THÉORIE DES GROUPES FUCHSIENS [1].

Acta mathematica, t. I, p. 1-62, 1882.

Dans une série de Mémoires [2] présentés à l'Académie des Sciences, j'ai défini certaines fonctions nouvelles que j'ai appelées fuchsiennes, kleinéennes, thétafuchsiennes et zétafuchsiennes. De même que les fonctions elliptiques et abéliennes permettent d'intégrer les différentielles algébriques, de même les nouvelles transcendantes permettent d'intégrer les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. J'ai résumé succinctement les résultats obtenus dans une Note insérée aux *Mathematische Annalen* [3]. Ayant l'intention de les exposer en détail, je commencerai, dans le présent travail, par étudier les propriétés des groupes fuchsiens, me réservant de revenir plus tard sur leurs conséquences au point de vue de la théorie des fonctions.

I. — Substitutions réelles.

Soient z une variable imaginaire définie par la position d'un point dans un plan; t une fonction imaginaire de cette variable définie par la relation

$$t = \frac{az+b}{cz+d}. \tag{1}$$

Je supposerai, ce qui ne restreint pas la généralité, qu'on a

$$ad - bc = 1.$$

Si le point z décrit deux arcs de courbe se coupant sous un certain angle α, le point t décrira de son côté deux arcs de courbe se coupant sous le même

[1] Terminé (au plus tard) juillet 1882; imprimé septembre 1882. (N. E. N.)
[2] Ce tome, p. 1-49. (N. E. N.)
[3] Ce tome, p. 92-105. (N. E. N.)

angle α, c'est-à-dire que la substitution $\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$ [1] *conserve les angles*.

La fonction $\frac{az+b}{cz+d}$ est en effet monogène.

Si z décrit un cercle, t décrit également un cercle; c'est-à-dire que la substitution $\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$ change les cercles en cercles.

Enfin si z_1, z_2, z_3, z_4 sont quatre valeurs de z et si t_1, t_2, t_3, t_4 sont les valeurs correspondantes de t, on a

$$\frac{t_1-t_2}{t_1-t_3}\frac{t_4-t_3}{t_4-t_2} = \frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}\frac{z_4-z_3}{z_4-z_2}. \tag{2}$$

Il existe en général deux valeurs de z qui sont égales aux valeurs correspondantes de t; c'est ce qu'on appelle les *points doubles* de la substitution (1).

Si

$$(a+d)^2 \gtrless 4,$$

les points doubles sont distincts; et si nous les appelons α et β, la relation (1) peut s'écrire

$$\frac{t-\alpha}{t-\beta} = K\frac{z-\alpha}{z-\beta}, \tag{3}$$

K étant une constante que j'appellerai *multiplicateur*.

Si au contraire

$$a+d = \pm 2$$

les points doubles se confondent et l'on a

$$\alpha = \beta.$$

La relation (1) peut alors s'écrire

$$\frac{1}{t-\alpha} = \frac{1}{z-\alpha} \pm c. \tag{4}$$

[1] J'emploierai dans ce qui suit les notations de M. Jordan.
La substitution $[z, f(z)]$ ou bien $[x, y; f(x,y), \varphi(x,y)]$ sera l'opération qui consiste à changer z en $f(z)$ ou bien celle qui consiste à changer x en $f(x,y)$ et y en $\varphi(x,y)$. La substitution inverse de $[z, f(z)]$ sera $[f(z), z]$; le produit de deux substitutions sera l'opération qui consiste à faire successivement ces deux substitutions.
Un système de substitutions formera un *groupe* si la substitution inverse de toute substitution du système et le produit de deux substitutions quelconques du système font également partie du système.
Un groupe A est *isomorphe* à un autre groupe B si à toute substitution de B correspond une et une seule substitution de A et de telle sorte qu'au produit de deux substitutions de B correspond le produit des deux substitutions correspondantes de A.
Si B est également isomorphe à A, les deux groupes sont isomorphes entre eux et l'isomorphisme est *holoédrique*; autrement il est *mériédrique*.

Telles sont les principales propriétés des substitutions linéaires $\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$.

Mais nous allons faire une hypothèse de plus; nous supposerons que les coefficients a, b, c, d sont réels. Je dirai alors que la substitution (1) est une *substitution réelle*.

Il en résulte que la partie imaginaire de t est positive, nulle ou négative selon que la partie imaginaire de z est elle-même positive, nulle ou négative; c'est-à-dire que la substitution (1) conserve l'axe des parties réelles que j'appellerai désormais X et change également en elle-même la partie du plan qui est au-dessus de cet axe.

Si z décrit un cercle ayant son centre sur X, t décrira également un cercle ayant son centre sur X. Si z_1 et z_2 sont deux quantités imaginaires conjuguées, les valeurs correspondantes t_1 et t_2 de t seront aussi imaginaires conjuguées.

Si α et β sont deux valeurs de z, γ et δ les valeurs correspondantes de t, si α', β', γ', δ' sont les valeurs conjuguées de α, β, γ, δ, on aura, en vertu de la relation (2),

$$\frac{\alpha-\alpha'}{\alpha-\beta'}\frac{\beta-\beta'}{\beta-\alpha'}=\frac{\gamma-\gamma'}{\gamma-\delta'}\frac{\delta-\delta'}{\delta-\gamma'}.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$\frac{\alpha-\alpha'}{\alpha-\beta'}\frac{\beta-\beta'}{\beta-\alpha'}=(\alpha,\beta),$$

cette relation s'écrira

$$(\alpha,\beta)=(\gamma,\delta). \tag{5}$$

Les substitutions réelles ont été étudiées par différents géomètres et en particulier par M. Klein dans ses recherches sur les fonctions modulaires; il les a partagées en substitutions elliptiques, paraboliques et hyperboliques.

Les substitutions elliptiques sont celles pour lesquelles

$$(a+d)^2<4.$$

Les points doubles α et β sont imaginaires conjugués; l'un d'eux est par conséquent au-dessus de l'X, l'autre au-dessous; la relation (1) peut se mettre sous la forme (3) et la constante K est une quantité imaginaire ou négative dont le module est l'unité. Si z décrit un cercle passant par α et β, t décrira également un cercle passant par α et β et coupant le premier sous un angle égal à l'argument de K.

La substitution (1) change en elle-même toute circonférence qui, ayant son centre sur le prolongement de $\alpha\beta$, coupe ce segment harmoniquement.

Les substitutions paraboliques sont celles pour lesquelles

$$(a+d)^2=4.$$

Les points doubles se confondent en un seul qui est situé sur X. La relation (1) se met sous la forme (4) et de telle sorte que α soit réel. Si z décrit un cercle passant par α, t décrira également un cercle passant par α et tangent au premier. La substitution (1) n'altère pas les circonférences qui sont tangentes à X en α. Soit C une pareille circonférence; soit m_0 un point de cette circonférence C, la substitution (1) le changera en un autre point m_1 de cette même circonférence; elle changera m_1 en un autre point m_2 de C, m_2 en un autre point m_3, etc. Quand $\varkappa$ tendra vers l'infini, le point $m_\varkappa$ se rapprochera indéfiniment de α. Soit de même m_{-1} le point que la substitution (1) change en m_0, m_{-2} le point que cette substitution change en m_{-1}, etc. Quand $\varkappa$ tendra vers l'infini, le point $m_{-\varkappa}$ se rapprochera aussi indéfiniment de α.

J'appelle $C_\varkappa$ le cercle qui a son centre sur X et qui passe par α et par $m_\varkappa$; qui, par conséquent, coupe orthogonalement le cercle C en α et en $m_\varkappa$. Il est clair que la substitution (1) changera C_{-1} en C_0, C_0 en C_1, C_1 en C_2, etc., et, en général, $C_\varkappa$ en $C_{\varkappa+1}$. De plus, si $\varkappa$ est infini positif ou négatif, $C_\varkappa$ se réduit à un cercle de rayon infiniment petit. C'est dire que si l'on applique une infinité de fois la substitution (1), ou la substitution inverse à un cercle passant par α et ayant son centre sur X, le rayon de ce cercle devient infiniment petit.

Il en résulte qu'un arc de courbe de longueur finie, ne coupant pas X, ne pourra rencontrer un nombre infini de cercles $C_\varkappa$, c'est-à-dire de transformés successifs d'un cercle C_0 ayant son centre sur X et passant par α.

Les substitutions hyperboliques sont celles pour lesquelles

$$(a+d)^2>4.$$

Les points doubles α et β sont distincts et situés sur X. La relation (1) se met sous la forme (3) et de telle sorte que K soit réel et positif. Je puis de plus toujours supposer

$$K>1.$$

Si z décrit un cercle passant par α ou par β, t décrira également un cercle passant par α ou par β et tangent au premier. La substitution (1) n'altère pas les circonférences qui passent par α et β.

