'une manière continue et il en sera de même des ω et des ω'. Mais comme la différence de l'un des ω' et de la racine ω correspondante doit rester égale à un multiple de $2i\pi$, cette différence devra demeurer constante.

Supposons que les valeurs initiales des u satisfassent aux proportions

$$\frac{u_1}{\omega_1} = \frac{u_2}{\omega_2} = \dots = \frac{u_r}{\omega_r}$$

de telle façon qu'originairement e^U et e^W soient des puissances d'une même transformation infinitésimale; on aura originairement

$$\omega'_i = \omega_i + \tau_i;$$

et d'après ce que nous venons de voir, *cette relation devra subsister quand on fera varier les u d'une manière continue en partant des valeurs initiales que nous venons de définir*.

Si donc l'équation de Killing, pour certaines valeurs des v, admet les racines

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \dots, \quad \omega_r,$$

pour d'autres valeurs des v elle admettra les racines

$$\omega_1 + \tau_1, \quad \omega_2 + \tau_2, \quad \dots, \quad \omega_r + \tau_r$$

et, plus généralement, pour d'autres valeurs des v elle admettra les racines

$$\lambda\omega_1 + \lambda'\tau_1, \quad \lambda\omega_2 + \lambda'\tau_2, \quad \dots, \quad \lambda\omega_r + \lambda'\tau_r,$$

λ et λ' étant deux coefficients quelconques.

Si l'on fait varier les u d'une manière continue pour les faire revenir à leurs valeurs initiales après leur avoir fait décrire des contours fermés, il arrivera en

général que les racines ω se permuteront entre elles; supposons qu'elles deviennent

$$\omega_1^{(1)},\quad \omega_2^{(1)},\quad \ldots,\quad \omega_r^{(1)},$$

les $\omega_i^{(1)}$ n'étant autre chose que les ω_i placés dans un autre ordre.

Les racines de l'équation de Killing relatives à e^{V}, qui étaient primitivement

$$\omega_1+\tau_1,\quad \omega_2+\tau_2,\quad \ldots,\quad \omega_r+\tau_r, \tag{1}$$

deviendront

$$\omega_1^{(1)}+\tau_1,\quad \omega_2^{(1)}+\tau_2,\quad \ldots,\quad \omega_r^{(1)}+\tau_r. \tag{2}$$

Or les expressions (2) ne sont autre chose (dans un autre ordre) que

$$\omega_1+\tau_1^{(-1)},\quad \omega_2+\tau_2^{(-1)},\quad \ldots,\quad \omega_r+\tau_r^{(-1)} \tag{3}$$

les $\tau_i^{(-1)}$ n'étant autre chose que les τ_i qui sont supposés avoir subi une permutation inverse de celle qui change les ω_i en $\omega_i^{(1)}$.

Nous avons donc deux déterminations des v, ou, si l'on aime mieux, de e^{V}; dans la première les racines de l'équation de Killing sont les $\omega_i+\tau_i$, dans la seconde elles sont les $\omega_i+\tau_i^{(-1)}$. Les différences des racines sont donc

$$\tau_i^{(-1)}-\tau_i,$$

c'est-à-dire des multiples de $2\pi\sqrt{-1}$.

Plus généralement : soient p transformations spéciales indépendantes, et soient

$$\begin{cases} \tau_{1,1}, & \tau_{2,1}, & \ldots, & \tau_{r,1}; \\ \tau_{1,2}, & \tau_{2,2}, & \ldots, & \tau_{r,2}; \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots; \\ \tau_{1,p}, & \tau_{2,p}, & \ldots, & \tau_{r,p} \end{cases} \tag{4}$$

les racines correspondantes. Si les τ_i peuvent s'échanger entre eux (par suite de permutations analogues à celle qui change les τ_i en $\tau_i^{(-1)}$ et dont je viens de parler), les diverses permutations possibles des $\tau_{i,1}$, des $\tau_{i,2}$, ... devront figurer dans autant de lignes du tableau (4) comme si elles correspondaient à autant de transformations spéciales distinctes. Si, par exemple, $r=3$, et si les racines sont τ_1, τ_2, τ_3, pour une des transformations spéciales et τ_1', τ_2', τ_3' pour une autre; si enfin quand on fait décrire aux v des contours fermés, les trois racines de l'équation de Killing peuvent subir une permutation circulaire, le

tableau (4) devra être formé comme il suit :

$$\begin{array}{lll} \tau_1, & \tau_2, & \tau_3, \\ \tau_2, & \tau_3, & \tau_1, \\ \tau_3, & \tau_1, & \tau_2, \\ \tau_1', & \tau_2', & \tau_3', \\ \tau_2', & \tau_3', & \tau_1', \\ \tau_3', & \tau_1', & \tau_2'. \end{array}$$

Cela posé, si pour certaines valeurs des v les racines de l'équation de Killing sont

$$\omega_1,\quad \omega_2,\quad \ldots,\quad \omega_r,$$

pour d'autres valeurs de v elles seront

$$\lambda\omega_i+\lambda_1\tau_{i,1}+\lambda_2\tau_{i,2}+\ldots+\lambda_p\tau_{i,p}\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ r),$$

λ, λ_1, λ_2, ..., λ_p étant $p+1$ coefficients quelconques.

Revenons maintenant sur une question que je n'ai fait qu'effleurer plus haut et qui est assez délicate.

J'ai supposé que $e^{\mathrm{U}}e^{\mathrm{W}}$ était susceptible de deux déterminations e^{V} et e^{V_0}, et j'ai dit que $e^{\mathrm{V}}e^{-\mathrm{V}_0}$ était une transformation spéciale. J'ajoute que cette transformation peut se réduire à la transformation unité.

On pourrait d'abord croire le contraire. Si, en effet, on avait

$$e^{\mathrm{V}}e^{-\mathrm{V}_0}=1,$$

on aurait

$$e^{\mathrm{V}}=e^{\mathrm{V}_0}$$

et les deux transformations e^{V} et e^{V_0} seraient identiques, contrairement à l'hypothèse.

Ce raisonnement serait insuffisant. Nous avons en effet obtenu e^{V_0} en faisant varier les u et les w d'une manière continue, partant de certaines valeurs initiales et revenant à ces mêmes valeurs. Réservons donc les notations U, W, u, w pour désigner ces valeurs initiales; et désignons par U', W', u', w' les valeurs variables de ces mêmes quantités. Nous poserons alors :

$$e^{\mathrm{U}'}e^{\mathrm{W}'}=e^{\mathrm{V}'},$$

de telle façon qu'au commencement U', W' et V' se réduisent respectivement à U, W et V, et qu'à la fin U' et W' reviennent à leurs déterminations initiales U et W, tandis que V' aboutit à une détermination différente V_0. Envisageons alors la transformation

$$e^{\mathrm{V}}e^{-\mathrm{V}'}=e^{\mathrm{T}}.$$

Au commencement elle se réduira à la transformation identique, elle prendra ensuite diverses déterminations, et à la fin il pourrait se faire que e^{T} se réduisît de nouveau à la transformation identique. Il ne s'ensuivrait pas forcément que V' dût se réduire à V. On a en effet

$$e^{V'} = e^{-T} e^{V}.$$

Si l'on suppose $T = 0$, *l'une* des déterminations possibles du second membre est certainement e^{V}, mais il peut se faire que ce second membre ait d'autres déterminations (de même que $e^{U}e^{W}$, d'après notre hypothèse, est susceptible de deux déterminations e^{V} et e^{V_1}).

Il est aisé de faire des exemples. Je suppose que les v soient choisis de telle sorte que la différence de deux des racines de l'équation de Killing relatives à e^{V} diffère peu d'un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$. Faisons ensuite varier les t d'une manière continue, chacune de ces variables partant de la valeur zéro, décrivant un petit contour fermé, et revenant à la valeur zéro. Nous pourrons choisir ces contours de telle façon que les deux points très voisins qui représentent l'une des deux racines de Killing dont je viens de parler et l'autre racine augmentée d'un multiple convenable de $2\pi\sqrt{-1}$, que ces deux points dis-je, s'échangent l'un avec l'autre. Alors, au début $e^{-T}e^{V}$ se réduira à e^{V}, et à la fin ne se réduira pas à e^{V} bien que T se réduise de nouveau à zéro. Le raisonnement précédent est donc insuffisant.

Soient maintenant e^{W} et e^{W_0} deux transformations correspondant à une même substitution A du groupe adjoint. Soient e^{U} une autre transformation et A' la substitution correspondante du groupe adjoint. Soient

$$e^{U}e^{W} = e^{V}, \qquad e^{U}e^{W_0} = e^{V_0}. \tag{12}$$

Il est clair que les deux transformations e^{V} et e^{V_0} correspondront à une même substitution

$$L = A'A$$

du groupe adjoint. Si donc nous appelons ω_i et ω_i^0 les racines de Killing relatives à V et V_0, les différences $\omega_i - \omega_i^0$ seront des multiples de $2\pi\sqrt{-1}$.

De même, si nous appelons θ_i et θ_i^0 les racines de Killing relatives à W et W_0, les différences $\theta_i - \theta_i^0$ seront aussi des multiples de $2\pi\sqrt{-1}$.

Si l'on fait varier U d'une manière continue, W et W_0 ne changeant pas, les différences $\omega_i - \omega_i^0$ devront varier d'une manière continue, et comme ce sont des multiples de $2\pi\sqrt{-1}$ elles demeureront constantes. Or, pour $U = 0$,

ω_i et ω_i^0 se réduisent à θ_i et θ_i^0; on aura donc, quel que soit U,

$$\omega_i - \omega_i^0 = \theta_i - \theta_i^0. \tag{6}$$

Une observation avant d'aller plus loin : tout à l'heure j'ai démontré l'égalité

$$\omega_i' = \omega_i + \tau_i \tag{6 bis}$$

en partant d'une identité analogue à (5)

$$e^{U}e^{W} = e^{V}, \tag{7}$$

où e^{W} était spéciale. Pourquoi n'ai-je pas comme ici pris, pour valeur initiale de U, $U = 0$, mais ai-je supposé pour ces valeurs initiales

$$\frac{u_1}{w_1} = \frac{u_2}{w_2} = \ldots = \frac{u_r}{w_r} ?$$

C'est que, pour avoir le droit de prendre à l'origine $U = 0$, il faut être sûr que, quand les u sont très petits, les w diffèrent très peu des v; c'est-à-dire que les accroissements subis par les v sont très petits quand ceux des u sont très petits; c'est-à-dire que l'on n'est pas dans le voisinage d'un des points singuliers des équations différentielles auxquelles satisfont les v. C'est ce qu'on peut admettre pour l'identité (5) où e^{W} est quelconque, mais non pour l'identité (7) où e^{W} est spéciale.

Je me borne à ces rapides indications. Mais pour faire comprendre le parti qu'on pourra sans doute tirer des relations (6) et (6 *bis*), je me supposerai placé dans un cas simple, celui où l'équation de Killing a toutes ses racines simples. Soit l le rang du groupe. On pourra alors trouver l systèmes de valeurs des v, telles que les valeurs correspondantes des racines de l'équation de Killing, que j'appellerai

$$\begin{array}{llll} \tau_{11}, & \tau_{21}, & \ldots, & \tau_{r1}, \\ \tau_{12}, & \tau_{22}, & \ldots, & \tau_{r2}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \tau_{1l}, & \tau_{2l}, & \ldots, & \tau_{rl}, \end{array}$$

soient linéairement indépendantes; je veux dire que les τ ne soient pas liés par des relations à coefficients constants de la forme

$$a_1\tau_{i1} + a_2\tau_{i2} + \ldots + a_l\tau_{il} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, r),$$

de telle façon, en même temps, que les rapports des éléments d'une même ligne de ce tableau soient commensurables; ou mieux encore que tous les t soient des multiples de $2\pi\sqrt{-1}$.

Les racines étant simples, les transformations correspondantes seront

spéciales, et alors nous verrons que les racines de l'équation de Killing pour une transformation quelconque seront des combinaisons linéaires des τ; je veux dire que, si

$$\omega_{i1},\quad \omega_{i2},\quad \ldots,\quad \omega_{ir}$$

sont les racines de l'équation de Killing, on aura :

$$\omega_i = \alpha_1\tau_{i1} + \alpha_2\tau_{i2} + \ldots + \alpha_l\tau_{il} \qquad (i = 1, \ldots, r),$$

les α étant des fonctions des v.

Ce théorème est probablement vrai dans des cas beaucoup plus généraux, mais je me suis borné à un cas très simple parce que je ne voulais qu'indiquer une marche à suivre.

VI. — Quelques mots sur les équations différentielles du groupe.

Dans le paragraphe précédent nous avons envisagé les points singuliers des fonctions v regardées comme des fonctions des u et des w, définies par l'équation

$$e^{U}e^{W} = e^{V}.$$

Pour cela nous nous sommes servis des relations finies qui relient les v aux u et aux w. Mais on pourrait également faire usage des équations différentielles qui définissent les v. Rappelons la forme de ces équations différentielles.

Si, par exemple, nous faisons varier les w en laissant les u invariables, si plus particulièrement nous posons

$$w_i = \varepsilon t_i, \qquad W = \varepsilon T,$$

en faisant varier ε et laissant les t invariables, de sorte que

$$e^{U}e^{\varepsilon T} = e^{V}, \qquad e^{U}e^{\varepsilon+d\varepsilon,T} = e^{V+dV},$$

on aura l'équation différentielle

$$e^{V}e^{T\,d\varepsilon} = e^{V+dV},$$

ce qui peut s'écrire, d'après la formule (2) du paragraphe III,

$$\frac{dv_i}{d\varepsilon} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int d\xi\,\frac{\xi}{1-e^{-\xi}}\sum\frac{t_j P_{ij}}{F(\xi)}.$$

Les $\frac{dv_i}{d\varepsilon}$ seront donc une somme de termes de la forme suivante : chaque terme sera le produit de $\frac{1}{1-e^{-\omega_k}}$ si ω_k est une racine de l'équation de Killing

$\left(\text{ou d'une puissance de } \frac{1}{1-e^{-\omega_k}} \text{ si } \omega_k \text{ est une racine multiple}\right)$ et d'une fonction rationnelle des v et de ω_k.

Comment l'un de ces termes peut-il cesser d'être une fonction holomorphe des v ?

1° Si ω_k devient un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$, auquel cas le premier facteur devient infini.

2° Si l'équation de Killing a une racine multiple, outre celles qui existent toujours, auquel cas le second facteur cesse d'être une fonction uniforme des v, et d'ailleurs cesse également d'être fini.

C'est le premier cas auquel nous nous attacherons particulièrement.

Si nous égalons à des multiples de $2\pi\sqrt{-1}$ les différentes racines de l'équation de Killing, nous obtiendrons autant d'équations entre les v que l'équation de Killing a de racines distinctes. Mais il ne s'ensuit pas que toutes les équations ainsi obtenues (et que j'appellerai les équations E) soient distinctes. Il y a, en effet, entre les racines de l'équation de Killing des relations linéaires, et il arrivera souvent que, quand une de ces racines deviendra égale à un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$, il doit en être de même, en vertu de ces relations linéaires, d'une ou de plusieurs autres racines. Si donc l'une de ces équations E est satisfaite, il pourra arriver qu'une ou plusieurs autres, parmi ces équations E, en soient des conséquences nécessaires. Nous supposerons donc que l'on donne aux v des valeurs qui satisfont à l'une des équations E et à toutes celles qui en sont des conséquences nécessaires, mais qui ne satisfont à aucune autre des équations E. Ces valeurs des v (si d'ailleurs l'équation de Killing n'a pas plus de racines multiples que pour des valeurs *quelconques* des v) constitueront ce que j'appellerai un point singulier de *première espèce* de nos équations différentielles.

Soient alors $v_1^0, v_2^0, \ldots, v_r^0$ les valeurs des v qui correspondent à un de ces points singuliers de première espèce; soit ω_k^0 la valeur correspondante de ω_k. Parmi les ω_k^0 il y en aura un ou plusieurs qui seront multiples de $2\pi\sqrt{-1}$, soit par exemple $\omega_1^0, \omega_2^0, \ldots, \omega_q^0$. Les équations E

$$\omega_i = \text{mult. } 2\pi\sqrt{-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q)$$

devront (d'après l'hypothèse que nous venons de faire) être des conséquences les unes des autres. Cela veut dire que $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q$ devront être des multiples d'une même quantité ω, de sorte que $\omega_1^0, \omega_2^0, \ldots, \omega_q^0$ seront des multiples de la quantité correspondante ω_0, laquelle devra être un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$.

Dans le voisinage de ce point singulier, les $\frac{dv_i}{dt}$ seront égaux à des séries ordonnées suivant les puissances croissantes des $v_j - v_j^0$ divisées par une puissance de $\omega - \omega_0$. La présence de cette puissance de $\omega - \omega_0$ au dénominateur provient de l'existence dans les différents termes des $\frac{dv_i}{dt}$ d'un facteur

$$\frac{1}{1 - e^{-\omega_k t}},$$

lequel peut être élevé au carré ou à une puissance supérieure, si la racine ω_k de l'équation de Killing est double ou multiple.

Mais ω est lié aux v par une relation algébrique

$$f(\omega, v_1, v_2, \ldots, v_r) = 0,$$

laquelle se déduit immédiatement de l'équation de Killing. On a alors

$$\frac{df}{d\omega}\frac{d\omega}{dt} = -\Sigma \frac{df}{dv_i}\frac{dv_i}{dt}.$$

Les dérivées de f sont des polynomes entiers par rapport aux v et à ω. Le polynome $\frac{df}{d\omega}$ n'est pas nul, sans quoi deux des racines de Killing ordinairement distinctes viendraient à se confondre et le point singulier ne serait plus de première espèce. On a donc

$$\frac{d\omega}{dt} = \Sigma H_i \frac{dv_i}{dt},$$

les H_i étant développables suivant les puissances des $v_j - v_j^0$ et de $\omega - \omega_0$.

Ainsi $\frac{d\omega}{dt}$ (comme les $\frac{dv_i}{dt}$) est égal à une fonction holomorphe des $v_j - v_j^0$ et de $\omega - \omega_0$, divisée par une puissance de $\omega - \omega_0$.

Telle est la forme des équations différentielles dans le voisinage de notre point singulier.

Nous pouvons donc écrire

$$(1) \qquad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Omega}{(\omega - \omega_0)^p}, \qquad \frac{dv_i}{dt} = \frac{V_i}{(\omega - \omega_0)^p},$$

les Ω et les V_i étant holomorphes. Soit maintenant

$$d\tau = \frac{dt}{(\omega - \omega_0)^p};$$

il viendra

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \Omega, \qquad \frac{dv_i}{d\tau} = V.$$

On tirera de là, par un théorème bien connu, ω et les v_i en séries procédant suivant les puissances de τ et se réduisant à ω_0 et v_i^0 pour $\tau = 0$. Soit

$$(2) \qquad \omega - \omega_0 = a_\mu \tau^\mu + a_{\mu+1}\tau^{\mu+1} + \ldots$$

ce développement; on en tirera

$$dt = d\tau(\omega - \omega_0)^p = a_\mu^p \tau^{p\mu} d\tau + \ldots,$$

d'où

$$t = \frac{a_\mu^p}{p\mu + 1}\tau^{p\mu+1} + \ldots,$$

$$\omega - \omega_0 = b\sqrt[p\mu+1]{t^{p\mu+1}} + \ldots,$$

b étant un coefficient constant facile à calculer. Cela montre qu'en général ω (et par conséquent les v) n'est plus une fonction uniforme de t dans le voisinage du point singulier.

Il y aurait exception seulement dans le cas où $a_\mu, a_{\mu+1}, \ldots$ étant nuls, l'équation (2) se réduirait à $\omega = \omega_0$, c'est-à-dire dans le cas où Ω serait divisible par $\omega - \omega_0$.

Mais dans ce cas, si V_i ne s'annule pas pour $\omega = \omega_0$, $v_k = v_k^0$, nos équations n'admettront pas de solution telle que l'on ait $\omega = \omega_0$, $v_k = v_k^0$ pour $t = 0$.

Or revenons à la substitution L, qui est la substitution du groupe adjoint qui correspond à e^v; et étudions les équations différentielles auxquelles satisfont les coefficients l_{ij} de cette substitution; elles seront de la forme

$$(3) \qquad \frac{dl_{ij}}{dt} = \Lambda_{l_{ij}},$$

les Λ étant des fonctions linéaires des l. Les l sont, d'autre part, des fonctions entières des v; pour $v_k = v_k^0$ ces fonctions entières se réduisent à l_{ij}^0. Les équations (3) admettront une solution telle que $l_{ij} = l_{ij}^0$ pour $t = 0$.

Considérons cette solution, où les l sont donnés comme des fonctions holomorphes de t.

Nous savons d'autre part que les l sont des fonctions entières des v :

$$(4) \qquad l_{ij} = \Phi_{ij}(v_k).$$

Les l_{ij} étant connus en fonctions de t, on tirera les v_k des équations (4), lesquelles équations (4), comme nous le savons, sont satisfaites pour

$$(5) \qquad l_{ij} = l_{ij}^0, \qquad v_k = v_k^0.$$

Pour discuter ces équations (4) je ferai usage d'un lemme que j'ai démontré au début de ma Thèse inaugurale.

D'après ce lemme, dans le voisinage des valeurs (5) :

1° Ou bien les v_k seront des fonctions algébroïdes des l, et tendront vers v_i^0 quand les l_{ij} tendront vers l_{ij}^0, et par conséquent quand ε tendra vers zéro. Ce cas doit être exclu puisque les équations (1) n'admettent pas de solution se réduisant à v_k^0 pour $\varepsilon = 0$.

2° Ou bien les équations (4) cessent d'être distinctes quand on y fait $l_{ij} = l_{ij}^0$. En d'autres termes, pour une infinité de valeurs des v_k, très voisines des v_k^0, les l_{ij} se réduisent à l_{ij}^0, de sorte qu'une infinité de transformations e^{X} correspondent à une même substitution du groupe adjoint. C'est le « *cas d'indétermination* », sur lequel nous aurons à revenir.

Nous avons laissé de côté le cas où tous les V_i s'annuleraient. Sans le discuter à fond, je me bornerai à remarquer que cela ne peut pas avoir lieu pour toutes les valeurs des v compatibles avec la condition

$$\omega = \omega_h = \text{mult. } 2\pi\sqrt{-1}.$$

En d'autres termes, tous les V_i ne peuvent pas être divisibles par $\omega - \omega_h$.

Il résulte de là que, pour qu'une singularité se présente, il ne suffit pas que la différence de deux racines soit un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$ (condition que nous avons trouvée à l'aide des relations finies), il faut encore qu'une racine soit un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$ (afin que les équations différentielles présentent un point singulier).

