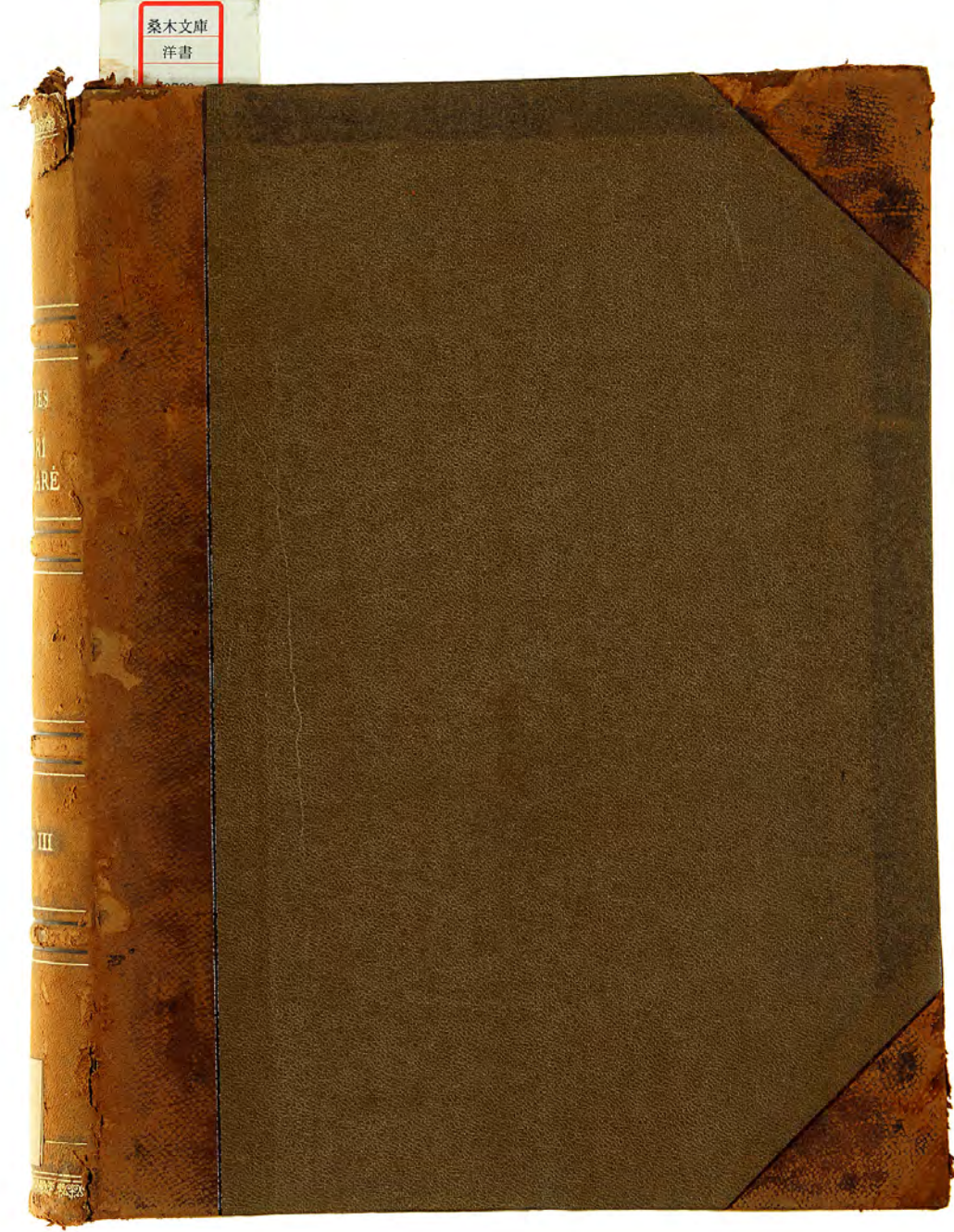




桑本文庫
洋書

物理
08
P
6.2

九州帝國大學工學部
812163
51
昭和10年9月20日
數學力學物理學教室

桑本文庫
洋書
0788

九州帝國大學理學部
8515
物理學教室

理學部 洋 邇及
022232002014355

九州大學藏書



ŒUVRES

DE

HENRI POINCARÉ



PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
Quai des Grands-Augustins, 55.
84505-34

ŒUVRES
DE
HENRI POINCARÉ
PUBLIÉES
SOUS LES AUSPICES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
PAR
LA SECTION DE GÉOMÉTRIE

TOME III
PUBLIÉ AVEC LA COLLABORATION
DE
JULES DRACH
MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES



PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1934



Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

SUR

UN THÉORÈME DE M. FUCHS

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 99, p. 75-77 (15 juillet 1884).

M. Fuchs a présenté dernièrement à l'Académie de Berlin un travail où il étudie les conditions pour que les intégrales d'une équation différentielle algébrique n'aient qu'un nombre fini de points singuliers qui soient les mêmes pour toutes les intégrales. On comprend aisément quel intérêt il y a à rechercher s'il existe de pareilles équations et à les former, si elles existent. En effet, les procédés qui permettent d'intégrer les équations linéaires par le moyen des fonctions fuchsienues leur seraient applicables, et l'on serait ainsi conduit à une classe nouvelle d'équations différentielles intégrables à l'aide des nouvelles transcendentes.

M. Fuchs donne, pour les équations du premier ordre, les conditions nécessaires et suffisantes pour que le nombre des points singuliers des intégrales soit fini. Il commence ensuite une discussion à laquelle je voudrais ajouter quelques remarques. Si l'on met l'équation sous la forme

$$(1) \quad F\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right) = 0,$$

et si l'on regarde un instant la variable indépendante z comme une constante, la relation algébrique entre y et $\frac{dy}{dz}$ aura un certain genre que j'appelle p .

Dans le cas où $p = 0$, M. Fuchs montre que l'équation se ramène à celle de Riccati, et par conséquent aux équations linéaires. Je n'ai rien à ajouter sur ce cas.

Si l'on a $p = 1$, M. Fuchs montre que l'équation peut se ramener à la forme

$$(2) \quad \frac{dt}{dz} = \Lambda_0 + \Lambda_1 t + \Lambda_2 t^2 + \Lambda_3 \sqrt{R(t)},$$

H. P. — III.



où les Λ sont des fonctions de z et où R est un polynôme du quatrième degré en t dont les coefficients sont des fonctions de z et qui satisfait à une relation

$$(3) \quad \frac{dR}{dz} + \frac{dR}{dt} (\Lambda_0 + \Lambda_1 t + \Lambda_2 t^2) = (B_0 + B_1 t) R$$

[où B_0 et B_1 sont des fonctions de z].

Il est possible de simplifier encore cette équation. Posons, en effet,

$$t = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta},$$

α, β, γ et δ étant des fonctions de z ; les équations (2) et (3), où t sera remplacé par u , conserveront la même forme; mais on aura pu choisir α, β, γ et δ de telle façon que le nouveau polynôme R ,

$$R' = u^4 + \gamma C u^2 + 1,$$

C étant une fonction de z . Les équations (2) et (3) deviennent alors

$$\frac{du}{dz} = \Lambda_2 \sqrt{R'}, \quad \frac{dC}{dz} = 0,$$

ce qui montre que C , et par conséquent le module des fonctions elliptiques dérivées du radical $\sqrt{R'}$, sont des constantes absolues indépendantes de z . L'intégration de ces équations se ramène à de simples quadratures.

On peut d'ailleurs arriver au même résultat et poursuivre la discussion pour le cas de $p > 1$, par le moyen suivant.

Soient y_0 et y'_0 les valeurs d'une intégrale y et de sa dérivée $\frac{dy}{dz}$ pour $z = z_0$; soient y_1 et y'_1 les valeurs de cette même intégrale y et de sa dérivée pour $z = z_1$; il est aisé de voir que y_1 et y'_1 sont des fonctions rationnelles de y_0 et y'_0 , et réciproquement. Ainsi les deux surfaces de Riemann

$$(S_0) \quad F\left(z_0, y, \frac{dy}{dz}\right) = 0,$$

$$(S_1) \quad F\left(z_1, y, \frac{dy}{dz}\right) = 0,$$

où z_0 et z_1 sont regardés comme des constantes, et où les variables sont y et $\frac{dy}{dz}$, ont non seulement même genre, mais encore mêmes modules. Les modules de la surface de Riemann représentée par l'équation (1) sont donc constants et indépendants de z .

Cela posé, ou bien la surface S_1 ne pourra dériver de la surface S_0 par une transformation birationnelle que d'un nombre fini de manières; dans ce cas, on

pourra déterminer ces transformations, et par conséquent l'intégrale générale de l'équation (1) par des procédés purement algébriques; cette intégrale sera donc algébrique; ou bien les deux surfaces pourront dériver l'une de l'autre par une infinité de transformations birationnelles, ce qui signifie que l'une d'elles, S_0 par exemple, sera reproduite par une infinité de pareilles transformations. Mais cela ne peut jamais avoir lieu si $p > 1$. Dans le cas de $p = 1$, on retrouverait d'ailleurs aisément le résultat énoncé plus haut.

En résumé, on peut tirer du beau théorème de M. Fuchs les conséquences suivantes, en laissant de côté le cas de $p = 0$, complètement traité par le savant géomètre de Berlin.

Si les conditions énoncées par M. Fuchs sont remplies pour une équation du premier ordre, et si $p = 1$, l'équation est intégrable par quadratures. Si $p > 1$, l'intégrale est algébrique.

Il serait intéressant de rechercher si, dans le cas des équations d'ordre supérieur, on arrive à des théorèmes analogues, ou si, au contraire, on est conduit à une classe essentiellement nouvelle d'équations intégrables par les fonctions fuchsienues.



SUR UN THÉORÈME DE M. FUCHS

Acta mathematica, t. 7, p. 1-32 (1885).

Les équations différentielles linéaires jouissent d'une propriété remarquable : les points singuliers sont les mêmes pour toutes les intégrales. C'est ainsi que pour les équations dont les coefficients sont des polynômes entiers en x , les points singuliers sont les valeurs de x qui annulent le premier coefficient. C'est sur cette circonstance qu'est fondée la méthode d'intégration de ces équations par les fonctions zétafuchsienues.

Les équations non linéaires ne jouissent pas, du moins en général, de la même propriété. Ainsi l'équation très simple

$$x dx + y dy = 0$$

a pour intégrale générale

$$y = \sqrt{c^2 - x^2},$$

c étant une constante d'intégration. Et les points singuliers $x = \pm c$ dépendent de cette constante et ne sont par conséquent pas les mêmes pour toutes les intégrales.

On est ainsi conduit à rechercher s'il existe, en dehors des équations linéaires, d'autres classes d'équations différentielles dont toutes les intégrales particulières aient les mêmes points singuliers. C'est ce problème que M. Fuchs a très élégamment résolu dans un Mémoire intitulé : *Ueber Differentialgleichungen deren Integrale feste Verzweigungspunkte besitzen* et inséré aux Sitzungsberichte de l'Académie de Berlin (séance du 26 juin 1884).

Je rappelle succinctement les notations employées par le savant géomètre de Berlin et les résultats qu'il a obtenus.

(1) Imprimé le 11 février 1885.

M. Fuchs considère une équation du premier ordre

$$(A) \quad F(z, y, y') = 0,$$

où z est la variable indépendante et y' la dérivée $\frac{dy}{dz}$ et dont le premier membre est un polynôme entier en y et en y' , ayant pour coefficients des fonctions quelconques de z .

Si l'on considère un instant z comme une constante, l'équation (A) devient une relation algébrique entre y et y' . On appelle p le genre de cette relation.

L'équation

$$(C) \quad D(z, y) = 0$$

est celle que l'on obtient en éliminant y' entre l'équation (A) et la suivante

$$(B) \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

M. Fuchs arrive d'abord à un résultat général qu'il énonce ainsi :

« Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Integrale der Gleichung (A) feste, sich nicht mit den Änderungen der Anfangswerthe stetig verschiebende Verzweigungspunkte besitzen, sind die folgenden.

» 1. Die Gleichung (A) hat die Form

$$(F) \quad y'^m + \psi_1 y'^{m-1} + \psi_2 y'^{m-2} + \dots + \psi_m = 0,$$

worin $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$ ganze rationale Functionen von y mit von z abhängigen Coefficienten von der Beschaffenheit bedeuten, dass ψ_k höchstens vom Grade $2k$ in Bezug auf y ist.

» 2. Ist $y = \eta$ eine Wurzel der Discriminantengleichung (C) für welche die durch (F) definierte algebraische Function y' von y sich verzweigt so ist η ein Integral der Gleichung (F). In der y' als algebraische Function von y darstellenden Riemann'schen Fläche hat y' in sämtlichen über $y = \eta$ liegenden Verzweigungsstellen den Werth $y' = \zeta = \frac{d\eta}{dz}$.

» 3. Je α Blättern, welche sich in $y = \eta$, $y' = \zeta = \frac{d\eta}{dz}$ verzweigen, entsprechen mindestens $\alpha - 1$ mit $y = \eta$ zusammenfallende Wurzeln der Gleichung

$$F(z, y, \zeta) = 0$$

mit der Unbekannten y , »

En d'autres termes, l'équation (A) devra satisfaire aux conditions suivantes :

1° La fonction y' définie par cette équation ne pourra devenir infinie que lorsque y sera lui-même infini, ou pour certaines valeurs particulières de z .

2° Si l'on pose $y_1 = \frac{1}{y}$, $y'_1 = \frac{dy_1}{dz}$, l'équation (A) deviendra

$$(A_1) \quad F_1(z, y_1, y'_1) = 0;$$

y'_1 ne devra pouvoir devenir infinie, si y_1 est nul, que pour certaines valeurs particulières de z .

3° Les équations

$$F = \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

devront définir des intégrales singulières de l'équation (A).

4° En différenciant l'équation (A), on trouve

$$\frac{dP}{dy} \frac{dy'}{dz} + \frac{dF}{dy} y' + \frac{dF}{dz} = 0.$$

On devra avoir identiquement

$$\frac{dF}{dy} y' + \frac{dF}{dz} = PF + Q \frac{dF}{dy},$$

P et Q étant des polynômes entiers en y et en y' , ayant pour coefficients des fonctions de z .

Il est aisé de comprendre l'importance de ces résultats. Supposons en effet que F soit un polynôme entier, non seulement par rapport à y et à y' , mais encore par rapport à z . Alors, si les conditions précédemment énoncées sont remplies, le nombre des points singuliers est fini et ces points peuvent même être regardés comme donnés, de sorte que la méthode d'intégration des équations linéaires par les fonctions fuchsienues est applicable, au moins dans ses traits essentiels. On pourrait donc ainsi concevoir l'espoir de découvrir une classe nouvelle d'équations différentielles intégrables par ces transcendentes. Dans le cas même où F n'est pas un polynôme entier par rapport à z , le résultat reste fort important.

Mais pour en tirer tous les fruits, il est indispensable de faire des conditions précédemment énoncées une étude plus approfondie. Cette étude a été commencée et poussée assez loin par M. Fuchs et je désirerais ici la pousser plus loin encore, afin d'arriver à des conclusions définitives (*).

(*) Voir aux NOTES.

Le nombre que nous avons appelé plus haut p joue dans cette étude un rôle capital.

1° Supposant d'abord $p = 0$, M. Fuchs pose

$$y = \frac{\Phi_1(t)}{\Phi_0(t)}, \quad y' = \frac{\Phi_2(t)}{\Phi_0(t)},$$

Φ_0 , Φ_1 et Φ_2 désignant des polynômes entiers en t , dont les coefficients dépendent de z . Il arrive ainsi à l'équation

$$\frac{dt}{dz} = \Lambda_0 + \Lambda_1 t + \Lambda_2 t^2,$$

où Λ_0 , Λ_1 , Λ_2 sont des fonctions de z . C'est l'équation de Riccati qu'il est aisé de ramener, comme on sait, aux équations linéaires du second ordre. Ainsi dans le cas de $p = 0$, on n'obtient pas de classe réellement nouvelle d'équations différentielles satisfaisant aux conditions énoncées.

Dans ce premier cas, j'é n'ai rien à ajouter aux résultats obtenus par M. Fuchs.

2° Ce savant géomètre, examinant ensuite le cas de $p = 1$, pose

$$y = \frac{\Phi_1 + \Psi_1 \sqrt{R(t)}}{\Phi_0 + \Psi_0 \sqrt{R(t)}}, \quad y' = \frac{\Phi_2 + \Psi_2 \sqrt{R(t)}}{\Phi_0 + \Psi_0 \sqrt{R(t)}},$$

les Φ , les Ψ et R étant des polynômes entiers en t avec des coefficients dépendant de z , et R en particulier étant du quatrième degré en t .

L'équation (A) est alors ramenée à la forme

$$(1) \quad \frac{dt}{dz} = \Lambda_0 + \Lambda_1 t + \Lambda_2 t^2 + \lambda \sqrt{R(t)},$$

où les Λ et λ sont des fonctions de z .

On déduit alors de l'énoncé de M. Fuchs, cité plus haut, la condition suivante :

$$(2) \quad \frac{dR}{dz} + \frac{dR}{dt} (\Lambda_0 + \Lambda_1 t + \Lambda_2 t^2) = (B_0 + B_1 t) R(t),$$

B_0 et B_1 étant des fonctions de z .

On peut pousser plus loin encore l'étude de cette condition, à laquelle s'arrête le célèbre analyste que nous citons.

Soit

$$(3) \quad R(t) = (t - \alpha)(t - \beta)(t - \gamma)(t - \delta),$$



α, β, γ et δ étant des fonctions de z . Posons

$$(4) \quad t = \frac{au+b}{cu+d},$$

a, b, c, d étant des fonctions de z que nous déterminerons plus complètement dans la suite et auxquelles nous imposerons d'abord la condition

$$ad - bc = 1.$$

Les équations (1), (2) et (3) vont se transformer. En posant

$$\alpha = \frac{a\alpha' + b}{c\alpha' + d}, \quad \beta = \frac{a\beta' + b}{c\beta' + d}, \quad \gamma = \frac{a\gamma' + b}{c\gamma' + d}, \quad \delta = \frac{a\delta' + b}{c\delta' + d},$$

on aura

$$R(t) = \frac{(u-\alpha')(u-\beta')(u-\gamma')(u-\delta')}{(cu+d)^4(c\alpha'+d)(c\beta'+d)(c\gamma'+d)(c\delta'+d)} = \frac{R_1}{(cu+d)^4 M},$$

M étant une fonction de z ,

$$\Lambda_0 + \Lambda_1 t + \Lambda_2 t^2 = \frac{\Lambda_0'' + \Lambda_1'' u + \Lambda_2'' u^2}{(cu+d)^3}, \quad B_0 + B_1 t = \frac{B_0' + B_1' u}{cu+d},$$

les Λ'' et les B' étant des fonctions de z . Il vient ensuite

$$\frac{dt}{dz} = \frac{du}{dz(cu+d)^2} + \frac{C_0 + C_1 u + C_2 u^2}{(cu+d)^3},$$

d'où, en posant

$$\Lambda_0'' - C_0 = \Lambda_0', \quad \Lambda_1'' - C_1 = \Lambda_1', \quad \Lambda_2'' - C_2 = \Lambda_2',$$

on tirera

$$\frac{du}{dz} = \Lambda_0' + \Lambda_1' u + \Lambda_2' u^2 + \lambda' \sqrt{R_1},$$

et l'on trouverait aisément

$$\frac{dR_1}{dz} + \frac{dR_1}{du} (\Lambda_0' + \Lambda_1' u + \Lambda_2' u^2) = (B_0' + B_1' u) R_1.$$

Ainsi la forme des équations (1), (2) et (3) n'est pas changée par la transformation (4), ce qu'il était d'ailleurs facile de prévoir.

Nous déterminerons a, b, c, d en fonction de z par les conditions

$$da - b = (c+d)\beta - (a+b) = (d-c)\gamma - (b-a) = 0$$

qu'il est toujours possible de remplir et qui entraînent

$$\alpha' = 0, \quad \beta' = 1, \quad \gamma' = -1.$$

D'où la conclusion suivante :

Il est toujours permis de supposer

$$R(t) = t(t-1)(t-\delta),$$

δ étant une fonction de z qui définit le module des fonctions elliptiques engendrées par $\sqrt{R}$. C'est l'hypothèse que nous ferons désormais.

L'équation (2) devient alors

$$t(1-t) \frac{d\delta}{dz} + \frac{dR}{dt} (\Lambda_0 + \Lambda_1 t + \Lambda_2 t^2) = (B_0 + B_1 t) R.$$

Faisons successivement dans cette équation

$$t = 0, \quad t = 1, \quad t = -1,$$

elle deviendra

$$\frac{dR}{dt} (\Lambda_0 + \Lambda_1 t + \Lambda_2 t^2) = 0 \quad (t = -1, 0, 1).$$

Mais $\frac{dR}{dt}$ ne saurait s'annuler pour une de ces trois valeurs de t , sans quoi δ serait égal à -1 , à 0 ou à 1 , et le nombre p ne serait plus égal à 1 , mais à 0 .

On a donc

$$\Lambda_0 + \Lambda_1 t + \Lambda_2 t^2 = 0 \quad (t = -1, 0, 1),$$

d'où

$$\Lambda_0 = \Lambda_1 = \Lambda_2 = 0.$$

L'équation (2) se réduit alors à

$$t(1-t) \frac{d\delta}{dz} = (B_0 + B_1 t) R.$$

Si dans cette équation on fait $t = \delta$, il reste

$$\frac{d\delta}{dz} = 0.$$

Ainsi δ est une constante.

Si l'on regarde un instant z comme une constante, l'équation (A) devient une relation algébrique de genre p . Cette relation définit une certaine surface de Riemann S qui dépend de z . Ici $p = 1$; donc à chacune de ces surfaces de Riemann correspond un système de fonctions elliptiques et le module de ces fonctions pourra s'appeler le module de la surface S .

Il résulte de ce qui précède que le module de la surface S est invariable.

Cela posé, l'équation (1) devient

$$\frac{du}{dz} = \lambda \sqrt{R}$$



ou

$$\frac{dt}{\sqrt{R}} = \lambda dz.$$

R ne dépend que de t et λ ne dépend que de z ; les variables sont donc séparées.

Posons $\lambda = \frac{d\mu}{dz}$, μ étant une fonction de z . L'inversion de la relation

$$\frac{dt}{\sqrt{R}} = d\mu$$

donnera

$$t = \varphi(\mu + c),$$

φ étant l'algorithme d'une fonction doublement périodique et c la constante d'intégration.

Les points singuliers de la fonction t seront ceux de la fonction μ ; ils seront donc indépendants de la constante d'intégration et seront les mêmes pour toutes les intégrales.

Ainsi dans le cas de $p = 1$, comme dans celui de $p = 0$, nous ne sommes pas conduits à une classe réellement nouvelle d'équations différentielles.

3° Il reste à examiner le cas de $p > 1$, laissé de côté par M. Fuchs.

Une petite digression sur les surfaces de Riemann est ici nécessaire.

Soit

$$f_0(y_0, y'_0) = 0$$

une relation algébrique de genre p , définissant une surface de Riemann S_0 .

Soit

$$f_1(y_1, y'_1) = 0$$

une relation de même genre définissant une surface de Riemann S_1 .

Les deux surfaces S_0 et S_1 seront dites *équivalentes* si l'on peut passer de l'une à l'autre par une transformation birationnelle, c'est-à-dire en établissant entre les deux points analytiques (y_0, y'_0) , (y_1, y'_1) une relation telle que y_1 et y'_1 puissent s'exprimer rationnellement en fonction de y_0 et y'_0 ; et réciproquement.

On sait qu'il y a certains invariants qui ne sont pas altérés par les transformations birationnelles; ce sont les *modules*. Il y a $3p - 3$ modules pour une surface de Riemann de genre $p > 1$ et un module pour une surface de genre *un*. Deux surfaces de Riemann équivalentes ont donc mêmes modules.

Reprenons maintenant l'équation (A) et considérons-la comme représentant

une surface de Riemann S variable avec z . Je dis que *les modules de cette surface S seront constants et indépendants de z* .

En effet partons de la valeur initiale z_0 de z , à laquelle correspond une certaine surface de Riemann S_0 . Soient y_0 et y'_0 les valeurs initiales d'une certaine intégrale de l'équation (A) et de sa dérivée; le point analytique (y_0, y'_0) appartiendra à la surface S_0 .

Allons ensuite du point z_0 au point z_1 en suivant un chemin déterminé. La surface de Riemann, que nous avons appelée S et qui pour $z = z_0$ se réduisait à S_0 , variera avec z et pour $z = z_1$ se réduira à S_1 . Pour $z = z_1$, l'intégrale considérée et sa dérivée se réduiront à y_1 et y'_1 et le point analytique (y_1, y'_1) appartiendra à la surface S_1 .

Faisons maintenant varier sur la surface S_0 le point analytique (y_0, y'_0) qui définit les valeurs initiales correspondant à l'intégrale envisagée, mais conservons des valeurs invariables à z_0 et à z_1 et ne faisons pas varier non plus le chemin qui mène de z_0 à z_1 . Dans ces conditions, les surfaces S_0 et S_1 ne varieront pas, mais l'intégrale considérée variera et dépendra des valeurs initiales y_0 et y'_0 que l'on aura choisies. Par conséquent y_1 et y'_1 seront des fonctions de y_0 et de y'_0 .

Je dis que ce seront des fonctions uniformes et continues du point analytique (y_0, y'_0) . En effet si l'on se donne les valeurs initiales y_0 et y'_0 , l'intégrale qui correspondra à ces valeurs initiales sera entièrement déterminée. Cette intégrale considérée comme fonction de z , peut prendre pour $z = z_1$ des valeurs différentes. Mais parmi elles, il y en a une, qui est celle que nous avons appelée y_1 et qui est celle que l'on obtient en allant du point z_0 au point z_1 par le chemin particulier que nous avons choisi. Cette valeur y_1 ainsi définie est parfaitement déterminée. C'est donc une fonction uniforme du point analytique (y_0, y'_0) .

Cette fonction uniforme pourrait toutefois être discontinue. Voyons comment cela pourrait arriver, par un exemple simple. Reprenons l'équation

$$z dz + y' dy = 0$$

et son intégrale

$$y = \sqrt{c^2 - z^2}.$$

Soient $z_0 = 0$, $z_1 = 1$ et allons du point 0 au point 1 par la droite qui joint ces deux points. Il viendra

$$y_0 = c$$

et

$$y_1 = \pm \sqrt{c^2 - 1} = \pm \sqrt{y_0^2 - 1}.$$

Ainsi y_1 est exprimé en fonction de y_0 . Il reste toutefois pour le définir complètement à décider si l'on doit prendre le signe + ou le signe -. Supposons d'abord que la partie imaginaire de y_0 soit positive. Posons

$$2y_0 = \left(t + \frac{1}{t}\right) \cos \varphi + i \left(t - \frac{1}{t}\right) \sin \varphi,$$

t et φ étant des quantités réelles et telles que

$$0 \leq \varphi < 2\pi \quad (t \geq 1).$$

Cela est toujours possible et d'une seule manière, sauf une exception dont nous parlerons plus loin. Il viendra

$$2\sqrt{y_0^2 - 1} = \pm \left[\left(t - \frac{1}{t}\right) \cos \varphi + i \left(t + \frac{1}{t}\right) \sin \varphi \right].$$

Cela posé, pour déterminer le signe qu'il faut prendre, faisons varier z de 0 à 1, en suivant la droite qui joint ces deux points.

Nous écrivons

$$2y_0 = \left(u + \frac{z^2}{u}\right) e^{i\psi} + i \left(u - \frac{z^2}{u}\right) \sin \psi$$

$$(0 \leq \psi < 2\pi, u \geq z);$$

ψ devra se réduire à φ et u à t pour $z = 1$. Il viendra

$$2\sqrt{y_0^2 - z^2} = \pm \left[\left(u - \frac{z^2}{u}\right) \cos \psi + i \left(u + \frac{z^2}{u}\right) \sin \psi \right]$$

et comme cette expression devra se réduire à $2y_0$ pour $z = 0$, il faudra prendre le signe + et il viendra

$$2y_1 = \left(t - \frac{1}{t}\right) \cos \varphi + i \left(t + \frac{1}{t}\right) \sin \varphi.$$

Cette expression n'est pas une fonction continue de y_0 . Soit en effet

$$t = 1 + \varepsilon,$$

ε étant infiniment petit. Les deux valeurs de $2y_0$

$$\left(1 + \varepsilon + \frac{1}{1 + \varepsilon}\right) \cos \varphi + i \left(1 + \varepsilon - \frac{1}{1 + \varepsilon}\right) \sin \varphi = 2 \cos \varphi + \text{inf. petit}$$

et

$$\left(1 + \varepsilon + \frac{1}{1 + \varepsilon}\right) \cos(-\varphi) + i \left(1 + \varepsilon - \frac{1}{1 + \varepsilon}\right) \sin(-\varphi) = 2 \cos \varphi + \text{inf. petit}$$

sont infiniment voisines, tandis que les valeurs correspondantes de $2y_1$

$$\left(1 + \varepsilon - \frac{1}{1 + \varepsilon}\right) \cos \varphi + i \left(1 + \varepsilon + \frac{1}{1 + \varepsilon}\right) \sin \varphi = 2i \sin \varphi + \text{inf. petit}$$

et

$$\left(1 + \varepsilon - \frac{1}{1 + \varepsilon}\right) \cos(-\varphi) + i \left(1 + \varepsilon + \frac{1}{1 + \varepsilon}\right) \sin(-\varphi) = -2i \sin \varphi + \text{inf. petit}$$

ne sont pas infiniment voisines comme elles devraient l'être si y_1 était fonction continue de y_0 .