J'appelle, comme plus haut, C une circonférence passant par α et β, et

$$\ldots\ m_{-2},\ m_{-1},\ m_0,\ m_1,\ m_2,\ \ldots$$

une série de points tels que la substitution (1) change $m_\varkappa$ en $m_{\varkappa+1}$. Il est clair

que le point $m_\varkappa$ se rapprochera indéfiniment de β quand $\varkappa$ tendra vers $+\infty$, et de α quand $\varkappa$ tendra vers $-\infty$.

J'appelle aussi $C_\varkappa$ le cercle qui, ayant son centre sur X, passe par α et par $m_\varkappa$. Lorsque $\varkappa$ tendra vers $+\infty$, $C_\varkappa$ se rapprochera indéfiniment du cercle décrit sur $\alpha\beta$ comme diamètre; lorsque $\varkappa$ tendra vers $-\infty$, le rayon de $C_\varkappa$ diminuera indéfiniment. C'est dire que, si l'on applique la substitution (1) une infinité de fois à un cercle C_0 passant par α et ayant son centre sur X, on obtiendra à la limite un cercle ayant $\alpha\beta$ pour diamètre. Si l'on applique une infinité de fois à C_0 la substitution inverse, le rayon limite sera nul.

Si, au contraire, on appliquait une infinité de fois la substitution (1) à un cercle passant par β et ayant son centre sur X, le rayon limite serait nul, tandis qu'en lui appliquant une infinité de fois la substitution inverse, on obtiendrait à la limite le cercle qui a $\alpha\beta$ pour diamètre.

Il résulte de là qu'un arc de courbe de longueur finie, ne coupant pas X, rencontrera un nombre infini de cercles $C_\varkappa$, c'est-à-dire de transformés successifs du cercle C_0, ou bien un nombre fini de ces transformés, selon qu'il rencontrera ou ne rencontrera pas le cercle qui a $\alpha\beta$ pour diamètre.

Si l'on a

$$(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta),$$

il existe une substitution réelle (1) qui change α en γ et β en δ. Cette substitution est définie par la relation

$$\frac{t-\gamma}{t-\delta}\frac{\gamma'-\delta}{\gamma'-\gamma} = \frac{z-\alpha}{z-\beta}\frac{\alpha'-\beta}{\alpha'-\alpha}.$$

Il est une autre propriété des substitutions réelles sur laquelle je voudrais attirer l'attention; en différentiant la relation (1) on trouve

$$\frac{dt}{dz} = \frac{1}{(cz+d)^2}.$$

Si, de plus, j'appelle y la partie imaginaire de z, Y celle de t, je trouve

$$\operatorname{mod}\frac{dt}{dz} = \frac{Y}{y}.$$

II. — Figures congruentes.

Je dirai que deux figures sont *congruentes* quand l'une est la transformée de l'autre par une substitution *réelle*. Les substitutions réelles formant un groupe, il est clair que deux figures congruentes à une même troisième sont congruentes entre elles.

(1) Il faut que α et γ (et par conséquent β et δ) soient situés sur le même côté de X; s'il n'en est pas ainsi, le déterminant $ad-bc$ sera négatif. N. E. N.

Je puis énoncer tout d'abord les théorèmes suivants :

Dans deux figures congruentes les angles homologues sont égaux.

Si, dans deux figures congruentes, le point γ est homologue de α et le point δ homologue de β, on a

$$(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta). \tag{1}$$

Cette relation peut prendre une autre forme.

Considérons, en effet, les quantités α, β et leurs conjuguées α', β' de telle sorte que

$$(\alpha, \beta) = \frac{\alpha-\alpha'}{\alpha-\beta'}\frac{\beta-\beta'}{\beta-\alpha'}.$$

Les quatre points α, β, α', β' sont sur un même cercle qui a son centre sur X. Supposons de plus que α et β soient tous deux au-dessus de x. Ce cercle coupe X en deux points que j'appelle h et k; h sera celui de ces deux points qui est sur l'arc $\beta\beta'$, k celui de ces deux points qui est sur l'arc $\alpha\alpha'$. Je pose

$$[\alpha, \beta] = \frac{\alpha-h}{\alpha-k}\frac{\beta-k}{\beta-h}.$$

$[\alpha, \beta]$ est essentiellement réel, positif et plus grand que 1. De plus, on a

$$(\alpha, \beta) = \frac{i[\alpha, \beta]}{([\alpha, \beta]+1)^2}.$$

Si γ est un point de l'arc de cercle $\alpha\beta$, on a

$$[\alpha, \gamma][\gamma, \beta] = [\alpha, \beta].$$

Il est clair maintenant qu'en employant cette notation nouvelle, on peut mettre la relation (1) sous la forme

$$[\alpha, \beta] = [\gamma, \delta].$$

Voyons ce qui se passera quand α et β seront infiniment voisins.

Soit

$$z = x + y\sqrt{-1},$$
$$dz = dx + dy\sqrt{-1},$$
$$\operatorname{mod} dz = \sqrt{dx^2+dy^2}.$$

On aura, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur,

$$[z, z+dz] = 1 + \frac{\operatorname{mod} dz}{y}$$

ou

$$\mathrm{L}[z, z+dz] = \frac{\operatorname{mod} dz}{y}.$$

On voit ainsi que le logarithme népérien de $[z, z+dz]$ est proportionnel au module de dz et indépendant de son argument.

L'intégrale

$$\int \frac{\operatorname{mod} dz}{y},$$

prise le long d'un arc de courbe quelconque, s'appellera la L de cette courbe.

L'intégrale double

$$\iint \frac{dx\,dy}{y^2},$$

prise à l'intérieur d'une aire plane quelconque, sera la S de cette aire.

D'après ce qui précède, deux arcs de courbe congruents ont même L; deux aires congruentes ont même S. La L d'un arc de cercle $\alpha\beta$, ayant son centre sur X, sera le logarithme népérien de $[\alpha, \beta]$.

Je ne puis passer sous silence le lien qui rattache les notions précédentes à la géométrie non euclidienne de Lobatschewsky.

Supposons que l'on convienne d'enlever aux mots *droite*, *longueur*, *distance*, *surface* leur signification habituelle, d'appeler droite tout cercle qui a son centre sur X, longueur d'une courbe ce que nous venons d'appeler sa L, distance de deux points la L de l'arc de cercle qui unit ces deux points en ayant son centre sur X, et enfin surface d'une aire plane ce que nous appelons sa S.

Supposons de plus que l'on conserve aux mots *angle* et *cercle* leur signification, mais en convenant d'appeler *centre d'un cercle* le point qui est à une distance constante de tous les points du cercle (d'après le sens nouveau du mot *distance*) et rayon du cercle cette distance constante.

Si l'on adopte ces dénominations, *les théorèmes de Lobatschewsky sont vrais*, c'est-à-dire que tous les théorèmes de la géométrie ordinaire s'appliquent à ces nouvelles quantités, sauf ceux qui sont une conséquence du postulatum d'Euclide.

Cette terminologie m'a rendu de grands services dans mes recherches, mais je ne l'emploierai pas ici pour éviter toute confusion.

III. — Groupes discontinus.

Envisageons une infinité de substitutions de la forme

$$\left(z, \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}\right) \tag{1}$$

qui, en posant pour abréger

$$f_i(z) = \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i},$$

peuvent s'écrire sous la forme

$$[z, f_i(z)].$$

Pour abréger encore, je dirai simplement la substitution

$$f_i(z).$$

Je suppose que i est un indice qui varie de zéro à l'infini.

Je suppose de plus

$$a_0 = d_0 = 1, \quad b_0 = c_0 = 0,$$

d'où

$$f_0(z) = z.$$

Je suppose enfin que ces substitutions forment un groupe.

Je vais définir certains symboles dont je serai amené à faire usage dans la suite. Je poserai

$$f_i^2(z) = f_i[f_i(z)], \quad f_i^3(z) = f_i[f_i^2(z)], \quad \ldots, \quad f_i^m(z) = f_i[f_i^{m-1}(z)], \quad \ldots.$$

Je définirai de même, par une extension toute naturelle, le symbole $f_i^m(z)$ quand m sera nul ou négatif. Je poserai

$$f_i^0(z) = z, \qquad z = f_i^{-1}[f_i(z)], \qquad f_i^{-m}(z) = f_i^{-1}[f_i^{-m+1}(z)].$$

Si $f_i(z)$ est une des substitutions du groupe envisagé, toutes les substitutions qui sont comprises dans la formule générale

$$f_i^m(z) \tag{2}$$

feront également partie du groupe.