Si donc la différence de deux racines devient égale à un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$, ou bien les v restent des fonctions holomorphes des u et des w, ou bien une troisième racine deviendra égale elle-même à un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$. Quelle que soit celle de ces deux alternatives qui se présente, on pourra en déduire d'intéressantes conséquences. Si c'est la seconde, on pourra trouver des cas où la différence de deux racines devra être elle-même une racine ou un multiple d'une racine.

VII. — Formules diverses.

On pourrait évidemment faire, pour un groupe quelconque, quelque chose d'analogue à ce que nous avons fait pour les groupes de rang zéro.

Par exemple, les formules (1) et (2) du paragraphe III sont réciproques l'une de l'autre, puisque l'une nous donne les t en fonctions linéaires des dv, et l'autre les dv en fonctions linéaires des t. On pourrait déduire de cette réciprocité certaines propriétés du déterminant des équations linéaires qui donnent les t, par exemple, en fonctions des dv. C'est de cette manière que nous avons démontré plus haut que ce déterminant est égal à 1 dans le cas des groupes de rang zéro.

D'un autre côté, la formule (3) du paragraphe III nous montre que les coefficients des dérivées de f dans $\mathrm{X}_i(f)$ sont d'une forme particulière. Ce sont des sommes de termes, chacun de ces termes est le quotient d'une fonction rationnelle des v et de ω_k (ω_k étant une des racines de l'équation de Killing) par une puissance de $1 - e^{-\omega_k}$.

Considérons maintenant les crochets $(\mathrm{X}_i \mathrm{X}_j)$.

Quelle sera leur forme?

Soit

$$\mathrm{X}_i = \Sigma\, \mathrm{Y}_\alpha \mathrm{Z}_\alpha \frac{df}{dv_k},$$

$$\mathrm{X}_j = \Sigma\, \mathrm{Y}'_\beta \mathrm{Z}'_\beta \frac{df}{dv_k},$$

Z_α étant une fonction rationnelle des v et de ω_α, Z'_β une fonction rationnelle des v et de ω_β, Y_α une puissance négative de $1 - e^{-\omega_\alpha}$, Y'_β une puissance négative de $1 - e^{-\omega_\beta}$. On trouvera

$$(\mathrm{X}_i \mathrm{X}_j) = \Sigma \frac{df}{dv_k} \left(\mathrm{Y}_\alpha \mathrm{Z}_\alpha \frac{d\mathrm{Y}'_\beta \mathrm{Z}'_\beta}{dv_k} - \mathrm{Y}'_\beta \mathrm{Z}'_\beta \frac{d\mathrm{Y}_\alpha \mathrm{Z}_\alpha}{dv_k} \right).$$

Nous observerons que $\frac{d\mathrm{Z}_\alpha}{dv_k}$ est, comme Z_α, une fonction rationnelle des v et de ω_α; que $\frac{d\mathrm{Y}_\alpha}{dv_k}$ peut être regardée comme la somme de deux termes égaux, chacun à un facteur constant près, à une puissance négative de $1 - e^{-\omega_\alpha}$; et nous pourrons écrire

$$(\mathrm{X}_i \mathrm{X}_j) = \Sigma\, \mathrm{Y}_{\alpha\beta} \mathrm{Z}_{\alpha\beta} \frac{df}{dv_k}, \tag{1}$$

$\mathrm{Z}_{\alpha\beta}$ étant une fonction rationnelle des v, de ω_α et de ω_β; $\mathrm{Y}_{\alpha\beta}$ étant le produit d'une puissance négative de $1 - e^{-\omega_\alpha}$ par une puissance négative de $1 - e^{-\omega_\beta}$.

Mais d'autre part, ces crochets $(\mathrm{X}_i \mathrm{X}_j)$ doivent se réduire à des combinaisons linéaires des X_k. Ils sont donc réductibles à la forme

$$(\mathrm{X}_i \mathrm{X}_j) = \Sigma\, \mathrm{Y}''_\gamma \mathrm{Z}''_\gamma \frac{df}{dv_k}, \tag{2}$$

Z''_γ étant une fonction rationnelle des v et d'une seule racine de l'équation de Killing ω_γ, tandis que Y''_γ est une puissance négative de $1 - e^{-\omega_\gamma}$.

Dans quelles conditions une expression de la forme (1) peut-elle être réduite à la forme (2)? C'est ce qu'il serait très intéressant d'étudier, car cette réduction n'est évidemment possible que s'il y a certaines relations entre les racines ω.

En égalant les expressions (1) et (2) du crochet $(X_i X_j)$ on obtiendra r relations de la forme

$$\Sigma Y_{\alpha\beta} Z_{\alpha\beta} = \Sigma Y_\gamma^\alpha Z_\gamma^\alpha. \tag{3}$$

On pourrait évidemment dans ces relations (3) chasser les dénominateurs et les mettre sous la forme

$$\Pi = 0.$$

Π étant un polynome entier par rapport aux v, aux ω_α et aux exponentielles $e^{-\omega_\alpha}$. Mais une identité de cette forme, où figurent, d'une part des fonctions entières des v et des ω, et d'autre part des fonctions transcendantes, ne peut avoir lieu que si elle reste vraie quand on considère les exponentielles $e^{-\omega}$ comme des variables, indépendantes des v et des ω.

Les relations (3) subsistent donc quand on y considère les $e^{-\omega}$ comme des variables indépendantes. Si donc $v_1^0, v_2^0, \ldots, v_r^0$ sont des valeurs particulières quelconques des v; si les valeurs correspondantes des ω_k sont ω_k^0 et si celles des $Z_{\alpha\beta}$ et Z_γ^α sont $Z_{\alpha\beta}^0$ et $Z_\gamma^{\alpha 0}$, on aura

$$\Sigma Y_{\alpha\beta} Z_{\alpha\beta}^0 = Y_\gamma^\alpha Z_\gamma^{\alpha 0}. \tag{3 bis}$$

Ce sont des relations linéaires à coefficients constants entre les $Y_{\alpha\beta}$ et les Y_γ^α. Ce sont donc des relations algébriques entre les exponentielles $e^{-\omega}$. On peut obtenir une infinité de relations de cette forme, puisque l'on peut donner aux v^0 des valeurs quelconques; mais $r - l$ de ces relations au plus peuvent être distinctes (r étant l'ordre et l le rang).

L'étude de ces relations (3 *bis*) pourrait présenter quelque intérêt; elle pourrait nous renseigner sur les relations qui peuvent exister entre les racines de l'équation de Killing et les valeurs que l'on peut attribuer à l'ordre de multiplicité de chacune de ces racines. On peut observer, en effet, que si la racine ω_γ est d'ordre m, $1 - e^{-\omega_\gamma}$ figure au plus à la puissance $-m$ dans $Y_{\gamma\gamma}$, à la puissance $-(m+1)$ dans $Y_{\gamma\beta}$, à la puissance $-(2m+1)$ dans $Y_{\gamma\gamma}$. Le degré des relations algébriques (3 *bis*) se trouve donc limité quand l'ordre de multiplicité de chaque racine est limité.

Mais on peut encore tirer de nos équations (1) et (2) du paragraphe III un parti différent. Soit

$$e^{V+dV} = e^V e^T.$$

Nous avons vu que l'on peut tirer de là les t en fonctions linéaires des dv [relations (1) du paragraphe III]. Soient

$$t_i = \Sigma \varphi_{ik}\, dv_k$$

ces relations. Nous avons vu que les φ_{ik} sont des sommes de termes, chaque terme étant le produit d'une exponentielle $e^{-\omega}$, ou de l'unité, par une fonction rationnelle des v et de ω.

Posons maintenant :

$$e^{V+dV+\delta V} = e^V e^T e^U = e^{V+dV} e^U;$$

les t, les u, les dv, les δv sont supposés très petits, tandis que les v sont supposés finis. Posons de même

$$e^{V+\delta V} = e^V e^{U'}, \qquad e^{V+dV+\delta V} = e^V e^{U'} e^{T'},$$

d'où

$$e^T e^U = e^{U'} e^{T'},$$

$$U + T + (TU) = U' + T'.$$

Nous aurons

$$t_i = \Sigma \varphi_{ik}(v)\, dv_k.$$

La formule

$$e^{V+dV+\delta V} = e^{V+dV} e^U$$

nous montre qu'il y a entre les $v + dv$, les δv et les u, la même relation qu'entre les v, les dv et les t; nous avons donc

$$u_i = \Sigma \varphi_{ik}(v + dv)\, \delta v_k = \Sigma \left(\varphi_{ik} + \Sigma \frac{d\varphi_{ik}}{dv_s} dv_s \right) \delta v_k.$$

D'un autre côté, la relation

$$e^{V+\delta V} = e^V e^{U'}$$

montre que nous avons encore la même relation entre les v, les δv et les u'; d'où

$$u_i' = \Sigma \varphi_{ik}\, \delta v_k.$$

Enfin, l'égalité

$$e^{V+dV+\delta V} = e^{V+\delta V} e^{T'}$$

montre qu'il y a encore la même relation entre les $v + \delta v$, les dv et les t'; d'où

$$t_i' = \Sigma \left(\varphi_{ik} + \Sigma \frac{d\varphi_{ik}}{dv_s} \delta v_s \right) dv_k.$$

En comparant les valeurs des t et des t', on trouve

$$T' - T = \Sigma \frac{d\varphi_{ik}}{dv_s} \delta v_s\, dv_k X_i;$$

et de même, en comparant les valeurs des u et des u' :

$$U' - U = -\Sigma \frac{d\tau_{ik}}{dv_s} dv_s \delta v_k X_i.$$

D'un autre côté on a

$$(TU) = \Sigma(t_i u_j - t_j u_i)(X_i X_j) = \Sigma(\tau_{ik}\tau_{js} - \tau_{jk}\tau_{is})(dv_k \delta v_s - dv_s \delta v_k)(X_i X_j).$$

Dans la sommation du dernier membre, chacune des combinaisons des deux indices i et j, de même d'ailleurs que chacune des combinaisons des deux indices k et s, ne doit figurer qu'une fois.

Si maintenant dans

$$(TU) = T' - T + U' - U$$

nous égalons les coefficients de $dv_k \delta v_s$, il viendra

$$\Sigma_i X_i\left(\frac{d\tau_{ik}}{dv_s} - \frac{d\tau_{is}}{dv_k}\right) = \Sigma_{ij}(\tau_{ik}\tau_{js} - \tau_{jk}\tau_{is})(X_i X_j). \tag{4}$$

Comparons les deux membres de cette égalité. Chaque terme du premier membre est le produit d'une exponentielle $e^{-\omega}$ par une fonction algébrique des v. Chaque terme du second membre est le produit de deux exponentielles $e^{-\omega}$ et $e^{-\omega'}$ (provenant, par exemple, l'une du facteur τ_{ik}, l'autre du facteur τ_{js}) par une fonction algébrique des v.

Il est clair, par exemple, que si $\omega + \omega'$ n'est pas une racine, le produit des deux exponentielles $e^{-\omega}$ et $e^{-\omega'}$ devra disparaître du second membre et son coefficient être nul.

On peut donc encore entrevoir là une source de relations intéressantes.

NOUVELLES REMARQUES SUR LES GROUPES CONTINUS (1)

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 25, (1908).

I. — Introduction.

J'ai déjà eu deux fois l'occasion de présenter quelques remarques sur les groupes continus, une première fois à l'occasion du jubilé de Sir G. G. Stokes (Cambridge, University Press, 1900), une seconde fois dans les *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* [tome XV (1901), p. 321-368], ce sont ces deux Mémoires que je citerai plus loin simplement en disant « Cambridge » ou « Palerme ». Je crois devoir compléter ici ces remarques et en particulier étudier les propriétés des équations différentielles qui définissent ces groupes au point de vue de la théorie des fonctions.

Cette étude, à vrai dire, pourrait se faire par des procédés purement élémentaires, puisque ces équations différentielles sont susceptibles d'être intégrées complètement; mais il n'est pas inutile de l'aborder en partant des équations elles-mêmes; car la comparaison des résultats obtenus de la sorte avec ceux auxquels on arrive en partant des intégrales de ces équations, est instructive par elle-même; quelquefois même, cette comparaison conduit à certaines apparences paradoxales, qui jettent quelques lumières sur les propriétés générales des groupes et qu'il faut parfois quelque attention pour bien expliquer.

Rappelons d'abord les notations employées et les résultats obtenus. Le groupe considéré dérive d'un certain nombre de transformations infinitésimales; et l'une d'elles, la $i^{ième}$ par exemple, transforme les variables

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n$$

(1) Présenté le 10 novembre 1907, imprimé le 22 novembre 1907.

en

$$x_1 + \varepsilon(X_{11}),\quad x_2 + \varepsilon(X_{12}),\quad \ldots,\quad x_n + \varepsilon(X_{1n}),$$

ε étant une constante très petite et les X_{ik} des fonctions données des x. Elle transforme donc la fonction

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

en

$$f + \varepsilon \Sigma \frac{df}{dx_k}(X_{ik}) = f + \varepsilon X_i(f).$$

Ainsi se trouve défini l'opérateur

$$X_i(f) = \frac{df}{dx_1}(X_{i1}) + \frac{df}{dx_2}(X_{i2}) + \ldots + \frac{df}{dx_n}(X_{in}),$$

que je désignerai le plus souvent simplement par X_i.

Nous avons donc r opérateurs $X_1, X_2, \ldots, X_r$ correspondant aux r transformations infinitésimales du groupe et nous devons en étudier les combinaisons.

Nous poserons

$$X_i X_k = X_i X_k(f) = X_i[X_k(f)]$$

et X_i^m ou $X_i^m(f)$ se définit de la même manière. Il faut remarquer que cette opération n'est pas commutative et que l'on n'a pas $X_i X_k = X_k X_i$. Nous poserons

$$(X_i X_k) = X_i X_k - X_k X_i.$$

Nous envisagerons aussi d'autres combinaisons de ces opérateurs, telles que

$$e^{tX} = f + \frac{t}{1} X(f) + \frac{t^2}{1.2} X^2(f) + \ldots.$$

Alors la transformation infinitésimale correspondant à X_i sera

$$f + \varepsilon X_i(f) = [1 + \varepsilon X_i] f,$$

ce que je puis écrire aussi

$$e^{\varepsilon X_i} f$$

ou simplement $e^{\varepsilon X_i}$, en négligeant le carré de ε.

La transformation la plus générale du groupe pourra alors être représentée par e^{T}, en posant

$$\mathrm{T} = t_1 X_1 + \ldots + t_r X_r,$$

les t étant des constantes quelconques. J'introduirai d'ailleurs d'autres combinaisons linéaires des X_i que je désignerai par

$$\mathrm{U} = \Sigma u_i X_i, \qquad \mathrm{V} = \Sigma v_i X_i, \qquad \mathrm{W} = \Sigma w_i X_i, \qquad \ldots.$$

On doit avoir, comme on sait, les *relations de structure*

$$(X_i X_k) = \Sigma_s c_{iks} X_s,$$

les c étant des constantes; mais ces constantes ne peuvent pas être quelconques elles doivent être choisies de façon à satisfaire aux *relations de Jacobi*

$$[(X_a X_b) X_c] + [(X_b X_c) X_a] + [(X_c X_a) X_b] = 0.$$

Nous aurons alors, en vertu des relations de structure,

$$(\mathrm{VT}) = \Sigma b_{ik} t_i X_k,$$

où

$$b_{ik} = \Sigma_s c_{sik} v_s.$$

Nous envisagerons le déterminant

$$\mathrm{F}(\xi) = \begin{vmatrix} b_{11} - \xi & b_{12} & \ldots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} - \xi & \ldots & b_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{r1} & b_{r2} & \ldots & b_{rr} - \xi \end{vmatrix}$$

contenant l'indéterminée ξ; l'équation

$$\mathrm{F}(\xi) = 0$$

dite *équation de Killing* a une extrême importance. Nous désignerons les mineurs de ce déterminant par

$$\mathrm{P}_{ik} = \frac{\partial \mathrm{F}(\xi)}{\partial b_{ik}}.$$

On sait que, lorsque deux groupes sont isomorphes, l'étude de l'un peut se ramener à celle de l'autre; il suffira donc, parmi tous les groupes qui ont même structure, d'en étudier un seul et nous choisirons celui que nous appellerons le *groupe paramétrique* et que nous définirons de la façon suivante :

Soit e^{V} la substitution générale du groupe, où $\mathrm{V} = \Sigma v_i X_i$; nous choisirons pour variables $v_1, v_2, \ldots, v_r$. Posons ensuite

$$e^{\mathrm{V}} e^{\mathrm{T}} = e^{\mathrm{W}}$$

(où nous supposerons toujours $\mathrm{T} = \Sigma t_i X_i$, $\mathrm{W} = \Sigma w_i X_i$, ce qu'il sera inutile de répéter désormais); les w seront des fonctions des v et des t, ou, en d'autres termes, la transformation e^{T} transforme e^{V} en e^{W}, c'est-à-dire les v en w; c'est le groupe ainsi défini, à r variables, que nous appelons le groupe paramétrique.

Nous avons donné le moyen de former les équations différentielles de ce groupe quand on connaît les relations de structure; soit en effet

$$e^{\mathrm{V}} e^{\mathrm{T}} = e^{\mathrm{V} + d\mathrm{V}},$$

les t_i étant très petits; nous aurons en faisant varier seulement t_k, par exemple

$$\frac{dv_i}{dt_k} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int d\xi \frac{\xi}{1-e^{-\xi}} \frac{P_{ik}}{F(\xi)}, \tag{1}$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour fermé enveloppant toutes les racines de l'équation de Killing. Si par exemple toutes ces racines sont simples et qu'elles s'écrivent $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$, il viendra

$$\frac{dv_i}{dt_k} = \Sigma \frac{\omega}{1-e^{-\omega}} \frac{P_{ik}(\omega)}{F(\omega)},$$

la sommation s'étendant aux diverses racines. Une de ces racines est toujours nulle; si elle est multiple, les autres racines étant simples, on a

$$\frac{dv_i}{dt_k} = A + \Sigma \frac{\omega}{1-e^{-\omega}} \frac{P_{ik}(\omega)}{F(\omega)}, \tag{1 bis}$$

la sommation étant étendue cette fois aux racines différentes de zéro et A représentant le coefficient de $\frac{1}{\xi}$ dans le développement de la fonction sous le signe $\int$ suivant les puissances croissantes de ξ.

Outre le groupe paramétrique, nous considérerons le *groupe adjoint*. A la transformation

$$e^{V} e^{T} = e^{W}$$

du groupe paramétrique qui change V en W, nous ferons correspondre une substitution que nous appellerons son *adjointe*, qui sera définie par l'équation

$$e^{-T} e^{V} e^{T} = e^{U}$$

et qui change V en U, c'est-à-dire $v_1, v_2, \ldots, v_r$ en $u_1, u_2, \ldots, u_r$. Ces substitutions adjointes forment le groupe adjoint.

On sait que les substitutions du groupe adjoint sont linéaires, c'est-à-dire que les u sont des fonctions linéaires des v, et nous avons donné [Palerme, p. 324 et 326 (1)] le moyen de former les coefficients l_{ik} de ces substitutions linéaires.

Il y a isomorphisme du groupe adjoint et du groupe paramétrique, mais cet isomorphisme n'est pas toujours holoédrique et l'on doit distinguer deux catégories de groupes. Ceux de la première catégorie ne contiennent pas de transformations *distinguées*, c'est-à-dire de transformations infinitésimales permutables à toutes les transformations du groupe; l'isomorphisme est alors

(1) *Œuvres* de H. Poincaré, ce tome, p. 216 et 218.

holoédrique. Ceux de la deuxième catégorie contiennent des transformations distinguées; l'isomorphisme est alors mériédrique, car chacune de ces transformations distinguées a pour adjointe la substitution identique.

Si l'on a

$$V = \Sigma v_i X_i$$

(les X_i étant les opérateurs simples), V sera ce que nous appellerons un *opérateur composé* du groupe. Mais à chaque opérateur correspondront ce que nous appellerons des *opérateurs conjugués* de V. Si ω est une racine simple, il y aura un opérateur T tel que

$$(VT) = \omega T; \tag{2}$$

ce sera un *opérateur conjugué du premier ordre* appartenant à la racine ω; si cette racine est simple, cet opérateur est entièrement déterminé à un facteur constant près.

Si la racine est double, par exemple, il existe toujours au moins un opérateur conjugué du premier ordre, mais il pourra exister également un *opérateur conjugué du second ordre* T_2 appartenant à la racine ω et tel que

$$(VT_2) = \omega T_2 + T. \tag{2 bis}$$

Alors cet opérateur n'est pas entièrement déterminé, puisqu'une combinaison linéaire quelconque de T_2 et de T satisferait également à l'équation (2 *bis*); mais nous ne regarderons pas une pareille combinaison comme un opérateur conjugué du second ordre distinct de T_2. Nous dirons que T est le *dérivé* de T_2.

C'est là le cas général; il peut arriver également, si ω est racine double, qu'il n'y ait pas d'opérateur conjugué du second ordre, mais deux opérateurs conjugués du premier ordre distincts T et T'; il est clair alors que toute combinaison linéaire de T et de T' satisfait à l'équation (2).

Si ω est racine triple, il peut y avoir un opérateur conjugué du premier ordre T, un du second ordre T_2 et un du troisième ordre T_3 tel que

$$(VT_3) = \omega T_3 + T_2.$$

Il peut y avoir aussi deux opérateurs conjugués du premier ordre et un du second ordre, ou bien encore trois du premier ordre. Et ainsi de suite.

Si les opérateurs conjugués appartenant à une racine sont tous du premier ordre, nous dirons que cette racine, quoique multiple, *se comporte comme une racine simple*.

Remarquons que V est un de ses propres opérateurs conjugués du premier ordre, appartenant à la racine zéro.

Tout cela peut s'exprimer dans un langage géométrique. Considérons $c_1, c_2, \ldots, c_r$ comme les coordonnées d'un point dans l'espace à r dimensions; l'équation

$$F(1) = 0,$$

où ξ a été remplacé par 1, représentera une surface algébrique que j'appellerai la *surface de Killing*. Cette surface est susceptible d'être engendrée de plusieurs manières par des droites, ou par des variétés planes à plus d'une dimension.

L'étude détaillée de cette génération ne serait pas sans intérêt.