A quoi tient ce fait? Supposons que y_0 soit réel et compris entre -1 et $+1$. Alors il faudra prendre $t = 1$. Et pour l'angle φ nous aurons deux valeurs distinctes satisfaisant toutes deux à la condition

$$\cos \varphi = y_0.$$

D'ailleurs rien dans les hypothèses faites jusqu'ici ne nous permettra de décider entre ces deux valeurs de φ qui conduisent pour y_1 à deux valeurs égales et de signe contraire. Rendons-nous compte de la raison d'être de cette anomalie. Supposons que nous ayons donné à y_0 une valeur réelle comprise entre -1 et $+1$. L'intégrale correspondante

$$y = \sqrt{y_0^2 - z^2}$$

présentera un point de ramification

$$z = |y_0|$$

situé sur la droite qui joint le point $z = 0$ au point $z = 1$, c'est-à-dire sur le chemin même que nous sommes convenus de suivre pour aller du premier de ces points au second. Quand la variable z , en suivant ce chemin, aura franchi ce point de ramification, rien dans les hypothèses faites ne nous permettra de décider quel signe il faut attribuer au radical $\sqrt{y_0^2 - z^2}$.

Je suis entré dans d'assez longs détails sur ce cas simple et j'espère avoir fait comprendre comment y_1 pourrait être une fonction discontinue de y_0 .

Cela arriverait si l'un des points du chemin que nous suivons pour aller de z_0 à z_1 était un point de ramification pour l'une des intégrales. Mais rien de pareil n'est à craindre dans le cas qui nous occupe. Nous avons supposé en effet que les points de ramification étaient les mêmes pour toutes les intégrales et par conséquent qu'il ne pouvait y avoir de points de ramification des intégrales que pour certaines valeurs particulières de z .

Or nous aurons toujours pu choisir le chemin qui va de z_0 à z_1 , de telle sorte qu'il ne passe par aucune de ces valeurs particulières.

Donc y_1 est une fonction uniforme et continue de y_0 et y'_0 .

Il est aisé de voir que cette fonction n'a d'autres singularités que des pôles ⁽¹⁾.

Donc y_1 est une fonction rationnelle de y_0 et y'_0 .

Pour la même raison, y'_1 est une fonction rationnelle de y_0 et y'_0 ; et de même y_0 et y'_0 sont des fonctions rationnelles de y_1 et y'_1 .

Donc on peut passer de S_0 à S_1 par une transformation birationnelle.

Donc ces deux surfaces de Riemann ont mêmes modules.

Donc les modules de la surface S sont indépendants de z .

C. Q. F. D.

C'est le résultat que nous avons obtenu plus haut pour le cas de $p=1$ et qui est étendu ainsi au cas général.

Pour pousser plus loin cette étude, il est nécessaire de dire quelques mots des transformations birationnelles des surfaces de Riemann en elles-mêmes.

Une surface de genre 0 peut se transformer en elle-même par une infinité de transformations birationnelles formant un groupe continu à trois paramètres. Soient en effet

$$(5) \quad f(x, y) = 0$$

une relation algébrique de genre 0 et S la surface de Riemann correspondante, on peut poser

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

φ et ψ étant rationnels [et t s'exprimant rationnellement en x, y]. Si ensuite on prend

$$t' = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta},$$

α, β, γ et δ étant des constantes quelconques, puis

$$x' = \varphi(t'), \quad y' = \psi(t'),$$

x' et y' seront fonctions rationnelles de x et y et réciproquement, on aura ainsi une triple infinité de transformations birationnelles de la surface S en elle-même.

Les transformations birationnelles d'une surface de genre 1 en elle-même

⁽¹⁾ Voir aux Notes.

forment encore un groupe continu, mais ce groupe ne contient plus qu'un seul paramètre. Supposons en effet que la relation (5) et par conséquent la surface S soit de genre 1 et non plus de genre 0. Nous poserons

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

φ et ψ étant des fonctions doublement périodiques avec les périodes ω et ω' . Soient

$$x' = \varphi(t'), \quad y' = \psi(t')$$

un autre système de valeurs satisfaisant à la relation (5) et supposons que x' et y' puissent s'exprimer rationnellement en x et y , et réciproquement. On verra :

1° Que t' est une fonction entière de t ;

2° Que t est une fonction entière de t' ;

3° Que l'on a entre t et t' une relation de la forme

$$\alpha t + \beta t' + \gamma = 0,$$

α, β et γ étant des constantes;

4° Que lorsque t augmente d'une période, t' doit augmenter aussi d'une période et réciproquement. Si par exemple t augmente de ω , t' devra augmenter de $m\omega + n\omega'$, m et n étant des entiers. Il vient donc

$$\alpha\omega + \beta(m\omega + n\omega') = 0$$

et de même

$$\alpha\omega' + \beta(m'\omega + n'\omega') = 0,$$

$$\alpha(m_1\omega + n_1\omega') + \beta\omega = 0,$$

$$\alpha(m'_1\omega + n'_1\omega') + \beta\omega' = 0.$$

Les deux dernières équations sont des conséquences des deux premières pourvu que l'on suppose $mn' - m'n = 1$. Cette condition est d'ailleurs nécessaire pour que les quatre équations soient compatibles. Nous remplacerons donc nos quatre équations par les trois suivantes :

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta m)\omega + \beta n\omega' &= \beta m'\omega + (\alpha + \beta n')\omega' = 0, \\ mn' - m'n &= 1. \end{aligned}$$

Ces équations peuvent être satisfaites de trois manières :

1° En faisant

$$\alpha = 1, \quad \beta = -1, \quad m = n' = 1, \quad m' = n = 0,$$

d'où

$$t' = t + \gamma.$$



On est ainsi conduit à une infinité de transformations de la surface S en elle-même, dépendant d'un seul paramètre γ et formant un groupe continu.

2° Le rapport $\frac{\omega}{\omega'}$ est donné par l'équation

$$z^3 + \beta^3 + z\beta(m+n') = 0.$$

De plus ce rapport ne doit pas être réel (si on laisse de côté le cas que nous venons de traiter et celui que nous allons traiter plus loin), sans quoi le rapport $\frac{\omega}{\omega'}$ serait lui-même réel. On devra donc avoir

$$(m+n')^2 < 4,$$

d'où

$$m+n' = 0, 1 \text{ ou } -1.$$

Il est aisé de déduire de là que le rapport $\frac{\omega}{\omega'}$ doit avoir une des valeurs

$$(6) \quad \frac{\lambda e^{\frac{2i\pi}{k}} + \mu}{\lambda' e^{\frac{2i\pi}{k}} + \mu'},$$

$k, \lambda, \mu, \lambda', \mu'$ étant des entiers tels que

$$\lambda\mu' - \lambda'\mu = 1 \quad k \equiv (2, 3, 4, 8, 9 \text{ ou } 10) \pmod{12}.$$

Ce cas ne pourra donc se présenter que pour certaines valeurs particulières du module de la surface S . Pour ces valeurs, la surface S admettra, outre le groupe continu trouvé plus haut, une autre transformation dont la puissance 3°, 4°, ou 6° se confondra avec la transformation identique, ainsi que les diverses puissances de cette transformation et les combinaisons de ces puissances avec les diverses transformations du groupe continu.

3° On peut enfin satisfaire à nos trois équations en faisant

$$l = -l', \quad \alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad m = n' = -1, \quad m' = n = 0.$$

On est ainsi conduit à une transformation T de la surface S en elle-même. Si l'on appelle τ une transformation quelconque du groupe continu trouvé plus haut, toutes les transformations birationnelles de la surface S en elle-même sont comprises dans l'une des formules

$$\tau \quad \text{et} \quad \tau T.$$

Il n'y a d'exception que si le rapport $\frac{\omega}{\omega'}$ prend l'une des valeurs (6). Les consi-

dérations qui précèdent ne présentent aucune difficulté, j'en ai pourtant développées avec détail parce que j'ai l'intention d'appliquer une méthode tout à fait analogue à la recherche des transformations des surfaces de genre $p > 1$.

Ces surfaces ne peuvent être transformées en elles-mêmes que d'un nombre fini de manières.

Ce théorème était soupçonné depuis longtemps, mais la démonstration a longtemps arrêté les géomètres. Elle a été trouvée il y a quelques années par M. Klein.

Voici en effet ce que ce géomètre me fit l'honneur de m'écrire à la date du 3 avril 1882 :

« Eine Reihe von Theoremen über algebraische Functionen beweist man vermöge der neuen η Function sofort (fonction intimement liée aux fonctions fuchsienues). Zum Beispiel den Satz, den ich in meiner Schrift über Riemann nur erst als wahrscheinlich bezeichnete, dass nämlich eine Fläche $p > 1$ niemals unendlich viele discrete eindeutige Transformationen in sich besitzen kann (vermöge deren sie in eine ∞ Zahl äquivalenter Fundamentalpolygone zerlegt erscheinen würde). »

Il est facile de reconstituer dans tous ses détails la démonstration de M. Klein.

Reprenons en effet la relation (5) et supposons que cette relation et par conséquent la surface S soient de genre $p > 1$. Nous poserons

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

$\varphi(t)$ et $\psi(t)$ étant des fonctions fuchsienues dont le polygone générateur R_0 aura $4p$ côtés, les côtés opposés étant conjugués. Tous les sommets formeront un seul cycle et la somme des angles sera égale à 2π [cf. *Théorie des groupes fuchsienues* (*Acta mathematica*, t. 1, p. 23 et 42); et *Mémoire sur les fonctions fuchsienues* (*Acta mathematica*, t. 1, p. 256 et suiv.) (1)]. Cela est toujours possible [cf. *Mémoire sur les groupes des équations linéaires* (*Acta mathematica*, t. 4, p. 272 et 276) (2)].

Soient

$$x' = \varphi(t'), \quad y' = \psi(t')$$

(1) *Œuvres* de H. Poincaré, t. 2, p. 129-130 (Exemples III, IV), p. 149, puis p. 222 et suivantes.

(2) *Œuvres* de H. Poincaré, t. 2, p. 363 et p. 368.



et supposons que x' et y' soient fonctions rationnelles de x et de y , et réciproquement. Qu'arrivera-t-il si l'on étudie t' comme fonction de t ? En premier lieu, tant que t reste intérieur au cercle fondamental, t' est une fonction holomorphe de t .

De plus t' reste intérieur au cercle fondamental.

Réciproquement, quand t' reste intérieur au cercle fondamental, t est fonction holomorphe de t' et reste intérieur au cercle fondamental.

On en déduit aisément (cf. *Mémoire sur les groupes des équations linéaires*, p. 231) ⁽¹⁾ que

$$t' = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta},$$

la substitution

$$\tau = \left(t, \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta} \right)$$

conservant le cercle fondamental.

Soit maintenant G le groupe des fonctions fuchsienues $\varphi(t)$ et $\psi(t)$. Je dis qu'il est permutable à la substitution σ . Soit en effet τ une substitution quelconque du groupe G : je dis que $\sigma^{-1}\tau\sigma$ fera aussi partie de ce groupe. En effet, τ faisant partie de G , on aura

$$x = \varphi(t) = \varphi(t, \tau), \quad y = \psi(t) = \psi(t, \tau),$$

d'où

$$R[\varphi(t), \psi(t)] = R[\varphi(t, \tau), \psi(t, \tau)].$$

R étant l'algèbre d'une fonction rationnelle quelconque. D'autre part on a, par hypothèse,

$$x' = \varphi(t, \tau) = R_1[\varphi(t), \psi(t)], \\ y' = \psi(t, \tau) = R_2[\varphi(t), \psi(t)]$$

et de même

$$\varphi(t, \tau, \sigma) = R_1[\varphi(t, \tau), \psi(t, \tau)], \\ \psi(t, \tau, \sigma) = R_2[\varphi(t, \tau), \psi(t, \tau)],$$

d'où

$$\varphi(t\sigma) = \varphi(t, \sigma), \quad \psi(t\sigma) = \psi(t, \sigma)$$

ou en changeant t en $t\sigma^{-1}$

$$\varphi(t\sigma^{-1}\tau\sigma) = \varphi(t), \quad \psi(t\sigma^{-1}\tau\sigma) = \psi(t).$$

Donc la substitution $\sigma^{-1}\tau\sigma$ fait partie du groupe G .

C. Q. F. D.

Les substitutions linéaires permutables au groupe G et conservant le cercle

⁽¹⁾ Œuvres de H. Poincaré, t. 2, p. 355 et 357.

fondamental forment un groupe G' . Ce groupe G' contient évidemment le groupe G ; en d'autres termes G est un sous-groupe de G' , et l'on voit aisément qu'à toute substitution de G' , n'appartenant pas à G , correspondra une transformation birationnelle de la surface S en elle-même.

Remarquons de plus que, d'après la définition même de G' , G est un sous-groupe « distingué » [ou invariant] de G' .

Mais il y a deux espèces de sous-groupes : les sous-groupes d'indice fini (qui sont tels qu'on obtient toutes les substitutions du groupe principal, en prenant la résultante des diverses substitutions du sous-groupe et d'un nombre fini d'autres substitutions) et les sous-groupes d'indice infini.

Je me propose de démontrer que G est un sous-groupe d'indice fini, et par conséquent que la surface S n'admet qu'un nombre fini de transformations birationnelles en elle-même.

J'établirai d'abord que G' est un groupe fuchsien, c'est-à-dire un groupe proprement discontinu. En effet, s'il ne l'était pas, il serait ou bien continu (c'est-à-dire qu'il contiendrait des substitutions infinitésimales), ou bien improprement discontinu [cf. *Théorie des groupes kleinéens* (*Acta mathematica*, t. 3, p. 57) ⁽¹⁾].

1° Il ne peut être continu, car s'il contenait une substitution infinitésimale σ , cette substitution serait permutable, non seulement au groupe G , mais à toutes les substitutions de ce groupe.

Soient en effet

$$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p$$

les substitutions fondamentales de G . D'après les hypothèses faites, les substitutions

$$\sigma^{-1}\tau_1\sigma, \sigma^{-1}\tau_2\sigma, \dots, \sigma^{-1}\tau_p\sigma$$

feront également partie du groupe G . Mais ces substitutions diffèrent infiniment peu de

$$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p$$

puisque σ est infinitésimale. Mais le groupe G étant discontinu ne devra contenir aucune substitution infinitésimale, il ne pourra donc contenir deux substitutions distinctes, mais différant infiniment peu l'une de l'autre. Donc on a

$$\tau_i = \sigma^{-1}\tau_j\sigma \quad (i = 1, 2, \dots, 2p).$$

⁽¹⁾ Œuvres de H. Poincaré, t. 2, p. 266.



Donc σ est permutable aux substitutions fondamentales de G ; elle est donc permutable à toutes les substitutions de ce groupe, qui n'en sont que des combinaisons.

Mais je dis qu'on ne saurait trouver de substitution linéaire permutable à toutes les substitutions de G . En effet pour que deux substitutions linéaires Σ et Σ' soient permutables, il faut et il suffit, ou bien qu'elles aient mêmes points doubles (les deux points doubles pouvant dans certains cas se confondre en un seul), ou bien qu'elles aient toutes deux pour multiplicateur -1 et que les quatre points doubles soient conjugués harmoniques.

Nous n'avons pas besoin de nous inquiéter de ce second cas de permutabilité. En effet une substitution infinitésimale ne peut avoir pour multiplicateur -1 . Si donc le groupe G' contenait une substitution infinitésimale σ , toutes les substitutions de G devraient avoir mêmes points doubles que σ ; elles seraient donc toutes permutables entre elles, ce qui n'a pas lieu.

Donc G' ne peut être continu.

2° G' ne peut pas non plus être improprement discontinu. J'ai démontré en effet (*Groupes kleinéens*, p. 58) ⁽¹⁾ que tout groupe formé de substitutions linéaires conservant le cercle fondamental, et ne contenant pas de substitution infinitésimale, est proprement discontinu à l'intérieur du cercle fondamental.

Donc G' est un groupe fuchsien.

Il aura donc un polygone générateur R_0 , et l'indice de G considéré comme sous-groupe de G' sera égal à la S de R_0 (polygone générateur de G) divisée par la S de R_0 [cf. *Mémoire sur les groupes des équations linéaires* (*Acta mathematica*, t. 4, p. 285) ⁽²⁾]. Or la S de R_0 est finie, donc G est un sous-groupe d'indice fini.

C. Q. F. D.

En général, le groupe G' ne diffère pas du groupe G , de sorte que la surface S n'admet aucune transformation birationnelle en elle-même. Elle ne peut en avoir que dans des cas exceptionnels qui correspondent évidemment aux différents cas de symétrie que peut présenter le polygone R_0 .

Soient maintenant deux surfaces de Riemann S_0 et S_1 équivalentes, et de genre p .

Si l'on peut passer de l'une à l'autre par deux transformations birationnelles T et U , la transformation TU^{-1} changera en elle-même la surface S_0 .

⁽¹⁾ *Œuvres* de H. Poincaré, t. 2, p. 265.

⁽²⁾ *Œuvres* de H. Poincaré, t. 2, p. 378.

D'où les conclusions suivantes :

1° Si $p = 0$, on peut passer de S_0 à S_1 par une triple infinité de transformations birationnelles.

2° Si $p = 1$, on peut passer de S_0 à S_1 par une simple infinité de transformations birationnelles.

3° Si $p > 1$, il n'y a en général qu'une seule transformation birationnelle qui permette de passer de S_0 à S_1 , et il n'y en a jamais qu'un nombre fini.

Grâce à ces propositions, il est aisé de retrouver les résultats que nous avons démontré plus haut pour les cas de $p = 0$ et de $p = 1$, et de traiter complètement le cas de $p > 1$.

1. Reprenons en effet l'équation

$$(A) \quad F(y, y', z) = 0$$

et soit d'abord $p = 0$. On pourra poser

$$y = \varphi(t), \quad y' = \psi(t),$$

φ et ψ étant des fonctions rationnelles de t dont les coefficients dépendent de z .

Soient $y_0 = \varphi(t_0)$, $y'_0 = \psi(t_0)$ les valeurs initiales d'une certaine intégrale et de sa dérivée pour $z = z_0$, et

$$y_1 = \varphi(t_1), \quad y'_1 = \psi(t_1)$$

les valeurs de cette même intégrale et de sa dérivée pour $z = z_1$. On a vu que y_1 et y'_1 doivent être fonctions rationnelles de y_0 et y'_0 et réciproquement. On aura donc

$$t_1 = \frac{\alpha t_0 + \beta}{\gamma t_0 + \delta}.$$

Les coefficients de cette substitution linéaire $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dépendent évidemment de z_0 et de z_1 . Nous regarderons z_0 comme une constante, et z_1 sera la variable indépendante; nous supprimerons donc l'indice 1 de t_1, y_1, y'_1 et nous aurons

$$(6) \quad t = \frac{\alpha t_0 + \beta}{\gamma t_0 + \delta},$$

où t_0 sera la constante d'intégration et où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ seront des fonctions de z . Si $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ sont les dérivées de ces fonctions; il viendra

$$(7) \quad \frac{dt}{dz} = \frac{(\alpha' t_0 + \beta')(\gamma t_0 + \delta) - (\gamma' t_0 + \delta')(\alpha t_0 + \beta)}{(\gamma t_0 + \delta)^2}.$$



En éliminant t_0 entre (6) et (7) on retomberait sur l'équation de Riccati, ce qui confirme le résultat obtenu plus haut.

Si l'on remplace t par sa valeur (6') dans l'expression

$$y = \varphi(t),$$

on trouve pour l'intégrale générale de l'équation (A)

$$y = R(t_0),$$

R étant une fonction rationnelle de la constante d'intégration t_0 et dont les coefficients dépendent de z .

Réciproquement si l'on a une fonction y' de t_0 et de z , rationnelle par rapport à t_0 , et que l'on forme la dérivée $y' = \frac{dy}{dz}$, on obtiendra par l'élimination de t_0 une équation différentielle de la forme (A) entre y , y' et z .

Si en particulier l'équation (A) est algébrique, non seulement par rapport à y et à y' , mais encore par rapport à z , l'équation de Riccati à laquelle on sera conduit aura ses coefficients algébriques en z , et par conséquent l'intégration de l'équation (A) sera ramenée à celle des équations linéaires du second ordre à coefficients algébriques.

II. Supposons maintenant $p = 1$. Nous pourrions poser

$$y = \varphi(t), \quad y' = \psi(t),$$

φ et ψ étant des fonctions doublement périodiques de t dont les coefficients dépendent de z . Conservons aux notations

$$z_0, z_1, \quad y_0 = \varphi(t_0), \quad y'_0 = \psi(t_0), \quad y_1 = \varphi(t_1), \quad y'_1 = \psi(t_1)$$

le même sens que plus haut. On sait que y_1 et y'_1 doivent être des fonctions rationnelles de y_0 et y'_0 et réciproquement. Donc d'après ce qu'on a vu plus haut sur les transformations des surfaces de genre 1 en elles-mêmes, on devra avoir

$$t_1 = \alpha t_0 + \beta,$$

α étant égal à l'une des quantités

$$1, -1, e^{\frac{2\pi i}{3}}, -e^{\frac{2\pi i}{3}}, \pm i.$$

Comme α et β doivent être des fonctions continues de z , et que t_1 doit se réduire à t_0 pour $z_0 = z_1$, on aura

$$\alpha = 1, \quad t_1 = t_0 + \beta.$$

Considérons z_0 comme constant, z , comme variable et supprimons l'indice 1 de z_1, t_1, y'_1, y_1 .

β sera une fonction de z et l'intégrale générale de l'équation (A) sera

$$y = \varphi(t_0 + \beta),$$

φ étant une fonction doublement périodique dont les coefficients dépendront de z , β une fonction de z , et t_0 la constante d'intégration.

Si l'équation (A) est algébrique en z , les coefficients de la fonction doublement périodique $\varphi(t)$ dépendent algébriquement de z ; et la fonction β de z s'obtient par une simple quadrature. Posons

$$u = \sin(t),$$

y sera une fonction algébrique de u et de z , si l'équation (A) est algébrique en z . Si l'équation (A) n'est pas algébrique en z et si elle s'écrit

$$\sum A_{mp} y'^m y'^p = 0,$$

où les coefficients A_{mp} sont des fonctions non algébriques de z , y sera une fonction algébrique de u et des coefficients A_{mp} . Dans tous les cas on aura

$$u = \sin(t_0 + \beta),$$

t_0 étant la constante d'intégration. On reconnaît là le résultat obtenu plus haut.

III. Arrivons enfin au cas de $p > 1$. Faisons d'abord $z = z_0$ dans l'équation (A); cette équation représentera une certaine surface de Riemann S_0 . Si l'on y fait $z = z_1$, on aura une surface équivalente S_1 . Cette seconde surface dérive de la première par une seule transformation birationnelle ou par un nombre fini de pareilles transformations.

Soient

$$\begin{aligned} (A_0) \quad & F_0(y_0, y'_0) = 0, \\ (A_1) \quad & F_1(y_1, y'_1) = 0 \end{aligned}$$

les équations de ces deux surfaces de Riemann. On passera de l'une à l'autre en posant

$$(8) \quad y_1 = R(y_0, y'_0), \quad y'_1 = R_1(y_0, y'_0),$$

R et R_1 représentant des fonctions rationnelles. Ces fonctions rationnelles R et R_1 sont telles que l'élimination de y_0, y'_0 entre l'équation (A_0) et les équations (8) conduit à l'équation (A_1) . D'après ce que nous venons de voir, il n'y a qu'un nombre fini de fonctions rationnelles qui jouissent de la même propriété.



Donc quand on connaîtra les équations (A_0) et (A_1) on pourra trouver les deux fonctions rationnelles R et R_1 par des procédés purement algébriques.

Comme les coefficients de (A_0) et (A_1) dépendent de z_0 et de z_1 , il en sera de même des coefficients de R et R_1 . Si nous regardons z_0 comme une constante, z_1 comme la variable indépendante, puis que nous supprimons l'indice 1 dans z_1 , t_1 , y_1 , y'_1 , il viendra, pour l'intégrale générale de (A) ,

$$y = R(y_0, y'_0),$$

R étant une fonction rationnelle des deux constantes d'intégration y_0 et y'_0 , fonction rationnelle dont les coefficients dépendent de z . Les deux constantes d'intégration y_0 et y'_0 ne sont d'ailleurs pas indépendantes, car elles sont liées entre elles par l'équation (A_0) .

Si en particulier l'équation (A) est algébrique en z , les coefficients de R dépendront algébriquement de z , et l'intégrale générale de l'équation (A) sera algébrique.

Si au contraire l'équation (A) s'écrit

$$\sum A_{mp} y^m y'^p = 0,$$

les coefficients A_{mp} étant des fonctions non algébriques en z , l'intégrale générale

$$y = R$$

sera une fonction algébrique non seulement de y_0 , mais des coefficients A_{mp} .

Dans tous les cas, l'équation (A) s'intègre par des procédés purement algébriques.

On arrive d'ailleurs au même résultat par l'emploi des fonctions fuchsienues. Écrivons encore l'équation (A) sous la forme

$$\sum A_{mp} y^m y'^p = 0.$$

Nous pourrions poser

$$y' = \varphi(t), \quad y'' = \psi(t),$$

φ et ψ étant deux fonctions fuchsienues dont les coefficients dépendent de z . Soient ξ et η deux fonctions fuchsienues, indépendantes de z et à l'aide desquelles toutes les autres s'expriment rationnellement. On aura

$$y = R(\xi, \eta), \quad y' = R_1(\xi, \eta),$$

R et R_1 étant des fonctions rationnelles de ξ et de η . Les coefficients de ces fonctions rationnelles dépendent de z , et il est aisé de voir de quelle manière : ce sont des fonctions algébriques des coefficients A_{mp} .

Conservons aux notations

$$z_0, z_1, \quad y_0 = \varphi(t_0), \quad y'_0 = \psi(t_0), \quad y_1 = \varphi(t_1), \quad y'_1 = \psi(t_1)$$

le même sens que plus haut. Le point analytique (y_1, y'_1) devra être lié au point analytique (y_0, y'_0) par une transformation birationnelle. On aura donc

$$t_1 = \frac{\alpha t_0 + \beta}{\gamma t_0 + \delta},$$

la substitution

$$\left(t, \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta} \right)$$

appartenant au groupe appelé plus haut G' .

Les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dépendent de z_0 et de z_1 , mais ne peuvent être que des fonctions continues de z_1 ; de plus pour $z_1 = z_0$ on a $t_1 = t_0$. Mais le groupe G' est discontinu. Donc on a *quelques* z_1 et z_0

$$\alpha = \delta = 1, \quad \beta = \gamma = 0, \\ t_1 = t_0.$$

Ainsi t est une constante et il en est par conséquent de même de ξ et de η qui ne dépendent que de t . L'intégrale générale de l'équation (A) est donc

$$y = R(\xi, \eta),$$

où l'on doit regarder ξ et η comme deux constantes d'intégration liées entre elles par une relation algébrique.

C'est le même résultat que plus haut.

Il reste deux questions à résoudre.

On peut se demander en premier lieu *s'il existe effectivement des équations intégrables algébriquement par le procédé que nous venons d'indiquer*, c'est-à-dire des équations algébriques de la forme (A) , de genre $p > 1$ et satisfaisant aux conditions de M. Fuchs.

La réponse à cette première question doit être affirmative.

Soit en effet

$$(9) \quad F(\xi, \eta) = 0$$

une relation algébrique quelconque de genre $p > 1$ dont les coefficients sont constants. Soient

$$(10) \quad x = \varphi(\xi, \eta), \quad y' = \psi(\xi, \eta),$$



où φ et ψ sont des fonctions rationnelles de ξ et de η dont les coefficients dépendent de z . Nous supposons, pour fixer les idées, qu'ils en dépendent algébriquement. L'élimination de ξ et de η entre les équations (9) et (10) donnera une relation

$$(11) \quad \Phi(x, y, z) = 0,$$

où Φ est un polynôme entier en x et y dont les coefficients dépendent de z . Considérée comme une relation entre x et y seulement, la relation (11) définit une surface de Riemann de genre p , qui reste équivalente à elle-même quand on fait varier z .