Si $f_2(z)$ est une substitution du groupe non comprise dans la formule (2), toutes les substitutions de la forme

$$f_1^{\alpha}(f_2^{\beta}(f_1^{\gamma}(f_2^{\delta}(\ldots(f_1^{\lambda}(f_2^{\mu}(z))\ldots)) \tag{3}$$

appartiendront au groupe.

Si maintenant $f_3(z)$ est une substitution du groupe qui ne soit pas com-

prise dans la formule (3), c'est-à-dire qui ne soit pas une combinaison de f_1 et de f_2, si f_3 est une substitution du groupe qui ne soit pas une combinaison de f_1, f_2 et f_3, etc., si enfin f_p est une substitution qui ne soit pas une combinaison de $f_1, f_2, \ldots, f_{p-1}$, les substitutions comprises dans la formule générale

$$f_{\alpha_1}^{\beta_1}(f_{\alpha_2}^{\beta_2}(\ldots(f_{\alpha_n}^{\beta_n}(z))\ldots)) \tag{4}$$

(où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des indices qui peuvent être $1, 2, 3, \ldots, p-1$ ou p, et où $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ sont des entiers positifs ou négatifs) feront également partie du groupe.

Il peut se faire qu'on ait épuisé ainsi toutes les substitutions du groupe envisagé, de telle sorte que toute substitution de ce groupe soit une combinaison de $f_1, f_2, \ldots, f_p$. On dit alors que le groupe est *dérivé* de $f_1, f_2, \ldots, f_p$, ou que $f_1, f_2, \ldots, f_p$ sont un système de *substitutions fondamentales* du groupe. Il est évident qu'un groupe peut avoir une infinité de systèmes de substitutions fondamentales; mais *un seul de ces systèmes suffit pour déterminer complètement le groupe*.

On peut concevoir aussi des groupes tels qu'il soit impossible de les faire dériver d'un nombre fini de substitutions fondamentales. Mais nous les laisserons systématiquement de côté.

Soit donc un groupe G dérivé de p substitutions fondamentales $f_1, f_2, \ldots, f_p$ de telle sorte que toutes ses substitutions soient de la forme (4).

J'appellerai *exposant* d'une substitution de ce groupe la somme des modules des nombres entiers positifs ou négatifs $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$.

Il peut se faire que les diverses substitutions contenues dans la formule (4) ne soient pas toutes distinctes et qu'on ait identiquement

$$f_{\alpha_1}^{\beta_1}(f_{\alpha_2}^{\beta_2}(\ldots f_{\alpha_n}^{\beta_n}(z))\ldots) = f_{\gamma_1}^{\delta_1}(f_{\gamma_2}^{\delta_2}(\ldots f_{\gamma_n}^{\delta_n}(z)\ldots)). \tag{5}$$

La relation (5) peut toujours se mettre sous la forme

$$f_{\alpha_1}^{\beta_1}(f_{\alpha_2}^{\beta_2}(\ldots f_{\alpha_n}^{\beta_n}(z)\ldots)) = z. \tag{6}$$

Les α et les β ont ici la même signification que dans la formule (4).

Les relations de la forme (6) pourront, en général, être toutes regardées comme les conséquences d'un certain nombre d'entre elles que nous appellerons *relations fondamentales* et qui seront seules réellement distinctes.

Un groupe H sera isomorphe à G s'il est dérivé d'un même nombre de substitutions fondamentales, et si l'on a entre ses substitutions fondamentales les mêmes relations fondamentales. Si, entre les substitutions de H, il n'y a pas d'autre relation de la forme (6) qu'entre celles de G, l'isomorphisme est réciproque et par conséquent *holoédrique;* autrement il est *mériédrique*.

Par suite des relations (6), une même substitution peut être mise d'une infinité de manières sous la forme (4); de sorte que la définition donnée plus haut de *l'exposant d'une substitution* laisse subsister une certaine ambiguïté. Nous appellerons alors exposant d'une substitution *la plus petite* valeur que peut prendre la somme des modules de $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ quand on écrit cette substitution sous la forme (4).

Ici il y a lieu de faire une distinction importante entre les différentes sortes de groupes formés de substitutions réelles. Nous devons d'abord laisser de côté les groupes qui ne comprennent qu'un nombre fini de substitutions et qui ont déjà été étudiés à fond par plusieurs géomètres. Mais si les substitutions d'un groupe sont en nombre infini, on peut faire deux hypothèses différentes :

On peut supposer qu'il est possible de choisir dans le groupe une substitution

$$(z, f_i(z))$$

telle que $f_i(z)$ diffère infiniment peu de z (et cela quel que soit z), c'est-à-dire que le groupe contient une substitution infinitésimale.

On peut supposer aussi que le groupe ne contient pas de pareille substitution.

Les groupes de la première espèce seront *continus*, ceux de la seconde *discontinus*.

Il ne peut exister de fonction uniforme analytique de z qui reste inaltérée par les substitutions d'un groupe continu, car cette fonction devrait reprendre la même valeur en des points infiniment voisins les uns des autres et, par conséquent, avoir une valeur constante. Aussi les groupes continus n'ont-ils aucun intérêt pour nous et nous réserverons le nom de *groupes fuchsiens* aux groupes discontinus formés de substitutions réelles.

Si le groupe G est discontinu, il est clair qu'on pourra diviser le plan, ou une partie du plan, en une infinité de régions jouissant des propriétés suivantes :

Chacune d'elles correspondra à l'une des substitutions du groupe G. Celle qui correspondra à la substitution

$$(z, f_i(z))$$

s'appellera la région R_i, et, par conséquent, celle qui correspondra à la substitution

$$(z, f_0(z)) \quad \text{ou} \quad (z, z)$$

s'appellera R_0.

Quand z sera intérieur à la région R_0, $f_i(z)$ devra être intérieur à R_i. En d'autres termes, R_i sera la transformée de R_0 par la substitution

$$(z, f_i(z)).$$

Supposons maintenant que z soit intérieur à la région R_k, correspondant à

$$(z, f_k(z));$$

$f_{ki}^{-1}(z)$ devra être intérieur à R_0 et, par conséquent, $f_i(f_k^{-1}(z))$ sera intérieur à R_i.

Dire que R_i est transformée de R_0 par une substitution réelle, c'est dire que ces régions sont congruentes et, par conséquent, que toutes les régions R sont congruentes entre elles.

Pour me servir d'une expression très usitée de l'autre côté du Rhin, je dirai que la division d'un plan en une infinité de régions est *régulière* lorsqu'en déformant ces régions d'une manière continue on pourra faire coïncider le nouveau mode de division avec l'ancien, de telle façon que chaque région de la nouvelle division vienne coïncider avec une région de l'ancienne, et qu'une région donnée quelconque du nouveau mode de division vienne coïncider avec une région *donnée également quelconque* de l'ancien mode. En ce qui concerne le mode de division qui nous occupe, il est clair que, si l'on applique aux différentes régions R la substitution

$$[z, f_i(z)],$$

chacune des régions R se changera en une autre région R, et R_0 se changera en R_i. C'est dire que la division du plan sera régulière.

Le problème de la recherche des groupes fuchsiens se ramène donc au suivant : *Subdiviser d'une façon régulière le plan, ou une partie du plan, en une infinité de régions toutes congruentes entre elles.*

Deux régions seront dites *limitrophes* lorsqu'elles confineront entre elles tout le long d'un arc de courbe qui leur servira de frontière commune.

Soit R_p une région limitrophe de R_0 tout le long d'un arc AB de son périmètre; cet arc AB sera *l'un des côtés de* R_0. Mais on peut supposer que ce ne soit pas le plan tout entier, mais une partie du plan qui ait été divisée en une

infinité de régions R, toutes congruentes entre elles. Dans ce cas, R_0 pourra confiner tout le long d'un arc CD de son périmètre à la partie du plan qui n'aura pas été subdivisée en régions R. Cet arc CD sera encore *un des côtés* de R_0. Les côtés tels que AB seront ceux de la première sorte, les côtés tels que CD ceux de la deuxième sorte.

Je supposerai toujours que les côtés de la deuxième sorte sont des segments de l'axe X.

Je justifie en quelques mots cette hypothèse. Si l'on a divisé une partie du plan en une infinité de régions R, et si la région R_0 est contiguë à la partie du plan non divisée, on pourra toujours étendre la division à une portion plus grande du plan. Je l'étendrai jusqu'à ce que R_0 cesse d'être contiguë à la partie non divisée, ou jusqu'à ce que R_0 atteigne l'axe X. Cet aperçu suffira, je pense, pour faire comprendre les raisons qui me permettent d'adopter cette hypothèse.