Quoi qu'il en soit, à tout point M de cette surface correspond un opérateur V pour lequel l'une des racines de l'équation de Killing est égale à 1. Si nous envisageons un opérateur T_1 conjugué du premier ordre de V, à cet opérateur correspondra un point; si nous le joignons à l'origine, nous aurons une droite D_1, qui sera l'une des droites conjuguées du premier ordre du point M. Soient T_2 un opérateur conjugué du second ordre et T_1 son dérivé; le plan à deux dimensions qui passe par l'origine et par les points correspondant à T_2 et T_1 sera un plan conjugué du second ordre du point M; et ainsi de suite.

Si 1 est racine simple, la droite conjuguée correspondant à la racine 1 sera la *droite conjuguée principale* de M et le plan à $r-1$ dimensions qui passe par toutes les autres droites ou plans conjugués sera le *plan conjugué principal* de M.

Nous appellerons *série régulière d'opérateurs conjugués*, une suite d'opérateurs conjugués

$$T_1, \quad T_2, \quad \ldots, \quad T_n,$$

le premier du premier ordre, le second du second, ..., le $n^{\text{ième}}$ du $n^{\text{ième}}$ ordre, et tels que l'on ait

$$(VT_1) = \omega T_1, \quad (VT_2) = \omega T_2 + \lambda_1 T_1, \quad (VT_3) = \omega T_3 + \lambda_1 T_2 + \lambda_2 T_1, \quad \ldots,$$
$$(VT_n) = \omega T_n + \lambda_1 T_{n-1} + \lambda_2 T_{n-2} + \ldots + \lambda_{n-1} T_1;$$

les constantes $\omega, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ doivent être les mêmes dans toutes les équations de la série, mais sont d'ailleurs quelconques; nous n'excluons pas le cas de $\lambda_i = 0$ quel que soit i; seulement dans ce cas particulier tous les opérateurs sont du premier ordre.

Deux transformations e^V et $e^{V'}$ auront alors une série régulière commune

$$T_1, \quad T_2, \quad \ldots, \quad T_n$$

si l'on a

$$(VT_1) = \omega T_1, \quad (VT_2) = \omega T_2 + \lambda_1 T_1, \quad \ldots, \quad (VT_n) = \omega T_n + \lambda_1 T_{n-1} + \ldots + \lambda_{n-1} T_1;$$
$$(V'T_1) = \omega' T_1, \quad (V'T_2) = \omega' T_2 + \lambda'_1 T_1, \quad \ldots, \quad (V'T_n) = \omega' T_n + \lambda'_1 T_{n-1} + \ldots + \lambda'_{n-1} T_1;$$

les constantes ω, λ et ω', λ' peuvent d'ailleurs être différentes pour V et pour V', mais les opérateurs $T_1, T_2, \ldots, T_n$ sont les mêmes pour V et pour V'.

Cela posé, *la condition nécessaire et suffisante pour que les adjointes de e^V et $e^{V'}$ soient permutables, c'est que* V *et* V' *admettent un certain nombre de séries régulières communes, comprenant ensemble r opérateurs indépendants, si r est l'ordre du groupe.*

Ainsi, si le groupe est, par exemple, du sixième ordre et si V et V' admettent une série régulière commune de trois opérateurs, une seconde série régulière commune de deux opérateurs et une troisième série régulière commune formée d'un seul opérateur du premier ordre, e^V et $e^{V'}$, seront permutables.

Plus généralement, je dirai qu'une substitution linéaire quelconque admet une *série régulière* s'il existe n combinaisons linéaires des n variables indépendantes, combinaisons que j'appelle

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n.$$

qu'elle change respectivement en

$$\omega y_1, \quad \omega y_2 + \lambda_1 y_1, \quad \omega y_3 + \lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_1, \quad \ldots, \quad \omega y_n + \lambda_1 y_{n-1} + \ldots + \lambda_{n-1} y_1.$$

Alors la condition nécessaire et suffisante pour que deux substitutions linéaires soient permutables, c'est qu'elles admettent des séries régulières communes comprenant ensemble autant de combinaisons linéaires y indépendantes qu'il y a de variables.

II. — Non-uniformité des fonctions.

Soit

$$e^U e^W = e^V; \tag{1}$$

les v seront des fonctions des u et des w et notre but principal est d'étudier ces fonctions au point de vue de la théorie générale des fonctions. La première remarque que nous devons faire, c'est que ces fonctions ne sont pas en général uniformes. Si partant de certaines valeurs initiales des u et des w, et des valeurs correspondantes des v, on fait décrire aux u et aux w des contours

fermés, il est possible que les valeurs finales des v ne soient pas identiques à leurs valeurs initiales.

Si j'envisage au contraire l'équation

$$e^{-W} e^{U} e^{W} = e^{V} \tag{2}$$

qui définit le groupe adjoint, je vois que les v sont des fonctions uniformes des u et des w. Si donc on pose

$$e^{A} e^{U} e^{B} = e^{V};$$

si l'on fait décrire à A, U et B des contours fermés; si l'on a au début et à la fin de ce contour

$$-A = B = W,$$

on sera certain que V reviendra à sa valeur primitive, si l'on a eu *constamment*

$$A = -B.$$

Mais on n'en sera plus certain, si cette relation n'a lieu qu'au début et à la fin du contour, et ne s'est pas maintenue constamment sur tout le contour.

De ce défaut d'uniformité peuvent résulter certaines particularités déconcertantes au premier abord; on est tenté d'écrire

$$e^{V} e^{-V} = 1$$

et en effet on est souvent en droit de le faire, mais pas toujours. Supposons que l'on envisage

$$e^{U} e^{W},$$

que U et W, partant par exemple de la valeur initiale zéro, suivent un chemin quelconque, à la fin duquel on ait

$$U = V, \qquad W = -V,$$

on ne sera pas certain que $e^{U} e^{W}$ tendra vers 1 (*cf.* Palerme, p. 357) (1).

La fonction $e^{V} e^{W}$ n'étant pas uniforme, 1 est l'une des valeurs qu'elle prend pour $U = V$, $W = -V$, mais ce n'est pas la seule.

Autre exemple : Supposons que la substitution V_0 soit permutable à U_0, c'est-à-dire que l'on ait

$$e^{-V_0} e^{U_0} e^{V_0} = e^{U_0}. \tag{3}$$

(1) *Œuvres* de H. Poincaré, ce tome, p. 250.

A-t-on le droit d'en déduire

$$e^{-U_0} e^{V_0} e^{U_0} = e^{V_0}, \tag{4}$$

c'est-à-dire que U_0 est permutable à V_0?

Écrivons

$$e^{-V'} e^{U} e^{V} = e^{U'}, \tag{3 bis}$$

d'où nous déduirons

$$e^{-U} e^{V'} e^{U'} = e^{V}. \tag{4 bis}$$

Si nous faisons varier U, V, U′ et V′ d'une manière continue, en partant de zéro, et suivant un chemin quelconque, mais de telle façon que la relation (3 *bis*) soit toujours remplie, la relation (4 *bis*) sera aussi toujours remplie.

Que signifie maintenant la relation (3)? Elle signifie que si l'on a sur le chemin constamment $V = V'$, et que les valeurs finales de U, V et V′ soient U_0, V_0 et V_0, la valeur finale de U′ (qui est entièrement déterminée puisque le groupe adjoint est défini par des fonctions uniformes) sera U_0.

Que signifierait maintenant la relation (4)? Ce serait que, si l'on a sur le chemin constamment $U = U'$, les valeurs finales de U, V′, U′ étant U_0, V_0, U_0 la valeur finale de V sera V_0. Ce n'est pas tout à fait la même chose, puisque dans un cas le chemin doit être choisi de telle façon que l'on ait constamment $V = V'$, et dans l'autre cas de telle façon que l'on ait constamment $U = U'$. On ne pourra donc sans un examen spécial déduire (4) de (3).

Si toutefois l'on avait, quelles que soient les indéterminées α et β,

$$e^{-\beta V_0} e^{\alpha U_0} e^{\beta V_0} = e^{\alpha U_0}, \tag{3 ter}$$

on aurait le droit d'en déduire

$$e^{-\alpha U_0} e^{\beta V_0} e^{\alpha U_0} = e^{\beta V_0}, \tag{4 ter}$$

car on pourrait faire varier α et β depuis 0 jusqu'à 1 et l'on aurait alors, tout le long du chemin, d'une part

$$V = V' = \beta V_0,$$

et d'autre part

$$U = U' = \alpha U_0.$$

C'est ce qui arrive lorsque deux transformations infinitésimales sont permutables.

Nous avons vu dans le Mémoire de Palerme que si dans l'équation (1) les inconnues v (ou, ce qui revient au même, l'opérateur V, ou la transformation e^{V}) sont susceptibles de plusieurs déterminations, les différentes déterminations de

la transformation e^{V} ont *même adjointe*. En d'autres termes, si V' et V'' sont deux déterminations de l'opérateur V, les opérateurs conjugués des divers ordres de V' et V'' sont les mêmes; et les racines correspondantes de l'équation de Killing sont les mêmes à des multiples près de $2\pi\sqrt{-1}$. D'où cette conséquence fort importante, que si $e^{\mathrm{V}'}$ et $e^{\mathrm{V}''}$ sont deux déterminations de e^{V}, *les deux transformations* $e^{\alpha\mathrm{V}'}$ *et* $e^{\beta\mathrm{V}''}$ *sont permutables quelles que soient les constantes* α *et* β, *pourvu toutefois que le groupe soit de la première catégorie, c'est-à-dire ne contienne pas de transformations distinguées.*

Dans ce cas, en effet, il suffit (puisque l'isomorphisme des deux groupes, adjoint et paramétrique, est holoédrique) de montrer que les deux adjointes de $e^{\alpha\mathrm{V}'}$ et $e^{\beta\mathrm{V}''}$ sont permutables.

Or, V et V' ont mêmes racines de Killing et mêmes opérateurs conjugués; elles diffèrent seulement parce qu'une racine de Killing, qui correspond dans V à une certaine série régulière d'opérateurs conjugués s'étant échangée avec une autre racine, correspondra dans V' à une autre série régulière d'opérateurs conjugués.

Donc V et V' auront toutes leurs séries régulières communes. Donc les adjointes $e^{\alpha\mathrm{V}}$ et $e^{\beta\mathrm{V}'}$ et ces transformations elles-mêmes sont permutables.

III. — Transformations spéciales.

Cela posé, faisons varier dans l'équation (1) U et W d'une manière continue, de façon que V varie aussi d'une manière continue; soient U_0, W_0, V_0 les valeurs initiales de U, W, V; supposons que U et W décrivent un contour fermé C de façon à revenir à leurs valeurs initiales U_0 et W_0, mais que V ait pour valeur finale une autre détermination V_0.

Considérons un chemin L suivi par U et W et allant de $\mathrm{U}=\mathrm{W}=0$ à $\mathrm{U}=\mathrm{U}_0$, $\mathrm{W}=\mathrm{W}_0$; parcourons ce chemin de façon que la valeur de V qui correspond à $\mathrm{U}=\mathrm{U}_0$, $\mathrm{W}=\mathrm{W}_0$ soit $\mathrm{V}=\mathrm{V}_0$ et supposons que la valeur de V qui correspond à $\mathrm{U}=\mathrm{W}=0$ soit $\mathrm{V}=0$.

Supposons maintenant que l'on suive le même chemin L en partant de $\mathrm{U}=\mathrm{U}_0$, $\mathrm{W}=\mathrm{W}_0$ avec la valeur $\mathrm{V}=\mathrm{V}'_0$. On n'arrivera pas à $\mathrm{U}=\mathrm{W}=0$ avec la valeur $\mathrm{V}=0$; sans quoi, en revenant à $\mathrm{U}=\mathrm{U}_0$, $\mathrm{W}=\mathrm{W}_0$ par le même chemin, on y arriverait avec la valeur $\mathrm{V}=\mathrm{V}_0$ et non avec la valeur $\mathrm{V}=\mathrm{V}_0$. Donc, s'il y a plusieurs valeurs distinctes pour V quand elle est définie par l'équation (1), il y en aura plusieurs également quand on fera $\mathrm{U}=\mathrm{W}=0$;

l'une de ces valeurs sera $\mathrm{V}=0$, mais il y en aura d'autres et généralement une infinité.

Les transformations e^{V} qui sont ainsi les diverses solutions de l'équation

$$e^{\mathrm{U}}e^{\mathrm{W}}=e^{\mathrm{V}}$$

s'appellent les *transformations spéciales* (Palerme, p. 353) (1); elles sont caractérisées par ce fait que leur adjointe est la substitution identique.

Nous pouvons tout de suite en donner un exemple simple. Envisageons le groupe des rotations; on a (Palerme, p. 332) (2)

$$v_1=\alpha\theta,\qquad v_2=\beta\theta,\qquad v_3=\gamma\theta,$$

α, β, γ étant les cosinus directeurs de l'axe de rotation et 2θ l'angle de rotation.

Les transformations spéciales correspondent aux rotations dont l'angle est multiple de 2π, et sont caractérisées par

$$v_1^2+v_2^2+v_3^2=k^2\pi^2.$$

D'après ce qui précède, ou bien il y a des transformations spéciales, ou bien les v sont fonctions uniformes des u et des w (ce qui arrive par exemple dans le cas des groupes de rang zéro).

Il peut se faire également qu'il existe des transformations qui, sans être spéciales au sens propre du mot (c'est-à-dire susceptibles de s'échanger avec e^0 quand U et W décrivent des contours fermés) ont néanmoins pour adjointe la substitution identique. Je les appellerai *quasi spéciales*.

Il importe de remarquer que ces transformations quasi spéciales jouissent de quelques-unes des plus importantes propriétés des transformations spéciales. Si, par exemple, e^{A} est spéciale ou quasi spéciale et qu'on pose

$$e^{\mathrm{U}}e^{\mathrm{A}}=e^{\mathrm{V}},$$

e^{U} et e^{V} auront même adjointe; les racines de l'équation de Killing seront les mêmes à des multiples près de $2\pi\sqrt{-1}$; ces multiples devant demeurer constants quand U varie d'une manière continue, ne pourront être autre chose que les racines de e^{A} (Palerme, p. 358) (3). Donc, chaque racine de e^{V} sera égale à la racine correspondante de e^{U}, plus la racine correspondante de e^{A}, laquelle sera un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$.

Ce n'est pas tout. Les deux transformations e^{U} et e^{V} ayant même adjointe, on

(1) *Œuvres* de H. Poincaré, ce tome, p. 245.
(2) *Œuvres* de H. Poincaré, ce tome, p. 234.
(3) *Œuvres* de H. Poincaré, ce tome, p. 247.

verrait comme plus haut que, quelles que soient les constantes α et β, $e^{\alpha U}$ et $e^{\beta V}$ (ou au moins leurs adjointes si le groupe est de seconde catégorie, cas sur lequel je me réserve de revenir plus loin) sont permutables.

Soit alors

$$e^{\lambda_1}, \quad e^{\lambda_2}, \quad \ldots, \quad e^{\lambda_n}$$

une suite de transformations spéciales ou quasi spéciales et posons

$$e^{U} e^{\lambda_i} = e^{V_i};$$

on verrait, toujours pour les mêmes raisons, que les diverses transformations

$$e^{\alpha U}, \quad e^{\beta_i V_i}$$

sont permutables entre elles, quelles que soient les constantes α et β_i; l'ensemble des transformations

$$e^{\alpha U + \Sigma \beta_i V_i}$$

forme un sous-groupe continu dont toutes les transformations sont permutables. Si la $k^{\text{ième}}$ racine de l'équation de Killing est ω_k pour e^{U}, et τ_{ik} pour e^{λ_i}, elle sera, pour la transformation précédente,

$$\omega_k (\alpha + \Sigma \beta_i) + \Sigma \beta_i \tau_{ik}$$

(*cf.* Palerme, p. 356 *in fine*) (1).

Comparons le résultat précédent à d'autres qui ont été obtenus par d'autres voies et pour cela reportons-nous à la Thèse de Cartan (Paris, Nony, 1894). Nous voyons qu'il y définit un certain sous-groupe γ, et que, dans les groupes simples en particulier, toutes les transformations de ce sous-groupe sont permutables. Soient maintenant deux opérateurs X_α et $X_{\alpha'}$ appartenant respectivement par rapport au sous-groupe γ à deux racines égales et de signe contraire, ω_α et $-\omega_\alpha$. Formons le crochet

$$(X_\alpha X_{\alpha'}) = Y_\alpha.$$

Cartan démontre (p. 42) que pour Y_α les racines de l'équation de Killing ont leurs rapports commensurables. Il en résulte que l'on peut choisir le coefficient λ_α de façon que pour $e^{\lambda_\alpha Y_\alpha}$ toutes les racines de Killing soient des multiples de $2\pi\sqrt{-1}$, et comme d'ailleurs elles se comportent comme des racines simples, il en résulte que $e^{\lambda_\alpha Y_\alpha}$ sera spéciale ou quasi spéciale.

Le sous-groupe γ contient donc des transformations spéciales $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_r}$,

(1) *Œuvres* de H. Poincaré, ce tome, p. 259.

et la transformation la plus générale de γ peut s'écrire

$$e^{\Sigma \beta_i \lambda_i}.$$

Comme d'ailleurs Cartan montre encore que les racines de l'équation de Killing dans ce sous-groupe sont des fonctions linéaires des β, on aperçoit l'identité foncière du résultat de Killing-Cartan avec celui que je viens d'obtenir par une voie toute différente.

Si e^{λ} est une transformation spéciale, $e^{U} e^{\lambda}$ sera une autre détermination de e^{U}; on aura d'ailleurs

$$e^{U} e^{\lambda} = e^{\lambda} e^{U}$$

et

$$e^{-\lambda} e^{U} e^{\lambda} = e^{U},$$

c'est-à-dire que e^{U} sera permutable à e^{λ}; cela résulte de ce que l'adjointe de e^{λ} est la substitution identique, mais on n'aurait pas le droit d'en conclure, ainsi que nous l'avons remarqué plus haut,

$$e^{-U} e^{\lambda} e^{U} = e^{\lambda}.$$

Prenons pour exemple le groupe des rotations, et représentons chaque rotation par un vecteur ayant pour composantes v_1, v_2, v_3. Le vecteur $e^{-\lambda} e^{U} e^{\lambda}$ s'obtiendra en faisant subir au vecteur e^{U} la rotation e^{λ}, et comme l'angle de cette rotation est un multiple de 2π, ce vecteur ne changera pas. Au contraire, le vecteur $e^{-U} e^{\lambda} e^{U}$ s'obtiendra en faisant subir au vecteur e^{λ} la rotation e^{U} qui altère la direction de ce vecteur. Donc $e^{-U} e^{\lambda} e^{U}$ et e^{λ} sont deux rotations d'un même angle, multiple de 2π, mais autour d'axes différents.

Terminons par une remarque sur le sens du mot *isomorphisme*. Nous avons dit que les groupes paramétrique et adjoint sont *holoédriquement* isomorphes, dans le cas des groupes de la première catégorie. Cela n'est pas exact en un sens, puisque le groupe paramétrique contient des transformations spéciales auxquelles correspond dans le groupe adjoint la substitution identique. Cela est exact seulement *si l'on se borne à envisager les transformations infinitésimales*, et c'est dans ce sens que nous emploierons ce mot d'ordinaire.

IV. — Transformations singulières.

Reprenons l'équation $e^{U} e^{W} = e^{V}$, faisons décrire à U et à W un contour fermé de telle façon que V ne revienne pas à sa valeur initiale. Comme les u et les w sont $2r$ variables indépendantes, le contour fermé décrit par U et W

pourra se décomposer en contours fermés infiniment petits (ce qui n'aurait pas lieu, par exemple, si l'on avait deux variables x et y non indépendantes, liées par une relation algébrique, de telle façon que le point analytique x, y soit assujetti à rester sur une surface de Riemann non simplement connexe). Pour l'un au moins de ces contours infiniment petits, V ne reviendra pas à sa valeur initiale, la transformation correspondante e^{V} s'appellera une *transformation singulière*, de sorte que les diverses déterminations de e^{V} s'échangent entre elles quand on tourne autour d'une transformation singulière.

On peut voir (Palerme, p. 327 à 330, 338 à 340) (¹) qu'il y a trois espèces de transformations singulières (cette classification est la même, en principe, que dans le Mémoire de Palerme, mais les dénominations sont modifiées) :

1° Les transformations singulières de la *première espèce* sont celles dont l'adjointe a son déterminant nul. Pour que e^{V} soit singulière de première espèce, il faut que l'une des transformations e^{U}, e^{W} soit singulière de première espèce. Comme nous supposerons en général que e^{U}, e^{W} sont régulières, les transformations singulières de première espèce n'auront pas à intervenir.

2° Les transformations singulières de la *deuxième espèce* sont celles pour lesquelles deux racines de l'équation de Killing diffèrent d'un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$; il en résulte que, dans l'équation déterminante de l'adjointe, les deux racines correspondantes deviennent égales, mais *elles se comportent comme deux racines distinctes*. Dans ces conditions, les valeurs des v sont des fonctions *indéterminées* des coefficients l de l'adjointe. Ce sont également des fonctions indéterminées des u et des w. Si nous prenons pour exemple le groupe des rotations, une rotation d'un angle 2π autour d'un axe quelconque (qui est en même temps une transformation spéciale) sera une transformation singulière de deuxième espèce. On voit en effet que l'adjointe se réduit à la substitution identique, de sorte que l'on trouve

$$v_1 = 2\pi\alpha, \qquad v_2 = 2\pi\beta, \qquad v_3 = 2\pi\gamma,$$

α, β, γ étant trois cosinus directeurs assujettis seulement à la condition

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

mais d'ailleurs indéterminés.

3° Les transformations singulières de la *troisième espèce* sont, comme celles de la seconde, telles que deux racines de l'équation de Killing diffèrent d'un

(¹) *Œuvres* de H. Poincaré, ce tome, p. 219 à 222, 229 à 231.

multiple de $2\pi\sqrt{-1}$, et par conséquent que deux racines de l'équation déterminante de l'adjointe soient égales. Seulement ces deux racines égales *ne se comportent pas comme deux racines distinctes*, et l'adjointe devient une substitution linéaire *parabolique*. Dans ces conditions, si nous regardons les v comme des fonctions des u et des w, ces fonctions deviennent *infinies* et non pas indéterminées.

Nous emprunterons encore notre exemple au groupe des rotations.