Différentions les relations (10) par rapport à z (c'est-à-dire en y regardant ξ et η comme des constantes), il viendra

$$\frac{dx}{dz} = \frac{d\xi}{dz}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{d\eta}{dz}.$$

$\frac{d\eta}{dz}$ est une fonction rationnelle de ξ et de η . Maintenant, des relations (9) et (10) on peut déduire les suivantes

$$(12) \quad \xi = \varphi_1(x, y), \quad \eta = \psi_1(x, y),$$

φ_1 et ψ_1 étant des fonctions rationnelles de x et de y dont les coefficients dépendent de z . Il viendra donc

$$(13) \quad \frac{dy}{dz} = R(x, y),$$

R étant une fonction rationnelle de x et de y dont les coefficients dépendent de z . En éliminant x entre les équations (11) et (13) on arrivera à une équation de la forme (A), satisfaisant aux conditions de M. Fuchs.

On arriverait au même résultat en éliminant ξ et η entre les trois relations

$$F(\xi, \eta) = 0, \quad \gamma = \psi(\xi, \eta), \quad \frac{dy}{dz} = \frac{d\eta}{dz}.$$

Soit par exemple

$$(14) \quad F(u, v, w) = 0$$

une équation dont le premier membre est un polynôme entier homogène du quatrième degré en u, v, w .

Faisons-y

$$(15) \quad \begin{cases} u = a_1 x + b_1 y + c_1, \\ v = a_2 x + b_2 y + c_2, \\ w = a_3 x + b_3 y + c_3, \end{cases}$$

où les a_i , les b_i et les c_i sont des fonctions algébriques de z . Nous écrirons l'équation

$$F(ax + by + c, a_1x + b_1y + c_1, a_2x + b_2y + c_2) = 0.$$

Nous appellerons $A, A_1, A_2, B, \dots$ les mineurs du déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Il viendra

$$\gamma = \frac{Bu + B_1v + B_2w}{Cu + C_1v + C_2w}$$

ou en différenciant par rapport à z et appelant $B', B'_1, \dots$ les dérivées de $B, B_1, \dots$ par rapport à z

$$(16) \quad \frac{d\gamma}{dz} = \frac{(B'u + B'_1v + B'_2w)(Cu + C_1v + C_2w) - (C'u + C'_1v + C'_2w)(Bu + B_1v + B_2w)}{(Cu + C_1v + C_2w)^2}.$$

L'élimination de u, v, w et x entre les équations (14), (15) et (16) donnera une équation différentielle de la forme (A) satisfaisant aux conditions de M. Fuchs.

Passons à la seconde question qu'il nous restait à résoudre :

Étant donnée une équation différentielle algébrique (A), de genre $p > 1$, satisfaisant aux conditions de M. Fuchs et que l'on sait par conséquent intégrable algébriquement, comment effectuer réellement cette intégration.

On a vu d'après ce qui précède que cette question se ramène à la suivante :

Étant données deux surfaces de Riemann équivalentes, trouver la transformation birationnelle qui permet de passer de l'une à l'autre.

Le problème ainsi posé présente la plus grande analogie avec le problème de la réduction des formes arithmétiques. On conviendra de dire qu'une équation algébrique

$$F(x, y) = 0$$

est réduite lorsqu'on l'aura ramenée par une transformation birationnelle à une forme que l'on regardera comme plus simple que toutes les autres. Il faudrait choisir les conditions de réduction de façon :

1° Que l'on puisse toujours trouver la transformation birationnelle qui réduit une surface de Riemann donnée;



2° Qu'il n'y ait *en général* qu'une seule surface réduite équivalente à une surface de Riemann donnée et qu'il n'y en ait jamais qu'un nombre fini.

Alors on réduira les deux surfaces S_0 et S_1 que l'on veut transformer l'une dans l'autre; si les deux surfaces sont équivalentes, on devra parvenir à la même réduite et, comme on connaîtra la façon de transformer S_0 en la réduite et la réduite en S_1 , on connaîtra aussi la transformation qui change S_0 en S_1 .

Il est évidemment possible de trouver de pareilles conditions de réduction, ce qui rendrait complète l'analogie avec la théorie des formes arithmétiques. Mais cela n'est pas nécessaire; on peut se contenter de conditions de réduction telles que la surface réduite ne dépende plus que d'un nombre fini de paramètres.

Par exemple, Clebsch démontre qu'une courbe de genre p

$$F(x, y) = 0$$

peut toujours être ramenée au degré $p+1$ (*Abelsche Functionen*, p. 65). Après cette réduction, elle dépend encore de $p-1$ paramètres.

Soient donc

$$F(x, y) = 0, \quad F'(x', y') = 0$$

deux courbes de genre p qu'il s'agit de ramener l'une à l'autre par une transformation birationnelle. Je ramènerai la première au degré $p+1$ par une transformation convenablement choisie; elle deviendra

$$(17) \quad F_1(x_1, y_1) = 0.$$

Je pourrai trouver ensuite, par la méthode de Clebsch, une infinité de transformations birationnelles dépendant de $p-1$ paramètres arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}$, qui ramèneront la seconde courbe au degré $p+1$. Après l'application d'une de ces transformations, l'équation de cette courbe deviendra

$$(18) \quad F_2(x_1, y_1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}) = 0,$$

où j'ai mis en évidence les paramètres α . Si les deux surfaces de Riemann sont équivalentes, on pourra disposer des α de façon à identifier les équations (17) et (18) et l'on connaîtra du même coup la transformation qui fait passer d'une surface à l'autre.

On peut ainsi ramener la recherche des transformations birationnelles qui changent S_0 en S_1 à l'étude de l'équivalence des formes algébriques, c'est-à-dire de la transformation d'une telle forme en une autre par une substitution linéaire.

Soient

$$F(x, y) = 0, \quad F_1(x_1, y_1) = 0$$

deux équations qui représenteront deux surfaces de Riemann S_0 et S_1 et en même temps deux courbes algébriques C_0 et C_1 . Soient m_0 et m_1 les degrés de ces deux courbes qui auront le même genre p . Soit

$$(19) \quad A_1 \varphi_1(x, y) + A_2 \varphi_2(x, y) + \dots + A_p \varphi_p(x, y) = 0$$

l'équation générale des courbes d'ordre $m_0 - 3$ qui passent par tous les points doubles de C_0 . Soit de même

$$(20) \quad B_1 \psi_1(x_1, y_1) + B_2 \psi_2(x_1, y_1) + \dots + B_p \psi_p(x_1, y_1) = 0$$

l'équation générale des courbes d'ordre $m_1 - 3$ qui passent par tous les points doubles de C_1 . Soient

$$\begin{aligned} \Theta(A_1, A_2, \dots, A_p) &= 0, \\ \Theta_1(B_1, B_2, \dots, B_p) &= 0 \end{aligned}$$

les deux relations algébriques et homogènes par rapport aux A et aux B qui expriment, la première que la courbe (19) est tangente à C_0 , la seconde que la courbe (20) est tangente à C_1 . Si, d'autre part, x et y sont les coordonnées du point de contact des deux courbes (19), et C_0 , si x_1 et y_1 sont les coordonnées du point de contact de (20) et de C_1 , on aura

$$\begin{aligned} x &= R(A_1, A_2, \dots, A_p), & y &= R'(A_1, A_2, \dots, A_p), \\ x_1 &= R_1(B_1, B_2, \dots, B_p), & y_1 &= R'_1(B_1, B_2, \dots, B_p), \end{aligned}$$

les fonctions R, R', R_1, R'_1 étant rationnelles.

Si les deux surfaces de Riemann S_0 et S_1 ont mêmes modules, les deux formes algébriques Θ et Θ_1 seront algébriquement équivalentes, c'est-à-dire qu'on pourra passer de l'une à l'autre par une substitution linéaire, ou en posant

$$A_i = \sum_k a_{ik} B_k,$$

les a_{ik} étant des coefficients constants.

La transformation birationnelle qui change S_0 en S_1 sera alors facile à trouver. On aura en effet

$$(21) \quad \begin{cases} x = R(\sum a_{1k} B_k, \sum a_{2k} B_k, \dots, \sum a_{pk} B_k), \\ y = R'(\sum a_{1k} B_k, \sum a_{2k} B_k, \dots, \sum a_{pk} B_k), \end{cases}$$

avec les conditions

$$(22) \quad F_1(x_1, y_1) = 0, \quad \sum B_i \psi_i(x_1, y_1) = 0, \quad \sum B_i \theta_i(x_1, y_1) = 0,$$



où l'on a posé

$$\theta_i = \frac{d^2 y_i}{dx_i dy_i} - \frac{d^2 y_i}{dy_i dx_i}.$$

On pourra toujours trouver p fonctions rationnelles de x_i et de y_i ,

$$p_1(x_1, y_1), p_2(x_1, y_1), \dots, p_p(x_1, y_1),$$

qui, substituées à la place de $B_1, B_2, \dots, B_p$, satisfont aux relations (22). On remplacera alors B_i par $p_i(x_1, y_1)$ dans les équations (21) et l'on obtiendra ainsi la transformation birationnelle qui change S_0 en S_1 .

Les invariants qui restent arbitraires dans la forme algébrique Θ sont au nombre de $3p - 3$ et ils doivent être regardés comme les modules de la surface de Riemann S_0 .

Il est une circonstance sur laquelle je désirerais maintenant attirer l'attention et qui facilite singulièrement la recherche des conditions d'équivalence des deux formes Θ et Θ_1 et de la substitution linéaire qui les transforme l'une dans l'autre.

Parmi les courbes (19), il y en a $2^{p-1}(2^p - 1) = P$ qui sont $p - 1$ fois tangentes à C_0 ; nous les appellerons les courbes k_0 ; de même il y aura, parmi les courbes (20), P courbes k_1 qui seront $p - 1$ fois tangentes à C_1 . La substitution linéaire

$$A_i = \sum a_{ik} B_k$$

qui change Θ en Θ_1 devra transformer les P courbes k_0 dans les P courbes k_1 . Il pourrait y avoir, dans le problème général, une assez grande indétermination; car on pourrait se demander quelle est celle des P courbes k_0 qui se transformera dans une courbe k_1 donnée. Il y aurait P combinaisons logiquement possibles, ce qui obligerait à faire un nombre très considérable d'essais inutiles.

D'autres considérations viendraient, il est vrai, réduire le nombre des combinaisons logiquement possibles; telle serait par exemple, pour $p = 3$, la distribution des 28 tangentes doubles en 64 systèmes de 4. Mais ce nombre n'en resterait pas moins très grand.

Fort heureusement, dans le problème particulier qui nous occupe, cette indétermination n'existe pas. Quelle est celle des courbes k_0 qui se transforme dans une courbe donnée k_1 ? La réponse est simple: c'est la courbe k_0 à laquelle se réduit la courbe donnée k_1 quand z_i se réduit à z_0 .

On arrive même ainsi, presque immédiatement, à déterminer un grand nombre d'intégrales particulières de l'équation (A).

En effet, soit l'équation

$$(A) \quad F(y, y', z) = 0$$

pour $z = z_1$, elle représente une courbe C_1 , qui est tangente en $P(p - 1)$ points aux courbes k_1 . Considérons y, y' et z_1 comme les coordonnées d'un point dans l'espace; lorsqu'on fera varier z_1 , les $P(p - 1)$ points de contact (y, y') de C_1 avec les P courbes k_1 décriront dans l'espace $P(p - 1)$ courbes qui seront des intégrales particulières de l'équation (A).

Il n'y a donc aucune difficulté à craindre dans les calculs algébriques qui conduisent à l'intégration de l'équation (A).

Remarquons en passant que la considération des P courbes k_0 nous conduit à une seconde démonstration de ce théorème, qu'une surface de Riemann ne peut jamais être transformée en elle-même par une infinité de transformations birationnelles.

J'arrive à la conclusion définitive de ce travail. *Les équations du premier ordre qui satisfont aux conditions de M. Fuchs ne constituent pas des classes réellement nouvelles d'équations différentielles.*

Dans le cas de $p = 0$, elles se ramènent aux équations linéaires;

Dans le cas de $p = 1$, elles s'intègrent par une simple quadrature;

Enfin dans le cas de $p > 1$, elles s'intègrent par des procédés purement algébriques.

Nous devons donc renoncer à l'espoir de rencontrer parmi elles des classes essentiellement nouvelles d'équations intégrables par les transcendentes fuchiennes. Tout au plus pourrions-nous supposer qu'il en existe de pareilles, parmi les équations d'ordre supérieur; mais on ne pourra s'en assurer que par une discussion spéciale, analogue à celle qui précède.

Le beau résultat de M. Fuchs en perd-il pour cela son intérêt? Je ne le crois pas. Il nous fournit en effet une classe très nombreuse d'équations différentielles intégrables algébriquement. Les conditions de M. Fuchs sont très simples et il suffit d'un examen assez rapide pour reconnaître si elles sont remplies. On reconnaît du même coup l'intégrabilité algébrique, qui sans cette circonstance aurait pu passer inaperçue.

De plus, on peut fonder sur ce théorème une méthode pour trouver les modules d'une surface de Riemann; mais c'est là un point que je ne puis développer en ce moment.

Paris, 25 novembre 1884.



SUR L'INTÉGRATION ALGÈBRE

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 112, p. 761-764 (13 avril 1891).

La question de l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré n'a pas attiré l'attention des géomètres autant qu'elle le méritait. La voie a été ouverte, il y a vingt ans, par un admirable travail de M. Darboux; mais les analystes ont été fort longtemps sans s'y engager, et ce n'est que tout récemment que le problème a été repris par MM. Painlevé et Autonne, dans deux Mémoires que l'Académie vient de récompenser. L'importance du sujet me décide à publier quelques résultats qui s'y rapportent, bien qu'ils soient fort incomplets.

J'écrirai l'équation différentielle sous la forme suivante

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0,$$

L, M, N étant trois polynômes entiers, homogènes et de degré m en x, y et z .

Le nombre m s'appellera la *dimension* de l'équation.

Si l'intégrale générale est algébrique, elle s'écrira

$$f + C\varphi = 0,$$

C étant une constante arbitraire, et f et φ étant deux polynômes homogènes d'ordre p en x, y et z . J'appellerai *remarquables* les valeurs de C pour lesquelles le polynôme $f + C\varphi$ n'est pas irréductible. Si l'intégrale générale algébrique a été mise sous sa forme la plus simple, ce que nous supposons, le nombre des valeurs remarquables est fini.

Le problème de l'intégration algébrique des équations différentielles serait résolu si l'on avait, dans tous les cas, une limite supérieure du nombre p .

Les points singuliers de l'équation différentielle sont donnés par les équations

$$\frac{L}{x} = \frac{M}{y} = \frac{N}{z}.$$

Ils sont au nombre de $m^2 + m + 1$; nous les supposons tous distincts.

Soit alors x_0, y_0, z_0 un de ces points singuliers; dans le voisinage de ce point, l'intégrale générale peut se mettre sous la forme

$$X_1^{-1} X_2^S = \text{const.},$$

S étant une constante, et X_1, X_2 étant deux séries ordonnées suivant les puissances de $\frac{x}{x_0} - \frac{z}{z_0}, \frac{y}{y_0} - \frac{z}{z_0}$, s'annulant au point singulier.

Il y a quelques cas d'exception : s'ils se présentaient, on serait certain que l'équation n'est pas intégrable algébriquement; on en serait certain également si, pour un des points singuliers, l'exposant S n'était pas réel et commensurable.

Supposons donc que S soit réel et commensurable; nous appellerons *nœuds* les points pour lesquels cet exposant est positif, *cols* ceux pour lesquels il est négatif.

Nous poserons $S = \frac{\mu}{\nu}$ pour les nœuds, $S = -\frac{\mu}{\nu}$ pour les cols, μ et ν étant deux entiers premiers entre eux.

J'envisage un nœud et je suppose que la courbe

$$f + C\varphi = 0$$

ait en ce nœud λ branches distinctes; ce nœud sera d'ailleurs, en général, un point singulier pour chacune de ces branches.

Je démontre que l'on a

$$p^2 = S\lambda^2\mu\nu, \quad (m + 2)p = S\lambda(\mu + \nu),$$

les sommations du second membre devant être étendues à tous les nœuds.

M. Painlevé a posé le problème suivant : *Reconnaitre si l'intégrale générale de l'équation différentielle est une courbe algébrique de genre donné*, et il a énoncé un certain nombre de remarquables propositions qui peuvent aider à trouver la solution, au moins dans certains cas particuliers.

Je trouve, en appelant q le genre,

$$q = 1 + S \frac{\lambda}{2} \left[(x + \gamma) \frac{m-1}{m+2} - 1 \right];$$

cette formule contient la solution du problème de M. Painlevé toutes les fois que $m > 4$.

Considérons une valeur remarquable de C et supposons que $f + C\varphi$ ne se réduise pas à une puissance d'un polynôme irréductible: je démontre que la courbe $f + C\varphi = 0$ va alors passer par un col.

Je montre encore que le nombre total des valeurs remarquables ne peut dépasser le nombre des cols de plus de deux unités.

Voici quelques autres résultats :

Si tous les nœuds ont pour exposant $S = +1$, le nombre de ces nœuds est au moins égal à $\frac{(m+2)^2}{4}$.

Si l'on a $S = +1$ pour tous les nœuds et $S = -1$ pour tous les cols, le nombre des nœuds est précisément égal à $\frac{(m+2)^2}{4}$.

Si, pour les cols, on a $S = -1$, on a la formule

$$x_1 x_2 (m+2) = p(x_1 + x_2).$$

x_1 et x_2 étant deux entiers premiers entre eux.

Cette formule limite le nombre p et, par conséquent, résout complètement le problème dans ce cas particulier.

Le principe qui m'a conduit à ce résultat est peut-être susceptible d'être étendu à des cas plus généraux; j'espère que plus d'un chercheur s'y efforcera dès que mes démonstrations seront publiées.

SUR L'INTÉGRATION ALGÈBRE

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

ET DU PREMIER DEGRÉ ⁽¹⁾.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 5, p. 161-191 (1891).

Introduction.

Pour reconnaître si une équation différentielle du premier ordre et du premier degré est intégrable algébriquement, il suffit évidemment de trouver une limite supérieure du degré de l'intégrale; il ne reste plus ensuite qu'à effectuer des calculs purement algébriques.

C'est là un problème qui, semble-t-il, aurait dû tenter les géomètres, et cependant ils s'en sont fort peu occupés. Depuis l'œuvre magistrale de M. Darboux, publiée dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, la question a été négligée pendant vingt ans et il a fallu, pour attirer de nouveau sur elle l'attention qu'elle méritait, que l'Académie des Sciences la proposât comme sujet du concours pour le Grand Prix des Sciences mathématiques. Deux Mémoires furent récompensés, M. Painlevé obtint le prix et M. Autonne une mention honorable: l'un de ces deux Mémoires a été publié dans les *Annales de l'École Normale supérieure* et l'autre dans le *Journal de l'École Polytechnique*.

Les inégalités et les égalités ajoutées par ces deux savants à celles que M. Darboux nous avait fait connaître faisaient faire à la question un progrès très important, mais elles ne pouvaient suffire à l'épuiser complètement. Sup-

⁽¹⁾ Présenté le 26 avril 1891, imprimé le 8 mai 1891.

posons, en effet, que l'intégrale générale s'écrive

$$F = \text{const.},$$

F étant une fraction rationnelle; on obtiendra une autre forme de l'intégrale générale en égalant à une constante un polynôme entier quelconque par rapport à F . Il en résulte qu'on ne peut trouver une limite supérieure du degré de l'intégrale générale algébrique, à moins qu'on ne trouve un moyen quelconque d'exprimer, dans les inégalités, que cette intégrale est irréductible.

C'est ce moyen que je me suis proposé de trouver.

M. Painlevé a parfaitement aperçu cette difficulté, mais il n'a pu en triompher; aussi n'a-t-il pu résoudre le problème dans toute sa généralité, mais seulement démontrer, dans un certain nombre de cas, que l'intégrale ne peut être algébrique.

Je n'apporte pas non plus une solution générale, et je me suis encore borné à un cas particulier; mais j'ai lieu d'espérer que ce problème tentera les chercheurs et qu'ils parviendront d'ici peu à généraliser le procédé qui m'a réussi.

M. Painlevé a posé le problème suivant: reconnaître si une équation différentielle donnée admet une intégrale algébrique de genre donné; et il a obtenu divers résultats qui peuvent, dans certains cas, en faciliter la solution. Je donne plus loin une formule qui contient la solution complète du problème de M. Painlevé, toutes les fois que la dimension de l'équation différentielle est supérieure à 4.

J'ai démontré quelques propriétés des équations intégrables algébriquement. De pareils résultats n'ont pas pour le moment grande valeur; mais ils pourraient en acquérir le jour où l'on pourra reconnaître si ces propriétés s'étendent aux équations non intégrables, ou si elles ne sont pas toujours vraies pour ces équations; dans le premier cas, en effet, on aurait un théorème général applicable à toutes les équations différentielles, et dans le second cas on posséderait un critérium permettant de démontrer que les équations de certaines catégories ne sont pas intégrables.

En ce qui concerne la limitation du degré, qui était mon but principal, je me suis borné au cas où l'exposant de tous les cols est égal à -1 .

Résultats de M. Darboux.

Adoptons les notations de M. Darboux et écrivons l'équation différentielle sous la forme homogène, c'est-à-dire sous la forme suivante :

$$(1) \quad \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0,$$

L, M, N étant des polynômes entiers, homogènes et de degré m en x, y, z . Le nombre m est ce qu'on appelle la *dimension* de l'équation différentielle.

Si cette équation est intégrable algébriquement, l'intégrale générale s'écrira

$$(2) \quad f + C\varphi = 0,$$

f et φ étant deux polynômes homogènes d'ordre p en x, y et z , et C une constante arbitraire. On déduit de l'équation (2) l'équation différentielle suivante

$$(3) \quad \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ L_1 & M_1 & N_1 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$L_1 = \frac{df}{dz} \frac{dz}{dy} - \frac{df}{dy} \frac{dz}{dz}, \quad M_1 = \frac{df}{dx} \frac{dz}{dz} - \frac{df}{dz} \frac{dz}{dx},$$

$$N_1 = \frac{df}{dy} \frac{dz}{dx} - \frac{df}{dx} \frac{dz}{dy}.$$

Si donc on appelle Δ le premier membre de (1), et Δ_1 celui de (3), on aura identiquement

$$\Delta_1 = F \cdot \Delta,$$

F étant un polynôme homogène en x, y, z . Soit h le degré de ce polynôme, on aura

$$2p - 2 = m + h.$$

Comment formerons-nous ce facteur F ? M. Darboux nous l'apprend également.

Il peut arriver que pour certaines valeurs de C , que nous appellerons *valeurs remarquables*, la courbe

$$f + C\varphi = 0$$

soit décomposable. Il pourra arriver que pour certaines valeurs remarquables

de C que nous appellerons *critiques*, on ait

$$f + C\eta = u_1^{z_1} u_2^{z_2} \dots u_k^{z_k},$$

les u_i étant des polynômes entiers homogènes, et les exposants z_i n'étant pas tous égaux à 1.

On aura alors

$$F = \Pi u_i^{z_i-1},$$

le produit désigné par la lettre Π étant étendu à toutes les valeurs critiques de C et à tous les facteurs u_i (ceux dont l'exposant est plus grand que 1 interviendront seuls, car, pour les autres, $z_i - 1$ s'annule et le facteur correspondant se réduit à l'unité).

On a donc, si n_i est le degré de u_i ,

$$h = \Sigma (z_i - 1) n_i,$$

d'où

$$(x) \quad m + 2 = 2p - \Sigma (z_i - 1) n_i,$$

la sommation représentée par la lettre Σ étant étendue à toutes les valeurs critiques de C et à tous les facteurs u_i .

On aura, d'autre part,

$$(y) \quad p = S z_i n_i,$$

la sommation représentée par la lettre S étant étendue à une seule valeur remarquable ou critique de C et à tous les facteurs u_i correspondant à cette valeur.

Des points singuliers.

Les points singuliers de l'équation (1) sont donnés par les équations

$$(4) \quad \frac{L}{x} = \frac{M}{y} = \frac{N}{z}.$$

M. Darboux a montré que ces points singuliers sont au nombre de

$$m^2 + m + 1.$$

Nous supposons dans tout ce qui va suivre que ces $m^2 + m + 1$ points singuliers sont tous distincts.

Formons l'équation suivante en S,

$$(5) \quad \left(z \frac{dL}{dx} - x \frac{dN}{dx} - N - S \right) \left(z \frac{dM}{dy} - y \frac{dN}{dy} - N - S \right) - \left(z \frac{dL}{dy} - x \frac{dN}{dy} \right) \left(z \frac{dM}{dx} - y \frac{dN}{dx} \right) = 0,$$

où l'on donne à x, y, z les valeurs qui correspondent à un point singulier.

On démontre que si S_1 et S_2 sont les racines de cette équation en S, l'intégrale générale peut dans le voisinage du point singulier être mise sous la forme

$$(6) \quad X_1^{S_1} X_2^{S_2} = \text{const.},$$

X_1 et X_2 étant des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $\frac{x}{z} - \frac{x_0}{z_0}$ et de $\frac{y}{z} - \frac{y_0}{z_0}$, en appelant x_0, y_0, z_0 le point singulier considéré.

Il pourrait y avoir une exception dans divers cas :

1° Si l'équation (5) se réduit à une identité. Cela n'arrivera pas si, comme nous l'avons supposé, les $m^2 + m + 1$ points singuliers sont distincts.

2° Si l'équation (5) a une racine nulle. Cela n'arrivera pas non plus si les $m^2 + m + 1$ points singuliers sont distincts.

3° Si l'on a $S_1 = S_2$. Il arrivera alors, en général, que l'intégrale générale pourra se mettre sous la forme suivante

$$\frac{X_2}{X_1} + A \log X_1 = \text{const.},$$

X_1 et X_2 étant des séries ordonnées selon les puissances croissantes de $\frac{x}{z} - \frac{x_0}{z_0}$ et de $\frac{y}{z} - \frac{y_0}{z_0}$ et A une constante numérique. Le point singulier est alors un point *logarithmique*. Dans certains cas la constante A est nulle; le point singulier est alors ce que M. Autonne appelle un point *dicritique*.

4° Si le rapport $\frac{S_1}{S_2}$ est réel négatif. Le point singulier s'appelle alors un *col*.

Il arrive, en général, que l'intégrale générale ne peut pas se mettre sous la forme (6); le col est alors *irrégulier*; mais il peut arriver également, dans certains cas particuliers, que l'intégrale générale puisse se mettre sous la forme (6), le col est alors *régulier*.

Pour que l'équation (1) soit intégrable algébriquement, il faut (mais il ne suffit pas) : 1° que pour les points singuliers le rapport $\frac{S_1}{S_2}$ soit réel et commen-



surable; 2° que, si pour certains points ce rapport est égal à 1, ces points soient dicritiques et non logarithmiques; 3° et enfin que tous les cols soient réguliers.

Le rapport $\frac{S_1}{S_2}$ s'appellera l'*exposant* du point singulier.

Les points singuliers pour lesquels ce rapport est réel et positif s'appelleront des *nœuds* (les points dicritiques sont donc des nœuds). Ceux pour lesquels ce rapport est réel et négatif s'appelleront des *cols*.

Si l'exposant d'un nœud est commensurable et égal à $\frac{\mu}{\nu}$, μ et ν étant deux entiers premiers entre eux, μ et ν seront les *entiers caractéristiques* du nœud.

De même, si l'exposant d'un col est commensurable et égal à $-\frac{\mu}{\nu}$, μ et ν étant deux entiers premiers entre eux, μ et ν seront les entiers caractéristiques de ce col.

Si l'équation (1) est intégrable algébriquement, tous les points singuliers sont des nœuds ou des cols.

Des nœuds dicritiques.

Nous venons de définir plus haut les points singuliers dicritiques qui sont toujours des nœuds. En un nœud dicritique la courbe

$$f + C\varphi = 0$$

présente en général un point multiple d'ordre λ dont les tangentes sont distinctes. Mais il peut arriver que pour les valeurs remarquables de C , deux ou plusieurs de ces tangentes se confondent.

Soit C , une valeur remarquable de C , de telle sorte que

$$f + C_1\varphi = u_1^2 u_2^2 \dots u_k^2.$$

Supposons que pour la courbe $u_i = 0$ le nœud dicritique considéré soit un point multiple d'ordre λ_i ; la courbe $u_i = 0$ étant indécomposable, les λ_i tangentes seront distinctes. D'autre part, les courbes $u_i = 0$ et $u_j = 0$ étant distinctes, les λ_i tangentes à $u_i = 0$ seront distinctes des λ_j tangentes à $u_j = 0$.