J'appellerai sommets de R_0 les extrémités de ses côtés et je serai conduit à envisager : 1° les sommets situés au-dessus de X; 2° les sommets situés sur X et séparant deux côtés de la première sorte; 3° les sommets situés sur X et séparant un côté de la première sorte et un de la deuxième sorte. J'appellerai ces différents sommets, sommets de la première, de la deuxième ou de la troisième catégorie.

Les points

$$z, f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_i(z), \quad \ldots$$

seront dits *correspondants*.

Quand le point z est à l'intérieur de R_0, tous les points $f_i(z)$ seront dans des régions R_i différentes de R_0. Donc il ne peut y avoir dans l'intérieur de R_0 deux points correspondants, et un point intérieur à R_0 ne peut être non plus correspondant d'un point du périmètre de cette région.

Au contraire, un point situé sur l'un des côtés de R_0, sur λ_p par exemple, appartient à la fois à deux régions R_0 et R_p. Si le point z est sur λ_p, c'est-à-dire sur le périmètre de R_p, le point $f_p^{-1}(z)$ sera sur le périmètre de R_0 sur un côté que j'appellerai λ'_p et qui séparera R_0 d'une région R'_p correspondant à la substitution

$$(z, f_p^{-1}(z)).$$

Les côtés λ_p et λ'_p seront dits *conjugués*.

On peut tirer de là les conclusions suivantes : 1° Les côtés de la première

sorte sont en nombre pair et conjugués deux à deux; 2° deux côtés conjugués sont congruents; 3° les points du périmètre de R_0, situés au-dessus de l'axe X (sans parler des sommets dont nous nous occuperons plus loin), sont correspondants deux à deux.

Une convention spéciale est nécessaire pour faire rentrer dans le cas général un cas particulier qui se présentera quelquefois.

Il pourrait arriver qu'on eût identiquement

$$f_p(z) = f_p^{-1}(z) \quad \text{ou} \quad z = f_p[f_p(z)].$$

Alors R_p coïnciderait avec R'_p, λ_p avec λ'_p. Mais, dans ce cas, la substitution

$$(z, f_p(z))$$

est elliptique et la relation (1) (§ I) pourrait se mettre sous la forme (3) (§ I), de telle façon que

$$K = -1.$$

La substitution $(z, f_p(z))$ n'altérant pas le côté λ_p, celui-ci devra passer par le point α (point double de la substitution) et se partager en deux moitiés congruentes entre elles.

Cela posé, on pourra regarder le point α comme un sommet et les deux moitiés du côté λ_p comme deux côtés distincts, conjugués entre eux; on est ainsi ramené au cas général.

Chaque sommet appartient à deux ou plusieurs régions différentes; il en résulte que plusieurs sommets de R_0 peuvent être correspondants. Je dirai que les sommets correspondants appartiennent à un même cycle.

D'après ce qui précède, le nombre des côtés de la première sorte est pair; soit $2n$ ce nombre. Ces $2n$ côtés seront conjugués deux à deux. Soient λ_1, λ_2, ..., λ_n n de ces côtés; λ_{n+1}, λ_{n+2}, ..., λ_{2n} les n autres côtés conjugués des premiers, de telle sorte que les côtés λ_p, λ_{n+p} soient conjugués. Soient R_p la région qui est limitrophe de R_0, le long du côté λ_p, et

$$(z, f_p(z))$$

la substitution correspondante. De cette façon, on aura

$$f_{n+p}(z) = f_p^{-1}(z).$$

Il est aisé de voir que, si l'on sort d'une région R_i correspondant à

$$(z, f_i(z)),$$

par le côté correspondant à λ_p, on entre dans une région correspondant à la substitution

$$(z, f_i[f_p(z)]).$$

Rien n'est plus facile maintenant que de trouver quelle est la substitution qui correspond à une région donnée R_{β_ν}. Soient A un point intérieur à R_0, B un

Fig. 1.

point intérieur à R_{β_ν}; joignons ces deux points par un arc quelconque AMB. Si je suppose que cet arc AMB parte de la région R_0, qu'il en sorte par le côté λ_{α_1} pour entrer dans la région R_{α_1}, puis qu'il sorte de R_{α_1} par le côté correspondant à λ_{α_2} pour entrer dans la région R_{β_2}, qu'il sorte de R_{β_2} par le côté correspondant à λ_{α_2} pour entrer dans R_{β_3}, etc., et enfin qu'il sorte de $R_{\beta_{\nu-1}}$ par le côté correspondant à λ_{α_ν} pour entrer dans R_{β_ν}; la substitution qui correspondra à cette région R_{β_ν} sera

$$[z, f_{\alpha_1}(f_{\alpha_2}(f_{\alpha_3}) \ldots (f_{\alpha_{\nu-1}}(f_{\alpha_\nu}(z)\ldots)].$$

Dans cette expression $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ désignent des indices qui peuvent être $1, 2, \ldots$ ou $2n$.

Donc toute substitution qui correspond à une région que l'on peut atteindre en partant de R_0 et en franchissant un nombre fini de côtés est une combinaison de (z, f_1), (z, f_2), ..., (z, f_n). Nous laisserons de côté tous les groupes pour lesquels on ne pourrait pas passer d'une région à l'autre en franchissant un nombre fini de côtés. Alors toute substitution sera une combinaison de

$$(z, f_1), \quad (z, f_2), \quad \ldots, \quad (z, f_n). \tag{7}$$

Comment trouverons-nous les relations de la forme (6) qui auront lieu entre les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$?

Pour cela il suffira évidemment de rechercher comment on peut exprimer par une combinaison des substitutions (7) la substitution

$$(z, z) \quad \text{ou} \quad (z, f_0(z))$$

qui correspond à R_0. On appliquera la règle exposée plus haut, c'est-à-dire qu'on décrira un contour fermé quelconque AMA passant par un point A intérieur à R_0. Si ce contour traverse successivement des régions R_0, R_{α_1}, R_{β_1}, ..., $R_{\beta_{n-1}}$, $R_{\beta_n} = R_0$ et en sort respectivement par les côtés correspondants à λ_{α_1}, λ_{α_2}, ..., λ_{α_n}, la substitution qui correspondra à R_0 sera

$$[z, f_{\alpha_1}(f_{\alpha_2}(\ldots(f_{\alpha_n}(z)\ldots))],$$

ce qui permettra d'écrire

$$z = f_{\alpha_1}(f_{\alpha_2}(\ldots(f_{\alpha_n}(z)\ldots)).$$

Des relations (6) ainsi obtenues, toutes ne sont pas fondamentales. Pour obtenir les relations fondamentales, il suffit de décrire des contours fermés infinitésimaux autour de chacun des sommets de R_0.

Puisqu'on trouve ainsi toutes les relations de la forme (6), les substitutions (7) sont généralement indépendantes et par conséquent forment un système de substitutions fondamentales du groupe envisagé.

On voit de plus que l'exposant d'une substitution f_i est le nombre minimum de côtés qu'il faut franchir pour passer de R_0 dans la région qui correspond à la substitution f_i.

Outre les groupes fuchsiens ou groupes discontinus formés de substitutions réelles, j'ai été conduit à envisager les groupes discontinus formés de substitutions linéaires quelconques et que j'ai appelés *groupes kleinéens*. Je n'en parlerai pas dans le présent travail, me réservant d'exposer dans un Mémoire spécial les résultats que j'ai obtenus à leur égard.

IV. — Polygones générateurs.

Les régions R_i sont définies par la condition que chacune d'elles ne contient *qu'un seul* point correspondant à un point z donné. Mais cette condition ne suffit pas pour les définir complètement. En effet, si l'on se donne un groupe fuchsien G, il y aura une infinité de manières de subdiviser le plan de telle sorte que dans chaque région il n'y ait qu'un point correspondant à un point z donné.

Au contraire si l'on se donne la décomposition du plan en une infinité de régions telles que R, le groupe G sera parfaitement déterminé.

Donnons-nous un groupe G et envisageons les diverses décompositions du

plan en régions R_i qui correspondent à ce groupe. Ces décompositions sont en nombre infini. Comment de l'une d'elles pourrons-nous déduire toutes les autres? Soient S_0 une portion de la région R_0, S_i la portion correspondante de la région R_i. Choisissons, parmi les substitutions du groupe G, l'une quelconque d'entre elles

$$(z, f_p(z)).$$

Soit i_p l'indice de la substitution

$$[z, f_p(f_i(z)]$$

de telle sorte que

$$f_p[f_i(z)] = f_{i_p}(z).$$

Des diverses régions R_i je retranche la portion S_i et j'ajoute à ce qui reste la région S_{i_p}. J'obtiens ainsi une infinité de régions

$$R'_i = R_i + S_{i_p} - S_i.$$

Ces régions R'_i recouvriront la même partie du plan que les régions R_i et ne la recouvriront qu'une fois. Chacune d'elles ne contiendra qu'un seul point correspondant à un point donné z. A la décomposition du plan en régions R'_i correspondra donc le même groupe G qu'à la décomposition en régions R_i. Si S_0 est contigu intérieurement à l'une des frontières de R_0 et si S_p est contigu extérieurement à l'une des frontières de $R_0 - S_0$, la région R'_0 sera *d'une seule pièce et sans trou*. La plupart du temps, pour plus de commodité, nous choisirons la région R'_0 de telle sorte qu'elle soit d'une seule pièce et sans trou, mais cela n'a rien d'essentiel.