Supposons que e^{U} soit une rotation imaginaire d'un angle

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{-8}}{3}$$

autour de l'axe des z, de telle façon que

$$u_1 = u_2 = 0, \qquad u_3 = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{-8}}{3};$$

l'adjointe sera

$$\begin{vmatrix} 3 & \sqrt{-8} & 0 \\ -\sqrt{-8} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Supposons maintenant que e^{W} soit une rotation d'un angle $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ autour de l'axe des x, ayant pour adjointe

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

La résultante e^{V} aura pour adjointe

$$\begin{vmatrix} 3 & \sqrt{-8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{-8} & -3 & 0 \end{vmatrix}.$$

L'équation déterminante en S s'écrit

$$\begin{vmatrix} 3-S & \sqrt{-8} & 0 \\ 0 & -S & 1 \\ \sqrt{-8} & -3 & -S \end{vmatrix} = -(S-1)^2 = 0.$$

Elle a donc une racine triple, mais cette racine triple ne se comporte pas comme trois racines simples, ou comme une racine simple et une racine double. Il faudrait pour cela que les mineurs de l'équation en S s'annulassent tous à la fois pour $S = 1$, ce qui n'a pas lieu.

L'adjointe de e^{V} est donc une substitution parabolique. Quant aux racines de l'équation de Killing, elles doivent être l'une nulle, les deux autres égales et de signe contraire, ainsi qu'il advient toujours dans le groupe des rotations. Les deux racines qui ne sont pas nulles doivent être multiples de $2\pi\sqrt{-1}$; le raisonnement du paragraphe précédent montre qu'elles dépendent de h; on peut choisir la détermination de l'arc tangente, de telle façon qu'elles soient égales à $\pm 2k\pi\sqrt{-1}$. Elles ne sont donc pas égales entre elles en général.

Or, si une substitution parabolique peut être une puissance d'une substitution linéaire infinitésimale, c'est à la condition que cette substitution infinitésimale soit elle-même parabolique. Si donc e^{V} a pour adjointe une substitution parabolique de la forme précédente, il faut que $e^{\alpha V}$, où α est très petit, ait également son adjointe parabolique, et par conséquent que l'équation de Killing ait ses trois racines égales.

Cela est en contradiction avec ce que nous venons de dire et la contradiction ne peut s'expliquer que parce que les v cessent d'être finis.

Il reste à étudier de quelle façon les transformations s'échangent entre elles quand on tourne autour d'une transformation singulière; cette étude peut se faire, soit en partant des équations finies du groupe, soit en partant des équations différentielles et c'est précisément la comparaison de ces deux méthodes qui est intéressante.

V. — Groupes de la seconde catégorie.

Plusieurs des résultats précédents ne s'appliquent qu'aux groupes de la première catégorie, et nous avons à voir maintenant comment ils doivent être modifiés en ce qui concerne les groupes de la seconde catégorie, c'est-à-dire ceux qui renferment des transformations distinguées.

Parmi les opérateurs X_i qui correspondent aux diverses transformations infinitésimales du groupe, nous distinguerons ceux qui correspondent aux transformations distinguées et que nous appellerons les X_i', et ceux qui correspondent aux autres transformations et que nous appellerons les X_i'' (Palerme, p. 337) (1), et nous poserons

$$V = \Sigma v_i X_i = \Sigma v_i' X_i' + \Sigma v_i'' X_i'',$$

distinguant ainsi les v' et les v''.

(1) *Œuvres* de H. Poincaré, ce tome, p. 229.

Nous voyons alors que les b_{ik}, et par conséquent les P_{ik} et $F(\xi)$ dépendent seulement des v' et pas des v'', et que

$$\frac{P_{ij}}{F(\xi)}$$

se réduit à 0 ou à $\frac{1}{\xi}$ si le second indice j correspond à un des X'', à savoir : à 0 si les deux indices sont différents et à $\frac{1}{\xi}$ s'ils sont égaux (dans le Mémoire de Palerme il y a eu une permutation d'indices).

Si nous avons alors

$$e^{V}e^{T} = e^{V+dV},$$

T étant très petit, il viendra (Palerme, p. 331) (1)

$$dv_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int d\xi\,\frac{\xi}{1-e^{-\xi}}\,\Sigma_j \frac{t_j P_{ij}}{F(\xi)}, \tag{1}$$

d'où

$$\frac{dv_i}{dt_j} = 0, \quad \text{sauf} \quad \frac{dv_j''}{dt_j} = 1.$$

Cherchons alors à former les équations différentielles d'où dépendent les relations de U, W et V; nous avons

$$e^{U}e^{W} = e^{V}$$

ou (T étant très petit)

$$e^{U}e^{W}e^{T} = e^{V}e^{T}.$$

Or, en posant

$$e^{W}e^{T} = e^{W+dW}, \qquad e^{V}e^{T} = e^{V+dV},$$

il vient

$$e^{U}e^{W+dW} = e^{V+dV},$$

ce qui définit la relation différentielle entre les v et les w, les u restant constants.

Mais l'équation

$$e^{V+dV} = e^{V}e^{T}$$

peut s'écrire (Palerme, p. 331) (1)

$$t_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int d\xi\,\frac{1-e^{-\xi}}{\xi}\,\Sigma_j \frac{dv_j P_{ij}}{F(\xi)},$$

de sorte que nos relations différentielles peuvent s'écrire explicitement

$$\int d\xi\,\frac{1-e^{-\xi}}{\xi}\,\Sigma_j \frac{dv_j P_{ij}}{F_1(\xi)} = \int d\xi\,\frac{1-e^{-\xi}}{\xi}\,\Sigma_j \frac{dv_j P_{ij}}{F(\xi)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r), \tag{2}$$

(1) *Œuvres* de H. Poincaré, ce tome, p. 223.

où P'_{ij} et $F_i(\xi)$ désignent ce que deviennent P_{ij} et $F(\xi)$ quand on y remplace les v par les w. Je puis les écrire aussi sous la forme

$$\Sigma_j W_{ij}\, dw_j = \Sigma_j V_{ij}\, dv_j, \tag{3}$$

les V_{ij} étant des fonctions entières des v, et les W_{ij} les mêmes fonctions entières des w.

Par je ne sais quelle inadvertance, j'ai écrit simplement (Palerme, p. 339) [1]

$$dw_i = \Sigma_j V_{ij}\, dv_j$$

et je voudrais d'abord faire voir que la conclusion fondamentale n'est pas altérée.

Dans le cas des groupes de la seconde catégorie, les V_{ij} ne dépendent que des v' et le coefficient de dv''_j se réduit à zéro si j est différent de i, et à 1 si $j = i$.

Je puis donc écrire, si l'indice i correspond à un des v'

$$\Sigma_j W'_{ij}\, dw'_j = \Sigma_j V'_{ij}\, dv'_j; \tag{3 bis}$$

et si l'indice i correspond à un des v''

$$dw''_i + \Sigma_j W''_{ij}\, dw'_j = dv''_i + \Sigma_j V''_{ij}\, dv'_j. \tag{3 ter}$$

Dans l'un et l'autre cas on ne donne à l'indice j que les valeurs qui correspondent aux v'.

Cela posé, si e^V n'est pas une *transformation singulière* (c'est-à-dire si son adjointe ne satisfait pas aux conditions énoncées dans le paragraphe précédent pour définir ces substitutions singulières), les v' sont des fonctions holomorphes des w' (les u étant regardés comme constants). Si dans l'équation (3 *ter*) nous remplaçons les v' par leurs valeurs en fonctions des w', les V''_{ij} qui sont des fonctions entières des v' deviendront des fonctions holomorphes des w'; il en sera de même des $\frac{dv''_i}{dw'_j}$, de sorte que je puis écrire

$$dv''_i = dw''_i + \Sigma_j H_{ij}\, dw'_j,$$

les H_{ij} étant des fonctions holomorphes des w'; on en conclut que les v'' sont des fonctions holomorphes des w'' et des w'; et l'on verrait de même, si l'on faisait varier à la fois les u et les w, que les v'' sont des fonctions holomorphes des w'', des w', des u'' et des u'.

En résumé, *si e^V n'est pas singulière, les v sont fonctions holomorphes des u et des w.* C'était là notre conclusion fondamentale et elle subsiste; en revanche la formule (7) (Palerme, p. 340) [1] où figurent les fonctions entières Θ_i est inexacte.

[1] *Œuvres* de H. Poincaré, ce tome, p. 231.

VI. — Échange des déterminations.

Examinons maintenant de quelle manière se fait l'échange des diverses déterminations des fonctions v quand on tourne autour d'une transformation singulière de la seconde espèce. Ce qui caractérise ces transformations c'est, comme nous l'avons vu, que les v sont des fonctions indéterminées des u et des w, ou bien encore des fonctions indéterminées des coefficients l de l'adjointe.

Supposons par exemple que, pour une transformation singulière quelconque, il y ait trois racines de l'équation de Killing différant entre elles de multiples de $2i\pi$, et deux autres racines différant entre elles de multiples de $2i\pi$. L'équation déterminante de l'adjointe aura donc une racine triple et une racine double (se comportant comme des racines simples, puisque la transformation est singulière de seconde espèce). Par un choix convenable des variables, cette adjointe peut donc être mise sous la forme

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}, \tag{1}$$

tous les coefficients étant nuls sauf ceux de la diagonale principale, trois de ces derniers étant égaux à a et deux à b.

Soit e^V la transformation qui correspond à cette adjointe.

Reprenons la terminologie de la fin du paragraphe I. Pour définir V il faut se donner d'abord les racines de l'équation de Killing; ici, trois de ces racines sont égales à trois déterminations différentes de $\log a$; et deux, à deux déterminations différentes de $\log b$. Il faut se donner ensuite *les opérateurs conjugués du premier ordre* correspondant à ces diverses racines. Mais ici ces opérateurs ne sont pas entièrement déterminés; nous savons seulement que les

[1] *Œuvres* de H. Poincaré, ce tome, p. 232.

trois premiers (correspondant à $\log a$) sont de la forme

$$t_1X_1+t_2X_2+t_3X_3$$

et les deux suivants (correspondant à $\log b$) de la forme

$$t_4X_4+t_5X_5.$$

Les opérateurs conjugués n'étant pas entièrement déterminés, les v ne le sont pas davantage, ce sont des fonctions indéterminées des coefficients de l'adjointe et c'est pour cette raison (Palerme, p. 338) que ce sont également des fonctions indéterminées des u et des w.

Une remarque avant d'aller plus loin; l'analyse précédente suppose que les racines de l'équation de Killing sont simples ou se comportent comme des racines simples.

On verra plus loin comment l'analyse devrait être modifiée s'il n'en était pas ainsi.

Envisageons maintenant, non plus la transformation singulière elle-même, mais une transformation très peu différente. Dans ce cas l'indétermination disparaît. Si donc e^{V_0} est une transformation singulière et A_0 son adjointe, A_0 ne suffira pas pour déterminer V_0; mais si e^V est une transformation non singulière ayant pour adjointe A, et si nous faisons varier V et A en les faisant tendre vers les limites V_0 et A_0, V_0 sera déterminé quand on connaîtra la suite des valeurs de A et la façon dont A a tendu vers A_0.

Par exemple, dans le groupe des rotations, toute rotation d'un angle 2π a pour adjointe la substitution identique; la connaissance de cette adjointe ne détermine donc pas la rotation, puisque nous ignorons la direction de l'axe de rotation; mais si nous savons de plus que cette rotation est la limite pour $\varepsilon=0$ d'une rotation d'un angle $2\pi+\varepsilon$, la rotation sera déterminée puisqu'elle aura pour axe la limite vers laquelle tend l'axe de la rotation $2\pi+\varepsilon$.

Supposons que l'adjointe A_0 soit représentée par le tableau (1), une adjointe A infiniment peu différente s'obtiendra en combinant A_0 avec une substitution infinitésimale du groupe adjoint. Cette substitution infinitésimale correspondra à la transformation infinitésimale e^U du groupe paramétrique et s'écrira

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} 1+b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots \\ b_{21} & 1+b_{22} & b_{23} & \dots \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

les lettres b_{ik} ayant même signification qu'au paragraphe I; mais les v doivent y être remplacées par les u (puisque notre transformation est désignée par e^U);

on aura donc

$$b_{ik}=\Sigma c_{sik}u_s$$

et les u seront des quantités très petites.

Alors A, qui correspond à la transformation $e^V=e^{V_0}e^U$ du groupe paramétrique, s'écrira

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} a+ab_{11} & ab_{12} & ab_{13} & \dots \\ ab_{21} & a+ab_{22} & ab_{23} & \dots \\ ab_{31} & ab_{32} & a+ab_{33} & \dots \\ bb_{41} & bb_{42} & bb_{43} & \dots \\ bb_{51} & bb_{52} & bb_{53} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Il s'agit maintenant de former les opérateurs conjugués relatifs à cette nouvelle transformation. Formons pour cela l'équation déterminante en S, en ajoutant S à tous les termes de la diagonale principale du tableau (3) et égalant à zéro le déterminant ainsi obtenu. A chaque racine de cette équation en S, correspondra nu opérateur conjugué $T=\Sigma t_iX_i$ défini par les équations suivantes:

$$(4)\qquad \begin{cases} \dots & \\ (a+ab_{11}+S)t_1+ab_{12}t_2+ab_{13}t_3+\dots=0, \\ ab_{21}t_1+(a+ab_{22}+S)t_2+ab_{23}t_3+\dots=0, \\ ab_{31}t_1+ab_{32}t_2+(a+ab_{33}+S)t_3+\dots=0, \\ bb_{41}t_1+bb_{42}t_2+bb_{43}t_3+(b+bb_{44}+S)t_4+\dots=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Envisageons en particulier celles des racines de l'équation en S qui sont voisines de $-a$ et qui sont au nombre de 3; posons donc

$$S=-a-\sigma,$$

σ étant très petit. Considérons la quatrième équation (4); les b_{ik} étant très petits ainsi que σ, tous les coefficients de cette équation sont très petits, sauf celui de t_4 qui s'écrit

$$b+bb_{44}-a-\sigma$$

et qui est très voisin de $b-a$; cette équation donne donc sensiblement

$$t_4=0$$

et l'on trouverait de même

$$0=t_5=t_6=\dots$$

Dans ces conditions les trois premières équations (4) peuvent s'écrire (en divisant par a)

$$(5)\qquad \begin{cases} (b_{11}-\sigma)t_1+b_{12}t_2+b_{13}t_3=0, \\ b_{21}t_1+(b_{22}-\sigma)t_2+b_{23}t_3=0, \\ b_{31}t_1+b_{32}t_2+(b_{33}-\sigma)t_3=0, \end{cases}$$

ce qui détermine à la fois σ et T. Ainsi les opérateurs conjugués de V_0 et par conséquent V_0 lui-même se trouveront entièrement déterminés quand nous saurons que e^{V_0} est la limite de $e^V = e^{V_0}e^U$ et que nous nous donnons la transformation infinitésimale U. Si nous ne connaissions pas U, nous saurions seulement que les trois premiers de ces opérateurs conjugués sont de la forme

$$t_1X_1 + t_2X_2 + t_3X_3.$$

Les indéterminées t_1, t_2, t_3, dépendent de U et nous voyons qu'ils dépendent seulement des b_{ik}, où les indices i et k prennent les valeurs 1, 2 et 3.

Si j'élimine les t entre les équations (5) j'obtiendrai une équation du troisième degré en σ, présentant quelque analogie avec l'équation de Killing. Si alors l'équation en S relative à A_0 admet h racines distinctes, a, b, etc..., il y aura h équations en σ et le degré de chacune d'elles sera l'ordre de multiplicité de la racine correspondante; par exemple pour celle que nous venons de former, elle est du troisième degré parce qu'elle correspond à la racine a qui est triple. D'autre part, les b_{ik} étant des fonctions linéaires des u, le premier membre de l'équation en σ sera un polynome entier homogène par rapport à σ et aux u.

Nous pouvons maintenant répondre à la question : *comment s'échangent entre elles les différentes déterminations quand on tourne autour d'une transformation singulière?*

Soit

$$e^Z e^W = e^V$$

et regardons les v comme fonctions des z et des w; je suppose que pour $W = W_0$, on ait $V = V_0$ et que e^{V_0} soit une transformation singulière ayant pour adjointe A_0. Donnons à W des valeurs voisines de W_0, et pour cela faisons

$$e^W = e^{W_0}e^U, \qquad e^V = e^{V_0}e^U,$$

U étant infinitésimale. Nous nous demandons si les diverses déterminations de V s'échangent quand W tourne autour de W_0, c'est-à-dire quand U tourne autour de O. Ces déterminations s'échangeront si les opérateurs conjugués s'échangent.

Les seuls opérateurs conjugués qui puissent s'échanger entre eux sont ceux qui correspondent à des racines égales de l'équation en S de A_0, c'est-à-dire ceux qui correspondent à une même équation en σ. Tout revient donc à savoir si deux racines d'une des équations en σ s'échangent quand on fait varier les u; c'est ce qui arrivera certainement si cette équation est irréductible.

Reprenons le groupe des rotations et envisageons une rotation d'un angle π; les racines de l'équation de Killing sont $i\pi$, 0 et $-i\pi$. Deux d'entre elles diffèrent de $2i\pi$; on pourrait donc croire que la transformation est singulière. Ici l'équation en S de A_0 a deux racines égales à -1 et une à $+1$. Le tableau des b_{ik} s'écrit

$$\begin{vmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{vmatrix};$$

l'adjointe A_0 s'écrit

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{vmatrix};$$

celui des coefficients des équations (4)

$$\begin{vmatrix} -1+S & u_3 & -u_2 \\ -u_3 & -1+S & u_1 \\ -u_2 & u_1 & -1+S \end{vmatrix}.$$

On obtient deux équations en σ, l'une en faisant $S = +1-\sigma$, correspondant à la racine double -1, l'autre en faisant $S = -1-\sigma$, correspondant à la racine simple $+1$; la seconde de ces équations est tout simplement $-\sigma = 0$; et la première est

$$\begin{vmatrix} -\sigma & -u_3 \\ u_3 & -\sigma \end{vmatrix} = (\sigma^2 + u_3^2) = 0.$$

Comme le premier membre se décompose en deux facteurs linéaires $\sigma \pm iu_3$, il ne peut pas y avoir d'échange entre les racines, et la transformation n'est pas effectivement singulière. Si nous prenons au contraire une rotation d'un angle 2π, il y a une racine triple égale à 1, et une seule équation en σ qui s'écrit

$$\sigma(\sigma^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) = 0.$$

Les deux racines $\pm i\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$ pouvant s'échanger, la transformation est effectivement singulière.

Supposons que l'équation déterminante en S ait une racine double égale à 1, correspondant à deux racines de l'équation de Killing, l'une nulle et l'autre différente de zéro, égale par exemple à $2i\pi$; il ne peut y avoir d'échange entre ces deux racines, de sorte que la transformation ne sera pas effectivement singulière. Pour qu'une transformation soit singulière, il faut donc non seulement que deux des racines de l'équation de Killing diffèrent d'un multiple de $2i\pi$, mais que ces deux racines soient toutes deux différentes de zéro; il ne suffit

donc pas qu'une racine de l'équation de Killing devienne égale à un multiple de $2i\pi$, auquel cas, comme il y a toujours au moins une racine nulle, on pourrait dire que la différence de deux racines est multiple de $2i\pi$.

Soit A_0 une adjointe, correspondant à une transformation singulière, celle du tableau (1) par exemple.

$$e^{v_3}, \quad e^{v_4}, \quad e^{v_5}, \quad \ldots,$$

différentes transformations admettant cette même adjointe; on peut en trouver une infinité puisque les v sont des fonctions indéterminées. Je dis que les puissances de ces diverses transformations appartiennent toutes à un même sous-groupe que nous allons étudier. Soient

$$B, \quad B', \quad B'', \quad \ldots$$

les adjointes de

$$e^{\alpha v_3}, \quad e^{\alpha' v_4}, \quad e^{\alpha'' v_5}, \quad \ldots,$$

où α, α', α'' sont des nombres quelconques.

Il est clair que toutes ces adjointes jouiront d'une propriété commune; celle de transformer tout opérateur de la forme

$$t_1 X_1 + t_2 X_2 - t_3 X_3 \quad \text{ou} \quad t_1 X_1 + t_2 X_2,$$

par exemple, en un opérateur de la même forme, et que cette propriété commune définit un sous-groupe dans le groupe adjoint, et un sous-groupe correspondant (que j'appellerai Γ) dans le groupe paramétrique.

Reprenons la transformation infinitésimale e^U, dont nous avons parlé plus haut, et son adjointe; supposons qu'elle appartienne au sous-groupe Γ. Dans ce cas tous les b_{ik} sont nuls, à moins que les indices i et k ne soient égaux tous deux à 1, 2, ou à 3, ou bien tous deux à 4 ou à 5, ..., ou, plus généralement, ne correspondent à deux racines égales de l'équation déterminante en S, c'est-à-dire à deux termes égaux de la diagonale principale du tableau (1)

Si nous formons ensuite l'équation de Killing relative à cette transformation e^U, je vois qu'elle se décompose en autant de facteurs qu'il y a de racines distinctes dans l'équation déterminante en S; quelle relation y a-t-il entre ces différents facteurs et les différentes équations en σ que nous venons de former? C'est ce que nous expliquerons plus loin, dans un cas plus général, au paragraphe VIII.

Si nous revenons encore au groupe des rotations : pour une rotation d'un angle 2π, toutes les racines de l'équation en S sont égales à 1, et le sous-groupe Γ ne diffère pas du groupe total; pour une rotation d'un angle π, deux racines

seulement sont égales entre elles, et égales à -1; le groupe Γ comprend toutes les rotations possibles autour d'un axe déterminé, l'axe des z par exemple; dans le premier cas, l'équation de Killing du sous-groupe Γ est la même que pour le groupe total

$$\xi(\xi^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) = 0$$

et elle n'est pas décomposable en facteurs linéaires : la transformation est effectivement singulière; dans le second cas, cette équation se réduit à

$$\xi(\xi^2 + v_3^2) = 0$$

et elle est décomposable en facteurs linéaires : la transformation n'est pas effectivement singulière.

Remarquons maintenant qu'il peut très bien se faire qu'une transformation ne soit pas *effectivement singulière*, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas échange entre les valeurs des v quand on fait décrire aux u et aux w des contours fermés infiniment petits, et que cependant elle soit *quasi singulière*, je veux dire que les v soient des *fonctions indéterminées* des u et des w; ou, ce qui revient au même, soient des fonctions indéterminées des coefficients de l'adjointe. On peut en citer un exemple simple; considérons le groupe des transformations

$$(x, ax + b);$$

il dérive des deux transformations infinitésimales

$$[x, (1+\varepsilon)x], \quad (x, x+\varepsilon)$$

que j'appellerai X_1 et X_2. Alors, si l'on pose

$$(x, ax+b) = e^V, \qquad V = v_1 X_1 + v_2 X_2,$$

on a

$$a = e^{v_1}, \qquad b = (e^{v_1} - 1)\frac{v_2}{v_1},$$

d'où

$$v_1 = u_1 + w_1, \qquad \frac{v_2}{v_1}(e^{v_1} - 1) = (e^{v_1} - e^{w_1})\frac{u_2}{u_1} + (e^{w_1} - 1)\frac{w_2}{w_1}.$$

Cette formule nous montre que les v sont des fonctions uniformes de u et des w, mais en même temps que ces fonctions peuvent devenir indéterminées; c'est ce qui arrive quand v_1 et w_1 sont multiples de $2i\pi$.