On aura d'ailleurs

$$\lambda = \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \dots + \alpha_k \lambda_k,$$

ou, en conservant à la lettre S la même signification que plus haut,

$$(7) \quad \lambda = S \alpha_i \lambda_i,$$

Le nœud dicritique considéré est pour Δ , un point d'ordre

$$2\lambda - 1.$$

et pour F un point d'ordre

$$\Sigma (\alpha_i - 1) \lambda_i.$$

Il doit être pour $\Delta = \frac{\Delta_1}{F}$ un point d'ordre 1, ce qui nous donne la relation

$$(8) \quad \lambda = 2\lambda - \Sigma (\alpha_i - 1) \lambda_i.$$

Examinons en particulier le cas où *tous les nœuds sont dicritiques*.

Deux courbes

$$f + C_0\varphi = 0, \quad f + C_1\varphi = 0$$

correspondant à deux valeurs C_0 et C_1 de C ne peuvent avoir d'autre point commun que les nœuds; de plus, si l'on considère un nœud dicritique, les λ tangentes à la première courbe différeront des λ tangentes à la seconde courbe, de sorte que ce nœud comptera pour λ^2 points d'intersection. Il vient donc

$$(6) \quad p^2 = S \lambda^2,$$

le signe S signifiant que la sommation doit être étendue à tous les nœuds que nous supposons tous dicritiques.

Un point multiple d'ordre λ , dont les tangentes sont distinctes, a pour effet d'abaisser le genre de $\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}$ unités.

On a donc pour le genre de la courbe $f + C\varphi = 0$

$$(7) \quad q = \frac{(p-1)(p-2)}{2} - S \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}.$$

D'autre part, envisageons l'intersection de la courbe indécomposable

$$f + C\varphi = 0$$

avec la courbe $u_i = 0$ qui est un facteur de $f + C_1\varphi$, C_1 étant une valeur remarquable de C . La première est d'ordre p , la seconde d'ordre n_i , et le nombre des intersections doit être pn_i .

D'ailleurs le nombre des intersections situées en un nœud dicritique est $\lambda\lambda_i$, ce qui donne

$$(8) \quad pn_i = S \lambda \lambda_i.$$

Comparons maintenant les relations (2), (3), (7), (8), (6), (7), (8).

Multiplions la relation (8) par $(\alpha_i - 1)$ et faisons la somme de toutes les relations analogues pour toutes les valeurs remarquables de C et pour tous les fac-



teurs u_i dont l'exposant est plus grand que 1; il viendra

$$p \Sigma (\alpha_i - 1) n_i = S \lambda \Sigma (z_i - 1) \lambda_i$$

ou bien

$$p(2p - m - 2) = S \lambda (\lambda - 2);$$

d'où une première remarque: si m n'est pas pair, p doit être pair. L'équation nous donne d'ailleurs

$$2p^2 - (m+2)p = 2S\lambda^2 - 2S\lambda,$$

d'où

$$(m+2)p = 2S\lambda.$$

Mais nous avons écrit

$$q = \frac{p^2}{2} - \frac{3p}{2} + 1 - \frac{S\lambda^2}{2} - \frac{S\lambda}{2} = \left(\frac{m+2}{4} - \frac{3}{2}\right)p + 1,$$

ou enfin

$$(9) \quad q = \frac{m-4}{4}p + 1.$$

Cela prouve:

- 1° Que p ou m doivent être divisibles par 4, ou qu'ils doivent être tous deux pairs;
- 2° Que si $m = 4$, le genre est égal à 1;
- 3° Que si $m < 4$, le genre est égal à 0; donc $p = \frac{4}{4-m}$, d'où $p = 2$ pour $m = 2$, $p = 4$ pour $m = 3$;
- 4° Que si $m > 4$, le genre est plus grand que 1.

Des nœuds monocritiques. — Abandonnons maintenant le cas particulier où tous les nœuds sont dicritiques. Un nœud *monocritique* (c'est-à-dire dont l'exposant n'est pas égal à 1) est pour chacune des branches de courbe qui y passent un point multiple d'ordre μ , μ étant le plus petit des deux entiers caractéristiques μ et ν .

Il y a exception pour deux branches de courbes remarquables, à savoir pour les branches de courbe

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0;$$

pour ces deux branches le nœud est un point simple.

Considérons la courbe indécomposable

$$f + C\varphi = 0$$

et supposons qu'elle admette λ branches de courbe passant par le nœud considéré. Cherchons quel est l'abaissement correspondant du genre et le nombre

des points d'intersection de deux courbes $f + C\varphi = 0$, $f + C_1\varphi = 0$ qui se trouvent au nœud considéré.

Pour cela, il nous faut d'abord connaître le nombre des points d'intersection de deux branches de courbe.

Les équations de ces deux branches de courbe pourront s'écrire

$$X_1^{\gamma} = \gamma' X_2^{\gamma}, \quad X_1^{\gamma'} = \gamma X_2^{\gamma'},$$

γ et γ' étant deux constantes; or, en combinant ces deux équations linéairement entre elles, on trouve

$$X_1^{\gamma} = 0, \quad X_2^{\gamma} = 0,$$

ce qui montre que le nombre cherché est égal à $\mu\nu$.

Considérons alors les deux courbes $f + C\varphi = 0$, $f + C_1\varphi = 0$; chacune des λ branches de la première coupe chacune des λ branches de la seconde en $\mu\nu$ points confondus. Le nœud compte donc en tout pour $\lambda^2\mu\nu$ intersections.

Il en résulte que la formule (6) doit être remplacée par la suivante

$$(6 \text{ bis}) \quad p^2 = S \lambda^2 \mu \nu.$$

Passons à l'abaissement du genre.

En appliquant une règle connue, on trouve que cet abaissement est égal à

$$\frac{\lambda^2 \mu \nu}{2} + \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} (\mu + \nu),$$

de sorte que la formule (7) devient

$$(7 \text{ bis}) \quad q = \frac{(p-1)(p-2)}{2} - S \frac{\lambda^2 \mu \nu}{2} - S \frac{\lambda}{2} (1 - \mu - \nu).$$

Considérons maintenant les valeurs remarquables de C ; soit C_1 une de ces valeurs, et soit

$$f + C_1\varphi = u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \dots u_t^{\alpha_t}.$$

Nous dirons qu'un facteur u_i est *singulier* par rapport au nœud monocritique considéré, s'il s'annule identiquement pour $X_1 = 0$ ou pour $X_2 = 0$.

Si le facteur u_i est singulier et s'annule identiquement pour $X_1 = 0$, son exposant α_i doit être divisible par μ . S'il s'annule identiquement pour $X_2 = 0$, l'exposant α_i devra être divisible par ν .

Mais il peut arriver que le facteur u_i soit *doublement singulier* et qu'il s'annule identiquement tant pour $X_1 = 0$ que pour $X_2 = 0$. Dans ce cas l'exposant α_i est divisible par $\mu\nu$.



Enfin, il peut se faire qu'un même facteur u_i soit singulier par rapport à plusieurs nœuds monocritiques.

Pour chaque nœud monocritique, il existe toujours deux facteurs singuliers (ou un seul facteur doublement singulier) correspondant soit à une même valeur remarquable de C , soit à deux valeurs remarquables différentes de C ; et il n'en existe que deux.

On peut faire une distinction de plus; supposons $\mu < \nu$; nous dirons que le facteur u_i est *critique* s'il s'annule pour $X_1 = 0$ et *hypercritique* s'il s'annule pour $X_2 = 0$.

Cherchons d'abord quel est, en un nœud monocritique, le nombre des points d'intersection d'une courbe indécomposable

$$f - C\varphi = 0$$

et d'une courbe $u_i = 0$.

Soit λ_i le nombre des branches de la courbe $u_i = 0$ qui passent par le nœud considéré. Pour chacune de ces branches le nœud sera un point multiple d'ordre μ (je suppose toujours $\mu < \nu$) sauf pour une d'entre elles (pour laquelle le nœud sera un point simple) si le facteur u_i est singulier et pour deux d'entre elles s'il est doublement singulier.

Pour deux branches de courbes quelconques, le nombre des points d'intersection confondus avec le nœud est égal à $\mu\nu$; il y a exception si l'une des branches de courbe est $X_1 = 0$, ou $X_2 = 0$. Si c'est $X_1 = 0$, le nombre des intersections est égal à ν , et pour $X_2 = 0$ il est égal à μ .

Donc, pour nos deux courbes le nombre total des intersections confondues avec le nœud sera

$$\begin{aligned} \lambda \lambda_i \mu \nu & \quad \text{si le facteur } u_i \text{ n'est pas singulier,} \\ \lambda \lambda_i \mu \nu - \lambda (\mu - 1) \nu & \quad \text{s'il est critique,} \\ \lambda \lambda_i \mu \nu - \lambda (\nu - 1) \mu & \quad \text{s'il est hypercritique,} \\ \lambda \lambda_i \mu \nu - \lambda [(\mu - 1) \nu + (\nu - 1) \mu] & \quad \text{s'il est doublement singulier.} \end{aligned}$$

Que devient la formule (7)?

Le nœud est pour la courbe $u_i = 0$ un point multiple d'ordre

$$\begin{aligned} \lambda_i \mu & \quad \text{si le facteur } u_i \text{ n'est pas singulier,} \\ (\lambda_i - 1) \mu + 1 & \quad \text{s'il est singulier,} \\ (\lambda_i - 2) \mu + 2 & \quad \text{s'il est doublement singulier.} \end{aligned}$$

D'autre part, soit C_i une valeur remarquable de C . Le nœud sera pour la courbe $f + C_i \varphi = 0$, un point multiple d'ordre $\lambda \mu$ si aucun des facteurs

de $f + C_i \varphi$ n'est hypercritique (ou doublement singulier), mais si l'un des facteurs est hypercritique et que son exposant soit égal à α_i , ce sera un point multiple d'ordre $\lambda \mu + \frac{\alpha_i}{\nu} (\nu - \mu)$. D'où les équations suivantes qui sont les différentes formes de l'équation (7):

$$\begin{aligned} \lambda &= S \alpha_i \lambda_i & \text{s'il n'y a aucun facteur singulier,} \\ \lambda &= S \alpha_i \lambda_i + \alpha_i \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right) & \text{s'il y a un facteur critique d'exposant } \alpha_i, \\ \lambda &= S \alpha_i \lambda_i + \alpha_i \left(\frac{1}{\nu} - 1 \right) & \text{s'il y a un facteur hypercritique d'exposant } \alpha_i, \\ \lambda &= S \alpha_i \lambda_i + \alpha_i \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right) + \alpha_2 \left(\frac{1}{\nu} - 1 \right) & \text{s'il y a un facteur critique d'exposant } \alpha_i \\ & \text{et un facteur hypercritique d'exposant } \alpha_2, \\ \lambda &= S \alpha_i \lambda_i + \alpha_i \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right) + \alpha_1 \left(\frac{1}{\nu} - 1 \right) & \text{s'il y a un facteur doublement singulier} \\ & \text{d'exposant } \alpha_1. \end{aligned}$$

Le nœud sera pour F un point multiple d'ordre

$$\Sigma (\alpha_i - 1) \lambda_i \mu - (\alpha_1 - 1) (\mu - 1) - (\alpha_2 - 1) (\nu - 1),$$

en appelant α_1 et α_2 les exposants des deux facteurs critique et hypercritique qui existent toujours.

Le nœud sera aussi pour Δ , un point multiple, mais de quel ordre?

Le déterminant fonctionnel de f et de φ par rapport à z et à y par exemple (que nous avons appelé L_1) est égal au produit du déterminant de f et de φ par rapport à X_1 et à X_2 , multiplié par le déterminant de X_1 et X_2 par rapport à z et à y .

Il importe de remarquer que les deux séries X_1 et X_2 ne sont pas entièrement déterminées. En effet, nous les avons définies en écrivant que dans le voisinage du nœud l'intégrale de notre équation s'écrit

$$X_1^{\alpha_1} = \text{const. } X_2^{\alpha_2}.$$

Si Y est une série quelconque ordonnée suivant les puissances de $\frac{x}{z} - \frac{x_0}{z_0}$ et de $\frac{y}{z} - \frac{y_0}{z_0}$ et ne s'annulant pas au nœud, on peut remplacer X_1 et X_2 par

$$X_1 Y^{\alpha_1} \text{ et } X_2 Y^{\alpha_2}.$$

Parmi toutes ces déterminations de X_1 et de X_2 on peut en choisir une, telle que f et φ soient des polynômes homogènes d'ordre λ en $X_1^{\alpha_1}$ et $X_2^{\alpha_2}$.

Alors le déterminant fonctionnel de f et φ par rapport à X_1 et X_2 est un



polynôme homogène d'ordre $2\lambda - 2$ en X_1^2 et X_2^2 , que j'appellerai P , multiplié par $X_1^{\mu-1}$ et $X_2^{\nu-1}$.

Le déterminant de X_1 et X_2 par rapport à y' et à z ne s'annule pas en général et en tout cas les trois déterminants

$$\frac{\partial(X_1, X_2)}{\partial(y, z)}, \quad \frac{\partial(X_1, X_2)}{\partial(z, x)}, \quad \frac{\partial(X_1, X_2)}{\partial(x, y)}$$

ne s'annulant pas à la fois, on peut toujours supposer que le premier n'est pas nul au nœud. On a alors

$$L_1 = \frac{\partial(X_1, X_2)}{\partial(y, z)} P X_1^{\mu-1} X_2^{\nu-1}.$$

Pour P le nœud est un point multiple d'ordre $(2\lambda - 2)\mu$ si ce polynôme ne s'annule pas pour $X_2 = 0$, mais cela n'arrive que si $\alpha_2 = \nu$; dans le cas contraire c'est pour P un point multiple d'ordre

$$(2\lambda - 2)\mu + \frac{\alpha_2 - \nu}{\nu}(\nu - \mu),$$

pour L_1 il est d'ordre

$$(2\lambda - 2)\mu + (\mu - 1) + (\nu - 1) + \frac{\alpha_2 - \nu}{\nu}(\nu - \mu)$$

et pour Δ , d'ordre

$$(2\lambda - 2)\mu + \mu + \nu - 1 + \frac{\alpha_2 - \nu}{\nu}(\nu - \mu).$$

Mais nous savons que ce doit être un point simple pour Δ , il vient donc

$$\begin{aligned} (2\lambda - 2)\mu + \mu + \nu - 1 + \frac{\alpha_2 - \nu}{\nu}(\nu - \mu) \\ = \Sigma(\alpha_i - 1)\lambda_i \mu - (\alpha_1 - 1)(\mu - 1) - (\alpha_2 - 1)(\mu - 1) + 1; \end{aligned}$$

ou, en divisant par μ ,

$$(8) \quad (2\lambda - 2) + \alpha_1 \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) + \alpha_2 \left(1 - \frac{1}{\nu}\right) = \Sigma(\alpha_i - 1)\lambda_i.$$

Que devient maintenant la formule (8)?

Quel est le nombre total des points d'intersection de la courbe indécomposable $f + C\varphi = 0$ avec $u_i = 0$?

J'appelle ϵ_i un nombre relatif à u_i et à un des nœuds. Ce nombre sera nul si u_i n'est pas singulier par rapport à ce nœud; il sera égal à $(\mu - 1)\nu$ s'il est critique, à $(\nu - 1)\mu$ s'il est hypercritique, à $(\mu - 1)\nu + (\nu - 1)\mu$ s'il est doublement singulier. Il vient

$$p n_i = \Sigma(\lambda_i \mu \nu - \lambda_i \epsilon_i).$$

Multiplions cette relation par $\alpha_i - 1$ et faisons la somme de toutes les rela-

tions analogues pour toutes les valeurs remarquables de C et pour tous les facteurs u_i dont l'exposant est plus grand que 1; il vient

$$p \Sigma(\alpha_i - 1) n_i = \Sigma[\lambda_i \mu \nu \Sigma(\alpha_i - 1) \lambda_i] - \Sigma \lambda_i \Sigma(\alpha_i - 1) \epsilon_i.$$

Mais d'après la signification de ϵ_i et en appelant encore α_1 et α_2 les exposants des facteurs critiques et hypercritiques, on a

$$\Sigma(\alpha_i - 1) \epsilon_i = (\alpha_1 - 1)(\mu - 1)\nu + (\alpha_2 - 1)(\nu - 1)\mu.$$

D'autre part

$$\mu \nu \Sigma(\alpha_i - 1) \lambda_i = (2\lambda - 2)\mu \nu + \alpha_1 \nu(\mu - 1) + \alpha_2 \mu(\nu - 1).$$

Il vient alors

$$p(2p - m - 2) = \Sigma \lambda_i \mu \nu (2\lambda - 2) + \Sigma \lambda_i (\mu - 1) \nu + \Sigma \lambda_i (\nu - 1) \mu,$$

ou

$$(10) \quad (m + 2)p = \Sigma \lambda_i (\mu + \nu).$$

Or

$$q = \frac{p^2 - 3p + 2}{2} - \Sigma \frac{\lambda_i^2 \mu \nu}{2} - \Sigma \frac{\lambda_i}{2} (1 - \mu - \nu) = 1 - \frac{3p}{2} + \Sigma \frac{\lambda_i}{2} (\mu + \nu - 1),$$

d'où

$$(11) \quad q = 1 + \Sigma \frac{\lambda_i}{2} \left(\mu + \nu - 1 - \frac{3(\mu + \nu)}{m + 2} \right).$$

Si, par exemple, $m = 4$, il vient

$$q = 1 + \Sigma \frac{\lambda_i}{2} \left(\frac{\mu + \nu}{2} - 1 \right).$$

On voit ainsi que pour $m = 4$, et *a fortiori* pour $m > 4$, le genre est toujours plus grand que 1.

Quelle est la condition pour qu'on puisse reconnaître si l'équation différentielle comporte une solution générale algébrique de genre donné? C'est que tous les coefficients du second membre de (11) soient de même signe; c'est-à-dire que

$$(\mu + \nu) \left(1 - \frac{3}{m + 2} \right) > 1;$$

ce qui a toujours lieu pour $m > 4$.

Des cols. — Nous distinguerons trois genres de cols :

1° Ceux du premier genre seront les points doubles d'une courbe indécomposable

$$f + C\varphi = 0,$$

ou d'une courbe

$$u_i = 0,$$



u_i étant un des facteurs indécomposables de

$$f + C\varphi = u_1^{a_1} u_2^{a_2} \dots u_k^{a_k}$$

pour une valeur remarquable de C .

Tous ceux de ces points doubles qui ne sont pas des nœuds sont des cols.

Pour un col du premier genre les deux entiers caractéristiques sont égaux à 1.

2° Ceux du second et du troisième genre sont les points d'intersection de deux courbes

$$u_i = 0, \quad u_j = 0,$$

u_i et u_j étant deux facteurs indécomposables de

$$f + C\varphi = u_1^{a_1} u_2^{a_2} \dots u_k^{a_k}$$

pour une même valeur remarquable de C .

Tous ceux de ces points d'intersection qui ne sont pas des nœuds sont des cols. Les deux entiers caractéristiques μ et ν , qui sont premiers entre eux, seront entre eux dans le même rapport que les deux exposants α_i et α_j .

Si $\alpha_i = \alpha_j$ et que, par conséquent, $\mu = \nu = 1$, le col sera du deuxième genre.

Si $\alpha_i > \alpha_j$ et que, par conséquent, $\mu < \nu$, $\nu > 1$, le col sera du troisième genre.

L'équation différentielle étant donnée, on connaît les entiers caractéristiques. On peut donc distinguer les cols du premier et du second genre de ceux du troisième genre, mais non ceux du premier de ceux du second.

Propriétés diverses. — Quelques-unes des formules précédentes peuvent être simplifiées si l'on adopte les notations suivantes :

Soit ζ_i un nombre égal à 1 si u_i n'est pas singulier par rapport au nœud considéré, à μ si u_i est critique, à ν s'il est hypercritique, à $\mu\nu$ s'il est doublement singulier.

A chaque facteur u_i et à chaque nœud monocritique correspond ainsi un nombre ζ_i .

Soit alors h_i le plus petit commun multiple de tous les nombres ζ_i correspondant à un même facteur u_i et à tous les nœuds monocritiques. Ce nombre h_i est donc égal à 1 si u_i n'est singulier par rapport à aucun nœud.

Il est clair que α_i est divisible par h_i ; nous poserons donc

$$\alpha_i = u_i^{h_i}, \quad \alpha_i = h_i \alpha'_i,$$

d'où

$$u_i^{a_i} = v_i^{a'_i}.$$

Nous appellerons $n'_i = n_i h_i$ le degré de v_i .

La courbe $v_i = 0$ se compose de h_i courbes confondues avec $u_i = 0$. J'appellerai λ'_i le nombre des branches de la courbe $v_i = 0$ qui passent en un nœud monocritique. Chaque branche de $u_i = 0$ comptera pour h_i branches de $v_i = 0$, sauf s'il y a lieu celle qui s'annule pour $X_i = 0$ et qui comptera seulement pour $\frac{h_i}{\mu}$ branches, et celle qui s'annule pour $X_i = 0$ et qui comptera seulement pour $\frac{h_i}{\nu}$ branches. On aura donc

$$\lambda'_i = h_i \lambda_i \quad \text{si le facteur } u_i \text{ n'est pas singulier,}$$

$$\lambda'_i = h_i \lambda_i - h_i \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \quad \text{s'il est critique,}$$

$$\lambda'_i = h_i \lambda_i - h_i \left(1 - \frac{1}{\nu}\right) \quad \text{s'il est hypercritique,}$$

$$\lambda'_i = h_i \lambda_i - h_i \left(2 - \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu}\right) \quad \text{s'il est doublement singulier.}$$

Le nombre des points d'intersection de

$$v_i = 0 \quad \text{et} \quad f + C\varphi = 0$$

est alors dans tous les cas $\lambda'_i \lambda'_j \mu \nu$.

Celui de deux courbes

$$v_i = 0, \quad v_k = 0$$

correspondant à deux facteurs

$$v_i = u_i^{b_i}, \quad v_k = u_k^{b_k}$$

sera $\lambda'_i \lambda'_k \mu \nu$.

L'équation (γ) s'écrira dans tous les cas

$$\lambda = S \alpha'_i \lambda'_i.$$

Examinons maintenant la question suivante :

Soit, pour une valeur remarquable de C ,

$$f + C\varphi = u_1^{a_1} u_2^{a_2} \dots u_k^{a_k} = v_1^{a'_1} v_2^{a'_2} \dots v_l^{a'_l}$$

Est-il possible que les deux courbes

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0$$

n'aient d'autres points d'intersection que des nœuds?

Appelons h le nombre des points d'intersection de ces deux courbes situés en dehors des nœuds, nous aurons évidemment

$$n'_1 n'_2 = S \lambda'_1 \lambda'_2 \mu \nu + h.$$

Supposons d'abord que nous n'ayons que deux facteurs et que l'on ait

$$f + C \varphi = v_1^2 v_2^2,$$

nous aurons les relations

$$p^2 = S \lambda^2 \mu \nu, \quad p n'_1 = S \lambda \lambda'_1 \mu \nu, \quad \alpha'_1 n'_1 + \alpha'_2 n'_2 = p, \quad \alpha'_1 \lambda'_1 + \alpha'_2 \lambda'_2 = \lambda;$$

d'où l'on peut déduire

$$\begin{aligned} \alpha'_1 n_1^2 + \alpha'_2 n_1 n'_2 &= \alpha'_1 S \lambda_1^2 \mu \nu + \alpha'_2 S \lambda_1 \lambda'_2 \mu \nu, \\ \alpha'_1 n'_1 n_2 + \alpha'_2 n_2^2 &= \alpha'_1 S \lambda'_1 \lambda_2 \mu \nu + \alpha'_2 S \lambda_2^2 \mu \nu. \end{aligned}$$

Si l'on avait $h = 0$ et par conséquent $n'_1 n'_2 = S \lambda'_1 \lambda'_2 \mu \nu$, il viendrait

$$n_1^2 = S \lambda_1^2 \mu \nu, \quad n_2^2 = S \lambda_2^2 \mu \nu.$$

et pour des valeurs quelconques de x et de y

$$(1) \quad (n'_1 x - n'_2 y)^2 = S \mu \nu (\lambda'_1 x - \lambda'_2 y)^2.$$

Si l'on fait $y = n'_1$, $x = n'_2$, le premier membre s'annule, ce qui exige que

$$\lambda'_1 x = \lambda'_2 y.$$

Le rapport $\frac{\lambda'_1}{\lambda'_2}$ est donc constant et égal à $\frac{n'_1}{n'_2}$.

Rien dans le raisonnement qui précède ne suppose que les facteurs u_1 et u_2 sont irréductibles. Si donc on a

$$f + C \varphi = v_1^2 v_2^2 \dots v_{l-1}^2 v_{l+1}^2 \dots v_k^2$$

et si les courbes

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad \dots, \quad v_l = 0$$

n'ont en dehors des nœuds aucun point commun avec les courbes

$$v_{l+1} = 0, \quad v_{l+2} = 0, \quad \dots, \quad v_k = 0,$$

on pourra regarder $f + C \varphi$ comme le produit des deux facteurs

$$v_1^2 v_2^2 \dots v_l^2 \quad \text{et} \quad v_{l+1}^2 v_{l+2}^2 \dots v_k^2$$

et l'on aura pour tous les nœuds monocritiques

$$\frac{\alpha'_1 \lambda'_1 + \alpha'_2 \lambda'_2 + \dots + \alpha'_l \lambda'_l}{\alpha'_{l+1} \lambda'_{l+1} + \alpha'_{l+2} \lambda'_{l+2} + \dots + \alpha'_k \lambda'_k} = \frac{\alpha'_1 n'_1 + \alpha'_2 n'_2 + \dots + \alpha'_l n'_l}{\alpha'_{l+1} n'_{l+1} + \alpha'_{l+2} n'_{l+2} + \dots + \alpha'_k n'_k}.$$

Revenons au cas où le nombre des facteurs est égal à 2 et où, par conséquent,

$$f + C \varphi = v_1^2 v_2^2,$$

mais ne supposons plus $h = 0$; la formule (1) deviendra

$$(n'_1 x - n'_2 y)^2 = S \mu \nu (\lambda'_1 x - \lambda'_2 y)^2 - h \frac{(x_2 x - x'_1 y)^2}{\alpha'_1 \alpha'_2}.$$

Si nous faisons en particulier

$$y = n'_1, \quad x = n'_2,$$

il vient

$$(2) \quad h p^2 = \alpha'_1 \alpha'_2 S \mu \nu (\lambda'_1 n'_2 - \lambda'_2 n'_1)^2.$$

Supposons de nouveau que nous ayons deux facteurs et que nous écrivions

$$f + C \varphi = v_1^2 v_2^2,$$

et supposons de plus $h = 0$.

Je dis que la courbe $f + C \varphi = 0$ ne sera indécomposable pour aucune valeur de C .

Soit, en effet, δ le plus grand commun diviseur de n'_1 et de n'_2 et posons

$$\begin{aligned} n'_1 &= \beta_1 \delta, & n'_2 &= \beta_2 \delta, \\ w_1 &= v_1^{\beta_1}, & w_2 &= v_2^{\beta_2}; \end{aligned}$$

les deux polynômes w_1 et w_2 seront de même degré, à savoir de degré $\beta_1 \beta_2 \delta$.

Soit k une constante arbitraire. Étudions la courbe

$$w_1 - k w_2 = 0.$$

Elle sera de degré $\beta_1 \beta_2 \delta$.

Voyons comment elle se comportera dans le voisinage d'un nœud monocritique.

On pourra écrire, si x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées de ce nœud,

$$w_1 = W_1 \Pi_1(X_1^h, X_2^h), \quad w_2 = W_2 \Pi_2(X_1^h, X_2^h),$$

W_1 et W_2 étant deux séries ordonnées suivant les puissances de $\frac{x}{z} - \frac{x_0}{z_0}$, $\frac{y}{z} - \frac{y_0}{z_0}$ et ne s'annulant pas au nœud considéré. Π_1 et Π_2 sont deux polynômes homogènes en X_1^h et X_2^h ; Π_1 est de degré $\beta_2 \lambda'_1$ et Π_2 de degré $\beta_1 \lambda'_2$.

Mais on a (puisque $h = 0$)

$$\frac{\lambda'_1}{\lambda'_2} = \frac{n'_1}{n'_2}.$$

ce qui permet d'écrire

$$\lambda'_1 = \beta_1 \varepsilon, \quad \lambda'_2 = \beta_2 \varepsilon,$$

ε étant un entier.

Donc les deux polynômes Π_1 et Π_2 sont de même degré $\beta_1 \beta_2 \varepsilon$.

Quel est alors, au nœud considéré, le nombre des points d'intersection de la courbe

$$w_1 - k w_2 = W_1 \Pi_1 - k W_2 \Pi_2 = 0$$

avec une branche de courbe

$$X^\mu = \text{const. } X_2^\nu?$$

Il sera au moins égal à $\beta_1 \beta_2 \varepsilon \mu \nu$, et le nombre des points d'intersection des deux courbes

$$w_1 - k w_2 = 0, \quad f + C \varphi = 0$$

est au moins égal à $\lambda \beta_1 \beta_2 \varepsilon \mu \nu$.