En opérant sur les régions R'_i comme nous avons opéré sur les régions R_i, nous obtiendrons une nouvelle décomposition du plan en régions R''_i qui correspondra toujours au groupe envisagé G. En continuant indéfiniment de la sorte, on obtiendra toutes les décompositions qui correspondent au groupe G.

On est conduit tout naturellement à la généralisation suivante :

Jusqu'ici j'ai supposé que la région S_0 était tout entière intérieure à la région R_0 et par conséquent S_i à la région R_i, et de fait, sans cette hypothèse, on ne saurait ce qu'on doit entendre par la région

$$R'_i = R_i + S_{i_p} - S_i,$$

à moins toutefois que l'on ne fasse une convention spéciale.

On est conduit ainsi à envisager des régions divisées en deux parties dont l'une est considérée comme positive et l'autre comme négative.

Ainsi, si S_i ne fait pas partie de R_i, on considérera la région R'_i comme formée d'une partie positive $R_i + S_{i_p}$ et d'une partie négative S_i. Cet ordre de considérations n'est pas d'ailleurs absolument nouveau.

Si l'on envisage un quadrilatère ABCD dont deux côtés opposés AB et CD se coupent en un point M, ce quadrilatère, formé de deux triangles ADM et BCM opposés par le sommet, s'appelle un quadrilatère *concave*.

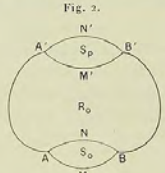
Les formules qui donnent l'aire d'un quadrilatère convexe s'appliquent à une pareille figure pourvu qu'on regarde l'aire de cette figure comme la différence et non comme la somme des aires des deux triangles ADM et BCM. Dans un quadrilatère concave l'un des deux triangles doit donc être regardé comme positif et l'autre comme négatif. Il se passe ici quelque chose d'analogue. Une région *concave* R'_i sera formée d'une portion positive $R_i + S_{i_p}$ et d'une portion négative S_i. Le nombre des points correspondants à un même point donné z, compris dans la partie positive de R'_i, est toujours fini et il surpasse d'une unité le nombre des points correspondants à z compris dans la partie négative.

Nous ferons peu d'usage de cette subdivision du plan en régions R_i concaves, parce que la subdivision en régions convexes est infiniment plus commode, mais elle pourra nous servir comme d'intermédiaire pour passer d'une subdivision convexe à une autre subdivision également convexe.

Puisqu'il y a une infinité de manières de subdiviser le plan en régions R_i convexes, nous devons choisir parmi ces diverses manières la plus simple et la plus commode.

Voici comment nous pourrons procéder. Nous déterminerons une région S_0, et la région S_p transformée de S_0 par la substitution $f_p(z)$. Nous ajouterons

Fig. 2.



S_p à R_0 et nous en retrancherons S_0. Nous obtiendrons ainsi une nouvelle région R'_0 qui pourra servir de base à une nouvelle subdivision du plan en

régions R'_i correspondant au groupe G. Car, pour obtenir la région R'_i, il suffira de retrancher de R_i la région S_i transformée de S_0 par $f_i(z)$ et d'y ajouter la région S_{i_p} transformée de S_p par $f_i(z)$. Comment maintenant conviendra-t-il de choisir les régions S_0 et S_p?

Soient AMB un côté de R_0, A′M′B′ le côté conjugué. Ces deux côtés sont congruents et la substitution réelle qui change AMB en A′M′B′ est une substitution $f_p(z)$ du groupe G. Joignons les points A et B par un arc de cercle ANB ayant son centre sur X. La région S_0 sera la région AMBNA comprise entre l'arc de courbe AMB et l'arc de cercle ANB. Le transformé de ANB par $f_p(z)$ sera un arc de cercle A′N′B′ ayant son centre sur X, et la transformée S_p de S_0 sera la région A′M′B′N′A′. Si nous ajoutons S_p à R_0 et que nous retranchions S_0, nous obtiendrons une région R'_0 analogue à R_0, mais où les côtés conjugués AMB, A′M′B′ seront devenus des arcs de cercle ANB, A′N′B′ ayant leurs centres sur X.

En opérant de même manière sur chaque paire de côtés conjugués de la première sorte, on réduira tous ces côtés à des arcs de cercle ayant leurs centres sur X. On peut donc toujours supposer que la région R_0 est un polygone dont les côtés sont de deux sortes, les uns sont des arcs de cercle ayant leurs centres sur X, les autres sont des segments de cet axe X lui-même. Un pareil polygone s'appellera *polygone normal*.

Mais une difficulté spéciale peut se présenter dans certains cas.

En effet nous ne nous sommes pas inquiétés de savoir si la région

$$S_0 = \text{AMBNA}$$

faisait tout entière partie de R_0. Il pourra donc se faire que le polygone normal auquel on aura réduit la région R_0 soit concave.

Voici comment on se tirerait d'affaire en pareil cas. Il est clair que la partie positive et la partie négative de R_0 devront être toutes deux des polygones normaux. Supposons, pour fixer les idées, que la partie positive contienne au plus deux points correspondants à un point donné z. Parmi les points de R_0, il y en aura qui seront compris dans la partie positive et qui n'admettront aucun correspondant soit dans la partie positive, soit dans la partie négative. Ils formeront un certain polygone normal P.

La partie négative formera un certain polygone normal P′; et à chaque point de cette partie négative correspondront deux points de la partie positive dont l'ensemble formera deux polygones normaux P″ et P‴, tous deux congruents

à P'. La partie positive de R_0 sera formée des trois polygones P, P'' et P'''. Cela posé, retranchons de R_0 le polygone P'' et ajoutons-y le polygone congruent P'. Nous obtiendrons ainsi une nouvelle région R'_0 qui pourra servir comme R_0 à engendrer le groupe fuchsien G. Cette région n'aura plus de partie négative et sera formée des deux polygones P et P'''.

Ce sera donc un *polygone normal convexe*.

On voit ainsi que, dans tous les cas possibles, on peut supposer que R_0 *est un polygone normal convexe.*

Si l'on connaît le polygone normal R_0 et la distribution de ses côtés en paires de côtés conjugués, le groupe G est entièrement déterminé (1).

En effet, reportons-nous à ce que nous avons vu dans le paragraphe précédent :

Les substitutions fondamentales de G sont celles qui correspondent aux régions limitrophes de R_0; on les obtiendra donc en envisageant un des côtés de la première sorte de R_0 et en cherchant quelle est la substitution qui change ce côté en son conjugué. Or soient AB et A'B' deux côtés conjugués. Ces deux côtés, d'après le paragraphe III, devront être congruents, c'est-à-dire qu'on aura

$$(A, B) = (A', B').$$

Or dans ce cas, d'après le paragraphe I, il existe une substitution réelle qui change AB en A'B' et, en général, cette substitution est parfaitement déterminée. Les substitutions fondamentales du groupe G, et, par conséquent, le groupe G lui-même, sont donc parfaitement déterminés.

C'est pour cette raison que j'appellerai le polygone R_0 *polygone générateur* du groupe G.

V. — Classification en familles.

Nous avons vu plus haut que deux, trois ou plusieurs des sommets du polygone R_0 peuvent être des points correspondants et nous avons appelé *cycle* l'ensemble des sommets de ce polygone qui sont correspondants à l'un d'entre eux.

(1) Si les deux extrémités d'un côté de la première sorte AB sont situés sur l'axe X, il en est de même des extrémités du côté conjugué A'B'. Il existe alors une infinité de substitutions réelles qui changent AB en A'B'. Dans ce cas, il arrive donc que le polygone R_0 engendre une infinité de groupes fuchsiens. N. E. N.