Nous avons dit plus haut que si une racine de l'équation de Killing était nulle et une autre multiple de $2i\pi$, sans que la différence de deux racines, distinctes l'une et l'autre de zéro, devint égale à un multiple de $2i\pi$, cela ne suffisait pas

pour que la transformation pût être effectivement singulière; mais en revanche elle peut être quasi singulière, l'exemple précédent le prouve suffisamment.

Enfin, il peut arriver que la différence de deux racines de l'équation de Killing soit multiple de $2i\pi$, sans que la transformation soit singulière, ni quasi singulière; c'est ce que prouve l'exemple ci-dessus des rotations de 180°.

Reprenons le groupe paramétrique G; son groupe adjoint G_α; le sous-groupe Γ défini plus haut et contenu dans G; et le sous-groupe Γ_α qui lui correspond dans G_α. Les substitutions de Γ_α sont linéaires; de plus, si le groupe G est d'ordre r, il y a r variables, mais ces variables se répartissent en autant de systèmes qu'il y a de racines distinctes dans l'équation déterminante en S. Chaque substitution linéaire de Γ_α résulte de la combinaison de substitutions linéaires partielles, chacune de ces substitutions linéaires partielles portant sur les variables d'un seul système. C'est là, on s'en souvient, la définition même de Γ. Ainsi, si l'on se reporte au tableau (1), chaque substitution de Γ_α se décompose : 1° en une substitution linéaire portant seulement sur v_1, v_4, v_5; 2° en une substitution linéaire portant seulement sur v_2, v_3, etc. Alors les substitutions linéaires partielles portant seulement sur v_1, v_2, v_3, par exemple, formeront un groupe que j'appellerai H_α; ce groupe sera isomorphe à Γ_α, mais l'isomorphisme pourra dans certains cas être mériédrique. Si nous formons le groupe adjoint de H_α, de façon à calculer les racines de l'équation de Killing relative au groupe H_α, nous arriverons au résultat suivant : Considérons le déterminant des coefficients d'une substitution linéaire infinitésimale de H_α; égalons ce déterminant à zéro après avoir ajouté $-(1+\sigma)$ aux termes de la diagonale principale, nous obtiendrons une certaine équation en σ. Nous distinguerons ainsi 3 équations, à savoir : l'équation (a), c'est-à-dire l'équation de Killing relative au groupe G; l'équation (b), c'est-à-dire l'équation de Killing relative au groupe H_α; et enfin l'équation en σ, que nous appellerons (c). Nous formerons ces équations pour une transformation quelconque de G et pour la substitution correspondante de H_α.

Nous trouverons alors que les racines de (c) sont quelques-unes des racines de (a) (à savoir celles qui deviennent égales entre elles et à α pour la transformation singulière qui nous a servi de point de départ); chaque racine de (b) est égale à la différence de deux racines de (c) [deux racines de (c) n'étant pas nécessairement distinctes, une des racines de (b) est toujours nulle]. Or, pour notre transformation singulière, les racines de (c) deviennent égales entre elles à des multiples près de $2i\pi$; donc toutes les racines de (b) sont égales à des

multiples de $2i\pi$, de sorte que la transformation correspondante de H_α est spéciale.

Les transformations singulières de G *correspondent donc aux transformations spéciales de* H_α.

Reprenons : notre transformation singulière e^{V_0}, son adjointe A_θ, les autres transformations singulières $e^{V'_0}$, qui ont même adjointe et qui appartiennent comme e^{V_0} au sous-groupe Γ, la transformation infinitésimale e^U, la transformation finie $e^V = e^{V_0}e^U$, qui a pour adjointe A et qui tend vers $e^{V'_0}$ quand U tend vers zéro. Nous avons vu plus haut comment on forme les opérateurs conjugués de V'_0 en formant les tableaux (2) et (3) et les équations (4) et (5). Dans le cas où e^U appartient au sous-groupe Γ (c'est-à-dire où $b_{ik}=0$, à moins que les deux indices i et k ne se rapportent à des variables d'un même système), le résultat peut s'énoncer comme il suit : *les opérateurs conjugués de* V'_0 *sont les mêmes que ceux de* U. Il en résulte que V'_0 et U sont permutables.

Donc, parmi les transformations singulières qui ont pour adjointe A_θ, il en existe toujours une qui est permutable à une substitution donnée e^U (d'ailleurs quelconque) du sous-groupe Γ.

Si, en particulier, toutes les racines de l'équation déterminante en S sont égales : l'adjointe A_θ se réduit à la substitution identique; la transformation singulière e^{V_0} devient une transformation spéciale; le sous-groupe Γ n'est autre chose que le groupe G lui-même. Donc, *si un groupe* G *contient des transformations spéciales, il en contient une qui est permutable à l'une quelconque de ses transformations.*

Ou bien considérons un groupe G; prenons dans ce groupe deux transformations e^{T_1} et e^{T_2}, la seconde tout à fait quelconque, la première assujettie aux conditions que ses racines de Killing se comportent comme des racines simples et que le rapport de deux quelconques d'entre elles soit commensurable; alors il y aura toujours dans le groupe une transformation permutable à e^{T_2} et ayant mêmes racines pour l'équation de Killing que e^{T_1}; et en effet une des puissances de e^{T_1} est une transformation spéciale ou quasi spéciale.

VII. — Discussion des équations différentielles.

Dans le paragraphe précédent, nous avons étudié la façon dont se comportent les fonctions v dans le voisinage d'une transformation singulière, au moins dans

le cas où toutes les racines de l'équation de Killing se comportent comme des racines simples; pour cela nous nous sommes servis des équations finies du groupe; il conviendrait de reprendre cette étude en se servant des équations différentielles. Nous nous rappelons quelle est la forme de ces équations; si T étant infinitésimale on a

$$e^{V} e^{T} = e^{V+dV},$$

on peut exprimer $\frac{dv_i}{dt_k}$ en fonction des v et l'on trouve, k étant fixé,

$$\frac{dv_i}{dt_k} = A_i - \Sigma B_i \frac{1}{(1-e^{-\omega_k})\omega}. \tag{1}$$

Les A et les B sont des fonctions algébriques des v; de plus ω_k est l'une des racines de l'équation de Killing et m est un entier positif qui sera égal à 1, si, comme nous le supposons, toutes les racines de l'équation de Killing se comportent comme des racines simples.

Les seconds membres ne peuvent devenir infinis que si ω_k est un multiple de $2i\pi$.

Donc, *une transformation ne peut devenir singulière que si une des racines de l'équation de Killing est multiple de* $2i\pi$. Ainsi, pour une rotation de 180° les trois racines de l'équation de Killing sont

$$-i\pi, \quad 0, \quad i\pi;$$

la différence de deux entre elles est $2i\pi$ (ce qui est la condition que nous avions envisagée jusqu'ici), mais aucune d'elles n'est multiple de $2i\pi$, et c'est pour cette raison qu'elle n'est pas effectivement singulière.

Soit φ une fonction algébrique quelconque des v; on aura évidemment, pour tout t fixé,

$$\frac{d\varphi}{dt} = A' + \Sigma B' \frac{1}{(1-e^{-\omega_k})\omega}, \tag{2}$$

où

$$A' = A_1 \frac{d\varphi}{dv_1} + A_2 \frac{d\varphi}{dv_2} + \ldots + A_r \frac{d\varphi}{dv_r},$$
$$B' = B_1 \frac{d\varphi}{dv_1} + B_2 \frac{d\varphi}{dv_2} + \ldots + B_r \frac{d\varphi}{dv_r}$$

sont des fonctions algébriques des v. De plus, si φ et ses dérivées restent finies, les seconds membres ne pourront devenir infinis que pour $e^{-\omega_k} = 1$.

Si cette condition est remplie, ou près de l'être, on se trouve dans le voisinage d'une transformation singulière ou quasi singulière. Supposons donc que $1 - e^{-\omega_k}$ soit une quantité très petite de l'ordre de ε et qu'il en soit de

même de t_k: on aura alors sensiblement (m étant égal à 1)

$$d\varphi = B' \frac{t_k}{1-e^{-\omega_k}},$$

de sorte que $d\varphi$ sera fini, à moins que B' ne soit nul.

Les deux transformations e^{V} et e^{V+dV} différeront donc d'une quantité finie.

Cela tient à ce qu'elles sont infiniment voisines de deux transformations singulières e^{V_0} et $e^{V_0+dV_0}$; mais *ces deux transformations doivent avoir même adjointe*.

Si donc φ est un des coefficients de l'adjointe, ou une fonction bien déterminée des coefficients de l'adjointe, $d\varphi$ devra être infiniment petit, c'est-à-dire que B' devra être nul.

Supposons par exemple que ω soit une des racines de l'équation de Killing.

Si l'adjointe subit une variation infiniment petite, les racines de son équation en S, qui sont e^{ω}, subiront des variations infiniment petites et il en sera de même de ω. Si donc on prend $\varphi = \omega$, on devra avoir B' = 0. On a par suite

$$B_1 \frac{d\omega}{dv_1} + B_2 \frac{d\omega}{dv_2} + \ldots + B_r \frac{d\omega}{dv_r} = 0. \tag{3}$$

Cette relation n'est ainsi établie que pour $\omega_k = 2ki\pi$; mais comme les B et ω sont des fonctions homogènes des v, elle devra subsister pour toutes les valeurs de ω_k.

Pour étudier cette relation cherchons à nous rendre compte de ce que sont les B_i. On a, par la formule (2) (Palerme, p. 331; voir aussi plus haut) (1)

$$dv_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int d\xi \frac{\xi}{1-e^{-\xi}} \Sigma \frac{t_j P_{ij}}{F(\xi)}.$$

Si nous envisageons une racine simple ω_k de l'équation de Killing $F(\xi) = 0$, cette racine nous donnera dans le second membre un terme

$$\frac{\omega_k}{1-e^{-\omega_k}} \Sigma \frac{t_j P_{ij}(\omega_k)}{F'(\omega_k)}.$$

Si ce terme était le seul qui devienne infini quand $e^{-\omega_k} - 1$ s'annule, les quantités B_i seraient simplement proportionnelles à $P_{ij}(\omega_k)$ et nous pourrions écrire, pour $t = t_j$,

$$P_{1j}(\omega_k)\frac{d\omega}{dv_1} + \ldots + P_{rj}(\omega_k)\frac{d\omega}{dv_r} = 0. \tag{4}$$

(1) *Œuvres* de H. Poincaré, ce tome, p. 223.

Mais il peut arriver que d'autres racines de Killing deviennent multiples de $2i\pi$ toutes les fois que ω_h est lui-même multiple de $2i\pi$, par exemple s'il y a une racine qui est toujours multiple entier de ω_h, et par exemple égale à $-\omega_h$.

Si nous avons ainsi deux racines égales et de signe contraire ω_h et $-\omega_h$, il faut envisager les deux termes

$$\frac{\omega_h}{1-e^{-\omega_h}}\Sigma\frac{t_j P_{ij}(\omega_h)}{F'(\omega_h)}-\frac{\omega_h}{1-e^{\omega_h}}\Sigma\frac{t_j P_{ij}(-\omega_h)}{F'(-\omega_h)},$$

d'où

$$B_i=\omega_h\left[\frac{P_{ij}(\omega_h)}{F'(\omega_h)}+\frac{P_{ij}(-\omega_h)}{F'(-\omega_h)}\right].$$

On pourrait alors se demander si la relation (4) va subsister; pour s'en rendre compte, il faut examiner ce que représentent les quantités $P_{ij}(\omega_h)$; si les racines de l'équation de Killing se comportent comme des racines simples, il existe r opérateurs (dits conjugués du premier ordre)

$$U^{(h)}=\Sigma u_i^h X_i \qquad (h=1,2,\ldots,r),$$

tels que

$$(VU^{(h)})=\omega_h U^{(h)}$$

ou

$$\Sigma_i b_{ik} u_i^h=\omega_h u_k^h. \tag{5}$$

Si nous formons le déterminant Δ des r^2 coefficients u_i^h, ce déterminant ne sera pas nul et nous envisagerons les mineurs

$$\tau_i^h=\frac{\partial\Delta}{\partial u_i^h}.$$

Nous pourrons même, sans restreindre la généralité, supposer $\Delta=1$, puisque les coefficients u ne sont déterminés que par leurs rapports.

Cela posé, cherchons à déterminer deux opérateurs Y et Z satisfaisant à l'identité

$$(VY)=\xi Y+Z, \tag{6}$$

ce qui peut encore s'écrire

$$y_i F(\xi)=\Sigma P_{ij} z_j. \tag{7}$$

Supposons que l'on ait

$$Y=\lambda U^{(h)}+\varepsilon W, \qquad \xi=\omega_h+\varepsilon, \qquad Z=\varepsilon Z',$$

ε étant un coefficient constant très petit; nous aurons sensiblement, en supposant ω_h racine simple,

$$y_i F'(\omega_h)=\Sigma z_j P_{ij}(\omega_h).$$

On voit ainsi que λ doit être une fonction linéaire des z_i'

$$\lambda=\Sigma\lambda_j z_j'$$

et il vient (en faisant tendre ε vers zéro)

$$P_{ij}(\omega_h)=F'(\omega_h)\lambda_j u_i^h.$$

Il reste à déterminer λ; pour cela nous avons la relation

$$(VW)=\omega_h W+\lambda U^{(h)}+Z', \tag{6 bis}$$

qui se déduit de l'identité (6) en négligeant les puissances supérieures de ε.

Supposons que tous les z_i' soient nuls sauf z_j', et que $z_j'=1$; de sorte que

$$Z'=X_j, \qquad \lambda=\lambda_j.$$

Soit ensuite

$$W=\Sigma_k\mu_k U^{(k)}.$$

Remarquons que la résolution des équations linéaires

$$U^{(h)}=\Sigma u_i^h X_i$$

va nous donner

$$X_i=\Sigma\tau_i^h U^{(h)},$$

de sorte que

$$Z'=X_j=\Sigma\tau_j^k U^{(k)},$$

Si donc nous remplaçons dans (6 *bis*) W et Z' par leurs valeurs, il vient

$$\Sigma\omega_k\mu_k U^{(k)}=\omega_h\Sigma\mu_k U^{(k)}+\lambda_j U^{(h)}+\Sigma\tau_j^k U^{(k)},$$

ou, en égalant le coefficient de $U^{(h)}$,

$$0=\lambda_j+\tau_j^h,$$

d'où

$$P_{ij}(\omega_h)=-F'(\omega_h)\tau_j^h u_i^h$$

et

$$B_i=-\omega_h(\tau_j^h u_i^h-\tau_i^{h'} u_i^{h'}),$$

l'indice h' étant celui qui correspond à la racine $-\omega_h$. Notre relation (33) (qui doit avoir lieu quel que soit j) devient alors

$$-\omega_h\tau_j^h\Sigma u_i^h\frac{d\omega}{dv_i}+\omega_h\tau_j^{h'}\Sigma u_i^{h'}\frac{d\omega}{dv_i}=0.$$

Mais les coefficients τ_j^h ne sont pas proportionnels aux coefficients $\tau_j^{h'}$; sans quoi le déterminant Δ serait nul. On aura donc séparément

$$\Sigma u_i^h\frac{d\omega}{dv_i}=\Sigma u_i^{h'}\frac{d\omega}{dv_i}=0,$$

c'est-à-dire que la relation (4) sera vraie séparément pour la racine ω_k et pour la racine $-\omega_k$, puisque les $P_{ij}(\omega_k)$ sont entre eux comme les u_i^k et que les $P_{ij}(-\omega_k)$ sont entre eux comme les $u_i^{k'}$.

Il est aisé de démontrer la relation (4) dans des cas plus compliqués. Si par exemple on avait à la fois les racines $\pm\alpha$ et $\pm 2\alpha$, on commencerait par donner aux v des valeurs telles que 2α soit multiple *impair* de $2i\pi$; alors les racines $\pm\alpha$ n'interviendraient pas et l'on démontrerait comme plus haut les relations (4) pour $\omega_k = 2\alpha$ et pour $\omega_k = -2\alpha$. Cela fait, on donnerait aux v des valeurs telles que α soit multiple de $2i\pi$ et l'on démontrerait ensuite aisément les équations (4) pour $\omega_k = \pm\alpha$. On pourrait aussi faire directement la démonstration, par un procédé tout semblable à celui qui précède (B_i étant une combinaison de quatre termes de la forme $\tau_j^h u_i^h$ au lieu de deux seulement).

La relation (4) est donc générale; elle a lieu quelles que soient les racines ω et ω_h, que ces racines soient identiques ou distinctes (le cas de $\omega_h = 0$ devant être exclu). Revenons maintenant aux équations (1), où nous supposons toujours $m = 1$.

Donnons aux v des valeurs qui rendent une racine multiple de $2i\pi$; généralement d'autres racines deviendront en même temps multiples de $2i\pi$. Soit

$$\omega_h = m_h \alpha$$

ces racines, où m_h est un entier positif ou négatif et α la commune mesure de toutes ces racines, laquelle doit être elle-même un multiple de $2i\pi$; nous continuerons à désigner ces racines par ω_h, et nous désignerons par ω_k les racines qui ne deviennent pas multiples de $2i\pi$.

Si α est très voisin d'un multiple de $2i\pi$, les termes qui contiennent au dénominateur une expression de la forme $1 - e^{-\omega_h}$ seront seuls sensibles; si l'on a $e^\alpha = 1 + \varepsilon$, on aura très sensiblement

$$1 - e^{-\omega_h} = m_h \varepsilon$$

et les équations (1) se réduiront sensiblement à

$$\frac{dv_i}{dt_k} = -\Sigma \omega_h \frac{\tau_k^h u_i^h}{m_h \varepsilon}$$

ou, en posant $dt_k = \varepsilon\, ds_k$,

$$\frac{dv_i}{ds_k} = -\Sigma \omega_h \frac{\tau_k^h u_i^h}{m_k}. \tag{8}$$

Les τ et les u peuvent être regardés comme des fonctions algébriques des v, de sorte que ces équations (8) nous représentent des équations différentielles auxquelles doivent satisfaire les v. Quelle est la signification de ces équations différentielles?

On voit que, si ds_k est un infiniment petit de l'ordre de ζ, et par conséquent dt_k un infiniment petit de l'ordre de $\varepsilon\zeta$, dv sera un infiniment petit de l'ordre de ζ; de sorte que les deux transformations e^V et e^{V+dV} différeront d'infiniment petits de l'ordre de ζ, tandis que leurs *adjointes* différeront d'infiniment petits de l'ordre de $\varepsilon\zeta$, *c'est-à-dire d'ordre supérieur*.

Donc, quand les v varieront de façon à satisfaire aux équations différentielles (8), l'adjointe de e^V ne variera pas. Si donc nous considérons les différentes transformations singulières qui ont même adjointe, les équations différentielles (8) nous feront passer des unes aux autres d'une façon continue.

Prenons encore un instant pour exemple le groupe des rotations, et soit

$$v_1 = \alpha\theta, \qquad v_2 = \beta\theta, \qquad v_3 = \gamma\theta,$$

α, β, γ étant les cosinus directeurs de l'axe de rotation et 2θ l'angle de rotation; on aura pour les équations (8)

$$\frac{dv_1}{ds_1} = \beta^2 + \gamma^2, \qquad \frac{dv_2}{ds_1} = -\alpha\beta, \qquad \frac{dv_3}{ds_1} = -\alpha\gamma,$$
$$\frac{dv_1}{ds_2} = -\alpha\beta, \qquad \frac{dv_2}{ds_2} = \alpha^2 + \gamma^2, \qquad \frac{dv_3}{ds_2} = -\alpha\gamma,$$
$$\frac{dv_1}{ds_3} = -\alpha\gamma, \qquad \frac{dv_2}{ds_3} = -\beta\gamma, \qquad \frac{dv_3}{ds_3} = \alpha^2 + \beta^2$$

et l'on verra que

$$v_1\, dv_1 + v_2\, dv_2 + v_3\, dv_3 = 0,$$

d'où $\theta = \text{const.}$ Le point représentatif restera constamment sur une sphère (dont le rayon devra être multiple de $i\pi$) et aux différents points de cette sphère correspondront diverses transformations qui auront même adjointe et qui seront d'ailleurs spéciales.

Appelons V_{ik} le second membre de (8); l'équation (8) définit une transformation infinitésimale S_k qui change v_i en $v_i + ds_k V_{ik}$, et dépendant de l'opérateur

$$S_k = \Sigma V_{ik} \frac{df}{dv_i}.$$

Il importe de remarquer que les opérateurs S_k ne forment pas un groupe de Lie, comme on pourrait le croire, mais les opérateurs

$$\Phi S_k,$$

où Φ est une fonction arbitraire des v, forment un groupe continu *d'ordre infini*.

La condition pour qu'il en soit ainsi, c'est que l'on ait

$$(S_j S_k) = \Sigma \Phi_{jks} S_s. \tag{9}$$

les Φ_{jks} étant des fonctions des v. Pour le montrer, considérons un opérateur T_k du groupe G; on obtiendra l'opérateur correspondant S_k en multipliant T_k par

$$\varepsilon = e^{\alpha} - 1$$

et faisant tendre ensuite les v vers des limites telles que ε tende vers zéro. On a alors

$$\begin{cases} (T_j T_k) = \Sigma c_{jks} T_s, \\ (S_j S_k) = (\varepsilon T_j, \varepsilon T_k) = \varepsilon^2 (T_j T_k) + \varepsilon T_j(\varepsilon T_k) - \varepsilon T_k(\varepsilon T_j). \end{cases} \tag{10}$$

Or le crochet (εT_k) est une fonction des v et si, par exemple,

$$T_k = \Sigma \lambda_i \frac{df}{dv_i},$$

on aura

$$(\varepsilon T_k) = \Sigma \lambda_i \frac{d\varepsilon}{dv_i};$$

le crochet (εT_k) se présente comme une simple fonction des v, où ne figurent pas les dérivées $\frac{df}{dv}$. La relation (10) est donc bien de la forme (9) en prenant

$$\Phi_{jks} = c_{jks}, \quad (s \geq j,\ s \geq k),$$
$$\Phi_{jkj} = c_{jkj} + (\varepsilon T_k), \quad \Phi_{jkk} = c_{jkk} - (\varepsilon T_j). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ce résultat établi, voyons quelles en sont les conséquences. Dans l'espace à r dimensions, considérons un point $v_1, v_2, \ldots, v_r$, tel que α soit multiple de $2i\pi$; je l'appelle M_0. Prenons ensuite l'équation (8), pour chaque valeur de k elle définira une famille de courbes telle qu'il en passe une par chaque point de l'espace à r dimensions. Nous aurons donc r familles de courbes

$$F_1, \quad F_2, \quad \ldots, \quad F_r$$

correspondant aux valeurs

$$k = 1, \qquad k = 2, \qquad \ldots, \qquad k = r.$$

Par M_0 je fais passer une courbe C_1 de la famille F_1; par chacun des points de C_1 je fais passer une courbe de la famille F_2; l'ensemble de ces courbes engendrera une surface C_2, par les divers points de cette surface C_2 je fais passer des courbes de la famille F_3 qui vont engendrer une variété C_3 à deux ou trois dimensions, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'enfin par les divers points de la variété C_{r-1} je fasse passer des courbes de la famille F_r qui engendreront la variété C_r qui aura toujours moins de r dimensions.