Si les deux polynômes $w_1 - k w_2$, $f + C \varphi$ n'avaient aucun facteur commun, le nombre total des points d'intersection des deux courbes devrait être $p \beta_1 \beta_2 \delta$.

Nous venons de voir que le nombre des points d'intersection situés aux nœuds est au moins égal à $S \lambda \beta_1 \beta_2 \varepsilon \mu \nu$.

Mais nous avons

$$p = \alpha'_1 n'_1 + \alpha'_2 n'_2, \quad \lambda = \alpha'_1 \lambda'_1 + \alpha'_2 \lambda'_2,$$

ce qui montre que

$$\frac{p}{\delta} = \frac{\lambda}{\varepsilon};$$

et comme on a

$$p^2 = S \lambda^2 \mu \nu,$$

il viendra

$$p \delta = S \lambda \varepsilon \mu \nu.$$

Le nombre des points d'intersection situés aux nœuds sera donc au moins égal à $p \beta_1 \beta_2 \delta$.

Considérons un point quelconque de $f + C \varphi = 0$ situé en dehors des nœuds; on peut toujours choisir la constante k de façon à faire passer par ce point la courbe $w_1 - k w_2 = 0$. Le nombre total des points d'intersection devient alors supérieur à $p \beta_1 \beta_2 \delta$, de sorte que $f + C \varphi$ et $w_1 - k w_2$ doivent avoir un facteur commun. Si $f + C \varphi$ est supposé irréductible, $w_1 - k w_2$ sera divisible par $f + C \varphi$.

Avant d'aller plus loin, il est nécessaire que je démontre un lemme :

Soient X et Y deux polynômes homogènes de même degré en x, y, z et α une constante quelconque. Si la courbe

$$X - \alpha Y = 0$$

est décomposable quelle que soit la constante α , les deux polynômes X et Y sont des polynômes homogènes et de même degré par rapport à deux autres polynômes ξ et η qui sont eux-mêmes homogènes et de même degré en x, y et z . De plus, la courbe

$$\xi - \alpha \eta = 0$$

n'est pas décomposable quelle que soit la constante α .

En effet, soit N le degré de X et de Y . Soient ensuite, pour une certaine valeur de α , $n_1, n_2, \dots, n_p$ les degrés des facteurs irréductibles de $X - \alpha Y$. La continuité suffit pour montrer que le nombre des facteurs et les degrés $n_1, n_2, \dots, n_p$ seront les mêmes pour toutes les valeurs de α sauf pour certaines valeurs que j'appellerai *singulières* et pour lesquelles quelques-uns des facteurs pourraient eux-mêmes se décomposer.

Soit donc, pour une valeur non singulière de α ,

$$X - \alpha Y = Z_1 Z_2 \dots Z_p,$$

le facteur Z_i étant irréductible et de degré n_i .

Soit maintenant α' une constante infiniment peu différente de α , il viendra

$$X - \alpha' Y = Z'_1 Z'_2 \dots Z'_p.$$

Le facteur Z'_i différera très peu de Z_i ; on voit donc que, si l'on fait varier α d'une façon continue, les polynômes $Z_1, Z_2, \dots, Z_p$ varieront d'une façon continue.

Je dis maintenant que si l'on fait décrire à la variable α des contours fermés convenables, les divers polynômes $Z_1, Z_2, \dots, Z_p$ s'échangeront les uns avec les autres; je dis par exemple qu'on pourra échanger Z_1 avec Z_2 .

Soit, en effet, x_1, y_1, z_1 un point de la courbe $Z_1 = 0$ qui ne soit pas un nœud; soit de même x_2, y_2, z_2 un point de la courbe $Z_2 = 0$. Faisons ensuite varier x, y, z depuis x_1, y_1, z_1 jusqu'à x_2, y_2, z_2 ; alors $\alpha = \frac{X}{Y}$ qui est une fonction de x, y, z décrira un contour fermé, et quand ce contour sera décrit, il est clair que Z_1 se sera échangé avec Z_2 .

Les polynômes $Z_1, Z_2, \dots, Z_p$ sont donc de même degré, de sorte que N est un multiple de n_1 .

Il reste à établir que l'ensemble des courbes $Z_i = 0$ qui dépendent du paramètre arbitraire α , forment un faisceau linéaire; or cela est évident puisqu'elles n'ont pas d'enveloppe, même au sens purement analytique de ce mot.

Appliquons ce qui précède au cas qui nous occupe.



Où bien $w_1 - kw_2$ sera irréductible sauf pour certaines valeurs de k et ce polynôme devra être alors identique à $f + C\varphi$; ou bien $w_1 - kw_2$ ne sera pas irréductible et son degré devra être un multiple de celui de son facteur irréductible $f + C\varphi$; on aura donc

$$\beta_1 \beta_2 \delta = \zeta p = \zeta \delta (a'_1 \beta_1 + a'_2 \beta_2),$$

ζ étant un entier; de sorte que

$$\beta_1 \beta_2 = \zeta a'_1 \beta_1 + \zeta a'_2 \beta_2.$$

Cette égalité n'est possible que si $\zeta a'_2 \beta_2$ est divisible par β_1 , ou, puisque β_1 et β_2 sont premiers entre eux, si $\zeta a'_2$ est divisible par β_1 . Mais si $\zeta a'_2$ est divisible par β_1 il vient, puisque ζ , a'_1 et β_1 sont essentiellement positifs,

$$\beta_1 \beta_2 < \zeta a'_1 \beta_1 + \zeta a'_2 \beta_2.$$

L'égalité est donc impossible et nous devons conclure que $f + C\varphi$ ne peut être irréductible.

Si donc $f + C\varphi$ est irréductible, sauf pour certaines valeurs particulières de C , ce que nous pouvons toujours supposer, les deux courbes

$$u_1 = 0 \quad u_2 = 0$$

auront d'autres points communs que les nœuds.

Rien dans ce raisonnement ne suppose que u_1 et u_2 soient irréductibles; si donc on a pour une valeur remarquable de C

$$f + C\varphi = u_1^{a_1} u_2^{a_2} \dots u_i^{a_i} u_{i+1}^{a_{i+1}} \dots u_k^{a_k}$$

il y aura certainement, en dehors des nœuds, des points d'intersection qui appartiendront à la fois à l'une des courbes

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \dots, \quad u_i = 0$$

et à l'une des courbes

$$u_{i+1} = 0, \quad u_{i+2} = 0, \quad \dots, \quad u_k = 0.$$

Classification des valeurs remarquables de C. — Nous distinguerons les valeurs remarquables de C en plusieurs espèces.

La première espèce comprendra celles pour lesquelles les exposants a_i de tous les facteurs irréductibles u_i seront égaux à 1.

La deuxième espèce comprendra celles pour lesquelles les exposants a_i seront premiers entre eux, sans être tous égaux à 1.

La troisième espèce comprendra celles pour lesquelles les exposants a_i auront un plus grand commun diviseur différent de 1, sans être tous égaux entre eux.

La quatrième espèce comprendra celles pour lesquelles il y a plusieurs facteurs u_i distincts dont les exposants a_i sont tous égaux entre eux sans être tous égaux à 1, de telle sorte que $f + C\varphi$ soit une puissance parfaite d'un produit de plusieurs facteurs distincts.

La cinquième espèce enfin comprendra celles pour lesquelles $f + C\varphi$ est une puissance parfaite d'un polynôme irréductible.

Si C est une valeur remarquable de l'une des quatre premières espèces, la courbe $f + C\varphi = 0$ se décomposera en deux courbes distinctes qui, d'après le paragraphe précédent, devront se couper au moins en un point en dehors des nœuds et par conséquent en un col.

Le nombre des valeurs remarquables des quatre premières espèces est donc au plus égal au nombre des cols.

Supposons que tous les cols soient du premier ou du second genre et soit C une valeur remarquable. Soit

$$f + C\varphi = u_1^{a_1} u_2^{a_2} \dots u_i^{a_i} u_{i+1}^{a_{i+1}} \dots u_k^{a_k};$$

l'une des courbes $u_1, u_2, \dots, u_i$ devra couper en un col l'une des courbes $u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_k$, et comme le col est du premier ou du second genre, ces deux courbes devront correspondre à un même exposant a .

Je dis que l'on doit avoir

$$a_1 = a_2 = \dots = a_k.$$

En effet, l'ordre des facteurs $u_1, u_2, \dots$ est arbitraire; si donc tous les exposants n'étaient pas égaux, on pourrait supposer

$$a_1 = a_2 = \dots = a_i, \quad a_{i+1} \geq a_1, \quad a_{i+2} \geq a_1, \dots, a_k \geq a_1.$$

Un des polynômes ne pourrait donc pas avoir même exposant qu'un des polynômes $u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_k$.

Donc, si tous les cols sont du premier ou du second genre, toutes les valeurs remarquables seront de la première, de la quatrième ou de la cinquième espèce.

Les valeurs remarquables des quatre dernières espèces sont celles que nous avons appelées plus haut critiques.

Application d'un théorème d'Halphen. — Je dis maintenant qu'il ne peut pas exister plus de deux valeurs remarquables des trois dernières espèces.

En effet, s'il y en avait trois on pourrait supposer par une substitution



linéaire que ces trois valeurs remarquables sont 0, 1 et ∞ , de sorte que

$$f, \varphi \text{ et } -(f + \varphi)$$

seraient des puissances parfaites. Soient

$$X^{2_1}, Y^{2_2}, Z^{2_3}$$

ces trois puissances parfaites; on devrait avoir identiquement

$$X^{2_1} + Y^{2_2} + Z^{2_3} = 0,$$

X, Y et Z étant des polynômes homogènes de degré

$$\frac{p}{\alpha_1}, \frac{p}{\alpha_2}, \frac{p}{\alpha_3}$$

en x, y et z .

Or Halphen, au début de son Mémoire couronné sur les équations linéaires, a étudié les identités de cette forme. Il a montré d'abord que les nombres α_1, α_2 et α_3 devaient avoir certaines valeurs particulières $(\alpha_1, 2, 2), (2, 3, 3), (2, 3, 4), (2, 3, 5)$; il a fait voir ensuite qu'on devait avoir

$$X = P_1(\eta_1, \eta_2),$$

$$Y = P_2(\eta_1, \eta_2),$$

$$Z = P_3(\eta_1, \eta_2),$$

P_1, P_2 et P_3 étant des polynômes homogènes en η_1 et η_2 qu'Halphen a complètement formés et qu'il est inutile de transcrire ici, pendant que η_1 et η_2 sont deux polynômes homogènes de même degré en x, y et z .

Alors la courbe

$$f + C\varphi = X^{2_1} + CY^{2_2} = 0$$

est décomposable quel que soit C en un certain nombre de courbes appartenant au réseau

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \text{const.}$$

Or c'est là précisément le cas exclu plus haut.

Si donc, comme nous l'avons supposé, $f + C\varphi$ n'est pas réductible quel que soit C, le nombre des valeurs remarquables des trois dernières espèces ne peut dépasser 2, et par conséquent le nombre total des valeurs remarquables est limité.

J'ajoute que, s'il y a deux valeurs des trois dernières espèces, de telle sorte, par exemple, que

$$f = X^{2_1}, \quad \varphi = Y^{2_2},$$

les deux nombres α_1 et α_2 devront être premiers entre eux, car s'ils avaient un

facteur commun, le polynôme

$$X^{2_1} + CY^{2_2}$$

serait réductible quel que soit C.

Nombre des nœuds. — Supposons que tous les nœuds soient dicritiques, on aura

$$\begin{aligned} R^2 &= S\lambda^2, \\ (m+2)p &= 2S\lambda; \end{aligned}$$

d'où, si l'on appelle n le nombre des nœuds et x une variable quelconque,

$$x^2 p^2 - (m+2)p x + n = S(x\lambda - 1)^2.$$

Le second membre étant essentiellement positif, les racines du trinôme du second degré en x qui figure dans le premier membre doivent être imaginaires ou égales, ce qui exige que

$$n \geq \frac{(m+2)^2}{4}.$$

De plus, si

$$n = \frac{(m+2)^2}{4},$$

les racines sont égales et le second membre doit pouvoir s'annuler, ce qui ne peut avoir lieu que si tous les λ sont égaux entre eux.

Supposons maintenant que tous les nœuds soient dicritiques et tous les cols du premier ou du second genre; toutes les valeurs critiques de C sont des deux dernières espèces et il ne peut y en avoir plus de deux. Soient α_1 et α_2 les exposants correspondant à ces deux valeurs critiques. On aura pour la première valeur critique

$$p = S\alpha_1 n_1 = \alpha_2 S n_2, \quad S(\alpha_1 - 1)n_1 = \left(1 - \frac{1}{\alpha_1}\right)p,$$

et de même pour la seconde valeur critique

$$S(\alpha_2 - 1)n_2 = \left(1 - \frac{1}{\alpha_2}\right)p.$$

Alors la formule

$$m+2 = 2p - \Sigma(\alpha_i - 1)n_i$$

devient

$$m+2 = 2p - \left(1 - \frac{1}{\alpha_1}\right)p - \left(1 - \frac{1}{\alpha_2}\right)p,$$

ou

$$m+2 = p\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}\right).$$

On aura de même pour un nœud quelconque et pour la première valeur



critique

$$\lambda = S x_i \lambda_i = x_i S \lambda_i, \quad S(x_i - 1) \lambda_i = \left(1 - \frac{1}{x_i}\right) \lambda_i,$$

et pour la seconde

$$S(x_i - 1) \lambda_i = \left(1 - \frac{1}{x_i}\right) \lambda_i,$$

de sorte que la formule

$$x = 2\lambda - \Sigma (x_i - 1) \lambda_i$$

devient

$$x = \lambda \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right),$$

d'où

$$p^2 \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right)^2 = (m+2)^2$$

$$\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right)^2 S \lambda^2 = 4n,$$

ou, puisque $p^2 = S \lambda^2$,

$$n = \frac{(m+2)^2}{4}.$$

Limitation du degré. — Dans le cas où tous les cols sont du premier ou du second genre, il est possible de trouver une limite supérieure du degré p et par conséquent de reconnaître si l'équation est intégrable algébriquement.

Nous venons de trouver, en effet, sans avoir besoin de supposer que tous les nœuds soient dicritiques,

$$(m+2) = p \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right),$$

d'où

$$x_1 x_2 (m+2) = p (x_1 + x_2).$$

Or, x_1 et x_2 sont premiers entre eux et par conséquent chacun d'eux est premier avec $x_1 + x_2$. Donc $x_1 + x_2$ divise $m+2$.

Nous devons en conclure que $x_1 + x_2$ et par conséquent x_1 , x_2 et p sont imités.

C. Q. F. D.

Je m'arrêterai là, bien que les principes qui précèdent puissent probablement, avec de légères modifications, donner des résultats dans des cas moins particuliers.

Paris, le 12 avril 1891.

SUR L'INTÉGRATION ALGÈBRE

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

ET DU PREMIER DEGRÉ ⁽¹⁾.*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. 11, p. 193-239 (1897).

J'ai publié sur ce sujet un premier article, qui a paru dans les *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* (t. V, année 1891). Je me suis occupé de nouveau de la même question dans ces derniers temps, dans l'espoir que je parviendrais à généraliser les résultats obtenus. Cet espoir a été déçu. J'ai obtenu cependant quelques résultats partiels, que je prends la liberté de publier, estimant qu'on pourra s'en servir plus tard pour obtenir, par un nouvel effort, une solution plus satisfaisante du problème.

C'est à ce premier article que je renverrai quand je parlerai de « la première partie de ce travail ». J'adopterai d'ailleurs la même terminologie et les mêmes notations que dans cette première partie.

C'est ainsi que la lettre Σ représentera une sommation portant sur toutes les valeurs critiques de C et tous les facteurs u_i . La lettre S en caractères gras représentera une sommation étendue à une seule valeur critique de C et à tous les facteurs u_i correspondant à cette valeur. La lettre S en caractères ordinaires représentera une sommation étendue à tous les nœuds.

Soit C une valeur remarquable quelconque et soit

$$f + C \varphi = u_1^2 u_2^2 \dots u_k^2 = v_1^2 v_2^2 \dots v_l^2$$

l'identité correspondante.

⁽¹⁾ Présenté le 23 mai 1897.



Nous aurons toujours les relations

$$p = S a_i n_i = S a'_i n'_i, \quad \lambda = S a'_i \lambda'_i.$$

Soient maintenant H_{ik} le nombre des points d'intersection des courbes $u_i = 0$, $u_k = 0$ situés en des cols; et H'_{ik} le nombre des points d'intersection des courbes $v_i = 0$, $v_k = 0$ situés en des cols. Comme $v_i = 0$ équivaut à h_i courbes $u_i = 0$ confondues, et $v_k = 0$ à h_k courbes $u_k = 0$ confondues, on aura

$$H'_{ik} = h_i h_k H_{ik}.$$

Le nombre total des intersections de $v_i = 0$, $v_k = 0$ sera

$$(1) \quad n'_i n'_k = S \lambda'_i \lambda'_k \mu \nu + H'_{ik}.$$

Celui des intersections de $v_i = 0$ avec une courbe $f + C_1 \varphi = 0$ quelconque sera

$$p n'_i = S \lambda \lambda'_i \mu \nu,$$

d'où

$$n'_i S a'_i n'_k = S [\lambda'_i \mu \nu S a'_k \lambda'_k]$$

ou

$$a'_i n'_i^2 + \sum_k a'_k n'_i n'_k = a'_i S \lambda_i'^2 \mu \nu + \sum_k a'_k S \lambda'_i \lambda'_k \mu \nu.$$

Or

$$\sum_k a'_k n'_i n'_k = \sum_k a'_k S \lambda'_i \lambda'_k \mu \nu + \sum_k a'_k H'_{ik},$$

d'où

$$(2) \quad a'_i n'_i^2 = a'_i S \lambda_i'^2 \mu \nu + \sum_k a'_k H'_{ik}.$$

Soient $x_1, x_2, \dots, x_k$ des indéterminées; multiplions l'équation (1) par $2 a'_i a'_k x_i x_k$, l'équation (2) par $a'_i x_i^2$ et faisons la somme de toutes les équations analogues; il viendra

$$(3) \quad [S a'_i x_i n'_i]^2 = S \mu \nu [S a'_i x_i \lambda'_i]^2 - SS a'_i a'_k H'_{ik} (x_i - x_k)^2.$$

Le signe SS se rapporte à une sommation portant sur toutes les combinaisons des indices i et k , chaque combinaison intervenant une fois.

La formule (3) est la généralisation évidente de la formule qui est au début de la page 51 (première Partie).

D'autre part

$$n'_i = h_i n_i, \quad a'_i = \frac{a_i}{h_i}.$$

La formule (3) devient alors

$$(3 \text{ bis}) \quad [S a_i n_i x_i]^2 = S \mu \nu \left[S a_i x_i \frac{\lambda'_i}{h_i} \right]^2 - SS a_i a_k H_{ik} (x_i - x_k)^2.$$

Le terme $\frac{\lambda'_i}{h_i}$ est égal à λ_i si le facteur u_i n'est pas singulier.

Plusieurs cas sont à considérer, suivant la nature de la valeur remarquable C . Si C est de première espèce, les a_i , les a'_i et les h_i sont tous égaux à 1 et l'on a simplement

$$[S n_i x_i]^2 = S \mu \nu [S \lambda_i x_i]^2 - SS H_{ik} (x_i - x_k)^2.$$

Si C est de l'une des trois dernières espèces et que les a aient un diviseur commun δ , et si l'on pose

$$a_i = a'_i \delta,$$

on pourra diviser l'équation (3 bis) par δ^2 et l'écrire

$$(3 \text{ ter}) \quad [S a'_i n_i x_i]^2 = S \mu \nu \left[S a'_i x_i \frac{\lambda'_i}{h_i} \right]^2 - SS a'_i a'_k H_{ik} (x_i - x_k)^2.$$

Les coefficients a'_i sont alors premiers entre eux.

Recherche des valeurs remarquables. — Considérons une valeur remarquable de C et la relation (3 bis) correspondante. Soit q le nombre des facteurs distincts dans lesquels se décompose le polynôme $f + C\varphi$; je dis que le nombre des cols qui interviennent dans la formule (3 bis) correspondante est au moins égal à $q - 1$, de telle sorte que l'on a

$$SS H_{ik} \geq q - 1.$$

Si, en effet, il n'en était pas ainsi, on pourrait mettre $f + C\varphi$ sous la forme d'un produit de deux facteurs, qui ne seraient d'ailleurs pas forcément irréductibles, et tels qu'il n'y aurait pas de col pour lequel ces deux facteurs s'annulent à la fois. Alors, d'après ce que nous avons vu dans la première partie de ce travail, le polynôme $f + C\varphi$ serait décomposable pour toutes les valeurs de C , ce que nous ne supposons pas.

Pour nous en rendre compte, représentons chacun de nos q facteurs par un point, et joignons deux de ces points par un trait, s'il existe un col pour lequel les deux facteurs correspondant à ces points s'annulent à la fois. S'il y a moins de $q - 1$ cols, il y aura aussi moins de $q - 1$ traits, et il sera impossible d'aller d'un quelconque de nos q points à un autre quelconque de ces q points en suivant les traits ainsi tracés.



Nos q points seront donc répartis au moins en deux groupes, de telle sorte qu'on puisse en suivant les traits aller d'un point d'un groupe à un autre point du même groupe, mais non passer d'un groupe à l'autre.

Soit alors U le produit de tous les facteurs u_i correspondant au premier groupe, chacun de ces facteurs étant affecté de l'exposant α_i correspondant. Soit V le produit de tous les facteurs u_i correspondant à tous les autres groupes, chacun d'eux affecté de son exposant. On aura

$$f + C\varphi = UV$$

et il n'y aura pas de col pour lequel U et V s'annulent à la fois.

Soit B le nombre des cols.

Soient A_1 le nombre des valeurs remarquables de la première espèce, Q_1 le nombre total des facteurs correspondants, c'est-à-dire la somme de tous les nombres q relatifs à ces diverses valeurs remarquables de la première espèce.

Soient A_2 et Q_2 , A_3 et Q_3 , A_4 et Q_4 , A_5 et Q_5 les nombres correspondants pour les valeurs remarquables de la seconde, de la troisième, de la quatrième et de la cinquième espèce.

D'après le résultat que nous venons d'obtenir, on aura

$$B \geq Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

et comme d'après la définition des valeurs des quatre premières espèces

$$Q_1 \geq 2A_1, \quad Q_2 \geq 2A_2, \quad Q_3 \geq 2A_3, \quad Q_4 \geq 2A_4,$$

il viendra

$$B \geq A_1 + A_2 + A_3 + A_4.$$

D'autre part, d'après la définition des valeurs de la cinquième espèce, on aura

$$Q_5 = A_5.$$

Enfin, d'après le théorème d'Halphen (*loc. cit.*, p. 55),

$$A_5 + A_1 + A_2 \leq 2.$$

Ces inégalités limitent le nombre des valeurs remarquables et même les nombres Q_i . En effet, le nombre des cols B est connu.

Mais on peut aller plus loin. Soit une valeur remarquable de l'une des deux premières espèces; soit

$$f + C\varphi = u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} u_3^{\alpha_3} u_4^{\alpha_4}$$

la décomposition correspondante; je suppose quatre facteurs pour fixer les idées. Les nombres α_1 , α_2 , α_3 , α_4 doivent être premiers entre eux. Représen-

sentons ces quatre facteurs par les quatre points M_1 , M_2 , M_3 , M_4 ; ces quatre points devront être joints au moins par trois traits correspondant chacun à un col. Je suppose, pour fixer les idées, que ces trois traits soient les traits M_1M_2 , M_2M_3 , M_3M_4 . A chacun de ces traits correspondra un col que nous devons choisir parmi les B cols de notre équation différentielle; comme ces cols sont connus et en nombre fini, nous ne pourrons faire qu'un nombre fini d'hypothèses.

Considérons le col qui correspond au trait M_1M_2 , ses entiers caractéristiques μ et ν seront connus et nous devrons avoir

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\mu}{\nu} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\nu}{\mu}.$$

Nous n'avons ici à choisir qu'entre deux hypothèses; il en serait de même en ce qui concerne les cols qui correspondent aux deux autres traits et les rapports correspondants $\frac{\alpha_2}{\alpha_3}$ et $\frac{\alpha_3}{\alpha_4}$.

En résumé, les rapports des quatre exposants α_i sont connus, ou plutôt nous ne pouvons faire en ce qui les concerne qu'un nombre fini d'hypothèses.

Mais, si la valeur remarquable est de l'une des deux premières espèces, les nombres α_i sont premiers entre eux; nous connaissons donc les nombres α_i eux-mêmes.

Si, au contraire, la valeur remarquable est de l'une des trois dernières espèces, les nombres α_i ne sont plus premiers entre eux; mais nous pouvons poser

$$\alpha_i = \alpha'_i \delta,$$

le nombre δ étant le plus grand commun diviseur des α_i ; nous connaissons alors les nombres α'_i qui sont premiers entre eux, mais nous ne connaissons pas δ .

En résumé, au sujet du nombre des valeurs remarquables des cinq espèces, du nombre des facteurs correspondant à chacune d'elles, des exposants α_i relatifs aux valeurs remarquables des deux premières espèces, des nombres α'_i relatifs aux valeurs remarquables des trois dernières espèces, nous ne pouvons faire qu'un nombre fini d'hypothèses : Les deux plus grands communs diviseurs δ_1 et δ_2 relatifs aux deux valeurs remarquables des trois dernières espèces, si elles existent, demeurent complètement inconnus.

Valeurs des n_i . — Adoptons, au sujet du nombre des valeurs remarquables



de chaque espèce, de même qu'au sujet des exposants α_i ou α'_i , une des hypothèses en nombre fini que nous pouvons faire. Il nous reste à déterminer les deux nombres δ_1 et δ_2 , les deux nombres p et λ , ainsi que les nombres n_i et λ_i .

D'un autre côté, nous ne pouvons faire qu'un nombre fini d'hypothèses au sujet de ceux de nos facteurs qui sont critiques ou hypercritiques ou doublement singuliers par rapport aux divers nœuds. Ces hypothèses pourront être examinées successivement. Nous adopterons donc l'une d'entre elles; les nombres h_i pourront alors être regardés comme connus, ainsi que les rapports des exposants α'_i .

Nous aurons alors, pour déterminer les nombres n_i , les relations suivantes

$$(4) \quad m+2 = 2p - \sum (\alpha_i - 1)n_i, \quad p = S \alpha_i n_i = S \alpha'_i n'_i.$$

Ces relations peuvent suffire si le nombre des valeurs remarquables de C n'excède pas 2. Dans ce cas, en effet, on aura

$$p = S \alpha_i n_i$$

pour chacune des deux valeurs remarquables, et, en additionnant les deux équations ainsi obtenues, il viendra

$$2p = \sum \alpha_i n_i.$$

En remplaçant dans l'équation qui donne $m+2$, on trouve

$$m+2 = \sum \alpha_i n_i - \sum (\alpha_i - 1)n_i = \sum n_i.$$

Les nombres n_i et le degré p sont donc limités.

Mais il n'en est plus de même si le nombre des valeurs remarquables est supérieur à 2. Il y a lieu de se demander alors si les équations (4) comportent une infinité de solutions en nombres entiers.

Discutons cette question, en considérant d'abord les exposants α_i comme donnés.

Soient q le nombre des valeurs remarquables; $C_1, C_2, \dots, C_q$ ces valeurs; K le nombre des facteurs relatifs à C_k . Soient

$$\alpha_1^k, \alpha_2^k, \dots, \alpha_K^k, \\ n_1^k, n_2^k, \dots, n_K^k$$

les valeurs des nombres α_i et n_i correspondant à ces K facteurs.

Rangeons-les de façon que

$$\alpha_1^k < \alpha_2^k < \dots < \alpha_K^k.$$

Les équations (4) nous donnent alors

$$\sum n_i = (q-2)p + m + 2.$$

D'autre part, si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ sont q nombres positifs tels que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_q = q-2,$$

on aura

$$(q-2)p = \alpha_1 S \alpha'_1 n'_1 + \alpha_2 S \alpha'_2 n'_2 + \dots + \alpha_q S \alpha'_q n'_q,$$

d'où

$$(5) \quad \sum n_i = \alpha_1 S \alpha'_1 n'_1 + \dots + \alpha_q S \alpha'_q n'_q + m + 2.$$

L'équation (5) est évidemment impossible si l'on peut choisir les nombres α_k de telle sorte que l'on ait à la fois

$$\alpha_1 \alpha'_1 > 1, \quad \alpha_2 \alpha'_2 > 1, \quad \dots, \quad \alpha_q \alpha'_q > 1;$$

c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha'_1} + \dots + \frac{1}{\alpha_q} + \frac{1}{\alpha'_q} < q-2.$$

Donc, pour que les équations (4) admettent des solutions, il faut que

$$(5) \quad \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha'_1} + \dots + \frac{1}{\alpha_q} + \frac{1}{\alpha'_q} > q-2.$$

Maintenant, dans quels cas les équations (4) admettront-elles une infinité de solutions? Pour cela il faut et il suffit que les équations (homogènes) en p et en n_i ,

$$(4 \text{ bis}) \quad 2p = \sum (\alpha_i - 1)n_i, \quad p = S \alpha_i n_i,$$

admettent des solutions positives.