Les sommets de R_0 se répartissent de la sorte en un certain nombre de cycles. Voyons comment, connaissant la distribution en paires des côtés de la première sorte, on pourra trouver la distribution des sommets en cycles. Pour cela, il suffit d'appliquer la règle suivante, qu'on démontrerait sans peine :

Supposons qu'on parcoure dans un certain sens le périmètre du polygone R_0, et qu'on rencontre successivement un côté, puis un sommet, puis un autre côté, puis un autre sommet, et ainsi de suite. Cela posé, partons d'un sommet quelconque; envisageons le côté suivant, puis son conjugué si ce côté est de la première sorte; puis le sommet suivant, puis le côté suivant, puis son conjugué si ce côté est de la première sorte, et ainsi de suite. On pourra continuer ainsi jusqu'à ce qu'on revienne au sommet qui a servi de point de départ, ou bien jusqu'à ce qu'on arrive à un côté de la deuxième sorte.

Dans le premier cas, tous les sommets qu'on aura rencontrés de la sorte formeront un cycle. Dans le second cas, il sera nécessaire, pour compléter le cycle, de reprendre le sommet qui a servi de point de départ et de remonter à partir de ce sommet, en considérant successivement le côté précédent, puis son conjugué si ce côté est de la première sorte, puis le sommet précédent, puis le côté précédent, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on finisse par arriver à un côté de la deuxième sorte.

Il est aisé de voir qu'il y a trois catégories de cycles : Tout point correspondant d'un point z situé au-dessus de X est lui-même au-dessus de X, donc tout sommet correspondant d'un sommet de la première catégorie (§ III) est lui-même de la première catégorie. Il y aura donc des cycles formés uniquement de sommets de la première catégorie; ce seront les *cycles de la première catégorie*. En partant d'un sommet de la première catégorie et prenant successivement les côtés et les sommets qu'on rencontre en appliquant la règle précédente, on ne rencontrera jamais que des sommets de la première catégorie et, par conséquent, aussi jamais que des côtés de la première sorte. On ne sera donc arrêté que quand on sera revenu au sommet qui aura servi de point de départ, c'est-à-dire que le cycle sera *fermé*.

Tout sommet correspondant d'un sommet de la deuxième ou de la troisième catégorie devra lui-même appartenir à l'une des deux catégories. Ce qui nous amène à considérer deux nouvelles classes de cycles.

Les *cycles de la deuxième catégorie* ne contiendront que des sommets de la deuxième catégorie; en leur appliquant la règle précédente, on ne rencon-

trera pas de côtés de la deuxième sorte, c'est-à-dire que le cycle sera encore *fermé*.

Les *cycles de la troisième catégorie* contiendront des sommets de la troisième catégorie et pourront en contenir également de la deuxième; en leur appliquant la règle précédente, on rencontrera des côtés de la deuxième sorte, c'est-à-dire que le cycle sera *ouvert*. Cela va nous permettre de classer en familles les polygones R_0 et par conséquent les groupes G.

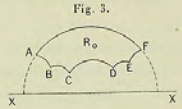
Le polygone R_0 sera :

de la 1re famille s'il y a des cycles de la 1re catégorie seulement;
de la 2e famille s'il y a des cycles de la 2e catégorie seulement;
de la 3e famille s'il y a des cycles de la 3e catégorie seulement;
de la 4e famille s'il y a des cycles de la 2e et de la 3e catégorie seulement;
de la 5e famille s'il y a des cycles de la 1re et de la 3e catégorie seulement;
de la 6e famille s'il y a des cycles de la 1re et de la 2e catégorie seulement;
de la 7e famille s'il y a des cycles des trois catégories.

Quelques exemples feront mieux comprendre ma pensée.

Exemple I. — Le polygone R_0 est un hexagone ABCDEF; tous les côtés

Fig. 3.



sont de la première sorte; les côtés

AB et AF,
BC et FE,
CD et ED

sont conjugués. Appliquons la règle, nous rencontrerons successivement :

1° En partant du sommet A, le sommet A, le côté AB, le côté AF et le sommet A;

2° En partant de B, le sommet B, puis BC, puis EF, puis F, puis FA, puis AB, puis B;

3° En partant de C, le sommet C, puis CD, puis ED, puis E, puis EF, puis BC, puis C;

4° En partant de D, le sommet D, puis DE, puis CD, puis D.

Il y a donc quatre cycles formés respectivement :

1° Du sommet A;
2° Des sommets B et F;
3° Des sommets C et E;
4° Du sommet D.

Exemple II. — Le polygone R_0 est toujours un hexagone ABCDEF dont tous les côtés sont de la première sorte; mais les côtés opposés

AB et ED,
BC et FE,
CD et AF

sont conjugués. Appliquons la règle, nous rencontrerons successivement :

1° En partant de A, le sommet A, puis AB, puis DE, puis E, puis EF, puis BC, puis C, puis CD, puis FA, puis A;

2° En partant de B, le sommet B, puis BC, puis EF, puis F, puis FA, puis CD, puis D, puis DE, puis AB, puis B.

Il y a donc deux cycles formés respectivement :

1° Des sommets A, C et E;
2° Des sommets B, D et F.

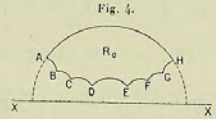
Exemple III. — Le polygone R_0 est un octogone ABCDEFGH dont tous les côtés sont de la première sorte; les côtés opposés

AB et FE,
BC et GF,
CD et HG,
DE et AH

sont conjugués.

Partons du sommet A, nous rencontrerons successivement : A, AB, EF, F,

Fig. 4.



FG, BC, C, CD, GH, H, HA, DE, E, EF, AB, B, BC, FG, G, GH, CD, D, DE, HA, A.

Tous les sommets font donc partie d'un même cycle.

Exemple IV. — Supposons maintenant que les côtés

AB et DC,
BC et ED,
EF et HG,
FG et AH

soient conjugués.

Partons encore de A, nous rencontrerons :

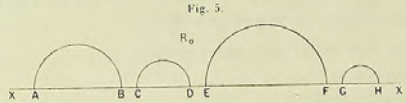
A, AB, CD, D, DE, BC, C, CD, AB, B, BC, DE, E, EF, GH, H, HA, FG, G, GH, EF, F, FG, HA, A.

Tous les sommets font encore partie d'un même cycle.

Dans les quatre exemples précédents, tous les côtés sont de la première sorte, tous les cycles sont donc de la première ou de la deuxième catégorie.

Exemple V. — Le polygone R_0 est encore un octogone ABCDEFGH.

Fig. 5.



Les côtés AB, CD, EF, GH sont de la première sorte; les côtés BC, DE, FG, HA sont de la deuxième sorte. Les côtés

AB et DC,
EF et HG

sont conjugués. On rencontrera successivement :

1° En partant de A, le côté AB, puis CD, puis D, puis DE qui est de la deuxième sorte;

2° En partant de C, le côté CD, puis AB, puis B, puis BC qui est de la deuxième sorte;

3° En partant de E, le côté EF, puis GH, puis H, puis HA qui est de la deuxième sorte;

4° En partant de G, le côté GH, puis EF, puis F, puis FG qui est de la deuxième sorte.

Les sommets se répartissent donc en quatre cycles formés respectivement :

1° De A et de D;
2° De C et de B;
3° De E et de H;
4° De G et de F.

Ces cycles sont ouverts, puisque dans la recherche de chacun d'eux on a été arrêté par la rencontre d'un côté de la deuxième sorte. Ils sont donc de la troisième catégorie.

On peut pousser plus loin encore la classification des polygones R_0 et des groupes G. Voici de quelles considérations nous pourrons faire usage à cet effet.

Considérons d'abord un cycle de la première catégorie et un sommet A_0 de R_0 faisant partie de ce cycle. Soient B_1 le côté suivant, C_1 son conjugué, A_1 le sommet suivant, B_2 le côté suivant, C_2 son conjugué, A_2 le sommet suivant et ainsi de suite, on poursuivra de la sorte jusqu'à ce qu'on arrive à un sommet A_n coïncidant avec A_0.

On pourra même poursuivre indéfiniment de cette façon sans être jamais arrêté puisqu'on ne rencontrera pas de côté de la deuxième sorte. Mais le sommet A_n ne différera pas de A_0, le sommet A_{n+1} de A_1, et, en général, le sommet A_k de A_h si l'on a

$$h \equiv k \pmod{n}.$$

Le cycle se compose alors de n sommets distincts, à savoir $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$.

Supposons maintenant qu'on décrive autour de A_0 un cycle infiniment petit quelconque; on sortira de R_0 par le côté B_1, pour entrer dans le polygone R_1. Considéré comme appartenant à ce dernier polygone, le côté B_1 sera l'homologue de C_1; par conséquent, le point A_0 sera l'homologue de A_1 et le côté suivant sera l'homologue de B_2. Le cycle infiniment petit décrit autour de A_0 sortira ensuite du polygone R_1 en franchissant ce côté homologue de B_2 et entrera dans un certain polygone que j'appelle R_2. Considéré comme appartenant à ce polygone, le côté qui, dans R_1, était homologue de B_2 sera homologue de C_2; le point A_0 sera homologue de A_2 et le côté suivant l'homologue de B_3.