Comme les opérateurs ΦS_k forment un groupe, cette variété C_r sera inaltérée par les transformations S_k, ce sera un invariant pour les équations (8); elle représente donc le lieu des points $c_1, c_2, \ldots, c_r$ qui correspondent aux diverses transformations singulières admettant une même adjointe.

Or le déterminant des τ_k^h n'étant pas nul, nous pouvons déduire des équations (8) certaines relations linéaires entre les dv_i, relations qui peuvent s'écrire

$$\begin{vmatrix} dv_1 & dv_2 & \ldots & dv_r \\ u_1^1 & u_2^1 & \ldots & u_r^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \ldots & u_r^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1^p & u_2^p & \ldots & u_r^p \end{vmatrix} = 0; \tag{11}$$

les quantités

$$u_i^1, \quad u_i^2, \quad \ldots, \quad u_i^p$$

correspondent aux p racines ω_h

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_p,$$

qui deviennent simultanément multiples de $2i\pi$.

Le tableau (11) a plus de colonnes que de lignes, et il faut entendre que tous les déterminants obtenus en supprimant un nombre convenable de colonnes dans le tableau (11) doivent être nuls à la fois. Cette équation (11) définit le plan tangent à la variété C_r, et ce « plan tangent » est une variété plane ayant autant de dimensions que C_r; or il en a p.

Donc le nombre des dimensions de C_r est égal au nombre p des racines qui deviennent simultanément multiples de $2i\pi$; et les transformations singulières qui admettent cette même adjointe sont au nombre de ∞^p. Si une seule racine devient multiple de $2i\pi$, la variété C_r se réduit à une simple courbe.

Au sous-groupe Γ du paragraphe précédent correspond dans l'espace à r dimensions une variété plane passant par l'origine et qui doit contenir la variété C_r.

Jusqu'ici nous avons supposé que les v n'étaient assujettis qu'à une seule condition; de telle façon que, seules deviennent multiples de $2i\pi$ diverses racines dont le rapport est constant et commensurable, à savoir celles qui sont égales à une certaine fonction des v, que nous avons appelée α, multipliée par l'entier m_h.

Considérons maintenant les racines qui sont de la forme

$$\omega_h = m_h \alpha + n_h \beta.$$

α et β sont deux fonctions déterminées des v; m_h et n_h, indépendantes l'une de l'autre, sont des entiers; nous appellerons ω_h les racines qui ne sont pas de cette forme. Si nous donnons aux v des valeurs telles que α et β soient multiples de $2i\pi$, il en sera de même de toutes les racines ω_h et nous obtiendrons une nouvelle catégorie de transformations singulières. Soit

$$e^{\alpha} = 1 + \varepsilon, \qquad e^{\beta} = 1 + \zeta_1;$$

ε et ζ étant très petits, les équations (1) se réduiront sensiblement à

$$\frac{dv_i}{dt_k} = -\sum \frac{\omega_h \tau_k^h u_i^h}{m_h \varepsilon + n_h \zeta}, \tag{12}$$

ou bien

$$\frac{dv_i}{dt_k} = -\sum \frac{\omega_h \tau_k^h}{m_h \varepsilon + n_h \zeta} \frac{dv_i}{ds_h}$$

avec

$$\frac{dv_i}{ds_h} = u_i^h. \tag{8 bis}$$

On aurait ainsi défini l'opérateur

$$S_h = \sum u_i^h \frac{df}{dv_i}$$

qui correspondrait à une transformation infinitésimale changeant v_i en

$$v_i + u_i^h \, ds_h.$$

Ici encore les opérateurs S_h ne forment pas un groupe, mais les opérateurs ΦS_h où Φ est une fonction arbitraire des v, forment un groupe continu d'ordre infini; nous trouvons en effet, en résolvant les équations (1) par rapport aux u_i^h et aux u_i^r

$$u_i^h = (1 - e^{-\omega_h}) \sum A_{k,h} \frac{dv_i}{dt_k},$$

les $A_{k,h}$ étant des fonctions des v dépendant des indices k et h, mais indépendantes de l'indice i, ou bien encore

$$S_h = (1 - e^{-\omega_h}) \sum A_{k,h} T_k.$$

En se servant de cette formule [par un raisonnement analogue à celui qui précède et où intervenaient les équations (9) et (10)], on établirait que les ΦS_h forment un groupe et l'on en conclurait que les équations analogues aux équations (11)

$$\begin{vmatrix} dv_1 & dv_2 & \dots & dv_r \\ u_1^h & u_2^h & \dots & u_r^h \end{vmatrix} = 0, \tag{11 bis}$$

où h prend p valeurs distinctes s'il y a p racines qui deviennent multiples de $2i\pi$, où par conséquent le premier membre est un tableau à r colonnes et $p+1$ lignes, on en conclurait, dis-je, que ces équations définissent une variété qui n'est autre que C_r et qui a précisément p dimensions. Ce seraient donc les mêmes résultats que dans le cas simple examiné d'abord.

Considérons par exemple le groupe linéaire fractionnaire à deux variables

$$\left[x, y; \frac{ax + by + c}{a''x + b''y + c''}, \frac{a'x + b'y + c'}{a''x + b''y + c''}\right].$$

Il est d'ordre 8. Si α, β, γ sont les trois racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} a - S & b & c \\ a' & b' - S & c' \\ a'' & b'' & c'' - S \end{vmatrix} = 0,$$

les huit racines de l'équation de Killing sont

$$0, \quad 0, \quad \alpha - \beta, \quad \alpha - \gamma, \quad \beta - \alpha, \quad \beta - \gamma, \quad \gamma - \alpha, \quad \gamma - \beta.$$

Si l'on a

$$\alpha = \beta$$

(je veux dire par là que α est égal à β plus un multiple de $2i\pi$), on aura

$$\alpha - \beta = \beta - \alpha = 0$$

et l'on aura une première famille de transformations singulières, la variété C_r étant à deux dimensions. Si l'on a

$$\alpha = \beta = \gamma,$$

toutes les racines non nulles sont multiples de $2i\pi$ et l'on a une seconde famille de transformations singulières, d'ailleurs spéciales, pour lesquelles la variété C_r est à six dimensions.

VIII. — Cas des racines multiples.

Dans les deux paragraphes précédents, nous avons toujours supposé que les racines de l'équation de Killing se comportaient comme des racines simples; qu'y aurait-il à changer s'il n'en était pas ainsi? L'adjointe A_θ ne pourrait plus en général être ramenée par un choix convenable des variables à la forme du tableau (1) du paragraphe VI. Elle peut toutefois être ramenée à une autre forme canonique.

Considérons le groupe des substitutions linéaires permutables à A_0.

Le groupe commun à ce groupe et au groupe adjoint s'appellera Γ_2; de sorte que les substitutions de Γ_2 feront partie du groupe adjoint et seront permutables à A_0 (qui est par définition l'adjointe de $e^{V_1}, e^{V_2}, \ldots$), mais pourront ne pas l'être aux adjointes de $e^{\alpha V_1}, e^{\beta V_2}, \ldots$. Le groupe paramétrique G étant isomorphe à son groupe adjoint, au sous-groupe Γ_2 du groupe adjoint correspondra dans le groupe G un sous-groupe que j'appelle Γ.

Il est clair alors que $e^{\alpha V_1}, e^{\beta V_2}, \ldots$ feront partie de Γ, de sorte que ce sous-groupe joue bien le même rôle que le groupe du même nom dans le paragraphe VI.

Soit alors e^U une transformation infinitésimale quelconque du groupe G; posons

$$e^V = e^{V_0} e^U;$$

e^V aura une adjointe A très peu différente de A_0; quand U tendra vers zéro, V tendra vers un certain opérateur V'_0, et A vers A_0, de sorte que la transformation limite $e^{V'_0}$ aura pour adjointe A_0.

Quand on connaît la façon dont U tend vers zéro, les opérateurs conjugués de V'_0 se trouvent entièrement déterminés, et il en est de même de V'_0 lui-même. Cela se verrait par une analyse toute pareille à celle du paragraphe VI. Si en particulier e^U fait partie de Γ, le résultat s'énonce très simplement; les opérateurs conjugués de V, et à la limite ceux de V'_0, sont les mêmes que ceux de U. En effet, si e^U fait partie de Γ, son adjointe B est permutable à A_0; je dis à A_0 et non à l'adjointe de $e^{\alpha V_0}$.

Cela veut dire que les deux substitutions linéaires A_0 et B (à r variables) admettent des *séries régulières communes* comprenant ensemble r combinaisons linéaires (indépendantes entre elles) des variables. Et cela *au moins* d'une manière (*cf.* § I, *in fine*). Ces séries appartiendront également à leur résultante

$$A = A_0 B.$$

Elles nous donneront donc les opérateurs conjugués de e^V qui seront les mêmes que ceux de e^U.

Nous ne restreignons pas la généralité en supposant que e^U fait partie de Γ; je veux dire que si $e^{V'_0}$ est la limite de

$$e^{V_0} e^{\alpha U}$$

pour $\alpha = 0$, e^U ne faisant pas partie de Γ, nous pourrons trouver une substitution e^U faisant partie de Γ et telle que $e^{V'_0}$ soit également la limite de

$$e^{V_0} e^{\alpha U} \qquad (\alpha = 0).$$

Il suffit en effet de prendre $U' = V'_0$; car

$$e^{V_0} e^{\alpha V'_0} = e^{(\alpha+1)V'_0},$$

puisque ces deux transformations ont même adjointe et ne sont pas singulières; et pour $\alpha = 0$ il reste

$$\lim e^{V_0} e^{\alpha V'_0} = e^{V'_0}.$$

Supposons maintenant

$$e^{V'_0} = \lim e^{V_0} e^{\alpha U};$$

e^U ne faisant pas forcément partie de Γ, faisons varier U d'une manière continue et de façon à le faire revenir finalement à sa valeur initiale; dans quelles conditions les différentes déterminations de V'_0 pourront-elles s'échanger? Les coefficients de l'adjointe de $e^{V_0} e^{\alpha U}$ sont des fonctions uniformes des u, ils devront donc revenir à leurs valeurs initiales; il en est donc de même de *l'ensemble* des opérateurs conjugués de V'_0; ces opérateurs conjugués peuvent seulement s'échanger entre eux; les racines de l'équation de Killing d'autre part n'ont pas varié, car elles sont restées égales aux logarithmes des racines de l'équation en S de l'adjointe A_0.

Soient alors e^{B_0} et e^{B_1} les valeurs initiale et finale de $e^{V'_0}$; les racines de l'équation de Killing de B_0 seront alors $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ correspondant aux opérateurs conjugués $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$; les racines de l'équation de Killing de B_1 seront encore $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$, correspondant aux opérateurs conjugués $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ qui ne seront autre chose que les opérateurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, dans un autre ordre.

L'ensemble des opérateurs conjugués étant les mêmes pour e^{B_0} et pour e^{B_1}, ces deux transformations sont permutables et si nous considérons la transformation

$$e^{hB_1 + (1-h)B_0},$$

où h est un nombre arbitraire, cette transformation qui fait d'ailleurs partie de Γ a mêmes opérateurs conjugués que e^{B_0} et que e^{B_1}; quand nous ferons croître h depuis 0 jusqu'à 1, les opérateurs conjugués ne changeront pas, et les racines de l'équation de Killing varieront d'une manière continue; la transformation se réduit pour $h = 0$, à e^{B_0} et elle admet par conséquent les racines $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ correspondant aux opérateurs $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$; pour $h = 1$, elle se réduit à e^{B_1}, les opérateurs sont restés $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$, et les racines sont deve-

nues $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_r$. Comme nous sommes revenus à la transformation initiale, les racines ω' ne sont autre chose que les racines ω dans un autre ordre, de même que les μ ne sont autre chose que les λ dans un autre ordre; la correspondance entre les racines et les opérateurs doit être rétablie, de sorte que c'est la même permutation qui fait passer des ω aux ω', et des λ aux μ.

Ainsi donc, nous sommes partis de e^{B_i} et nous sommes allés à e^{B_i} en faisant

$$e^{V_k} = e^{V_k} e^{2U}$$

et faisant varier U d'une manière continue comme nous l'avons dit; puis nous sommes revenus de e^{B_i} à e^{B_i} en prenant

$$e^{kB_k + (1-k)B_i}.$$

Notre transformation n'a jamais cessé de faire partie de Γ *et les racines de l'équation de Killing se sont permutées.*

A tout échange entre deux déterminations de V'_0, correspond donc un échange entre deux racines de l'équation de Killing relative au sous-groupe Γ. Je veux dire l'équation obtenue en égalant à zéro le déterminant caractéristique relatif à ce sous-groupe; cette équation est de degré r et il ne faut pas la confondre avec l'équation de Killing du sous-groupe, obtenue en égalant à zéro le déterminant caractéristique du sous-groupe, et dont le degré est égal à l'ordre du sous-groupe. Pour ces distinctions, *voir* CARTAN, *Thèse inaugurale*, p. 28.

Réciproquement, si deux racines de cette équation s'échangent, deux des déterminations de V'_0 s'échangeront, sauf une restriction sur laquelle nous reviendrons.

Reprenons l'équation

$$e^{V_k} = e^{V_k} e^{2U}$$

et supposons maintenant que e^U fasse partie de Γ; alors les opérateurs conjugués de U sont les mêmes que ceux de V'_0. Si deux racines de U s'échangent, les opérateurs conjugués correspondants de U s'échangent également, de sorte que deux opérateurs de V'_0 s'échangent.

Si les deux opérateurs de V'_0 qui s'échangent ainsi correspondent à deux racines de l'équation de Killing de V'_0 (ou ce qui revient au même de V_0) qui ne sont pas égales, deux déterminations différentes de V'_0 se seront échangées. Il est clair d'ailleurs que si ces deux racines ne sont pas égales, leur différence doit être multiple de $2i\pi$, puisque ces deux déterminations différentes de e^{V_k} doivent avoir même adjointe.

Soit $F(\xi, v_1, v_2, \ldots, v_r)$ le premier membre de l'équation de Killing. Le sous-groupe Γ est caractérisé par un certain nombre de relations linéaires entre les v; à l'aide de ces relations, on peut exprimer les v en fonctions de m d'entre eux, par exemple de $v_1, v_2, \ldots, v_m$, m étant l'ordre du sous-groupe Γ.

On aura par exemple

$$v_{m+1} = z_{m+1}, \quad v_{m+2} = z_{m+2}, \quad \ldots, \quad v_r = z_r,$$

les z étant des fonctions linéaires de $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Nous obtiendrons ainsi l'équation

$$F(\xi, v_1, v_2, \ldots, v_m, z_{m+1}, \ldots, z_r) = 0$$

qui est *l'équation de Killing relative au sous-groupe* Γ et dont le premier membre est homogène de degré r par rapport à

$$\xi, \quad v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_m.$$

Si le premier membre se décompose en facteurs linéaires, il est impossible que deux de ses racines s'échangent entre elles; et par conséquent que deux déterminations de e^{V_k} s'échangent. La transformation e^{V_k} est seulement *quasi singulière*.

Supposons au contraire que le premier membre ne se décompose pas en facteurs linéaires et soit

$$\Phi(\xi, v_1, v_2, \ldots, v_m)$$

un facteur irréductible non linéaire, homogène d'ordre q par rapport à ξ et aux v.

Il est certain alors que les racines de $\Phi = 0$ sont susceptibles de s'échanger entre elles.

Alors plusieurs déterminations de V'_0 s'échangeront entre elles et e^{V_k} sera *effectivement singulière*, à moins que les racines qui s'échangent ainsi entre elles ne correspondent à des racines égales de V'_0 (ou ce qui revient au même de V_0). Soient alors

$$v_1 = v_1^0, \quad v_2 = v_2^0, \quad \ldots, \quad v_m = v_m^0$$

les valeurs des v qui correspondent à V_0; alors e^{V_k} sera effectivement singulière à moins que

$$\Phi(\xi, v_1^0, v_2^0, \ldots, v_m^0)$$

ne soit une puissance $p^{\text{ième}}$ parfaite.

Si $\Phi(\xi, v_i^0)$ ne se réduit pas à une puissance $p^{\text{ième}}$ parfaite, e^{V_k} admet plusieurs déterminations susceptibles de s'échanger, d'où il suit que le groupe G contient

certainement des transformations spéciales. Ces considérations s'appliquent également au cas du paragraphe VI et nous font comprendre les relations entre les équations en σ de ce paragraphe, et les facteurs de l'équation de Killing relative au groupe Γ.

Reprenons l'équation

$$e^{V_k} = \lim e^{V_n} e^{U};$$

nous voyons que $e^{\alpha U}$ et $e^{\beta V_k}$ sont permutables. Donc, parmi les transformations singulières qui ont pour adjointe A_0, il en existe toujours une qui est permutable à une substitution donnée e^{U} (d'ailleurs quelconque) du sous-groupe Γ; et si un groupe G contient des transformations spéciales, il en contient une qui est permutable à l'une quelconque de ses transformations.

Étudions maintenant les transformations singulières en partant des équations différentielles

$$\frac{dv_i}{dt_k} = A_i + \Sigma B_i \frac{1}{(1-e^{-\omega_k})^m} \tag{1}$$

du paragraphe VII. Dans le cas du paragraphe VII, toutes les racines se comportant comme des racines simples, l'exposant m était toujours égal à 1. Ici nous examinons le cas où toutes les racines ne se comportent pas comme des racines simples.

Supposons par exemple que ω_k se comporte comme une racine triple, alors l'exposant m pourra prendre les valeurs 1, 2 et 3, et les termes du second membre de (1), qui contiennent au dénominateur une puissance de $1-e^{-\omega_k}$, pourront s'écrire

$$\frac{B_i^1}{1-e^{-\omega_k}} + \frac{B_i^2}{(1-e^{-\omega_k})^2} + \frac{B_i^3}{(1-e^{-\omega_k})^3},$$

Il s'agit d'étudier la forme de B_i^1, B_i^2 et B_i^3. Supposons, pour fixer davantage les idées, que la racine ω_k, tout en se comportant comme une racine triple, soit quintuple et que les opérateurs conjugués correspondants soient au nombre de cinq, à savoir : deux du premier ordre

$$U_1 = \Sigma u_i^1 X_i, \qquad W_1 = \Sigma w_i^1 X_i;$$

deux du second ordre

$$U_2 = \Sigma u_i^2 X_i, \qquad W_2 = \Sigma w_i^2 X_i,$$

ayant respectivement pour dérivés U_1 et W_1; et un du troisième ordre

$$U_3 = \Sigma u_i^3 X_i,$$

ayant pour dérivé U_2; il est aisé de voir alors que les B sont de la forme suivante :

$$B_i^3 = \alpha_k u_i^1,$$
$$B_i^2 = \alpha_k' u_i^1 + \alpha_k u_i^2 + \beta_k w_i^1,$$
$$B_i^1 = \gamma_k u_i^1 + \gamma_k' u_i^2 + \gamma_k u_i^3 + \beta_k' w_i^1 + \beta_k w_i^2,$$

les α_k, les β_k et les γ_k étant des fonctions algébriques des c, dépendant de l'indice k mais indépendantes de l'indice i.

Cela posé, reprenons l'équation (2) du paragraphe VII

$$\frac{d\varphi}{ds} = A' + \Sigma B' \frac{1}{(1-e^{-\omega_k})^m}. \tag{2}$$

Si φ est un des coefficients de l'adjointe et si, en particulier, c'est une des racines de l'équation de Killing, on verrait comme au paragraphe VII que $\frac{d\varphi}{dt}$ doit rester fini quand e^{ω_k} devient très voisin de 1 et par conséquent que B' doit être nul. On en conclut, si ω est une racine quelconque de l'équation de Killing,

$$\Sigma \frac{d\omega}{dv_i} u_i^1 = \Sigma \frac{d\omega}{dv_i} u_i^2 = \Sigma \frac{d\omega}{dv_i} u_i^3 = \Sigma \frac{d\omega}{dv_i} w_i^1 = \Sigma \frac{d\omega}{dv_i} w_i^2 = 0.$$

Ce sont là des équations tout à fait analogues à l'équation (4) du paragraphe VII.

Si donc ω est une racine quelconque de l'équation de Killing, et si

$$T = \Sigma t_i X_i$$

est un opérateur conjugué quelconque de V (cet opérateur peut être d'ordre quelconque, et se rapporter à une racine de l'équation de Killing quelconque, *la racine zéro seule exceptée*, distincte ou non de ω), on aura alors

$$t_1 \frac{d\omega}{dv_1} + t_2 \frac{d\omega}{dv_2} + \ldots + t_r \frac{d\omega}{dv_r} = 0 \tag{3}$$

et cette équation subsiste quand on y remplace ω par un coefficient quelconque de l'adjointe.

Soit alors C la variété formée par les divers points $c_1, c_2, \ldots, c_r$ qui correspondent aux diverses transformations e^{V} admettant une même adjointe singulière A_0. Cette variété satisfera, d'après ce qui précède, à une équation différentielle

$$\begin{vmatrix} dv_1 & dv_2 & \ldots & dv_r \\ u_1^1 & u_2^1 & \ldots & u_r^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \ldots & u_r^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1^p & u_2^p & \ldots & u_r^p \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

tout à fait analogue à l'équation (11) du paragraphe VII. Soit C_r l'une des variétés définies par cette équation différentielle; elle peut ne pas être identique à C; il peut se faire que le nombre des dimensions soit plus petit pour les variétés C_r que pour la variété C; que par chaque point de C passe une variété C_r, de telle façon que C soit engendrée par une infinité de variétés C_r de la même façon qu'une surface l'est par une courbe mobile. Les p opérateurs

$$\Sigma u_1^i X_i, \quad \Sigma u_2^i X_i, \quad \ldots, \quad \Sigma u_r^i X_i$$

sont les divers opérateurs conjugués du premier ordre de V correspondant à celles des racines de l'équation de Killing qui deviennent simultanément multiples de $2i\pi$. Le nombre p est donc égal au nombre de ces racines sans tenir compte de leur degré de multiplicité.