Si l'on peut trouver des nombres α_k tels que

$$(6) \quad \alpha_k \alpha'_k < 1 < \alpha_k \alpha''_k \quad (k=1, 2, \dots, q), \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_q = q-2,$$

il est clair que les équations (4 bis) admettront des solutions positives; on pourra, en effet, satisfaire aux conditions

$$(7) \quad S n_i^1 = \alpha_1 S \alpha'_1 n'_1, \quad S n_i^2 = \alpha_2 S \alpha'_2 n'_2, \quad \dots, \quad S n_i^q = \alpha_q S \alpha'_q n'_q.$$

Réciproquement, pour que les équations (4 bis) admettent des solutions positives, il suffit que les équations (7) en admettent, les nombres α_i étant convenablement choisis; il suffit donc que l'on puisse satisfaire aux conditions (6).



Mais pour qu'on puisse satisfaire aux conditions (6), il faut et il suffit qu'on ait à la fois l'inégalité

$$(5) \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_q} = \sum \frac{1}{x_i} > q-2$$

et l'inégalité

$$(8) \quad \sum \frac{1}{x_i} < q-2.$$

En résumé, si les inégalités (5) et (8) ont lieu à la fois, les équations (4) admettent une infinité de solutions.

Si l'inégalité (5) a lieu seule, elles peuvent en comporter un nombre fini ou n'en comporter aucune.

Si enfin l'inégalité (5) n'a pas lieu, elles n'en admettent aucune.

Nous avons supposé jusqu'ici que les nombres x_i étaient connus. Cela est vrai en ce qui concerne les valeurs remarquables des deux premières espèces. Mais cela n'est plus vrai s'il existe des valeurs des trois dernières espèces. En ce qui concerne ces dernières, nous ne connaissons que les x_i^* , mais nous ne connaissons pas les deux plus grands communs diviseurs δ_1 et δ_2 , relatifs aux deux valeurs des trois dernières espèces qui peuvent exister. Posons alors

$$\Lambda_0 = \sum \frac{1}{x_i^*}.$$

la sommation s'étendant seulement aux valeurs des deux premières espèces.

Soit $\frac{1}{\Lambda_1}$ le plus petit des nombres x_i^* relatifs à la première des valeurs des trois dernières espèces, si cette valeur existe; si elle n'existe pas, nous ferons $\Lambda_1 = 0$.

Soit de même $\frac{1}{\Lambda_2}$ le plus petit des nombres x_i^* relatifs à la seconde valeur des trois dernières espèces; si elle n'existe pas nous prendrons $\Lambda_2 = 0$. Nous pouvons toujours supposer $\Lambda_1 > \Lambda_2$. L'inégalité (5) devient alors

$$\Lambda_0 + \frac{\Lambda_1}{\delta_1} + \frac{\Lambda_2}{\delta_2} > q-2.$$

Si $\Lambda_0 > q-2$, l'inégalité sera satisfaite quels que soient les nombres δ_1 et δ_2 .

Si $\Lambda_0 + \Lambda_1 > q-2$, $\Lambda_0 + \Lambda_2 < q-2$, on pourra prendre δ_2 aussi grand qu'on voudra, mais δ_1 sera limité.

Si $\Lambda_0 + \Lambda_2 > q-2$, $\Lambda_0 < q-2$, on pourra prendre l'un des deux nombres δ_1 et δ_2 (mais non tous deux à la fois) aussi grand que l'on voudra.

Si enfin $\Lambda_0 + \Lambda_1 < q-2$, les deux nombres δ_1 et δ_2 seront tous deux limités. Ainsi donc, dans le cas où l'on aura

$$\Lambda_0 + \Lambda_1 < q-2$$

et où l'inégalité (8) ne sera pas satisfaite, même dans l'hypothèse $\delta_1 = \delta_2 = 0$, on ne pourra faire au sujet des nombres δ_1 et δ_2 qu'un nombre fini d'hypothèses et les équations (4) n'auront qu'un nombre fini de solutions.

Le degré p est donc limité.

Il existe donc des cas très étendus où, comme dans celui que j'ai examiné dans la première partie de ce travail, le degré p est limité et où, par conséquent, le problème de l'intégration algébrique peut être regardé comme résolu.

Valeurs des λ_i . — Les nombres λ_i doivent satisfaire à certaines équations tout à fait analogues aux équations (4).

Considérons d'abord un nœud dicritique, nous devons avoir

$$(9) \quad \lambda = S x_i \lambda_i, \quad 2 = 2\lambda - \sum (x_i - 1) \lambda_i.$$

Les équations (9) tout à fait analogues aux équations (4) se discuteraient de la même manière, et cette discussion conduirait au même résultat.

Si les inégalités (5) et (8) ont lieu à la fois, les équations (9) admettent une infinité de solutions.

Si l'inégalité (5) a lieu seule, elles peuvent en comporter un nombre fini ou n'en comporter aucune.

Si l'inégalité (5) n'a pas lieu, elles n'en admettent aucune.

Envisageons maintenant un nœud monocritique.

Dans ce cas la première équation (6) doit être remplacée par la suivante

$$(9 \text{ bis}) \quad \lambda = S x_i \lambda_i + x_1 x_i \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right) + x_2 x_i \left(\frac{1}{\nu} - 1 \right);$$

x_1 est l'exposant du facteur critique, x_2 celui du facteur hypercritique; ε_1 est égal à 0 ou à 1, suivant que le facteur critique correspond ou non à la valeur remarquable envisagée, et ε_2 est défini de la même manière en ce qui concerne le facteur hypercritique.

De même, la seconde équation (9) doit être remplacée par

$$(9 \text{ ter}) \quad (2\lambda - 2) + x_1 \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) + x_2 \left(1 - \frac{1}{\nu} \right) = \sum (x_i - 1) \lambda_i.$$

Nous avons q équations (9 bis) correspondant aux q valeurs remarquables; en les additionnant on trouve

$$q\lambda = \sum x_i \lambda_i + x_1 \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right) + x_2 \left(\frac{1}{\nu} - 1 \right)$$

et en combinant avec (9 ter)

$$(10) \quad \sum \lambda_i = (q-2)\lambda + 2.$$

Soient encore $a_1, a_2, \dots, a_q, q$ nombres positifs tels que

$$a_1 + a_2 + \dots + a_q = q - 2.$$

Désignons par λ'_k les nombres λ_i relatifs à la valeur remarquable C_k , de même que nous avons désigné par n_i les nombres n_i relatifs à cette valeur remarquable C_k .

Nous pourrions écrire

$$\sum \lambda_i = a_1 \sum x_i \lambda'_i + a_2 \sum x_i^2 \lambda'_i + \dots + a_q \sum x_i^q \lambda'_i + a'_1 x_1 \left(\frac{1}{\mu} - 1 \right) + a'_2 x_2 \left(\frac{1}{\nu} - 1 \right) + 2;$$

a'_i est celui des nombres a_i qui se rapporte à la valeur remarquable correspondant au facteur critique, et a'_2 est défini de même par rapport au facteur hypercritique.

Pour que les équations (9 bis) et (9 ter) admettent une infinité de solutions, il faut et il suffit que les équations (homogènes)

$$\lambda = S x_i \lambda_i, \quad x\lambda = \sum (x_i - 1) \lambda_i$$

admettent des solutions positives, c'est-à-dire que les inégalités (5) et (8) aient lieu.

Si l'on observe maintenant que les nombres λ_i et n_i ne sont pas indépendants, mais qu'ils sont liés par les relations (3) et (3 bis), on pourra espérer que nos équations (4), (9 bis) et (9 ter) n'admettront qu'un nombre fini de solutions compatibles avec les relations (3) alors même que les inégalités (5) et (8) auraient lieu.

Mais cet espoir serait trompé en général; on serait conduit à une discussion qu'il est inutile de développer ici et qui conduirait à la résolution d'une équation de Pell ou d'une équation analogue. L'équation de Pell, on le sait, admet une infinité de solutions.

Cas des neuf nœuds dicritiques. — On se trouve donc en présence de difficultés que je n'ai pu encore surmonter. Je me bornerai ici à traiter un cas particulier simple, où la nature de ces difficultés apparaît clairement, bien qu'on puisse en triompher.

Supposons $m = 4$ et que tous les nœuds soient dicritiques. D'après ce que nous avons vu dans la première partie de ce travail, le genre des courbes

$$f + C\varphi = 0$$

sera égal à 1.

D'autre part, le nombre des points singuliers sera

$$m^2 + m + 1 = 21.$$

Je supposerai que ces 21 points singuliers sont 9 nœuds dicritiques et 12 cols.

Par les 9 nœuds je puis faire passer une cubique. Soit p le degré de la courbe $f + C\varphi = 0$; elle aura avec la cubique $3p$ points d'intersection dont un certain nombre seront confondus avec les nœuds. Si l'on envisage les 9 nombres λ relatifs aux 9 nœuds et la somme $S\lambda$ de ces 9 nombres, on aura

$$3p = S\lambda + h,$$

h étant le nombre des points d'intersection mobiles situés en dehors des nœuds.

On aura d'autre part

$$p^2 = S\lambda^2,$$

d'où

$$(x^2 p^2 + 6xp + 9) = S(x^2 \lambda^2 + 2x\lambda + 1) + 2xh,$$

c'est-à-dire

$$(1) \quad (xp + 3)^2 = S(x\lambda + 1)^2 + 2xh.$$

D'autre part, on a, en appelant q le genre de la courbe $f + C\varphi = 0$,

$$\frac{(p-1)(p-2)}{2} = S \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} + q,$$

ou

$$p^2 - 3p + 2 = S\lambda^2 - S\lambda + 2q,$$

ou enfin

$$2(q-1) + h = 0,$$

ce qui conduit à deux solutions

$$q = 1, \quad h = 0 \quad \text{ou} \quad q = 0, \quad h = 2.$$

C'est la première qui convient, puisque $q = 1$ d'après ce que nous avons vu

dans la première partie; on a donc $h=0$ et la cubique n'a pas de point d'intersection mobile avec les courbes $f+C\varphi=0$. L'équation (1) se réduit donc à

$$(xp+3)^2 = S(x\lambda+1)^2;$$

et en faisant $x = -\frac{3}{p}$ et multipliant par p^2

$$S(3\lambda-p)^2 = 0,$$

ce qui montre que tous les λ sont égaux entre eux et égaux à $\frac{p}{3}$.

Soient $u_1, u_2, \dots, u_9$ les arguments elliptiques des neuf nœuds sur la cubique, on devra avoir

$$S\lambda u = 0,$$

c'est-à-dire égale à une période (des fonctions elliptiques envisagées). Donc Su est égal à une période divisée par λ , c'est-à-dire par $\frac{p}{3}$.

Si nous connaissons l'équation différentielle, nous connaissons les neuf nœuds, nous connaissons donc la cubique et les neuf arguments elliptiques u . Nous verrons donc si Su est commensurable avec une période. C'est là une condition nécessaire pour que l'intégration algébrique soit possible.

Supposons-la remplie, le nombre λ est par là même connu.

Considérons 8 de nos nœuds, peut-on construire une courbe de degré 3λ admettant ces 8 nœuds comme points d'ordre λ ?

Une courbe de degré 3λ est déterminée par

$$\frac{3\lambda(3\lambda+3)}{2}$$

points. D'autre part, un point multiple d'ordre λ compte pour

$$\frac{\lambda(\lambda+1)}{2}$$

conditions. Il nous restera donc

$$\frac{9\lambda(\lambda+1)}{2} - 8 \frac{\lambda(\lambda+1)}{2} = \frac{\lambda(\lambda+1)}{2}$$

points disponibles.

Imposons-nous encore que le neuvième nœud soit un point multiple d'ordre $\lambda-1$, ce qui fait

$$\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}$$

conditions; il reste

$$\frac{\lambda(\lambda+1)}{2} - \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} = \lambda$$

conditions.

Menons par le neuvième nœud $\lambda-1$ droites quelconques non tangentes à la cubique, et imposons-nous que ces $\lambda-1$ droites rencontrent la courbe d'ordre 3λ en λ points confondus. De sorte que, ou bien le neuvième nœud sera encore un point multiple d'ordre λ , ou bien ces $\lambda-1$ droites seront les $\lambda-1$ tangentes à la courbe au neuvième nœud. Cela fait encore $\lambda-1$ conditions, il nous restera donc encore un paramètre.

Cela posé, les 9λ points d'intersection de la cubique avec la courbe d'ordre 3λ seront λ points confondus avec les huit premiers nœuds, $\lambda-1$ points confondus avec le neuvième nœud, et un point inconnu.

Soit u_{10} l'argument elliptique de ce point inconnu, on aura

$$\lambda(u_1 + u_2 + \dots + u_9) + (\lambda-1)u_{10} + u_{10} = 0.$$

Or, par hypothèse,

$$S\lambda u = 0.$$

Donc

$$u_{10} = u_{10}.$$

Donc le point inconnu se confond avec le neuvième nœud; nous avons donc λ droites, à savoir la tangente à la cubique et les $\lambda-1$ droites construites plus haut, qui rencontrent la courbe d'ordre 3λ en λ points confondus. Le neuvième nœud est donc un point multiple d'ordre λ de la courbe d'ordre 3λ .

Nous avons donc défini un faisceau de courbes d'ordre 3λ admettant nos neuf nœuds comme points multiples d'ordre λ .

Soit $\psi = 0$ l'une de ces courbes.

Cherchons en quels points cette courbe touche l'une des courbes définies par nos équations différentielles, équations que j'écrirai comme dans la première partie

$$(2) \quad \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

Le lieu des points où une des courbes définies par les équations (2) peut toucher la courbe $\psi = 0$ est défini par

$$(3) \quad L \frac{d\psi}{dx} + M \frac{d\psi}{dy} + N \frac{d\psi}{dz} = 0.$$

Comme par hypothèse L, M et N sont d'ordre 4, et ψ d'ordre 3λ , le premier membre de (3) est un polynôme homogène d'ordre

$$3\lambda+3.$$



Le nombre total des points d'intersection de (3) et de $\psi = 0$ est donc

$$9\lambda(\lambda + 1).$$

Considérons maintenant l'un de nos neuf nœuds dicritiques, soient x_0, y_0, z_0 ses coordonnées; nous pourrions toujours supposer que ce point n'est pas sur la droite de l'infini $z = 0$, ce qui nous permettra de faire $z_0 = 1$.

Développons ψ suivant les puissances de $x - x_0 z, y - y_0 z$; il viendra

$$\psi = \psi_0 + \psi_{\lambda+1} + \dots + \psi_{2\lambda},$$

en appelant ψ_k un ensemble de termes homogènes de degré k en $x - x_0 z$ et $y - y_0 z$, multipliés par $z^{\lambda-k}$.

Le nœud considéré est un point multiple d'ordre λ de $\psi = 0$ et les directions des λ tangentes sont données par l'équation homogène

$$\psi_\lambda = 0.$$

Développons de même

$$zL - xN, \quad zM - yN$$

suitant les puissances croissantes de $x - x_0 z, y - y_0 z$; il viendra

$$zL - xN = A z^4 (x - x_0 z) + \tau_1 + \tau_2 + \tau_3,$$

$$zM - yN = A z^4 (y - y_0 z) + \tau'_1 + \tau'_2 + \tau'_3,$$

les τ_k et les τ'_k étant des polynômes homogènes d'ordre k en $x - x_0 z, y - y_0 z$ multipliés par z^{3-k} .

Il est à remarquer que le coefficient A est le même dans les deux formules; c'est précisément ce qui caractérise les nœuds dicritiques.

Comment trouver les termes du degré le moins élevé en $(x - x_0 z), (y - y_0 z)$ dans le premier membre de (3)? Appelons Θ le premier membre de (3), il viendra

$$3\lambda\psi = x \frac{d\psi}{dx} + y \frac{d\psi}{dy} + z \frac{d\psi}{dz},$$

d'où

$$(4) \quad z\Theta - 3\lambda N\psi = (zL - xN) \frac{d\psi}{dx} + (zM - yN) \frac{d\psi}{dy}.$$

Les termes de degré le moins élevé du second membre sont évidemment

$$A z^4 \left[(x - x_0 z) \frac{d\psi_\lambda}{dx} + (y - y_0 z) \frac{d\psi_\lambda}{dy} \right] = A \lambda z^4 \psi_\lambda.$$

Les termes de degré le moins élevé de N sont $N_0 z^3, N_0 z^3$ étant ce que devient N quand on y change x et y en $x_0 z$ et $y_0 z$.

L'ensemble des termes du degré le moins élevé de Θ sera donc

$$\lambda z^3 \psi_\lambda (3N_0 + A).$$

Les λ tangentes à la courbe $\Theta = 0$ sont donc les mêmes que les λ tangentes à la courbe $\psi = 0$.

Le nœud considéré compte donc pour $\lambda(\lambda + 1)$ intersections et les neuf nœuds pour $9\lambda(\lambda + 1)$ intersections.

Donc, ou bien les deux courbes se confondent, ou bien elles n'ont pas d'autre point d'intersection que les nœuds.

Mais il y a plus, je dis que je puis toujours supposer que la courbe $\Theta = 0$ admet nos neuf nœuds comme points multiples d'ordre $\lambda + 1$.

En effet, nous ne changeons pas nos équations différentielles en changeant L, M, N en $L + xH, M + yH, N + zH$ (H étant un polynôme homogène quelconque du troisième ordre).

On change ainsi Θ en

$$\Theta + 3\lambda H\psi.$$

Soit u_i l'un de nos neuf nœuds. Soit H_i la valeur que prend H en ce point et soit $3\lambda A_i \psi_\lambda$ l'ensemble des termes de Θ qui sont d'ordre λ en $x - x_0 z, y - y_0 z$.

Pour que la courbe

$$\Theta + 3\lambda H\psi = 0$$

admette nos neuf nœuds comme points d'ordre $\lambda + 1$, il faut et il suffit que l'on ait les neuf équations

$$(5) \quad H_i + A_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 9).$$

Peut-on choisir les dix coefficients de H de façon à satisfaire à ces neuf équations? Il ne pourrait y avoir doute que si tous les déterminants formés à l'aide des coefficients de ces neuf équations à dix inconnues s'annulent tous à la fois. Mais s'il était ainsi, les équations

$$(5 \text{ bis}) \quad H_i = 0$$

admettraient une double infinité de solutions. C'est-à-dire qu'on pourrait faire passer par nos neuf nœuds un faisceau de cubiques et que Su serait une période.

Mais nous avons supposé que Su était commensurable avec une période et de telle façon que λ soit le plus petit nombre tel que λSu soit une période. Donc, si $\lambda > 1$, Su n'est pas une période. Donc on peut satisfaire aux équations



tions (5). Donc, on peut toujours supposer que $\Theta = 0$ admet neuf points multiples d'ordre $\lambda + 1$.

Nous admettrons désormais qu'il en est ainsi.

La courbe $\Theta = 0$ est d'ordre $3(\lambda + 1)$ et elle a, en nos neuf nœuds, $g(\lambda + 1)$ points d'intersection avec notre cubique.

Nous sommes donc en présence de deux hypothèses :

1° Ou bien la courbe $\Theta = 0$ se décompose en la cubique et une courbe d'ordre 3λ ;

2° Ou bien elle n'a pas d'autre point d'intersection avec la cubique que les nœuds. Mais alors on aurait

$$(\lambda + 1)Su = 0,$$

et comme on a déjà

$$\lambda Su = 0,$$

il viendrait

$$Su = 0,$$

ce qui est contraire à ce que nous avons supposé, puisque Su n'est pas une période.

La seconde hypothèse doit donc être rejetée.

Donc la courbe $\Theta = 0$ se décompose; et les deux composantes sont, d'une part la cubique, d'autre part une courbe d'ordre 3λ admettant les neuf nœuds comme points multiples d'ordre λ et appartenant par conséquent à notre faisceau.

Soit $F = 0$ l'équation de notre cubique, celle d'une courbe quelconque du faisceau sera

$$a\psi + bF^\lambda = 0,$$

a et b étant des coefficients arbitraires et, en effet, la cubique prise λ fois, fait évidemment partie du faisceau.

On aura donc

$$\Theta = F(a\psi + bF^\lambda).$$

Soit maintenant

$$\Theta = L \frac{dF}{dx} + M \frac{dF}{dy} + N \frac{dF}{dz},$$

g sera un polynôme du sixième degré.

La courbe $\Theta = 0$ passe évidemment par chacun des nœuds et sa tangente au nœud est celle de la cubique; on le démontrerait comme plus haut.

Les deux courbes $\Theta = 0$ et $F = 0$ ont donc dix-huit points d'intersection aux nœuds; donc :

Ou bien Θ se décompose en deux facteurs dont F est l'un;

Ou bien les deux courbes n'ont pas d'autre point commun que les nœuds, ce qui entraînerait la congruence

$$2Su = 0.$$

Cette congruence n'a pas lieu (si $\lambda > 2$).

Donc Θ est divisible par F .

Soit donc

$$\Theta = PF,$$

P étant un polynôme du troisième degré.

Mais nous avons vu plus haut que les termes de degré λ en $x - x_0z$ et en $y - y_0z$ dans Θ sont

$$\lambda z^2 \psi_2 (3N_0 + A).$$

On verrait de même que les termes du premier degré en $x - x_0z$ et $y - y_0z$ dans Θ sont

$$\lambda z^2 F_1 (3N_0 + A),$$

en représentant par F_1 l'ensemble des termes du premier degré de F .

Mais, d'après l'hypothèse faite plus haut, chaque nœud sera un point d'ordre $\lambda + 1$ pour $\Theta = 0$, et l'on a par conséquent

$$3N_0 + A = 0.$$

Donc les termes du premier degré de Θ disparaissent. Chaque nœud est donc un point double pour $\Theta = 0$.

La courbe $P = 0$ passe donc par les neuf nœuds.

Si les cubiques $P = 0$, $F = 0$ étaient distinctes, on aurait donc

$$Su = 0,$$

ce qui n'a pas lieu. Donc

$$\Theta = cF^2,$$

c étant un coefficient constant.

Nous pouvons alors nous demander s'il est possible, étant donné un polynôme F du troisième degré, de trouver trois polynômes L , M , N du quatrième degré, tels que

$$\Theta = 3F^2.$$

Il est clair que ce problème comporte une infinité de solutions.

Soient P , Q , R trois polynômes quelconques du second degré, si nous

posons

$$(2) \quad \begin{cases} L = xF + R \frac{dF}{dy} - Q \frac{dF}{dz}, \\ M = yF + P \frac{dF}{dz} - R \frac{dF}{dx}, \\ N = zF + Q \frac{dF}{dx} - P \frac{dF}{dy}, \end{cases}$$

il viendra évidemment

$$L \frac{dF}{dx} + M \frac{dF}{dy} + N \frac{dF}{dz} = 3F^2.$$

C'est d'ailleurs la solution la plus générale, comme on s'en assurerait en remarquant que si L , M , N sont trois polynômes du quatrième degré satisfaisant à l'identité

$$L' \frac{dF}{dx} + M' \frac{dF}{dy} + N' \frac{dF}{dz} = 0,$$

le polynôme L' devra être égal à la somme de $\frac{dF}{dy}$ et de $\frac{dF}{dz}$ multipliés respectivement par deux polynômes du second degré.

Cela posé, donnons à nos polynômes L , M , N la forme (2) et cherchons quels seront les points singuliers de nos équations différentielles. Ces points singuliers sont donnés par

$$\frac{L}{x} = \frac{M}{y} = \frac{N}{z}$$

et l'on voit tout de suite qu'ils se divisent en deux catégories.

Nous avons d'abord neuf points satisfaisant aux équations

$$(3) \quad \begin{cases} x \frac{dF}{dx} + y \frac{dF}{dy} + z \frac{dF}{dz} = 0, \\ xP + yQ + zR = 0. \end{cases}$$

Nous avons ensuite douze points satisfaisant aux équations

$$\frac{P}{dx} = \frac{Q}{dy} = \frac{R}{dz}.$$

Les neuf premiers points sont sur la cubique F ; ce sont eux qui devraient être nos neuf nœuds dicritiques.

Ils sont à l'intersection de $F = 0$ avec une autre cubique. On aura donc

$$Su = 0.$$

Le faisceau $f + C\varphi = 0$ devra alors se réduire à un faisceau de cubiques

$$F + CF_1 = 0,$$

de telle façon que $\lambda = 1$.

On pourrait, il est vrai, se demander si l'on ne peut pas faire passer par ces neuf nœuds trois courbes de degré 3λ , linéairement indépendantes et admettant les neuf nœuds comme points multiples d'ordre λ .

On aurait alors non plus un faisceau mais un *réseau* de courbes d'ordre 3λ , et l'équation de ce réseau pourrait se mettre sous la forme

$$F^2 + CF_1^2 + C'\Phi = 0,$$

où C et C' seraient des constantes arbitraires et Φ un polynôme d'ordre 3λ indécomposable.

Mais cela est impossible; soit en effet M un point quelconque du plan; par ce point passeraient une infinité de courbes du réseau, formant un faisceau. Deux quelconques de ces courbes se couperaient en $9\lambda^2$ points aux nœuds et en un point au point M . En tout $9\lambda^2 + 1$ points d'intersection. Cela est absurde, puisque les deux courbes sont d'ordre 3λ .

Ainsi nous devons conclure que $\lambda = 1$.

Nous avons, il est vrai, laissé de côté un cas; celui où λ serait égal à 2, où l'on aurait par conséquent

$$2Su = 0$$

et où la courbe $\theta = 0$, au lieu de se décomposer en deux cubiques dont l'une serait $F = 0$, serait tangente aux neuf nœuds à la cubique $F = 0$.

Dans ce cas on peut construire un faisceau de courbes du sixième degré admettant les neuf nœuds comme points doubles. Soit $f_1 + Cf_2 = 0$ l'équation de ce faisceau. On peut, quel que soit p , construire un faisceau de courbes de degré $6p$ admettant les neuf nœuds comme points multiples d'ordre $2p$. L'équation de ce faisceau est

$$ff_1 + Cf_1^2 = 0.$$

Mais on ne peut pas, pour la même raison que tout à l'heure, construire un réseau de pareilles courbes.

On doit donc supposer $p = 1$ et par conséquent le faisceau $f + C\varphi = 0$ ne pourrait être autre chose que le faisceau du sixième degré que nous venons de construire.

Supposons donc $\lambda = 2$.



L'équation du faisceau peut se mettre sous la forme

$$F^2 + C\varphi = 0,$$

φ étant du sixième degré.

La valeur $C = 0$ est alors une valeur remarquable de C .

Les équations connues

$$m + 2 = 2p - \sum (x_i - 1)n_i,$$

$$2 = 2\lambda - \sum (x_i - 1)\lambda_i$$

deviennent alors

$$6 = 6\lambda - (\lambda - 1)3 - \sum (x_i - 1)n_i,$$

$$2 = 2\lambda - (\lambda - 1) - \sum (x_i - 1)\lambda_i,$$

le signe Σ' représentant une sommation s'étendant à tous les facteurs u_i correspondant à toutes les valeurs critiques de C autres que $C = 0$.

Mais si $\lambda = 2$, la dernière de ces équations se réduit à

$$\sum (x_i - 1)\lambda_i = 1.$$

Cette équation ne peut être satisfaite que d'une seule manière. Il ne doit y avoir, en dehors de $C = 0$, qu'une seule valeur critique pour laquelle on aura

$$\lambda_i = 1, \quad x_i = 2.$$

D'autre part, la première équation donne

$$\sum (x_i - 1)n_i = 3;$$

ou, puisqu'il n'y a qu'une seule valeur critique et que $x_i = 2$,

$$n_i = 3.$$

Ainsi, pour cette valeur critique, $F^2 + C\varphi$ doit se réduire au carré d'un polynôme du troisième degré F_1 , de sorte que la cubique $F_1 = 0$ passe par nos neuf nœuds. On aura donc

$$Su = 0,$$

ce qui nous ramène au cas précédent.

Ainsi dans ce cas très particulier, que j'ai étudié peut-être un peu longuement, nous sommes parvenus à limiter le degré des courbes algébriques

$$f + C\varphi = 0;$$

mais pour cela les considérations purement arithmétiques ne nous ont pas suffi;

nous avons dû recourir au théorème d'Abel, qui nous a appris que

$$\lambda Su = 0.$$

Cette circonstance doit nous faire mieux comprendre la nature des difficultés à vaincre.

Étude des points singuliers. — Dans le voisinage d'un point singulier, il existe deux séries que nous avons appelées X_1 et X_2 et qui sont ordonnées suivant les puissances de $\frac{x}{z} - \frac{x_0}{z_0}, \frac{y}{z} - \frac{y_0}{z_0}$ (*loc. cit.*, p. 39). Réciproquement, on peut évaluer les différences

$$\frac{x}{z} - \frac{x_0}{z_0}, \frac{y}{z} - \frac{y_0}{z_0}$$

à des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de X_1 et de X_2 .