On continuera de la sorte, la loi est manifeste. On passera successivement dans les polygones $R_0, R_1, R_2, \ldots, R_{q-1}$ et enfin dans R_q qui devra se confondre avec R_0.

On sortira du polygone R_k pour entrer dans le polygone R_{k+1} en franchissant un côté qui, envisagé comme appartenant à R_k, sera l'homologue de B_{k+1} et qui, envisagé comme appartenant à R_{k+1}, sera l'homologue de C_{k+1}. Le sommet A_0, envisagé comme appartenant à R_k, sera l'homologue de A_k.

Mais le polygone R_q doit se confondre avec R_0; donc le sommet A_q ne doit pas différer de A_0; on a donc

$$q = 0 \pmod{n},$$

d'où

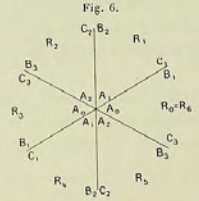
$$q = pn.$$

Le nombre des polygones qui ont un sommet en A_0 sera donc divisible par n. La figure ci-jointe éclaircira peut-être ce qui précède. Nous y avons supposé

$$n = 3, \quad p = 2.$$

Nous n'avons représenté que les parties des polygones qui sont infiniment voisines de A_0; c'est pourquoi chacun de ces polygones est représenté seulement par un angle. Dans le voisinage de chaque sommet A (ou de chaque côté B ou C) et à l'intérieur de chaque polygone R_i, nous avons marqué une lettre indiquant quel est le sommet (ou le côté) de R_0 dont ce sommet A (ou ce côté B ou C) est l'homologue si on l'envisage comme faisant partie du polygone R_i.

Fig. 6.



Nous avons donc, autour du point A_0, pn angles dont la somme doit être égale à 2π, et comme dans deux polygones congruents les angles homologues sont égaux, on aura, entre les angles A, la relation

$$A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_{q-1} = 2\pi.$$

Or on a

$$A_{kn} + A_{kn+1} + A_{kn+2} + \ldots + A_{kn+n-1} = A_0 + A_1 + \ldots + A_{n-1}.$$

Il vient donc

$$A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1} = \frac{2\pi}{p},$$

ce qui permet d'énoncer le théorème suivant :

La somme des angles de R_0 qui correspondent aux sommets d'un même cycle de la première catégorie est une partie aliquote de 2π.

Mais ici deux cas peuvent se présenter : ou bien la somme de ces angles sera égale à 2π, ou bien à 2π divisé par un nombre entier plus grand que 1.

Dans le premier cas, je dirai que le cycle appartient à la première sous-catégorie; dans le second cas, qu'il appartient à la deuxième sous-catégorie.

Les propriétés des cycles de ces deux sous-catégories ne sont pas tout à fait les mêmes; c'est ce qui nous engage à faire dans la première famille une coupure, et à séparer, sous le nom de premier ordre, les polygones R_0 dont tous les cycles sont de la première sous-catégorie, pendant que les autres polygones R_0 qui auront un cycle de la deuxième sous-catégorie formeront le deuxième ordre.

Reprenons les polygones $R_0, R_1, \ldots, R_{q-1}$ qui ont un sommet en A_0.

Envisageons la substitution réelle qui change R_0 en R_n et qui fait évidemment partie du groupe G. Cette substitution ne changera pas le point A_0 qui devra par conséquent en être un point double. C'est donc une substitution elliptique; elle pourra se mettre sous la forme (3) (§ I) et de telle sorte que

$$K = e^{\frac{2i\pi}{p}}.$$

Supposons maintenant que le point A_0, au lieu d'appartenir à un cycle de la première catégorie, appartienne à un cycle de la deuxième catégorie. Tous les raisonnements précédents s'appliqueront, puisque nous n'avons supposé qu'une chose : c'est que le cycle était fermé, et puisque cela est vrai des cycles de la deuxième comme de ceux de la première catégorie. Seulement le nombre q, et par conséquent le nombre p, seront infinis. La somme des angles correspondant aux divers sommets du cycle sera donc nulle et c'est ce qu'il était aisé de prévoir, puisque tout angle d'un polygone normal dont le sommet est de la deuxième catégorie est évidemment nul. La substitution réelle qui change R_0 en R_n ne changera pas A_0. Ce sommet en sera donc un point double, et comme il est sur X, la substitution sera parabolique ou hyperbolique.

Soit S cette substitution; soit C_k le côté qu'il faut franchir pour passer de R_k dans R_{k+1}. C_{k+n} sera le transformé de C_k par S, de sorte que les divers côtés C_k seront les transformés successifs de $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$ par la substitution S et la substitution inverse.

Supposons d'abord que la substitution S soit parabolique. Nous avons vu (§ I) qu'un arc fini de courbe qui ne coupe pas X ne peut rencontrer qu'un nombre fini de transformés successifs d'un cercle tel que C_0 par une substitution telle que S et par sa substitution inverse. Un pareil arc ne passera donc

qu'à travers un nombre fini des polygones R_0, R_1, ..., R_q, ..., qui ont un sommet en A_0.

Supposons, au contraire, que la substitution S soit hyperbolique. Soient A_0 et A'_0 les deux points doubles de cette substitution, C le cercle décrit sur $A_0A'_0$ comme diamètre. Nous avons vu (§ I) qu'un arc fini de courbe qui ne coupe pas X rencontre un nombre infini de transformés successifs d'un cercle tel que C_0 ou n'en rencontre qu'un nombre fini, suivant qu'il coupe ou ne coupe pas le cercle C. Un pareil arc traversera donc un nombre infini des polygones R_0, R_1, ..., R_q, ..., s'il coupe C, et il n'en traversera qu'un nombre fini s'il ne coupe pas C. Si la substitution S est parabolique, nous dirons que le cycle auquel appartient A_0 est de la troisième sous-catégorie; si elle est hyperbolique, nous dirons que le cycle est de la quatrième sous-catégorie.

Cela va nous permettre de subdiviser les deuxième, quatrième, sixième, septième familles.

Un groupe de l'une de ces familles appartiendra au premier ordre de cette famille s'il ne contient pas de cycle de la quatrième sous-catégorie, et au deuxième ordre s'il contient des cycles de la quatrième sous-catégorie (1).

VI. — Existence des groupes fuchsiens.

Jusqu'ici, nous avons raisonné sur les groupes fuchsiens en supposant qu'ils existaient et nous n'en avons pas démontré l'existence. Nous avons vu que tout groupe fuchsien G peut être considéré comme engendré par un polygone normal R_0 dont les côtés sont de deux sortes; ceux de la première sorte sont des arcs de cercle ayant leur centre sur X, ceux de la deuxième sorte sont des segments de l'axe X lui-même. Les côtés de la première sorte sont au nombre de $2n$ et se répartissent en paires de côtés conjugués. Quand on connaît le polygone R_0 et la répartion de ses côtés en paires, le groupe G correspondant est, en général, parfaitement déterminé. Quant aux sommets, ils se répartissent en un certain nombre de cycles.

Pour pouvoir donner naissance à un groupe fuchsien G, le polygone R_0 doit satisfaire à deux conditions :

(1) On peut se passer de cette dernière subdivision. Poincaré démontre plus loin qu'on peut éviter les cycles de la quatrième sous-catégorie, en modifiant convenablement le polygone R_0. Mais cette démonstration appelle des critiques; en réalité, le polygone générateur n'admet pas des cycles de la quatrième sous-catégorie. *Voir* les Notes à la fin du Volume. N. E. N.

1° *Deux côtés conjugués doivent être congruents;*

2° *La somme des angles d'un même cycle de la première catégorie doit être une partie aliquote de* 2π.

Ces conditions sont nécessaires; sont-elles suffisantes? C'est ce que je vais démontrer.

Je suppose que le polygone R_0 soit donné, ainsi que la distribution de ses côtés de la première sorte. De cette connaissance résulte celle des substitutions fondamentales du groupe correspondant et par conséquent la possibilité de construire les polygones R limitrophes de R_0 (1). Opérant sur ceux-ci comme on a opéré sur R_0, on construira les polygones limitrophes des polygones déjà obtenus et continuant indéfiniment cette opération, on construira une infinité de polygones congruents à R_0. Mais ici plusieurs hypothèses peuvent être faites :

1° Ou bien les polygones ainsi construits couvriront une partie du plan mais ne la couvriront qu'une fois de manière à ne pas empiéter les uns sur les autres et à ne pas se recouvrir mutuellement. Alors ils formeront une sorte de damier; la portion du plan envisagée sera partagée en un certain nombre de régions congruentes entre elles. *L'existence du groupe fuchsien correspondant à* R_0 *sera donc démontrée.*

2° Ou bien les polygones construits de la sorte empiéteront les uns sur les autres de façon à recouvrir une partie du plan plusieurs fois ou même une infinité de fois. Dans ce cas le groupe auquel conduirait R_0 (c'est-à-dire le groupe dont les substitutions fondamentales sont celles qui changent chaque côté de la première sorte de R_0 en son conjugué) est continu; ce n'est pas un groupe fuchsien.