Il resterait à montrer que cette variété C_r a précisément p dimensions; et pour cela il faut démontrer que si l'on forme les p opérateurs

$$S_k = u_1^k \frac{df}{dv_1} + u_2^k \frac{df}{dv_2} + \ldots + u_r^k \frac{df}{dv_r}$$

les différentes transformations infinitésimales

$$\Phi S_k,$$

où Φ est une fonction arbitraire des v, engendreront un groupe continu d'ordre infini.

C'est ce que l'on verrait par un raisonnement analogue à celui du paragraphe VII.

IX. — Le groupe des W_i.

Nous avons trouvé (Palerme, p. 331) [1] quelle est la forme des opérateurs fondamentaux du groupe paramétrique. Cette forme est la suivante :

$$X_i(f) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\xi\, d\xi}{(1-e^{-\xi})\,F(\xi)} \Sigma P_{ij} \frac{df}{dv_j}. \tag{1}$$

L'intégrale doit être prise le long d'un contour quelconque enveloppant toutes les racines de l'équation $F(\xi) = 0$. Ce contour peut être décomposé en contours partiels, enveloppant chacun une des racines, ce qui permet d'écrire

$$X_i(f) = \Sigma X_i(\omega, f),$$

[1] *Œuvres* de H. Poincaré, ce tome, p. 293.

$X_i(\omega, f)$ étant la même intégrale prise le long d'un contour enveloppant seulement la racine $\xi = \omega$.

Examinons séparément chacun de ces termes, et d'abord $X_i(0, f)$. Si $\xi = 0$ est racine d'ordre μ, on peut poser $F(\xi) = \xi^\mu F_1(\xi)$ et développer ensuite suivant les puissances de ξ

$$\frac{\xi}{1-e^{-\xi}} = A_0 + A_1 \xi + \ldots,$$

$$\frac{P_{ij}}{F_1(\xi)} = B_0 + B_1 \xi + \ldots.$$

Nous remarquerons que A_0, A_1, ... sont des nombres; que $\frac{P_{ij}}{F_1}$ étant une fonction rationnelle homogène d'ordre $\mu - 1$ par rapport aux v et à ξ, B_i sera homogène d'ordre $\mu - i - 1$. On trouve d'ailleurs

$$X_i(0, f) = \Sigma \frac{df}{dv_j} (A_0 B_{\mu-1} + A_1 B_{\mu-2} + \ldots + A_{\mu-1} B_0). \tag{2}$$

On voit que $X_i(0, f)$ est une fonction rationnelle des v.

Un cas particulier intéressant est celui où les μ racines qui sont égales à zéro se comportent comme des racines simples. On a alors

$$B_0 = B_1 = \ldots = B_{\mu-2} = 0,$$

$$X_i(0, f) = \Sigma \frac{df}{dv_j} B_{\mu-1}.$$

Passons maintenant à $X_i(\omega, f)$. Si ω est racine simple, on a simplement

$$X_i(\omega, f) = \Sigma \frac{\omega}{1-e^{-\omega}} \frac{P_{ji}(\omega)}{F'(\omega)} \frac{df}{dv_j}. \tag{3}$$

Si ω est racine multiple, d'ordre μ, nous pouvons écrire

$$X_i(\omega, f) = \sum_{q=0}^{q=\mu-1} D_q(\omega) R_q, \tag{3 bis}$$

où R_q est une fonction rationnelle des v et de ω (algébrique par conséquent par rapport aux v) et où l'on a posé

$$D_0(\omega) = \frac{1}{1-e^{-\omega}}, \qquad D_q(\omega) = \frac{d D_{q-1}(\omega)}{d\omega}.$$

On remarquera que $D_0(\omega)$, $D_q(\omega)$ et enfin $X_i(\omega, f)$ tendent vers zéro pour $\omega = -\infty$.

On voit en outre que $X_i(f)$ est le quotient de deux fonctions entières par rapport aux v; au contraire, chacun des termes $X_i(\omega, f)$ n'est plus une fonction

uniforme des v; c'est une fonction rationnelle des v, de ω et de la transcendante $e^{-\omega}$.

Maintenant $X_i(f)$ doit satisfaire aux relations de structure

$$(X_i X_k) = \Sigma c_{ikl} X_l \tag{4}$$

et nous devons rechercher quelle est la forme du premier membre; on aura évidemment

$$(X_i X_k) = \Sigma [X_i(\omega_p, f), X_k(\omega_q, f)],$$

ce que j'écrirai pour abréger

$$(X_i X_k) = \Sigma (X_i^p X_k^q),$$

la sommation devant être étendue à tous les couples de racines ω_p, ω_q. Quelle est la forme de $(X_i^p X_k^q)$? On aura

$$(X_i^p X_k^q) = \Sigma_j \left(\frac{dX_i^p}{d\dfrac{df}{dv_j}} \frac{dX_k^q}{dv_j} - \frac{dX_i^p}{dv_j} \frac{dX_k^q}{d\dfrac{df}{dv_j}} \right).$$

Or si l'on se reporte à la formule (3 *bis*) on voit que l'on aura encore

$$\frac{dX_i^p}{d\dfrac{df}{dv_j}} = \sum_{q=0}^{q=\mu-1} D_q(\omega_p) R'_q,$$

$$\frac{dX_i^p}{dv_j} = \sum_{q=0}^{q=\mu} D_q(\omega_p) R''_q,$$

R'_q et R''_q étant comme R_q rationnels en v et ω_p.

Dans le cas où $\omega_p = 0$, les dérivées de X_i^p sont rationnelles par rapport aux v.

On conclut de là

$$(X_i^p X_k^q) = \Sigma R_{\alpha\beta} D_\alpha(\omega_p) D_\beta(\omega_q), \tag{5}$$

les $R_{\alpha\beta}$ étant rationnels par rapport aux v, à ω_p et ω_q; quant à α et β ils varient de 0 à μ et de 0 à μ', μ étant l'ordre de multiplicité de ω_p et μ' celui de ω_q; la combinaison $\alpha = \mu$, $\beta = \mu'$ étant d'ailleurs exclue.

J'ajoute que R_q est homogène de degré $q+1$ par rapport aux v et aux ω; que par conséquent R'_q est de degré $q+1$, R''_q de degré q et $R_{\alpha\beta}$ de degré $\alpha+\beta+1$. J'observe encore que les équations (3 *bis*) et (5) peuvent se mettre

sous la forme suivante :

$$X_i^p = \Sigma S_q \frac{1}{(1-e^{-\omega_p})^{q+1}}, \tag{3 *ter*}$$

$$(X_i^p X_k^q) = \Sigma S_{\alpha\beta} \frac{1}{(1-e^{-\omega_p})^{\alpha+1}(1-e^{-\omega_q})^{\beta+1}}, \tag{5 *bis*}$$

les S étant des fonctions rationnelles, non homogènes cette fois, des v et des ω.

L'équation (4) peut encore s'écrire

$$\Sigma (X_i^p X_k^q) = \Sigma c_{ikl} X_l^p, \tag{4 *bis*}$$

les sommations portant sur les indices p, q, s. Elle doit devenir une identité quand on y remplace X_i^p et $(X_i^p X_k^q)$ par leurs valeurs (3 *ter*) et (5 *bis*). Parmi les termes des seconds membres de (3 *ter*) et (5 *bis*), nous distinguerons trois catégories :

1° Ceux qui ne dépendent d'aucune transcendante; ce sont ceux que l'on obtient dans (3 *ter*) si $\omega_p = 0$, ou dans (5 *bis*) si $\omega_p = \omega_q = 0$.

2° Ceux qui ne dépendent que d'une seule transcendante exponentielle; ce sont : *a*. les termes de (3 *ter*) où $\omega_p \gtrless 0$; *b*. les termes de (5 *bis*) où l'une des racines ω_p, ω_q est nulle et l'autre différente de zéro; *c*. les termes de (5 *bis*) où le rapport des deux racines ω_p et ω_q est une constante commensurable.

3° Ceux qui dépendent de deux transcendantes exponentielles. On les rencontre dans (5 *bis*) quand le rapport $\frac{\omega_p}{\omega_q}$ n'est pas une constante commensurable.

Comme quelques-uns de ces termes ne sont pas susceptibles de se réduire avec ceux des autres catégories, on est conduit à certaines relations que nous allons examiner.

Pour cela, nous répartirons les racines ω en groupes, en réunissant les racines dont le rapport est constant et commensurable.

Soient

$$k_1\omega_p, \quad k_2\omega_p, \quad \ldots, \quad k_h\omega_p$$

les diverses racines d'un même groupe, les k étant des constantes commensurables et ω_p une fonction des v. En général, nous supposerons que $k_1 = 1$ et que ω_p est elle-même une racine: Soit

$$Y_i^p = Y_i(\omega_p, f) = X_i(k_1\omega_p, f) + \ldots + X_i(k_h\omega_p, f).$$

Nous devons encore faire une autre distinction : les rapports $k_1, k_2, \ldots, k_h$ sont par hypothèse tous réels et commensurables, mais quelques-uns d'entre

eux peuvent être négatifs. Supposons par exemple $k < 0$. Nous avons vu que, quand ω tend vers $-\infty$, les expressions $D_q(\omega)$ tendent vers zéro. Considérons maintenant

$$D_q(k\omega_p) \qquad (k<0),$$

et faisons tendre ω_p vers $-\infty$. Alors D_q tendra encore vers zéro si $q > 0$, mais D_0 tendra vers 1. Soit alors, d'après la formule (3 *bis*),

$$X_i(k\omega_p, f) = \Sigma\, D_q(k\omega_p) R_q;$$

nous poserons

$$X_i(k\omega_p, f) = X_i'(k\omega_p, f) + X_i''(k\omega_p, f) \tag{6}$$

avec

$$X_i''(k\omega_p, f) = R_0.$$

Si k est positif, je conserverai la formule (6), mais je poserai

$$X_i'(k\omega_p, f) = 0.$$

On voit que dans tous les cas X_i'' est algébrique, et que X_i' tend vers zéro pour $\omega_p = -\infty$. Je poserai ensuite

$$\begin{aligned} Z_i^p &= Z_i(\omega_p, f) = \Sigma X_i'(k\omega_p, f), \\ T_i^p &= T_i(\omega_p, f) = \Sigma X_i''(k\omega_p, f), \\ Y_i^p &= Z_i^p + T_i^p \end{aligned}$$

(les sommations portant sur les diverses valeurs attribuables au nombre k), de sorte que Z_i^p tende vers zéro pour $\omega_p = -\infty$ et que T_i^p soit algébrique. On observera que cette décomposition peut se faire de deux manières. Et en effet, nous pouvons faire jouer le rôle de ω_p à la quantité $-\omega_p$, ce qui revient à changer les signes de toutes les constantes k. On trouve alors

$$\begin{aligned} X_i(k\omega_p, f) = X_i[(-k)(-\omega_p), f] &= X_i'[(-k)(-\omega_p), f] + X_i''[(-k)(-\omega_p), f], \\ X_i''(k\omega_p, f) + X_i''[(-k)(-\omega_p), f] &= R_0, \\ Z_i(-\omega_p, f) &= \Sigma X_i'[(-k)(-\omega_p), f], \\ T_i(-\omega_p, f) &= \Sigma X_i''[(-k)(-\omega_p), f], \\ Y_i^p &= Z_i(-\omega_p, f) + T_i(-\omega_p, f). \end{aligned}$$

Adoptons une fois pour toutes l'une ou l'autre de ces deux décompositions; et posons encore

$$Z_i^0 = X_i(0, f) - \Sigma T_i^p,$$

d'où

$$X_i(f) = Z_i^0 + \Sigma Z_i^p. \tag{7}$$

les sommations s'étendant aux divers groupes de racines, caractérisés par la quantité ω_p (qui ne diffère des racines du groupe envisagé que par un facteur constant) ou plus simplement par l'indice p.

Envisageons le second membre de (7); nous voyons que Z_i^p est une fonction algébrique des v, et que chaque terme Z_i^p dépend d'une transcendante unique $e^{-\omega_p v}$ et tend vers zéro pour $\omega_p = -\infty$. Il est clair que X_i ne peut être décomposé *que d'une seule manière* en une somme de termes satisfaisant à ces conditions. Il vient ensuite

$$(X_i X_k) = \Sigma (Z_i^p Z_k^q), \tag{8}$$

les indices p et q pouvant prendre sous le signe Σ toutes les valeurs possibles, y compris la valeur zéro. Les divers termes du second membre de (8) peuvent être algébriques (si $p = q = 0$), ou dépendre d'une transcendante unique (si $p = 0$, ou $q = 0$, ou $p = q$), ou dépendre de deux transcendantes $e^{-\omega_p v}$, $e^{-\omega_q v}$. Ceux qui dépendent d'une ou de deux transcendantes tendent vers zéro, quand l'une ou l'autre de ces transcendantes tend vers $+\infty$. Ici encore cette décomposition n'est possible que d'une seule manière.

Si alors dans l'équation (4) nous remplaçons $(X_i X_k)$ et X_l par leurs valeurs (8) et (7), les deux membres de cette équation se trouvent décomposés en termes satisfaisant aux conditions que nous venons d'énoncer.

En faisant dans cette équation (9) toutes les transcendantes $e^{-\omega_p v}$ infinies, il vient

$$(Z_i^0 Z_k^0) = \Sigma c_{ikz} Z_z^0. \tag{9}$$

L'équation (9) nous apprend que les opérateurs

$$Z_i^0(f)$$

définissent un groupe isomorphe au groupe donné.

Étudions le groupe des $Z_i^0(f)$; nous avons

$$Z_i^0 = X_i(0, f) - \Sigma T_i^p.$$

$X_i(0, f)$ nous est donné par la formule (2), et nous en concluons que c'est une somme de termes rationnels et homogènes de degré

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad \mu - 1$$

par rapport aux v (μ est le degré de multiplicité de la racine 0); le terme de degré 0 subsiste seul si les diverses racines nulles se comportent comme des

racines simples. Quant aux T_i^p, ce sont des sommes de termes de la forme R_h; ils sont donc algébriques et homogènes de degré 1 par rapport aux v.

Je puis écrire alors

$$Z_i^0 = U_i^0 + U_i^1 + \ldots + U_i^\lambda,$$

U_i^k étant homogène de degré k.

De là les identités

$$(10)\quad \begin{cases} (U_i^0 U_k^0) = 0, \\ (U_i^0 U_k^\mu) + (U_i^1 U_k^{\mu-1}) + \ldots + (U_i^{\mu-1} U_k^1) + (U_i^\mu U_k^0) = \Sigma c_{ikj} U_s^{\mu-1} & (\mu - 1 \leq \lambda), \\ (U_i^0 U_k^\mu) + (U_i^1 U_k^{\mu-1}) + \ldots + (U_i^{\mu-1} U_k^1) + (U_i^\mu U_k^0) = 0 & (\mu - 1 > \lambda). \end{cases}$$

En particulier, si les racines nulles se comportent comme des racines simples (ou tout au plus comme des racines doubles), on a $\lambda = 1$, d'où

$$(10\,bis)\quad \begin{cases} (U_i^0 U_k^0) = 0, \\ (U_i^0 U_k^1) + (U_i^1 U_k^0) = \Sigma c_s U_s^0, \\ (U_i^1 U_k^1) = \Sigma c_s U_s^1; \end{cases}$$

ce qui montre que les opérateurs U_i^1 définissent un groupe isomorphe au groupe donné.

Pour aller plus loin, reprenons les relations de structure, où figurent, comme nous l'avons vu, à côté de fonctions algébriques des v, un certain nombre de transcendantes indépendantes $e^{-\omega_p}$. Dans ces relations, remplaçons chacune des transcendantes $e^{-\omega_p}$ par $\lambda_p e^{-\omega_p}$; λ_p étant une constante quelconque, ces relations ne cesseront pas d'être satisfaites.

Soient donc

$$(4)\qquad (X_i X_k) = \Sigma c_{iks} X_s$$

ces relations. Soit W_i ce que devient X_i quand on y change $e^{-\omega_p}$ par $\lambda_p e^{-\omega_p}$. J'observe :

1° Que le crochet $(W_i W_k)$ n'est autre chose que ce que devient le crochet $(X_i X_k)$ quand on y remplace $e^{-\omega_p}$ par $\lambda_p e^{-\omega_p}$. En effet, on a par définition

$$(X_i X_k) = \Sigma_h \frac{dX_i}{dv_h}\frac{dX_k}{dp_h} - \frac{dX_i}{dp_h}\frac{dX_k}{dv_h},$$

$$(W_i W_k) = \Sigma_h \frac{dW_i}{dv_h}\frac{dW_k}{dp_h} - \frac{dW_i}{dp_h}\frac{dW_k}{dv_h},$$

en écrivant pour abréger p_h au lieu de $\frac{df}{dv_h}$.

Cela posé, observons que X_i dépend des v de deux manières; d'abord algébriquement, ensuite par l'intermédiaire des exponentielles $e^{-\omega_p}$; c'est ce que j'exprimerai en écrivant

$$X_i = F_i(p_h, v_h, e^{-\omega_p}).$$

F_i devant être une fonction algébrique des p_h, des v_h et des $J_p = e^{-\omega_p}$. On a alors

$$W_i = F_i(p_h, v_h, \lambda_p e^{-\omega_p}).$$

Il vient alors

$$\frac{dX_i}{dv_h} = \frac{\partial X_i}{\partial v_h} - \Sigma \frac{\partial X_i}{\partial J_p} J_p \frac{d\omega_p}{dv_h},$$

en représentant par des ∂ les dérivées prises en regardant les v_h et les J_p comme des variables indépendantes. On a de même

$$\frac{dW_i}{dv_h} = \frac{\partial W_i}{\partial v_h} - \Sigma \frac{\partial W_i}{\partial J_p} J_p \frac{d\omega_p}{dv_h},$$

d'où

$$(X_i X_k) = \Sigma \left(\frac{\partial X_i}{\partial v_k}\frac{dX_k}{dp_k} - \frac{\partial X_k}{\partial v_k}\frac{dX_i}{dp_k} \right) - \Sigma\Sigma J_p \frac{d\omega_p}{dv_k}\left(\frac{\partial X_i}{\partial J_p}\frac{dX_k}{dp_k} - \frac{\partial X_k}{\partial J_p}\frac{dX_i}{dp_k} \right),$$

$$(W_i W_k) = \Sigma \left(\frac{\partial W_i}{\partial v_h}\frac{dW_k}{dp_h} - \frac{\partial W_k}{\partial v_h}\frac{dW_i}{dp_h} \right) - \Sigma\Sigma J_p \frac{d\omega_p}{dv_h}\left(\frac{\partial W_i}{\partial J_p}\frac{dW_k}{dp_h} - \frac{\partial W_k}{\partial J_p}\frac{dW_i}{dp_k} \right).$$

On voit que la seule différence entre les deux crochets $(X_i X_k)$ et $(W_i W_k)$, c'est que dans le premier on doit faire $J_p = e^{-\omega_p}$ et dans le second $J_p = \lambda_p e^{-\omega_p}$.

2° La relation (4) a ses deux membres algébriques par rapport aux p_h, aux v_h et aux transcendantes $J_p = e^{-\omega_p}$. Elle doit donc être une identité quand on y regarde les p_h, les v_h et les J_p comme des variables indépendantes.

Elle doit donc subsister quand on y fait $J_p = \lambda_p e^{-\omega_p}$, c'est-à-dire que l'on a

$$(W_i W_k) = \Sigma c_{iks} W_s.$$

En d'autres termes, *les opérateurs* W_i *engendreront un groupe isomorphe au groupe des* Z_i.

Pour bien préciser le résultat obtenu, supposons par exemple qu'une racine ω_3 soit égale à la somme de deux autres $\omega_1 + \omega_2$. Alors les trois transcendantes

$$J_1 = e^{-\omega_1}, \qquad J_2 = e^{-\omega_2}, \qquad J_3 = e^{-\omega_3}$$

ne sont plus indépendantes. Si l'on veut les remplacer par

$$\lambda_1 e^{-\omega_1}, \quad \lambda_2 e^{-\omega_2}, \quad \lambda_3 e^{-\omega_3}$$

les constantes λ_1 et λ_2 peuvent être choisies d'une manière quelconque; mais il n'en est pas de même de λ_3, qui est assujettie à la condition

$$\lambda_3 = \lambda_1 \lambda_2.$$

Le groupe des W_i contient des cas particuliers remarquables. Si, par exemple, on suppose que toutes les constantes λ sont nulles, on tombe sur le groupe engendré par les Z_i^0; si on les suppose toutes nulles, sauf λ_p que l'on fait égal à 1, on tombe sur le groupe engendré par les opérateurs $Z_i^0 + Z_i^p$.

On a vu aussi que la définition de Z_i^0 peut être modifiée si l'on fait jouer le rôle de ω_p à $-\omega_p$. Si $Z_i'^0$ est ce que devient Z_i^0 par suite de cette modification, le groupe des $Z_i'^0$ est encore isomorphe au groupe donné. Mais il rentre encore comme cas particulier dans le groupe des W_i; il suffit de faire tous les λ nuls, à l'exception de λ_p que l'on suppose infini.

Le groupe des W_i contient donc comme cas particulier, non seulement le groupe donné, celui des X_i, mais encore les autres groupes que nous avons envisagés successivement dans ce paragraphe. Remarquons que l'isomorphisme du groupe des W_i à celui des X_i est *en général* holoédrique; en effet les W_i dépendent de certaines constantes λ que l'on peut faire varier d'une manière continue.

Pour certaines valeurs des λ, à savoir pour $\lambda = 1$, l'isomorphisme est certainement holoédrique, puisque les deux groupes sont identiques. L'isomorphisme ne pourrait donc cesser d'être holoédrique que pour certaines valeurs particulières des λ.

On verrait de même que les deux groupes sont en général *semblables*, au sens de Lie, de sorte qu'on peut passer de l'un à l'autre par un simple changement de variables.

Quel est ce changement de variables? C'est ce que nous allons voir plus loin.