Soit alors

$$\frac{f}{\varphi} = \text{const.}$$

L'intégrale générale de notre équation différentielle. Si nous divisons le numérateur et le dénominateur par z^p , les quotients $\frac{f}{z^p}$ et $\frac{\varphi}{z^p}$ seront des polynômes entiers par rapport aux différences $\frac{x}{z} - \frac{x_0}{z_0}, \frac{y}{z} - \frac{y_0}{z_0}$; ce seront donc des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de X_1 et de X_2 . Soient S_1 et S_2 ces séries, nous aurons

$$\frac{f}{z^p} = S_1, \quad \frac{\varphi}{z^p} = S_2$$

et notre intégrale générale s'écrira

$$\frac{S_1}{S_2} = \text{const.}$$

Supposons d'abord que notre point singulier soit un nœud dicritique, l'intégrale générale de l'équation pourra s'écrire

$$\frac{X_1}{X_2} = \text{const.}$$

Donc $\frac{S_1}{S_2}$ est une fonction de $\frac{X_1}{X_2}$; elle ne changera pas quand on multiplie X_1 et X_2 par une même constante k . Si donc je désigne par S_1^p et S_2^p les groupes de termes homogènes de degré p dans S_1 et dans S_2 , nous aurons

$$\frac{kS_1^1 + k^2S_1^2 + k^3S_1^3 + \dots}{kS_2^1 + k^2S_2^2 + k^3S_2^3 + \dots} = \frac{S_1^1 + S_1^2 + S_1^3 + \dots}{S_2^1 + S_2^2 + S_2^3 + \dots}$$

Le premier membre doit être indépendant de k .



D'autre part, $S_1^1, S_2^1, \dots, S_1^{k-1}$ doivent s'annuler ainsi que $S_2^1, S_2^2, \dots, S_2^{k-1}$, tandis que S_1^k et S_2^k sont différents de zéro; et en effet les courbes $f + C\varphi = 0$ doivent avoir au point considéré un point multiple d'ordre λ à tangentes distinctes.

On aura donc, quel que soit k ,

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{k^2 S_1^2 + k^{k+1} S_1^{k+1} + \dots}{k^2 S_2^2 + k^{k+1} S_2^{k+1} + \dots}$$

ou, en faisant tendre k vers zéro,

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{S_1^1}{S_2^1}.$$

Ainsi la fraction rationnelle $\frac{f}{\varphi}$ est le quotient de deux polynômes entiers homogènes d'ordre λ en X_1 et X_2 .

Considérons maintenant un nœud monocritique. L'intégrale générale est alors de la forme

$$\frac{X_1^p}{X_2^p} = \text{const.}$$

Le rapport $\frac{S_1}{S_2}$ ne doit donc pas changer quand on change X_1 et X_2 en $X_1 k^\nu$ et $X_2 k^\mu$. Soit alors

$$\lambda X_1^\mu X_2^\nu$$

un terme quelconque de l'une des séries S_1 ou S_2 ; ce terme se changera en

$$\lambda X_1^\mu X_2^\nu k^{m\nu + n\mu};$$

je dirai qu'il est de la classe $m\nu + n\mu$. Soient alors S_1^p et S_2^q l'ensemble des termes de classe p de S_1 et de S_2 ; nous aurons encore

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{k S_1^1 + k^2 S_1^2 + \dots}{k S_2^1 + k^2 S_2^2 + \dots}.$$

Comme la courbe $f + C\varphi = 0$ doit présenter λ branches de courbe de la forme

$$X_1^p = \gamma X_2^q$$

passant au point considéré (cf. *loc. cit.*, p. 43), les premiers termes, qui ne s'annuleront pas au numérateur et au dénominateur de la fraction précédente, seront les termes $k^{\lambda\mu\nu} S_1^{\lambda\mu\nu}$ et $k^{\lambda\mu\nu} S_2^{\lambda\mu\nu}$, de sorte que nous aurons, quel que soit k ,

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{k^{\lambda\mu\nu} S_1^{\lambda\mu\nu} + \dots}{k^{\lambda\mu\nu} S_2^{\lambda\mu\nu} + \dots}$$

et en faisant $k = 0$

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{S_1^{\lambda\mu\nu}}{S_2^{\lambda\mu\nu}}.$$

Ainsi la fraction rationnelle $\frac{f}{\varphi}$ est le quotient de deux polynômes entiers homogènes d'ordre λ en X_1^p et X_2^q .

Il reste à examiner le cas d'un col qui est un peu plus compliqué.

Si l'intégration algébrique est possible, les séries X_1 et X_2 existent certainement encore; l'intégrale générale devient

$$X_1^p X_2^q = \text{const.}$$

Donc $\frac{S_1}{S_2}$ ne change pas quand on change X_1 en $k^\nu X_1$ et X_2 en $k^{-\mu} X_2$. Un terme en $X_1^m X_2^n$ est alors multiplié par $k^{m\nu - n\mu}$ et peut être appelé de classe $m\nu - n\mu$, seulement il peut y avoir des termes de classe négative.

Soit encore

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{\sum k^p S_1^p}{\sum k^p S_2^p}.$$

Le numérateur, comme le dénominateur, sont développables (pour les valeurs de k voisines de 1) suivant les puissances positives ou négatives de k ; il en est de même de

$$f \sum k^p S_2^p - \varphi \sum k^p S_1^p = 0.$$

Cette fonction de k devant être identiquement nulle, ne peut l'être que si tous les coefficients du développement sont nuls; on a donc

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{S_1^p}{S_2^q},$$

en choisissant p de telle façon que S_1^p ne soit pas identiquement nul. Seulement ici S_1^p et S_2^q peuvent contenir une infinité de termes. Ce ne sont plus des polynômes, ce sont des séries.

Soient à nouveau M_1 un nœud quelconque, μ_1 et ν_1 ses entiers caractéristiques, X_1^1, X_2^1 les deux séries X_1 et X_2 correspondantes. Nous pourrions toujours former ces deux séries à partir de l'équation différentielle. Ces deux séries convergeront dans un certain domaine D_1 ; soit ensuite Δ_1 un domaine plus étendu que D_1 ; nous pourrions encore définir dans ce domaine les deux fonctions X_1^1 et X_2^1 par le procédé de la continuation analytique.



Soient M_2 un second nœud, μ_2 et ν_2 ses entiers caractéristiques, $X_1^{\mu_2}$ et $X_2^{\nu_2}$ les deux séries X_1 et X_2 correspondantes; elles convergeront dans un certain domaine D_2 et l'on pourra, par continuation analytique, définir les fonctions $X_1^{\mu_2}$ et $X_2^{\nu_2}$ dans un domaine plus étendu Δ_2 .

Supposons que Δ_1 et Δ_2 aient une partie commune; dans cette partie commune les quatre fonctions $X_1^{\mu_1}$, $X_2^{\nu_1}$, $X_1^{\mu_2}$, $X_2^{\nu_2}$ seront définies et nous devrons avoir une relation entre

$$Z_1 = \frac{(X_1^{\mu_1})^{\mu_2}}{(X_2^{\nu_1})^{\nu_2}}, \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{(X_1^{\mu_2})^{\mu_1}}{(X_2^{\nu_2})^{\nu_1}}.$$

Dans le cas où l'intégration algébrique est possible, on voit quelle est la forme de cette relation; la fonction $\frac{f}{\varphi}$ doit être une fonction rationnelle de Z_1 d'une part, de Z_2 d'autre part.

Il faut donc qu'une fonction rationnelle de Z_1 soit égale à une fonction rationnelle de Z_2 .

Soit x_0, y_0, z_0 un point de la partie commune à Δ_1 et à Δ_2 ; connaissant nos quatre fonctions X dans cette partie commune, par continuation analytique, nous saurons développer Z_1 et Z_2 suivant les puissances de $x - x_0, y - y_0, z - z_0$. Soient Z_1^0 et Z_2^0 les valeurs de Z_1 et Z_2 au point x_0, y_0, z_0 , nous saurons développer $Z_2 - Z_2^0$ suivant les puissances de $Z_1 - Z_1^0$.

Nous aurons donc la relation cherchée entre Z_1 et Z_2 sous une forme où entre une série infinie, mais cela ne nous permet pas encore de reconnaître si l'on peut la mettre sous la forme d'une égalité entre deux fonctions rationnelles.

Introduction des fonctions fuchsienues. — Considérons d'abord un nœud critique et supposons que nous nous donnions : 1° les valeurs remarquables $C_1, C_2, \dots, C_q$; 2° le nombre λ ; 3° les nombres λ_i et les exposants α_i relatifs aux différents facteurs correspondant aux q valeurs remarquables.

Soit M_k l'un des communs multiples des exposants α_i correspondant à la valeur remarquable C_k .

Construisons un polygone fuchsien R_0 de la première famille et du premier genre, supposons que nous ayons $2q - 2$ sommets répartis en q cycles. Le premier cycle comprendra un seul sommet A_1 ; le second, le troisième, etc., et l'avant-dernier cycles comprendront chacun deux sommets que j'appellerai A_2 et A_2', A_3 et $A_3', \dots, A_{q-1}$ et A_{q-1}' , le dernier cycle comprendra un seul sommet A_q . La somme des angles du $k^{\text{ième}}$ cycle sera $\frac{2\pi}{M_k}$ et il y aura une fonc-

tion fuchsienne qui sera égale à C_k au point A_k . Soit $F(\zeta)$ cette fonction fuchsienne, égalons-la à $-\frac{f}{\varphi}$ et écrivons

$$F(\zeta) = -\frac{f}{\varphi}.$$

Nous avons vu plus haut que $\frac{f}{\varphi}$ devait être une fonction rationnelle du rapport $\frac{X_1}{X_2}$ que j'appellerai Z ; nous aurons donc

$$F(\zeta) = R(Z),$$

R désignant une fonction rationnelle. Je dis que Z sera une fonction uniforme de ζ .

Si, en effet, $F(\zeta)$ décrit un contour fermé, plusieurs valeurs de Z ne pourront s'échanger que si ce contour contient l'un des points C_k , et si l'on tourne autour d'un point C_k et que $\alpha_k^1, \alpha_k^2, \dots, \alpha_k^h$ soient les exposants correspondants, nous verrons s'échanger, par permutation circulaire, d'une part, λ_k^1 groupes de α_k^1 valeurs; d'autre part, λ_k^2 groupes de α_k^2 valeurs, etc.

Si ζ décrit un contour fermé, il faut d'abord que ce contour enveloppe un des sommets de R_0 , pour que $F(\zeta)$ tourne autour d'un des points C_k . Si ζ tourne autour d'un sommet, $F(\zeta)$ tourne M_k fois autour de C_k , et comme M_k est multiple de tous les exposants α_i^j , Z revient à la même valeur.

Donc Z est fonction uniforme de ζ .

C. Q. F. D.

Or Z , pour une même valeur de $F(\zeta)$, peut prendre λ valeurs. Considérons donc λ polygones fuchsien congruents à R_0 , que j'appellerai

$$R_0, R_1, \dots, R_{\lambda-1}.$$

L'ensemble de ces polygones constituera un polygone fuchsien S_0 . Ce polygone S_0 , en associant convenablement ses côtés en paires de côtés conjugués, engendrera un groupe fuchsien dont les substitutions n'altéreront pas Z .

Donc Z est fonction fuchsienne de ζ .

La surface du polygone R_0 (au point de vue de la géométrie non euclidienne) sera

$$q - 2 - \sum \frac{1}{M_k}$$

en prenant pour unité celle du quadrilatère dont les quatre angles sont nuls. Celle de S_0 devra donc être

$$\lambda \left[q - 2 - \sum \frac{1}{M_k} \right].$$



D'autre part, le nombre des cycles de sommets de S_0 sera en général

$$\sum \lambda_i.$$

Ce nombre pourrait se réduire si la somme des angles relatifs à un de ces cycles était égale à 2π ; on pourrait alors assembler les polygones R_k de façon à faire disparaître ce cycle. Mais cette somme d'angles est égale à

$$2\pi \frac{\alpha_i}{M_k},$$

α_i et M_k étant les nombres α_i et M_k correspondant au cycle envisagé. Mais comme M_k est un commun multiple *quelconque* des α_i , je pourrai toujours supposer $M_k > \alpha_i$.

Nous pouvons donc toujours supposer que le nombre des cycles de S_0 est précisément $\sum \lambda_i$.

Quel est le nombre des côtés? Le polygone R_0 a $2q-2$ côtés; quand on y annexe R_1 , on a en tout $2(2q-2)$ côtés. Mais comme R_0 a un côté commun avec R_1 , et que cette paire de côtés disparaît, il restera pour le polygone $R_0 + R_1$ un nombre de côtés égal à

$$2(2q-2)-2.$$

Annexons encore R_2 , nous ajoutons $2q-2$ côtés; mais R_2 a au moins un côté commun avec $R_0 + R_1$, cela fait une paire de côtés à supprimer et il reste

$$3(2q-2)-2, 2$$

côtés pour le polygone $R_0 + R_1 + R_2$. Ce nombre doit être diminué si R_2 a plus d'un côté commun avec $R_0 + R_1$.

En général S_0 aura

$$\lambda(2q-2)-2\lambda+2$$

côtés, si R_i n'a qu'un côté commun avec $R_0 + R_1 + \dots + R_{i-1}$.

Dans le cas contraire ce nombre devrait être diminué.

En général le nombre des côtés sera

$$\lambda(2q-2)-2\lambda+2-2h,$$

h étant un entier positif ou nul.

D'après une formule que j'ai donnée dans les *Acta mathematica*, tome I⁽¹⁾, on a, si $2n$ est le nombre des côtés, q le nombre des cycles, p le genre du polygone fuchsien

$$p = \frac{n+1-q}{2}.$$

(¹) Œuvres, t. II, p. 149.

Nous aurons donc ici

$$p = \frac{\lambda(q-1)-\lambda+2-h-\sum \lambda_i}{2}$$

ou

$$2p+h=\lambda(q-2)+2-\sum \lambda_i.$$

Or nous avons trouvé plus haut

$$\sum \lambda_i = \lambda(q-2)+2.$$

On a donc

$$2p+h=0.$$

Or les nombres p et h sont positifs ou nuls; on a donc

$$p=0, \quad h=0.$$

Ainsi le genre du polygone fuchsien S_0 est nul et le nombre de ses côtés est $2\lambda(q-2)+2$.

Il faudrait rechercher maintenant comment sont assemblés les divers polygones partiels R_k dont l'ensemble compose S_0 , et comment les côtés de S_0 sont conjugués deux à deux.

Je désignerai par $A_{i,k}$ et $A'_{i,k}$ les sommets du polygone R_k qui sont homologues aux sommets $A_i = A_{i,0}$ et $A'_i = A'_{i,0}$ du polygone R_0 .

Considérons alors le côté $A_{1,k}A'_{2,k}$, ou bien il coïncidera avec un côté $A_{1,k}A_{2,k}$ du polygone R_k , les deux polygones R_k et R_0 ayant un côté commun, ou bien ce sera un côté de S_0 , mais alors il sera conjugué d'un autre côté $A_{1,k}A_{2,k}$ de S_0 .

Dans l'un et l'autre cas, je dirai que l'indice h est le *conséquent* de l'indice k , et l'indice k l'*antécédent* de l'indice h . Chacun de nos λ indices aura ainsi un conséquent et un antécédent.

Considérons alors la substitution T , qui change chacun de ces indices en son conséquent. C'est une substitution de λ lettres, et si

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1^1, & \alpha_2^1, & \dots, & \alpha_{\lambda}^1, \dots \\ \lambda_1^1, & \lambda_2^1, & \dots, & \lambda_{\lambda}^1, \dots \end{array}$$

sont les nombres α_i et λ_i relatifs à la valeur remarquable C_1 , les λ lettres se répartiront en λ_1^1 groupes de α_1^1 lettres, ..., en λ_{λ}^1 groupes de α_{λ}^1 lettres, ..., et la substitution T , permutera circulairement les lettres de chaque groupe.

Considérons maintenant le côté $A'_{2,k}A'_{3,k}$; il coïncidera avec un côté $A_{2,k}A_{3,k}$ de R_k , ou bien il sera un côté de S_0 et sera conjugué du côté $A_{2,k}A_{3,k}$.



Dans les deux cas, définissant les conséquents à un nouveau point de vue, je dirai que h est le *conséquent* de k .

J'appellerai T_2 la substitution de λ lettres qui change chaque indice en son conséquent.

On définirait de même les substitutions $T_3, T_4, \dots, T_{q-1}$ qui correspondent aux côtés $A_2'A_3', A_3'A_4', \dots, A_{q-1}'A_q'$ de la même façon que T_1 et T_2 correspondent aux côtés $A_1'A_2'$ et $A_2'A_3'$.

Les $q-1$ substitutions T_k devront satisfaire à certaines conditions. Nous avons déjà vu quelles sont celles que doit remplir T_1 , et comment les lettres doivent se répartir en groupes tels que T_1 permute circulairement les lettres d'un même groupe.

Soient maintenant

$$\begin{matrix} \alpha_1^1, & \alpha_2^1, & \dots, & \alpha_\lambda^1, \\ \lambda_1^1, & \lambda_2^1, & \dots, & \lambda_\lambda^1, \end{matrix}$$

les nombres α_i et λ_i relatifs à la valeur C_k .

On pourra répartir les λ indices en groupes tels que la substitution $T_{k-1}T_k^{-1}$ permute circulairement les lettres d'un même groupe.

Nous devons avoir λ_k^1 groupes de α_1^1 lettres, λ_k^2 groupes de α_2^1 lettres, $\dots$, λ_k^k groupes de α_k^1 lettres ($k=2, 3, \dots, q-1$).

Soient enfin

$$\begin{matrix} \alpha_1^q, & \alpha_2^q, & \dots, & \alpha_q^q, \\ \lambda_1^q, & \lambda_2^q, & \dots, & \lambda_q^q, \end{matrix}$$

les nombres α_i et λ_i relatifs à la valeur C_q .

Les λ indices pourront se répartir en groupes tels que T_{q-1} permute circulairement les lettres d'un même groupe.

Nous devons avoir λ_q^1 groupes de α_1^1 lettres, $\dots$, λ_q^q groupes de α_q^q lettres.

Une question se pose alors. Existe-t-il des substitutions T satisfaisant à toutes ces conditions? et par conséquent existe-t-il un polygone S_6 ?

Nous avons vu plus haut que $\frac{f}{\varphi}$ devait être une fonction rationnelle de $Z = \frac{X_1}{X_2}$.

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{P(X_1, X_2)}{Q(X_1, X_2)},$$

P et Q étant deux polynômes homogènes d'ordre λ .

Soient C_k une valeur remarquable quelconque, A_k et B_k deux constantes telles que $B_k = A_k C_k$. Alors le polynôme

$$A_k P + B_k Q$$

devra se décomposer en facteurs, et l'on aura

$$(1) \quad A_k P + B_k Q = U_1^{2\lambda_1} U_2^{2\lambda_2} \dots U_k^{2\lambda_k},$$

U_k étant un polynôme d'ordre λ_k^k .

La question proposée revient alors à la suivante. Peut-on toujours trouver des polynômes P et Q satisfaisant aux conditions (1)?

Nous disposons des indéterminées suivantes :

1° Les $2\lambda + 2$ coefficients des polynômes P et Q .

2° Les q constantes A_k , d'où l'on déduit les q constantes B_k par les équations $B_k = A_k C_k$, les C_k sont supposés donnés.

3° Les $\Sigma(\lambda_i + 1)$ coefficients des facteurs U .

D'autre part, nous avons à satisfaire aux conditions (1) qui sont des identités entre deux polynômes d'ordre λ .

Chacune d'elles correspond donc à $\lambda + 1$ conditions, cela fait donc en tout $q(\lambda + 1)$ conditions.

Si donc nous appelons N le nombre total des facteurs U_i , de telle sorte que

$$\Sigma(\lambda_i + 1) = \Sigma \lambda_i + N,$$

nous avons

$$N + 2\lambda + 2 + q + \Sigma \lambda_i$$

paramètres qui doivent satisfaire à $q(\lambda + 1)$ conditions; il nous reste donc

$$N + 2\lambda + 2 + q + \Sigma \lambda_i - q(\lambda + 1)$$

paramètres arbitraires. Or, en vertu des équations

$$q\lambda = \Sigma \lambda_i \lambda_i, \quad 2\lambda = \Sigma (\alpha_i - 1)\lambda_i = 2,$$

ce nombre se réduit à $4 + N$.

Remarquons que les équations (1) sont homogènes si l'on y regarde :

1° Les coefficients de P et Q comme étant d'ordre λ ;

2° Les constantes A_k comme étant d'ordre λ ;

3° Les coefficients d'un facteur U_i de degré λ_i comme étant d'ordre $2\lambda_i$.

En effet, il est aisé de vérifier qu'en adoptant cette convention les deux membres de (1) sont homogènes d'ordre 2λ .

Mais il y a plus, ces équations (1) sont doublement homogènes, je veux dire



que, si ξ et η désignent deux indéterminées, elles ne changent pas quand on change

$$(2) \quad A_k, P, Q, U_i$$

en

$$(3) \quad A_k \xi^k, P \eta^k, Q \eta^k, U_i \xi^i \eta^{k-i}.$$

Adjoignons aux équations (1) d'autres relations en nombre $N+2$ entre nos inconnues; je suppose que ces nouvelles relations présentent la même homogénéité double que les équations (1), c'est-à-dire ne changent pas quand les quantités (2) se changent dans les quantités (3).

Nous avons alors $N+2+q(\lambda+1)$ équations homogènes; le nombre total des inconnues est $N+4+q(\lambda+1)$; mais ces équations étant doublement homogènes sont en réalité des équations entre les rapports des coefficients des $A_k P$ et des $A_k Q$ élevés à la puissance $\frac{1}{\lambda}$ et des coefficients des U_i élevés à la puissance $\frac{1}{\lambda_i}$. Le nombre de ces rapports réellement distincts est seulement

$$N+2+q(\lambda+1).$$

Nous avons donc autant d'équations que d'inconnues et, comme des équations homogènes ne sont jamais impossibles, nous pourrions toujours en tirer nos inconnues.

Ainsi si les équations (1) sont distinctes, les rapports de nos inconnues dépendront de $N+2$ paramètres arbitraires et nos inconnues elles-mêmes de $N+4$ paramètres.

Si les équations (1) n'étaient pas distinctes, les inconnues dépendraient de plus de $N+4$ paramètres.

Il semble donc que notre problème comporte toujours une infinité de solutions. Mais il importe d'observer que ces solutions ne sont pas réellement distinctes.

En effet, si dans les polynômes P , Q et U_i on remplace X_1 et X_2 par

$$\alpha X_1 + \beta X_2 \quad \text{et} \quad \gamma X_1 + \delta X_2,$$

les équations (1) ne cesseront pas d'être satisfaites. Or cette transformation dépend de quatre paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Donc voilà une quadruple infinité de solutions qui ne diffèrent pas essentiellement les unes des autres.

D'autre part, l'équation (1) ne change pas si l'on y change

$$U_1, U_2, \dots, U_k, A_k$$

en

$$\mu_1 U_1, \mu_2 U_2, \dots, \mu_k U_k, \quad A_k \mu_1^{2^1} \mu_2^{2^2} \dots \mu_k^{2^k}.$$

Voilà une transformation qui dépend des K paramètres μ . Comme nous pouvons opérer de même sur nos q équations (1), cela nous fait autant de paramètres μ que de facteurs U , c'est-à-dire N . En tenant compte de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, cela fait une transformation dépendant de $N+4$ paramètres.

Nous aurons donc une $(N+4)^{\text{upie}}$ infinité de solutions qui ne différeront pas essentiellement les unes des autres.

Si donc les équations (1) sont distinctes, le problème ne comportera qu'un nombre fini de solutions essentiellement différentes.

Maintenant, les équations (1) sont-elles distinctes? La considération des fonctions fuchsienues permet de l'affirmer.

Si, en effet, les valeurs remarquables C_k sont données, on pourra construire d'une seule manière le polygone fuchsien R_0 ; on pourra ensuite assembler d'un nombre fini de manières λ polygones

$$R_0, R_1, \dots, R_{\lambda-1}$$

pour former le polygone S_0 .

C'est parmi les polygones S_0 ainsi formés, en nombre fini, qu'il faut choisir ceux qui conviennent à la question. Les considérations qui précèdent montrent qu'il y en aura toujours, mais il ne peut y en avoir qu'un nombre fini.

En résumé, si l'on se donne les valeurs remarquables C_k , si l'on se donne les entiers λ et λ_i assujettis seulement aux conditions

$$\lambda = \sum a_i \lambda_i, \quad \alpha \lambda = \sum (\alpha_i - 1) \lambda_i = 2,$$

on pourra toujours former les polynômes P et Q et le polygone S_0 et l'on ne pourra le faire que d'un nombre fini de manières.

Extension aux nœuds monocritiques. — Considérons un nœud monocritique; soient X_1 et X_2 les deux séries correspondantes, et soit

$$Z = \frac{(X_1)^{\mu}}{(X_2)^{\nu}}.$$

Nous avons vu plus haut que $-\frac{f}{\varphi}$ est une fonction rationnelle de Z dont le numérateur et le dénominateur sont d'ordre λ

$$-\frac{f}{\varphi} = R(Z).$$



Soit C_h une valeur remarquable; lorsque $-\frac{f}{\varphi}$ tournera autour de C_h , les λ valeurs de Z tirées de l'équation qui précède s'échangeront entre elles. Soit u_i un facteur de $f + C_h \varphi$, soient λ_i et α_i les deux nombres correspondants. Si ce facteur n'est pas singulier, nous aurons λ_i groupes de α_i valeurs de Z , et les valeurs de chacun de ces groupes s'échangeront circulairement quand $-\frac{f}{\varphi}$ tournera autour de C_h .

Si le facteur est critique, α_i est divisible par μ , nous avons alors $\lambda_i - 1$ groupes de α_i valeurs de Z et un groupe de $\frac{\alpha_i}{\mu}$ valeurs qui s'échangent circulairement.

Si le facteur est hypercritique, α_i est divisible par ν et nous avons $\lambda_i - 1$ groupes de α_i valeurs et un groupe de $\frac{\alpha_i}{\nu}$ valeurs qui s'échangent circulairement.

Si enfin le facteur est doublement singulier, α_i est divisible par $\mu\nu$ et nous avons $\lambda_i - 2$ groupes de α_i valeurs, un groupe de $\frac{\alpha_i}{\mu}$ valeurs et un groupe de $\frac{\alpha_i}{\nu}$ valeurs qui s'échangent circulairement.

Formons encore le polygone R_h et formons la fonction fuchsienne $F(\zeta)$. Posons

$$F(\zeta) = R(Z).$$

Z sera encore une fonction fuchsienne de ζ .

Le polygone S_h correspondant sera formé de λ polygones partiels

$$R_0, R_1, \dots, R_{\lambda-1}.$$

Le nombre des cycles de sommets est encore $\Sigma \lambda_i$.

Celui des côtés sera

$$\lambda(2q-2) - 2\lambda + 2 - 2h,$$

h étant positif ou nul. On en déduit, p étant le genre de S_0 ,

$$2p + h = \lambda(q-2) + 2 - \sum \lambda_i.$$

Revenons aux formules qui, dans la première partie de ce travail, remplissent les lignes 6 à 12 de la page 45. Pour chaque nœud monocritique, nous aurons q de ces formules, correspondant aux q valeurs remarquables; additionnons-les il viendra

$$q\lambda = \sum \alpha_i \lambda_i + \alpha_1 \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) + \alpha_2 \left(1 - \frac{1}{\nu}\right).$$

Nous avons trouvé d'autre part (p. 46), formule (δ),

$$(2\lambda - 2) + \alpha_1 \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) + \alpha_2 \left(1 - \frac{1}{\nu}\right) = \sum (x_i - 1) \lambda_i;$$

on tire de là

$$\lambda(q-2) + 2 = \sum \lambda_i,$$

d'où

$$2p + h = 0,$$

et comme p et h ne peuvent être négatifs

$$p = h = 0.$$

On définirait comme précédemment les substitutions

$$T_1, T_2, \dots, T_{q-1},$$

et pour chacune des substitutions

$$T_1, T_2 T_1^{-1}, T_3 T_2^{-1}, \dots, T_q T_{q-1}^{-1}, T_q$$

nous savons comment les λ indices se répartissent en groupes de lettres se permutant circulairement. Chacun de ces groupes correspondra d'ailleurs à un cycle de sommets du polygone S_h .

Pourra-t-on toujours former un polygone S_h satisfaisant à toutes ces conditions?

Nous aurons encore

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{P(X_1^q, X_2^q)}{Q(X_1^q, X_2^q)},$$

P et Q étant deux polynômes homogènes d'ordre λ .