Quelques explications sont ici nécessaires; le groupe des X_i, c'est-à-dire le groupe paramétrique, est *simplement transitif*, de telle sorte qu'étant donnés deux systèmes quelconques de valeurs des variables $v_1^0, v_2^0, \ldots, v_r^0$ et $v_1^1, v_2^1, \ldots, v_r^1$ il y a une transformation du groupe et une seule qui transforme le premier système dans le second. Le groupe des W_i, dont celui des X_i n'est qu'un cas particulier, correspondant à certaines valeurs particulières des λ, devra être encore aussi, *en général*, simplement transitif et par conséquent *semblable* à celui des z_i. Appelons v_i' les variables indépendantes relatives au groupe des W_i pour ne pas les confondre avec les variables v_i relatives au groupe des X_i. Soit $v_i'^0$ un système quelconque de valeurs des v_i', que j'appellerai le *système initial*. Il y aura une transformation e^V (où $V = \Sigma v_i X_i$), et une seule, qui changera ce système initial $v_i'^0$ en un système quelconque v_i'. Les v_i' sont alors des fonctions des valeurs initiales $v_i'^0$ et des paramètres v_i qui définissent cette transformation e^V, et c'est là la relation entre les v_i et les v_i', le changement de variables qui fait passer du groupe des Z_i à celui des W_i. Pour certaines valeurs *particulières* des λ, le groupe des W_i peut cesser d'être simplement transitif et semblable à celui des X_i; nous verrons plus loin que cela peut arriver en particulier pour le groupe des Z_i^0.

X. — Application au groupe des rotations.

Prenons d'abord pour exemple le groupe des rotations et renvoyons pour les notations à (Palermo, p. 332 et 333) (1). Nous avons désigné par 2θ l'angle de rotation et par α, β, γ les cosinus directeurs de l'axe de rotation; et nous avons posé

$$(1) \qquad v_1 = \alpha\theta, \qquad v_2 = \beta\theta, \qquad v_3 = \gamma\theta \qquad (\theta^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2),$$

de telle façon que le vecteur v_1, v_2, v_3 a pour direction celle de l'axe de rotation et pour longueur la moitié de l'angle de rotation. Dans ces conditions, nous avons formé les opérateurs Z_1, Z_2, Z_3 et trouvé par exemple

$$(2) \qquad Z_1 = \frac{df}{dv_1}[\theta\cot\theta(1-\alpha^2)+\alpha^2] + \frac{df}{dv_2}[v_3+\alpha\beta(1-\theta\cot\theta)] + \frac{df}{dv_3}[-v_2+\alpha\gamma(1-\theta\cot\theta)].$$

Pour former les W d'après le paragraphe précédent, il suffit de changer $\cot\theta$ en $\cot(\theta+h)$, h étant une constante quelconque. Je puis donc écrire l'expression de W_1, mais il sera préférable de ne pas confondre les variables qui figurent dans Z_1 avec celles qui figurent dans W_1; et pour éviter cette confusion, j'accentuerai les lettres. Je poserai donc

$$v_1' = \alpha'\theta', \qquad v_2' = \beta'\theta', \qquad v_3' = \gamma'\theta' \qquad (\theta'^2 = v_1'^2 + v_2'^2 + v_3'^2)$$

et j'aurai

$$(3) \quad W_1 = \frac{df}{dv_1'}[\theta'\cot(\theta'+h)(1-\alpha'^2)+\alpha'^2] + \frac{df}{dv_2'}\{v_3'+\alpha'\beta'[1-\theta'\cot(\theta'+h)]\} + \frac{df}{dv_3'}\{-v_2'+\alpha'\gamma'[1-\theta'\cot(\theta'+h)]\}.$$

D'après le paragraphe précédent, le groupe des Z et celui des W doivent être isomorphes et même semblables, de sorte que l'on peut passer de l'un à

(1) *Œuvres* de H. Poincaré, ce tome, p. 224 et 225.

l'autre par un changement de variables. Il s'agit de déterminer ce changement de variables, c'est-à-dire de voir quelles relations il doit y avoir entre les v' et les v.

Pour cela reprenons le calcul de la fin de la page 332 et du commencement de la page 333 (Palerme), mais en posant

$$(4)\qquad \begin{cases} \alpha=\alpha', & \beta=\beta', & \gamma=\gamma', & \theta'=\theta-h,\\ v'_1=\alpha(\theta-h), & v'_2=\beta(\theta-h), & v'_3=\gamma(\theta-h). \end{cases}$$

Nous trouverons par exemple

$$dv'_1=\theta'\,d\alpha+\alpha\,d\theta'=\frac{\theta'\,d\alpha}{\sin\theta}+\frac{\theta'\alpha\cos\theta\,d\theta}{\sin^2\theta}-\frac{\alpha\,d\theta}{\sin\theta}$$

et finalement nous arriverons à la même formule définitive, sauf que θ sera remplacé par θ' quand il est en dehors des signes trigonométriques, ou, ce qui revient au même, que les lettres γ seront accentuées et $\cot\theta$ remplacé par $\cot(\theta'+h)$.

Le vecteur v'_1, v'_2, v'_3 a donc même direction que le vecteur v_1, v_2, v_3 (celle de l'axe de rotation), mais la longueur du vecteur n'est pas la même; la différence des longueurs est égale à la constante h. *Ainsi se trouve définie la relation cherchée entre les v et les v'.*

Mais cette solution n'est pas unique. Soit en effet

$$v'^0_1,\quad v'^0_2,\quad v'^0_3$$

un système quelconque de valeurs des v' que nous appellerons le système initial.

Appliquons à ce système une rotation quelconque du groupe e^V, caractérisée par les valeurs

$$v_1=\alpha\theta,\qquad v_2=\beta\theta,\qquad v_3=\gamma\theta$$

des variables v. Après cette rotation, les variables v' auront pris les valeurs

$$v'_1,\quad v'_2,\quad v'_3$$

et nous aurons

$$(5)\qquad v'_i=f_i(v'^0_1,v'^0_2,v'^0_3,v_1,v_2,v_3)\qquad (i=1,2,3).$$

Si l'on se donne les valeurs initiales v'^0_i, les relations (5) définissent le changement de variables qui, en passant des variables v aux variables v', nous fait passer du groupe des Z_i à celui des W_i. On voit que ce changement de variables n'est pas unique, puisqu'il dépend des trois paramètres arbitraires v'^0_i.

La solution que nous venons d'étudier correspond à un choix particulier de ces paramètres; une rotation nulle y correspondra à un vecteur de longueur h de direction d'ailleurs quelconque; or cette rotation nulle doit correspondre au système initial v'^0; notre solution particulière suppose donc

$$(v'^0_1)^2+(v'^0_2)^2+(v'^0_3)^2=h^2.$$

La solution la plus générale s'obtiendrait de la façon suivante. Elle dépendrait de la constante h et de la rotation constante e^A, où

$$A=a_1X_1+a_2X_2+a_3X_3.$$

Construisons avec les variables v_1, v_2, v_3 la rotation e^V; combinons les deux rotations l'une constante e^A, l'autre variable e^V et soit

$$e^U=e^Ae^V,\qquad U=\Sigma u_iX_i.$$

Construisons le vecteur u_1, u_2, u_3, prolongeons-le d'une longueur égale à h, et nous aurons le vecteur v'_1, v'_2, v'_3; ce qui nous donne les v' en fonctions des v.

Voyons maintenant ce qui se passe en ce qui concerne le groupe des Z^0_i; pour le former, il faut prendre $\omega_p=i\theta$, ou bien $\omega_p=-i\theta$; cela revient à remplacer $\cot\theta$ par $+i$, ou par $-i$. En effet, nous passons des groupes des Z_i à celui des W_i en changeant $\cot\theta$ en $\cot(\theta+h)$ ou $e^{i\theta}$ en $e^{i(\theta+h)}=\lambda e^{i\theta}$, où $\lambda=e^{ih}$.

Mais le groupe des Z^0_i s'obtient comme nous l'avons vu quand on fait $\lambda=0$ ou $\lambda=\infty$. Il faut donc faire $h=\infty$, la partie imaginaire de h étant égale soit à $+\infty$, soit à $-\infty$, ce qui donne $\cot(\theta+h)=\pm i$.

Il y a donc deux groupes des Z^0_i. Nous considérerons l'un d'eux, par exemple celui où $\cot(\theta+h)=+i$.

Prenons donc les formules de la page 333 de Palerme (¹), et remplaçons-y $\cot\theta$ par i.

Il viendra

$$(6)\qquad dv_1=t_1[i\theta(1-\alpha^2)+\alpha^2]+t_2[-v_3+\alpha\beta(1-i\theta)]+t_3[v_2+\alpha\gamma(1-i\theta)];$$

les valeurs de dv_2 et dv_3 s'en déduiraient par permutation circulaire.

On en déduit aisément (en tenant compte de $\Sigma\alpha^2=1$)

$$(7)\qquad d\theta=\alpha t_1+\beta t_2+\gamma t_3$$

(¹) *Œuvres* de H. Poincaré, ce tome, p. 225.

et

$$(8)\qquad \begin{cases} d\alpha = it_1(\beta^2+\gamma^2) - t_2(\gamma + i\alpha\beta) + t_3(\beta - i\alpha\gamma), \\ d\beta = t_1(\gamma - i\alpha\beta) + it_2(\alpha^2+\gamma^2) - t_3(\alpha + i\beta\gamma), \\ d\gamma = -t_1(\beta + i\alpha\gamma) + t_2(\alpha - i\beta\gamma) + it_3(\alpha^2+\beta^2); \end{cases}$$

et l'on remarquera que les accroissements des cosinus directeurs α, β, γ, produits par une transformation infinitésimale quelconque, dépendent uniquement de ces cosinus directeurs eux-mêmes et sont indépendants de θ.

De plus on a, comme il convient,

$$\alpha\, d\alpha + \beta\, d\beta + \gamma\, d\gamma = 0,$$

puisque $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ doit rester constant et égal à 1. On a d'ailleurs

$$d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 = 0.$$

Ce n'est pas tout. Si l'on regarde α, β, γ comme les coordonnées rectangulaires d'un point, on a

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1,$$

c'est-à-dire que le point α, β, γ est sur une sphère. Cette sphère, comme toutes les surfaces du second degré, possède deux systèmes de génératrices rectilignes. Je dis que *les génératrices de l'un des systèmes ne sont pas altérées par les transformations du groupe*. Il suffira de faire la vérification pour l'une de ces génératrices

$$\alpha = 1, \qquad \beta = i\gamma.$$

Je vais vérifier que si l'on a $\alpha = 1$, $\beta = i\gamma$, on aura également

$$d\alpha = 0, \qquad d\beta = i\, d\gamma.$$

Il vient en effet

$$(9)\qquad \begin{cases} d\alpha = 0, \\ d\beta = 2\gamma t_1 + i\, t_2(1+\gamma^2) - t_3(1-\gamma^2), \\ d\gamma = -2i\gamma t_1 + t_2(1+\gamma^2) + i\, t_3(1-\gamma^2) \end{cases}$$

et la vérification est immédiate.

On voit ainsi que *le groupe des* Z_i^0 *n'est pas transitif*, puisqu'il ne permet pas de passer d'un système de valeurs des variables à un autre système *quelconque*, mais seulement à un système correspondant à une même génératrice rectiligne de la sphère. Le groupe des Z_i^0 n'est donc pas semblable à celui des Z_i, et il n'est pas possible de passer d'un groupe à l'autre par un simple changement de variables.

Nous avons vu qu'il y a deux groupes des Z_i^0, que l'on obtient en prenant

$\omega_p = i\theta$ ou $\omega_p = -i\theta$, ou bien en prenant $\lambda = 0$ ou $\lambda = \infty$. Ces deux groupes correspondent aux deux systèmes de génératrices rectilignes de la sphère.

La dernière des équations (9) montre que les transformations du groupe se réduisent à des transformations *homographiques* sur chacune des génératrices rectilignes de la sphère du premier système. Quels sont les points doubles de ces transformations?

Si nous considérons par exemple une rotation autour de l'axe des x, c'est-à-dire si nous faisons $t_2 = t_3 = 0$, nous voyons que l'on a

$$d\alpha = d\beta = d\gamma = 0$$

pour

$$\alpha = 1, \qquad \beta = -i\gamma \qquad \text{ou} \qquad \alpha = -1, \qquad \beta = i\gamma;$$

c'est-à-dire que le lieu des points doubles se compose de deux génératrices rectilignes du second système, qui rencontrent l'axe de rotation.

Remarquons qu'à $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, c'est-à-dire à une rotation nulle, correspondent des valeurs indéterminées des c', puisque la longueur du vecteur c'_1, c'_2, c'_3 est égale à h, mais sa direction indéterminée. Le point c'_1, c'_2, c'_3 est donc un point indéterminé d'une sphère. Une transformation infinitésimale pourra alors transformer un point très voisin d'un point de cette sphère en un point très voisin d'un *autre* point de cette sphère et pouvant être très distant du premier point. Donc les dc_i deviennent infinies.

C'est en effet ce qui arrive. Avec le groupe des Z_i, nous rencontrions $\theta\cot\theta$; $\cot\theta$ devenait infini pour $\theta = 0$, mais $\theta\cot\theta$ restait fini. Avec le groupe des W_i, $\theta\cot\theta$ est remplacé par $\theta\cot(\theta+h)$, qui devient infini pour $\theta = -h$.

XI. — Extension au cas général.

Je me propose maintenant d'étendre au cas général les résultats obtenus dans le paragraphe précédent relativement au groupe des rotations. Considérons donc un groupe paramétrique G quelconque, dérivé des r opérateurs

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_r$$

et la substitution la plus générale e^V de ce groupe. Considérons également son groupe adjoint G_a, et dans ce groupe l'adjointe de e^V. Nous savons que cette adjointe est une substitution linéaire qui transforme les r coefficients u de

$$U = u_1X_1 + u_2X_2 + \ldots + u_rX_r$$

dans les r coefficients u' de

$$U' = \Sigma u'_i X_i.$$

où l'on pose

$$U' = e^{-V} U e^{V}.$$

Nous savons également comment les coefficients de cette substitution linéaire dépendent des v. Ce sont des fonctions algébriques des v et d'un certain nombre de transcendantes indépendantes, de la forme $e^{-\omega_\rho}$.

Le nombre des coefficients de l'adjointe est r^2, et ils se trouvent exprimés en fonctions de r variables indépendantes. Il y a donc entre eux au moins $r^2 - r$ relations. Il y en a exactement $r^2 - r$ si le groupe G est de la première catégorie.

Il y en a davantage, s'il est de la seconde catégorie, parce qu'alors le groupe adjoint est d'ordre inférieur à r.

Dans le cas particulier du groupe des rotations, ces $r^2 - r$ relations ne sont autre chose que les relations bien connues qui lient les neuf cosinus directeurs de trois directions rectangulaires.

Quelle est la nature de ces $r^2 - r$ relations (je me suppose ici placé dans le cas des groupes de première catégorie, mais si l'on voulait passer à celui des groupes de seconde catégorie, il n'y aurait rien à changer que le nombre des relations)? et d'abord *sont-elles toujours algébriques?*

Ne voulant pas aborder la question dans toute sa généralité, je me bornerai à faire observer qu'il en est ainsi dans un très grand nombre de cas, comme le montre un théorème de Cartan (*loc. cit.*, p. 133). Ce théorème nous apprend que pour tout groupe linéaire *semi-simple*, on peut choisir les paramètres de façon que les coefficients des équations finies du groupe soient des fonctions rationnelles de ces paramètres. Les relations entre ces coefficients sont donc algébriques.

Si ces $r^2 - r$ relations sont algébriques, elles ne cesseront pas d'être satisfaites si dans l'expression des coefficients de l'adjointe en fonction des v, expression où figurent d'une part des fonctions algébriques v et d'autre part des exponentielles $e^{-\omega}$, on considère ces exponentielles comme des variables indépendantes. Elles ne cesseront donc pas de l'être si l'on y remplace $e^{-\omega}$ par $\lambda e^{-\omega}$, les λ étant des constantes arbitraires.

Soient alors

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{r^2}$$

les coefficients de l'adjointe, et écrivons

$$a_i = \varphi_i(v, e^{-\omega}), \tag{1}$$

φ_i étant une fonction algébrique des v et des exponentielles $e^{-\omega}$.

Si nous regardons les a_i comme donnés, ces équations (1) nous donneront les v, et elles seront compatibles, pourvu que les valeurs des a_i satisfassent aux $r^2 - r$ relations algébriques précitées.

Posons maintenant

$$a_i = \varphi_i(v', \lambda e^{-\omega'}). \tag{2}$$

Les λ sont des constantes quelconques, choisies une fois pour toutes; les v' sont des variables nouvelles, les ω' sont formés avec les v' comme les ω l'étaient avec les v.

Ces équations (2) *sont compatibles*, car les relations algébriques entre les a_i obtenues en éliminant les v' entre les équations (2) sont les mêmes que celles que l'on avait obtenues en éliminant les v entre les équations (1), ou bien encore en regardant les v et les $e^{-\omega}$ comme des variables indépendantes et éliminant à la fois toutes ces variables indépendantes entre les équations (1).

Nous pouvons donc écrire

$$\varphi_i(v, e^{-\omega}) = \varphi_i(v', \lambda e^{-\omega'}), \tag{3}$$

ce qui définit les relations entre les anciennes variables v et les nouvelles variables v'.

Considérons maintenant une autre transformation du groupe paramétrique

$$e^{V} e^{\varepsilon X_k} = e^{V + dV} \qquad (\varepsilon \text{ étant très petit}).$$

Nous aurons, comme nous le savons,

$$dv_i = \varepsilon \theta_i(v, e^{-\omega}), \tag{4}$$

les θ_i étant des fonctions algébriques des v et des exponentielles $e^{-\omega}$. Ce sont là les équations différentielles du groupe paramétrique engendré par les X_i.

Pour obtenir ces équations (4), nous aurions pu opérer de la façon suivante :

Les deux transformations

$$e^{V}, \quad e^{V + dV}$$

ont respectivement pour adjointes les substitutions linéaires A' et A'' qui changent U en

$$U' = e^{-V} U e^{V}, \qquad U'' = e^{-\varepsilon X_k} e^{-V} U e^{V} e^{\varepsilon X_k} = e^{-\varepsilon X_k} U' e^{\varepsilon X_k}.$$

Soient a_α l'un des coefficients de l'adjointe A'; $a_\alpha + da_\alpha$ le coefficient correspondant de l'adjointe A''. On aura

$$a_\alpha = \varphi_\alpha(v, e^{-\omega})$$

et

$$da_\alpha = \Sigma \frac{d\varphi_\alpha}{dv^i} dv_i - \Sigma\Sigma \frac{d\varphi_\alpha}{d\, e^{-\omega}} e^{-\omega} \frac{d\omega}{dv^i} dv_i,$$

puisque φ_α dépend des diverses variables v_i, d'une part directement et d'autre part par l'intermédiaire des diverses exponentielles $e^{-\omega}$.

D'autre part, on passe de U^t à $U^{t'}$ par une substitution linéaire infinitésimale, celle qui change U^t en

$$e^{-\varepsilon X_i} U^t e^{\varepsilon X_i}.$$

Cela veut dire que da_α est une fonction linéaire à coefficients constants des a_β, ce que j'écrirai

$$\frac{da_\alpha}{\varepsilon} = \Sigma C_{\alpha\beta} a_\beta.$$

Cela nous conduit aux relations

$$\varepsilon \Sigma C_{\alpha\beta} \varphi_\beta(v, e^{-\omega}) = \Sigma \frac{d\varphi_\alpha}{dv_i} dv_i - \Sigma\Sigma \frac{d\varphi_\alpha}{de^{-\omega}} e^{-\omega} \frac{d\omega}{dv_i} dv_i. \tag{5}$$

De ces relations, on pourrait tirer les $\frac{dv_i}{\varepsilon}$ et l'on devrait retrouver les équations (4).

Changeons de variables en passant aux variables v'. Observons pour cela que la dérivée totale de $\varphi_\alpha(v, e^{-\omega})$ par rapport à v_i est

$$\frac{d\varphi_\alpha}{dv_i} - \Sigma \frac{d\varphi_\alpha}{de^{-\omega}} e^{-\omega} \frac{d\omega}{dv_i}$$

et de même que la dérivée totale de $\varphi_\alpha(v', \lambda e^{-\omega'})$ par rapport à v'_i est

$$\frac{d\varphi_\alpha}{dv'_i} - \Sigma \frac{d\varphi_\alpha}{d\lambda\, e^{-\omega}} \lambda\, e^{-\omega'} \frac{d\omega'}{dv'_i}.$$

En différentiant les équations (3) nous trouverons donc

$$\Sigma \frac{d\varphi_\alpha}{dv_i} dv_i - \Sigma\Sigma \frac{d\varphi_\alpha}{d\, e^{-\omega}} e^{-\omega} \frac{d\omega}{dv_i} dv_i = \Sigma \frac{d\varphi_\alpha}{dv'_i} dv'_i - \Sigma\Sigma \frac{d\varphi_\alpha}{d\lambda\, e^{-\omega}} \lambda\, e^{-\omega'} \frac{d\omega'}{dv'_i} dv'_i. \tag{6}$$

Et alors, en tenant compte des équations (3) et (6), les équations (5) deviennent

$$\varepsilon \Sigma C_{\alpha\beta} \varphi_\beta(v', \lambda e^{-\omega'}) = \Sigma \frac{d\varphi_\alpha}{dv'_i} dv'_i - \Sigma\Sigma \frac{d\varphi_\alpha}{d\lambda\, e^{-\omega'}} \lambda\, e^{-\omega'} \frac{d\omega'}{dv'_i} dv'_i. \tag{7}$$

Si nous comparons les équations (5) et (7), nous voyons que les deux membres de (5) sont algébriques par rapport aux v et aux exponentielles $e^{-\omega}$. Pour passer de (5) à (7), il suffit de changer dv_i en dv'_i, v_i en dehors des signes exponentiels en v'_i, et $e^{-\omega}$ en $\lambda e^{-\omega'}$.

La résolution des équations (5) nous ayant donné

$$dv_i = \varepsilon\, \theta_i(v, e^{-\omega}), \tag{4}$$

celle des équations (7) nous donnera donc

$$dv'_i = \varepsilon\, \theta_i(v', \lambda\, e^{-\omega'}). \tag{8}$$

On reconnaît les équations différentielles du groupe des W_i défini au paragraphe IX.

Ainsi, au moins dans les cas très généraux où le théorème cité de Cartan s'applique, on obtiendra ce groupe des W_i par le changement de variables (3).

C'est là la généralisation du résultat obtenu au paragraphe précédent.