Nous aurons encore

$$(1) \quad A_1 P + B_1 Q = U_1^{\lambda_1} U_2^{\lambda_2} \dots U_q^{\lambda_q}.$$

Cependant, si le facteur U_1 par exemple, était critique, il faudrait dans le second membre de (1) remplacer $U_1^{\lambda_1}$ par

$$(X_1^q)^{\frac{\lambda_1}{\mu}} U_1^{\lambda_1},$$

U_1 étant un polynôme homogène d'ordre $\lambda_1 - 1$. S'il était hypercritique, il faudrait remplacer $U_1^{\lambda_1}$ par

$$(X_2^q)^{\frac{\lambda_1}{\nu}} U_1^{\lambda_1};$$



et s'il était doublement singulier, il faudrait remplacer U_i^{2i} par

$$(X_1^{\alpha_i})^2 (X_2^{\alpha_i})^2 U_i^{2i},$$

U_i étant un polynôme homogène d'ordre $\lambda_i - 2$.

De combien d'indéterminées disposons-nous?

1° Des $2\lambda + 2$ coefficients de P et de Q;

2° Des q constantes A_k ;

3° Des coefficients des polynômes U_i et U'_i .

Ces coefficients sont au nombre de $\lambda_i + 1$ pour un polynôme U_i , de λ_i pour un polynôme U'_i simplement singulier, de $\lambda_i - 1$ pour un polynôme U_i doublement singulier.

Le nombre total est donc

$$\sum (\lambda_i + 1) - 2 = \sum \lambda_i + N - 2,$$

en appelant N le nombre total des facteurs.

Nous avons donc en tout

$$N + 2\lambda + q + \sum \lambda_i$$

indéterminées.

D'autre part, nous avons q équations (1) qui équivalent à $q(\lambda + 1)$ conditions, de sorte qu'il reste

$$N + 2\lambda - q\lambda + \sum \lambda_i$$

paramètres arbitraires.

En vertu de l'équation

$$\sum \lambda_i = (q - 2)\lambda + 2,$$

ce nombre se réduit à $N + 2$.

Si donc les équations (1) sont distinctes, le problème comporte une $(N + 2)^{\text{ème}}$ infinité de solutions.

Mais d'une solution on peut en déduire une $(N + 2)^{\text{ème}}$ infinité d'autres. On peut, en effet, sans cesser de satisfaire aux équations (1) :

1° Changer

$$X_1^{\alpha_1} \text{ et } X_2^{\alpha_2}$$

en

$$\alpha X_1^{\alpha_1} \text{ et } \beta X_2^{\alpha_2};$$

2° Changer

$$U_1, U_2, \dots, U_k, A_k$$

en

$$\mu_1 U_1, \mu_2 U_2, \dots, \mu_k U_k, A_k \mu_1^{\alpha_1} \mu_2^{\alpha_2} \dots \mu_k^{\alpha_k}.$$

Nous n'avons donc qu'un nombre fini de solutions essentiellement distinctes. Nous en aurions un nombre infini si les équations (1) n'étaient pas distinctes, mais cela ne se peut pas, puisqu'on ne peut assembler les polygones

$$R_0, R_1, \dots, R_{k-1}$$

que d'un nombre fini de manières.

Nous arrivons donc à la même conclusion que plus haut : *Il y a toujours des polygones S_0 et il n'y en a jamais qu'un nombre fini.*

Le polygone V_0 . — Nous venons de voir comment on pourrait construire le polygone fuchsien R_0 , et comment il existait un polygone S_0 correspondant à chacun des nœuds tant dicritiques que monocritiques.

Soit G le groupe fuchsien engendré par R_0 ; soit g le groupe fuchsien engendré par S_0 . Le groupe g sera un sous-groupe de G. C'est un sous-groupe « d'indice λ », puisque la surface (non euclidienne) de S_0 est égale à λ fois celle de R_0 .

A chacun des nœuds correspondra ainsi un sous-groupe g . Soit Γ le groupe formé des substitutions communes à tous les sous-groupes g .

Je dis que Γ sera un groupe fuchsien, c'est-à-dire que Γ sera un sous-groupe d'indice fini de G.

Nous avons posé plus haut

$$\frac{f}{\varphi} = -F(\zeta)$$

et nous avons vu que $F(\zeta)$ devait être une fonction rationnelle de

$$Z = \frac{X_1}{X_2}$$

dans le cas d'un nœud dicritique et de

$$Z = \frac{(X_1)^{\mu}}{(X_2)^{\nu}}$$

dans le cas d'un nœud monocritique.

Soit alors k le nombre des nœuds et soient

$$Z_1, Z_2, \dots, Z_k$$

les diverses fonctions Z relatives à ces divers nœuds.



Tous les Z_i seront fonctions fuchsiennes de ζ ; et $F(\zeta)$ sera fonction rationnelle de chacun des Z_i .

A chaque valeur de $F(\zeta)$ correspondra par conséquent un nombre fini de valeurs de Z_1 , un nombre fini de valeurs de Z_2 , ..., un nombre fini de valeurs de Z_n .

A chaque valeur de $F(\zeta)$ (ou, ce qui revient au même, à chaque point du polygone R_0), correspondra donc un nombre fini de systèmes de valeurs des Z_i . Soit A ce nombre fini. Soient alors $R_1, R_2, \dots$ les différents polygones fuchsien congruents à R_0 . Soit M_0 un point de R_0 ; soient $M_1, M_2, \dots$ les points correspondants de $R_1, R_2, \dots$.

A chacun des points M_i correspondra un système de valeurs des Z_i . Soient alors

$$(5) \quad M_0, M_1, \dots, M_{A-1}$$

A points M_i correspondant à A systèmes différents de valeurs de Z . Alors si l'on considère un autre point M_i , ce point correspondra au même système de valeurs que l'un des points (5), puisque le nombre total des systèmes de valeurs est égal à A .

Nous dirons que deux points M_i sont équivalents s'ils correspondent à un même système de valeurs des Z_i , et que deux polygones R_i sont équivalents si les points M_i correspondants sont équivalents.

Les substitutions du groupe Γ sont alors précisément celles qui changent les polygones R_i en des polygones équivalents.

On voit que Γ est un sous-groupe de G d'indice A .

Le polygone V_0 , qui engendrera Γ , se composera de l'agrégation de A polygones R_i et sa surface (non euclidienne) sera A fois celle de R_0 .

Deux hypothèses sont possibles :

Ou bien le polygone V_0 est de genre zéro, alors il existe une fonction fuchsienne ξ , telle que tous les Z_i et $\frac{f}{\varphi}$ soient des fonctions rationnelles de ξ .

Ou bien le polygone V_0 sera de genre plus grand que zéro, et il y aura deux fonctions ξ et η , liées par une relation algébrique et telles que les Z_i et $\frac{f}{\varphi}$ soient fonctions rationnelles de ξ et de η .

Paris, le 7 mai 1897.

SUR

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

A INTÉGRALES ALGÈBRIQUES (*).

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 92, p. 698-701 (21 mars 1881).

Pour rechercher quelles sont les équations différentielles linéaires dont toutes les intégrales sont algébriques, il faut d'abord déterminer les groupes de substitutions linéaires qui ne se composent que d'un nombre fini de substitutions. Dans un travail inséré dans les *Mémoires de l'Académie de Naples*, M. Jordan donne une méthode générale pour résoudre ce problème, et il applique sa méthode aux équations des quatre premiers ordres. Connaissant ces groupes de substitutions linéaires en nombre fini, il faut ensuite former les équations différentielles correspondantes. M. Jordan insiste peu sur ce point. Je désirerais attirer l'attention sur quelques propriétés de ces équations.

Bornons-nous au troisième ordre, pour fixer les idées. Envisageons l'un des groupes découverts par M. Jordan; supposons que ce groupe G soit composé de n opérations, qui consistent à changer respectivement x, y, z en

$$\begin{aligned} a_i x + b_i y + c_i z, \\ a'_i x + b'_i y + c'_i z, \\ a''_i x + b''_i y + c''_i z \\ (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Posons

$$\Pi(\xi, \eta) = \frac{\alpha\xi + \beta\eta + \gamma}{\alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'}, \quad \Pi_1(\xi, \eta) = \frac{\alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1}{\alpha'_1\xi + \beta'_1\eta + \gamma'_1}.$$

Soient $A_i, B_i, C_i, A'_i, B'_i, C'_i, A''_i, B''_i, C''_i$ des quantités proportionnelles à

(*) Voir aux Notes.



$a_i, b_i, c_i, a'_i, b'_i, c'_i$ et telles que leur déterminant soit égal à 1;

$$\begin{vmatrix} A_i & B_i & C_i \\ A'_i & B'_i & C'_i \\ A''_i & B''_i & C''_i \end{vmatrix} = 1.$$

Soient

$$x = \sum_{i=1}^n \Pi \left(\frac{A_i \xi + B_i \eta + C_i}{A'_i \xi + B'_i \eta + C'_i}, \frac{A''_i \xi + B''_i \eta + C''_i}{A'_i \xi + B'_i \eta + C'_i} \right),$$

$$y = \sum_{i=1}^n \Pi \left(\frac{A_i \xi + B_i \eta + C_i}{A'_i \xi + B'_i \eta + C'_i}, \frac{A'_i \xi + B'_i \eta + C'_i}{A''_i \xi + B''_i \eta + C''_i} \right).$$

Il est clair que x et y sont des fonctions rationnelles de ξ et de η qui ne changent pas quand on change ξ et η en

$$\xi_i = \frac{A_i \xi + B_i \eta + C_i}{A'_i \xi + B'_i \eta + C'_i}, \quad \eta_i = \frac{A'_i \xi + B'_i \eta + C'_i}{A''_i \xi + B''_i \eta + C''_i},$$

et que toute fonction rationnelle de ξ et de η qui ne change pas quand on change ξ et η en ξ_i et η_i sera une fonction rationnelle de x et de y .

Si D est le déterminant fonctionnel de x et de y par rapport à ξ et à η , les trois fonctions

$$z_1 = \xi \sqrt[3]{D}, \quad z_2 = \eta \sqrt[3]{D}, \quad z_3 = \sqrt[3]{D}$$

se changeront respectivement en

$$A_i z_1 + B_i z_2 + C_i z_3,$$

$$A'_i z_1 + B'_i z_2 + C'_i z_3,$$

$$A''_i z_1 + B''_i z_2 + C''_i z_3$$

quand ξ et η se changeront en ξ_i et η_i ⁽¹⁾.

Posons, pour abréger,

$$D_{m_i p_i} z_i = \frac{d^{m_i + m_i} z_i}{dx^{m_i} dy^{m_i}},$$

le déterminant

$$\begin{vmatrix} D_{m_1 p_1} z_1 & D_{m_1 p_2} z_2 & D_{m_1 p_3} z_3 \\ D_{m_2 p_1} z_1 & D_{m_2 p_2} z_2 & D_{m_2 p_3} z_3 \\ D_{m_3 p_1} z_1 & D_{m_3 p_2} z_2 & D_{m_3 p_3} z_3 \end{vmatrix}$$

ne changera pas quand on changera ξ et η en ξ_i et η_i , et sera par conséquent une fonction rationnelle de x et de y .

⁽¹⁾ Cela résulte de l'invariance de x et y par le changement de ξ, η en ξ_i, η_i et de l'expression du déterminant fonctionnel : $\frac{\partial(\xi_i, \eta_i)}{\partial(\xi, \eta)} = \frac{1}{(A''_i \xi + B''_i \eta + C''_i)^3}$. (J. D.)

Il en résulte que

$$z = z_1, \quad z = z_2, \quad z = z_3$$

sont trois intégrales particulières d'une infinité d'équations aux différences partielles à coefficients rationnels. Ces équations s'écrivent

$$(1) \quad \begin{vmatrix} D_{m_1 p_1} z & D_{m_1 p_2} z_1 & D_{m_1 p_3} z_2 & D_{m_1 p_4} z_3 \\ D_{m_2 p_1} z & D_{m_2 p_2} z_1 & D_{m_2 p_3} z_2 & D_{m_2 p_4} z_3 \\ D_{m_3 p_1} z & D_{m_3 p_2} z_1 & D_{m_3 p_3} z_2 & D_{m_3 p_4} z_3 \\ D_{m_4 p_1} z & D_{m_4 p_2} z_1 & D_{m_4 p_3} z_2 & D_{m_4 p_4} z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

$m_1, p_1, m_2, p_2, m_3, p_3, m_4, p_4$ sont des entiers positifs quelconques; il est clair que les coefficients des différentes dérivées partielles de z sont rationnels en x et en y . Si l'on fait, en particulier, dans l'équation (1)

$$m_1 = 0, \quad p_1 = 0,$$

$$m_2 = 1, \quad p_2 = 0,$$

$$m_3 = 2, \quad p_3 = 0,$$

$$m_4 = 3, \quad p_4 = 0,$$

elle prendra la forme

$$B_3 \frac{d^3 z}{dx^3} + B_2 \frac{d^2 z}{dx^2} + B_1 \frac{dz}{dx} + B_0 z = 0.$$

Les B seront des polynômes entiers en x et y . Si l'on donne à y une valeur constante quelconque, on obtiendra une équation linéaire du troisième ordre, dont tous les coefficients seront rationnels et dont les intégrales seront les fonctions algébriques z_1, z_2, z_3 .

Conséquence. — A chacun des groupes définis par M. Jordan, correspondent une infinité d'équations linéaires du troisième ordre. Dans chacune de ces équations, les coefficients sont rationnels par rapport à la variable indépendante x et à un paramètre arbitraire y . Si l'on considère les trois intégrales z_1, z_2 et z_3 de cette équation comme fonctions de x et de y , ce seront des fonctions algébriques de ces variables, et elles satisferont non seulement à l'équation proposée, mais à une infinité d'équations aux dérivées partielles à coefficients rationnels, à savoir les équations (1).

Je ne me suis restreint au troisième ordre que pour fixer les idées; les résultats sont vrais pour tous les ordres.



SUR
L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES
PAR
LE MOYEN DES FONCTIONS ABÉLIENNES.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 92, p. 913-915 (11 avril 1881).

Soient $F(\xi, \eta)$, $F_1(\xi, \eta)$ deux fonctions abéliennes quelconques. Posons

$$x = F, \quad y = F_1, \quad z_1 = \sqrt[3]{\frac{dF}{d\xi} \frac{dF_1}{d\eta} - \frac{dF_1}{d\xi} \frac{dF}{d\eta}}, \quad z_2 = \xi z_1, \quad z_3 = \eta z_1;$$

l'équation linéaire

$$(1) \quad \begin{vmatrix} z & z_1 & z_2 & z_3 \\ \frac{dz}{dx} & \frac{dz_1}{dx} & \frac{dz_2}{dx} & \frac{dz_3}{dx} \\ \frac{d^2z}{dx^2} & \frac{d^2z_1}{dx^2} & \frac{d^2z_2}{dx^2} & \frac{d^2z_3}{dx^2} \\ \frac{d^3z}{dx^3} & \frac{d^3z_1}{dx^3} & \frac{d^3z_2}{dx^3} & \frac{d^3z_3}{dx^3} \end{vmatrix} = 0,$$

qui a pour intégrales

$$z = z_1, \quad z = z_2, \quad z = z_3,$$

a pour coefficients des fonctions abéliennes de ξ et de η , et par conséquent des fonctions algébriques de x et de y .

Posons maintenant

$$t_1 = \sqrt[3]{\frac{dF}{dX} \frac{dF_1}{dY} - \frac{dF_1}{dX} \frac{dF}{dY}},$$

$$t_2 = X t_1, \quad t_3 = Y t_1, \quad \xi = a \log X, \quad \eta = b \log Y,$$

d'où

$$t_1 = z_1 \sqrt[3]{ab} e^{-\frac{\xi}{3a} - \frac{\eta}{3b}}, \quad t_2 = z_1 \sqrt[3]{ab} e^{\frac{2\xi}{3a} - \frac{\eta}{3b}}, \quad t_3 = z_1 \sqrt[3]{ab} e^{-\frac{\xi}{3a} + \frac{2\eta}{3b}};$$

SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES PAR LE MOYEN DES FONCTIONS ABÉLIENNES. 99

l'équation linéaire

$$(2) \quad \begin{vmatrix} z & t_1 & t_2 & t_3 \\ \frac{dz}{dx} & \frac{dt_1}{dx} & \frac{dt_2}{dx} & \frac{dt_3}{dx} \\ \frac{d^2z}{dx^2} & \frac{d^2t_1}{dx^2} & \frac{d^2t_2}{dx^2} & \frac{d^2t_3}{dx^2} \\ \frac{d^3z}{dx^3} & \frac{d^3t_1}{dx^3} & \frac{d^3t_2}{dx^3} & \frac{d^3t_3}{dx^3} \end{vmatrix} = 0,$$

qui a pour intégrales

$$z = t_1, \quad z = t_2, \quad z = t_3,$$

a ses coefficients algébriques en x et en y .

Les fonctions abéliennes F et F_1 permettent donc d'intégrer une infinité d'équations différentielles linéaires du troisième ordre à coefficients algébriques, car l'équation (1) contient un paramètre arbitraire y et l'équation (2) en contient trois, a , b et y .

On pourrait se proposer de former toutes les équations à coefficients rationnels qui peuvent s'intégrer par ce procédé, mais ce problème nous entraînerait bien loin; je me bornerai donc à former les groupes de ces équations. Voici ce que j'entends par là.

Le groupe de l'équation proposée sera le groupe des substitutions linéaires que subissent les intégrales quand x décrit un contour quelconque, et celles de ces transformations qui correspondent à un contour infiniment petit décrit autour d'un point singulier formeront la base du groupe. On arrive ainsi aux résultats suivants :

Premier cas, équation (1). — Soient u_1 , u_2 , u_3 les trois intégrales, et, supposons qu'on ait convenablement choisi u_3 ; les opérations qui formeront la base du groupe G cherché seront de la forme

$$(u_1, u_2, u_3, \alpha_1 u_1 + \beta_1 u_2 + \gamma_1 u_3, \alpha_2 u_1 + \beta_2 u_2 + \gamma_2 u_3, \gamma_3 u_3).$$

S'il y a n points singuliers, on donnera à i successivement les valeurs 1, 2, ..., n .

Le groupe g , dérivé des opérations

$$(u_1, u_2, \alpha_1 u_1 + \beta_1 u_2, \alpha_2 u_1 + \beta_2 u_2),$$

sera d'ordre fini. Si, en combinant d'une certaine manière les opérations du groupe g , on obtient l'opération dite *unité*,

$$(u_1, u_2, u_1, u_2),$$



100 SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES PAR LE MOYEN DES FONCTIONS ABÉLIENNES.
en combinant de la même manière les opérations de G on obtiendra la substitution

$$(u_1, u_2, u_3, u_1 + \Gamma_k u_2, u_2 + \Gamma_k u_3, \Gamma_k u_3).$$

Le système des quantités

$$\frac{\Gamma_k}{\Gamma_k}, \frac{\Gamma_k}{\Gamma_k}$$

devra satisfaire à des conditions telles qu'elles représentent un système de périodes d'une certaine fonction abélienne. Telles sont les conditions auxquelles sont assujettis les groupes des équations (1), quand les coefficients de ces équations sont rationnels.

Second cas, équation (2). — Les opérations qui servent de base au groupe G cherché sont de la forme

$$(u_1, u_2, u_3, \alpha_i u_1, \beta_i u_2, \gamma_i u_3),$$

et les α_i , β_i et γ_i sont des quantités telles, que l'on puisse trouver deux nombres a et b de telle sorte que le système des nombres

$$a \log \frac{\alpha_i \beta_i \gamma_i}{\gamma_i \beta_i \alpha_i}, \quad b \log \frac{\beta_i \alpha_i \gamma_i}{\gamma_i \beta_i \alpha_i}, \\ \gamma_i i \pi, \quad \alpha_i, \\ 0, \quad \gamma_i i \pi$$

puisse représenter un système de périodes d'une certaine fonction abélienne.

Il va sans dire que, si, au lieu d'envisager des fonctions abéliennes de deux variables, on avait considéré des fonctions de p variables, on aurait intégré une infinité d'équations du $(p+1)^{\text{ème}}$ ordre à coefficients algébriques.

SUR L'INTÉGRATION ALGÈBRIQUE

DES

ÉQUATIONS LINÉAIRES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 97, p. 985-985 (5 novembre 1883).

M. Jordan, dans le *Journal de Crelle* (Bd 84) et dans les *Mémoires de l'Académie de Naples*, a montré comment on peut former les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire. Il resterait à faire voir qu'à l'aide de tout groupe fini on peut former une équation linéaire à coefficients rationnels et à intégrales algébriques. J'ai cherché à démontrer ce théorème dans une Note que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie au mois d'avril 1881; mais cette Note contient une faute de calcul qui en rend les résultats erronés; je prie donc l'Académie de vouloir bien la tenir pour non avenue jusqu'à ce que j'aie rectifié l'erreur qui y est contenue (1). Depuis, j'ai réussi à prouver qu'à tout groupe fini Γ on peut faire correspondre d'une infinité de manières un groupe fuchsien G auquel Γ est méridriquement isomorphe, qu'à ces deux groupes correspond toujours une équation linéaire à intégrales algébriques et que, si l'on pose $x=f(z)$, $f(z)$ étant une fonction fuchsienne engendrée par le groupe G, les intégrales de cette équation sont des fonctions fuchiennes engendrées par un sous-groupe g de G. Ainsi à un groupe d'ordre fini correspond, non pas une, mais une infinité d'équations à intégrales algébriques dont on peut même choisir arbitrairement les points singuliers.

Les fonctions fuchiennes engendrées par g sont des fonctions rationnelles de x et de y , x et y étant liés par la relation algébrique

$$(1) \quad \theta(x, y) = 0.$$

(1) Voir aux Notes.



dont le degré en y est m et dont le genre est p . Si γ est le groupe de cette équation algébrique, il est *une seule fois transitif*. Quant au genre p , il satisfait à la relation

$$(2) \quad 2p - 2 = m \left(n - 1 - \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1} - \dots - \frac{1}{x_n} \right),$$

n et les x étant des entiers plus grands que 1; ce qui montre que tous les sous-groupes g de genre p rentrent dans un nombre fini de types.

Il y a aussi un théorème concernant les intégrales abéliennes de première espèce, engendrées par l'équation (1), et qui tient à ce que le groupe de cette équation est une seule fois transitif.

On peut choisir un système fondamental de p intégrales de première espèce, de telle façon que leurs périodes normales soient des combinaisons linéaires à coefficients entiers des périodes normales de l'une d'entre elles.

Cela posé, voici la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction $F(x, y)$, rationnelle en x et en y et satisfaisant à une équation linéaire d'ordre k . Il faut qu'on puisse trouver m quantités

$$a_1, a_2, \dots, a_m$$

telles que, si l'on permute ces m lettres d'après les m substitutions du groupe γ et qu'on forme avec ces m permutations un déterminant Δ , tous les mineurs d'ordre $(m - k - 1)$ soient nuls à la fois.

J'ai fait voir que, si cela a lieu, ces quantités $a_1, a_2, \dots, a_m$ sont certaines périodes de certaines intégrales de première espèce convenablement choisies. Ainsi la condition pour qu'il y ait une fonction $F(x, y)$ qui satisfasse à une équation d'ordre k , c'est qu'il y ait certaines relations entre les périodes de ces intégrales de première espèce. Cette condition est toujours remplie pour $k \geq p$, car il suffit d'appliquer une remarque de M. Klein pour voir que la dérivée d'une intégrale de première espèce formée à l'aide de la relation (1) satisfait toujours à une équation linéaire d'ordre p à coefficients rationnels. Dans une prochaine Communication, j'indiquerai, si l'Académie veut bien le permettre, quels rapports ont ces relations entre les périodes avec la réduction des intégrales abéliennes qui a fait l'objet des remarquables travaux de M. Picard.

SUR L'INTÉGRATION ALGÈBRE

DES

ÉQUATIONS LINÉAIRES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 97, p. 1182-1191 (26 novembre 1883).

Lorsqu'il y a, entre la variable et l'intégrale générale d'une équation linéaire à coefficients rationnels, une relation algébrique, et que l'on forme à l'aide de cette relation des intégrales abéliennes de première espèce, les périodes de ces intégrales satisfont à certaines équations algébriques. On peut se demander si ces équations suffisent pour déterminer complètement ces périodes.

Sans aborder ce problème, très général et sans doute très compliqué, j'ai voulu étudier en particulier un exemple simple, et j'ai choisi la résolvante de Galois de l'équation modulaire que l'on rencontre dans la transformation du septième ordre des fonctions elliptiques (degré 168, genre 3). M. Klein a étudié à fond cette résolvante et il a fait voir que, si l'on forme les intégrales de première espèce correspondantes, leurs dérivées satisfont à une équation linéaire du troisième ordre.

J'ai choisi sept périodes, que j'appelle $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6, \varepsilon_7$ et entre lesquelles on a la relation suivante :

$$(1) \quad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 = 0.$$

Si l'on considère deux intégrales de première espèce et qu'on accentue les périodes de la seconde intégrale, on aura

$$(2) \quad \begin{aligned} & \varepsilon_1 \varepsilon'_1 - \varepsilon'_2 \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \varepsilon'_1 - \varepsilon'_3 \varepsilon_1 + \varepsilon_3 \varepsilon'_1 - \varepsilon'_4 \varepsilon_1 + \varepsilon_4 \varepsilon'_1 - \varepsilon'_5 \varepsilon_1 + \varepsilon_5 \varepsilon'_1 - \varepsilon'_6 \varepsilon_1 + \varepsilon_6 \varepsilon'_1 \\ & - \varepsilon'_7 \varepsilon_1 + \varepsilon_7 \varepsilon'_1 - \varepsilon'_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon'_2 - \varepsilon'_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon'_3 - \varepsilon'_3 \varepsilon_4 + \varepsilon_3 \varepsilon'_4 - \varepsilon'_4 \varepsilon_5 + \varepsilon_4 \varepsilon'_5 - \varepsilon'_5 \varepsilon_6 + \varepsilon_5 \varepsilon'_6 - \varepsilon'_6 \varepsilon_7 + \varepsilon_6 \varepsilon'_7 - \varepsilon'_7 \varepsilon_1 = 0. \end{aligned}$$

Nous pourrions choisir une intégrale de première espèce, de telle sorte que

$$\varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0,$$



et alors nous poserons

$$t_1 = x, \quad t_2 = y, \quad t_3 = z.$$

On peut former par divers procédés un grand nombre de relations entre ces périodes; mais trois seulement sont distinctes, à savoir

$$\begin{aligned} x(x+y+z) &= y, \\ x^2+2xy+y^2-yz &= z, \\ y^2+yz+z^2+x+2y+z+1 &= 0. \end{aligned}$$

Ces trois équations admettent les huit solutions suivantes

$$\begin{aligned} x=1, \quad y=T=\tau+\tau^2+\tau^3, \quad z=-1, \\ x=-1, \quad y=T'=\tau^2+\tau^3+\tau^4, \quad z=-1, \\ x=\tau^m, \quad y=\tau^{3m}+\tau^{4m}+1, \quad z=\tau^{4m}-\tau^m-1, \end{aligned}$$

où

$$\tau = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}, \quad m=1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Les huit solutions conviennent et correspondent à huit systèmes de périodes différentes, satisfaisant aux conditions (1) et (2).

Il existe aussi une intégrale de première espèce dont les périodes sont simplement

$$t_1 = \tau, \quad t_2 = \tau^2, \quad t_3 = \tau^3, \quad t_4 = \tau^4, \quad t_5 = \tau^5, \quad t_6 = \tau^6, \quad t_7 = 1.$$

Considérons en particulier l'intégrale u_1 , dont les sept périodes sont

$$1, \quad 0, \quad 0, \quad 1, \quad T, \quad -1, \quad -T-1.$$

Elle n'a que deux périodes distinctes, 1 et T; les procédés de M. Picard permettent donc de la ramener aux intégrales elliptiques. Mais on démontre que l'on peut trouver six intégrales

$$u_2, \quad u_3, \quad u_4, \quad u_5, \quad u_6, \quad u_7$$

dont les sept périodes sont les mêmes que celles de u_1 , sauf que ces dernières ont subi une permutation circulaire; ainsi les périodes de u_2 seront

$$0, \quad 0, \quad 1, \quad T, \quad -1, \quad -T-1, \quad 1;$$

celles de u_3 seront

$$0, \quad 1, \quad T, \quad -1, \quad -T-1, \quad 1, \quad 0, \quad \dots$$

Cela posé, l'intégrale

$$\Lambda_1 u_1 + \Lambda_2 u_2 + \dots + \Lambda_7 u_7,$$

où les Λ sont des nombres entiers quelconques, n'aura que deux périodes distinctes et sera réductible aux intégrales elliptiques.

Nous avons donc un troisième exemple de cette circonstance déjà signalée deux fois par M. Picard, qu'il existe des systèmes d'intégrales abéliennes où l'on trouve une infinité d'intégrales réductibles aux intégrales elliptiques (*Comptes rendus*, t. 93, p. 1126; 1881).