Comment reconnaîtrons-nous maintenant quel est celui de ces deux cas auquel nous avons affaire? Considérons un point quelconque A, intérieur à R_0, et un second point B quelconque. Joignons A à B par un arc de courbe quelconque AMB. Cet arc sortira de R_0 par un certain côté C_0; on construira alors le polygone R_1, limitrophe de R_0 le long de C_0; si AMB sort de R_1 par un côté C_1, on construira le polygone R_2, limitrophe de R_1 le long de C_1 et ainsi de suite.

Les arcs AMB seront de deux sortes :

1° Ou bien, après un nombre fini d'opérations de ce genre, on finira par

(1) Il faut excepter les cas dont il est question dans la note de la page 126. N. E. N.

trouver un polygone R_n duquel ne sorte plus l'arc AMB, de telle façon que le point B soit à l'intérieur de R_n; c'est alors que le point B se trouve dans la partie du plan recouverte par les polygones R et que l'arc AMB ne sort pas de cette partie du plan : l'arc AMB sera *de la première sorte*.

2° Ou bien, quelque grand que soit le nombre des opérations effectuées, on ne trouvera jamais un polygone R_n duquel ne sorte plus l'arc AMB : l'arc AMB sera alors *de la deuxième sorte*.

Au sujet du point B on peut faire trois hypothèses :

1° Tous les arcs AMB qu'on peut tracer entre A et B sont de la deuxième sorte; le point B est alors hors de la partie du plan recouverte par les polygones R.

2° Parmi les arcs AMB tracés entre A et B, il y en a de la première sorte; chacun de ces arcs conduit, d'après ce qui précède, à un polygone R_n à l'intérieur duquel se trouve B. De plus ce polygone R_n est le *même* quel que soit l'arc AMB de la première sorte par lequel on a joint les deux points A et B. Dans ce cas le point B est dans la partie du plan recouverte par les polygones R; de plus ces polygones ne recouvrent cette partie du plan qu'une seule fois et l'existence du groupe fuchsien correspondant à R_0 est démontrée.

3° Parmi les arcs AMB tracés entre A et B, il y en a de la première sorte; chacun d'eux conduit à un polygone R_n à l'intérieur duquel se trouve B; mais ce polygone change quand on change l'arc AMB. Dans ce cas le point B est dans la partie du plan recouverte par les polygones R; mais ces polygones recouvrent cette partie du plan plus d'une fois de telle sorte qu'il n'y a pas de groupe fuchsien correspondant à R_0.

Nous sommes donc conduits à la règle suivante :

Il faut joindre deux points A et B par deux arcs AMB, ANB de la première sorte et rechercher si ces deux arcs conduisent à un même polygone R_n.

Mais nous pouvons la modifier de la manière suivante : On trace un contour fermé AMA, dont le point initial et final A est intérieur à R_0; si cet arc AMA sort de R_0 par un côté C_0, on construira le polygone R_1, limitrophe de R_0 le long de C_0; s'il sort de R_1 par un côté C_1, on construira le polygone R_2, limitrophe de R_1 le long de C_1 et ainsi de suite. Je suppose de plus que l'arc AMA soit de la première sorte, c'est-à-dire qu'on l'ait choisi de telle manière qu'après un nombre fini d'opérations, on arrive à un polygone R_n d'où ne sorte plus l'arc AMA. *Pour que le groupe fuchsien existe, il faut et il suffit que, quel*

que soit le contour AMA *de la première sorte, le polygone* R_n *soit précisément* R_0.

Supposons d'abord que le polygone R_0 envisagé n'admette pas de cycle de la quatrième sous-catégorie.

Dans ce cas j'énoncerai les théorèmes suivants :

I. *Tout arc de courbe* AMB *qui coupe* X *est de la deuxième sorte.* — En effet, le polygone R_0 est tout entier au-dessus de X et il en est par conséquent de même de tous les polygones R qui lui sont congruents. Supposons qu'on construise les polygones $R_1, R_2, \ldots, R_n$ comme il a été dit plus haut. Ils seront tous dans la partie du plan située au-dessus de X, et, comme l'arc AMB doit sortir de cette partie du plan, il devra sortir de R_n quelque grand que soit n.

C. Q. F. D.

II. *Tout arc* AMB *qui ne coupe pas* X *est de la première sorte.* — En effet, je construis comme il a été dit plus haut les polygones

$$R_1, \quad R_2, \quad \ldots, \quad R_p, \quad \ldots,$$

et j'appelle λ_p la portion de l'arc AMB qui est à l'intérieur du polygone R_p. L'arc AMB va se trouver décomposé en une série d'arcs $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$, correspondant à la série des polygones $R_0, R_1, R_2, \ldots$. Le nombre de ces arcs (qui est celui des polygones correspondants) sera fini si AMB est de la première sorte (ce que nous nous proposons de démontrer) et infini dans le cas contraire.

L'arc λ_p joindra évidemment deux côtés de la première sorte du polygone R_p, car il ne doit pas couper X et ne peut, par conséquent, aboutir à un côté de la deuxième sorte, puisque ces côtés sont des segments de X. On peut d'ailleurs faire deux hypothèses :

1° On peut supposer que les deux côtés auxquels aboutit l'arc λ_p sont deux côtés consécutifs du polygone R_p séparés seulement par un sommet A_p de ce polygone. Je dirai que λ_p est de la première espèce et qu'il sous-tend le sommet A_p. Exemples : les arcs CD et FG de la figure 7.

2° On peut supposer que les deux côtés auxquels aboutit l'arc λ_p ne sont pas consécutifs, et dans ce cas je dirai que λ_p est de la deuxième espèce. Exemple : l'arc AB de la figure. Le polygone R_p étant congruent à R_0, l'arc λ_p sera congruent à un certain arc λ joignant deux points du périmètre de R_0 appartenant à deux côtés non consécutifs. Il est clair que la distance de ces deux points ne pourra être infiniment petite et que, par conséquent, la L

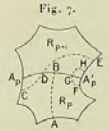
(*voir* § II) de cet arc λ ne sera pas non plus infiniment petite, mais sera plus grande qu'une certaine quantité donnée K. La L de l'arc λ_p sera la même que celle de l'arc congruent λ; elle sera donc plus grande que K.

Soit L_0 la L de l'arc AMB; elle est finie, parce que cet arc ne coupe pas X. Le nombre des arcs λ_p de la seconde espèce sera donc plus petit que $\frac{L_0}{K}$, et par conséquent *limité*.

On pourra donc prendre q assez grand pour que les arcs $\lambda_{q+1}, \lambda_{q+2}, \ldots$ et en général les arcs λ_p où $p > q$ soient tous de la première espèce; il reste à démontrer que le nombre de ces arcs $\lambda_p (p > q)$ est fini.

J'envisage deux arcs consécutifs λ_p et λ_{p+1} et l'arc $\mu_p = \lambda_p + \lambda_{p+1}$ formé par leur réunion; je dirai que l'arc μ_p est de la première catégorie si les arcs

Fig. 7.



λ_p et λ_{p+1} sous-tendent un même sommet, et de la deuxième catégorie dans le cas contraire. Ainsi l'arc CE de la figure sera de la deuxième catégorie et l'arc FH de la première, parce que l'arc CD sous-tend le sommet A_p pendant que les arcs FG, GH et DE sous-tendent le sommet A'_p.

Envisageons un arc μ_p de la deuxième catégorie : il aboutira à deux côtés de la première sorte appartenant l'un à R_p, l'autre à R_{p+1} et il traversera le côté C_p qui sert de frontière commune à ces deux polygones; d'ailleurs ces trois côtés n'ont aucun point commun.

Le polygone R_p étant congruent à R_0, le côté C_p sera congruent à un des côtés H de R_0. Soit R′ celui des polygones R qui est limitrophe de R_0 le long de H; l'arc μ_p sera congruent d'un certain arc μ dont l'une des extrémités sera sur un des côtés B de R_0 et l'autre sera sur un des côtés B′ de R′; cet arc traversera le côté H. D'ailleurs les trois côtés B, H et B′ n'auront aucun point commun.

Dans ces conditions, il est clair que la L de l'arc μ et par conséquent celle de μ_p n'est pas infiniment petite et est plus grande qu'une quantité fixe K. Il suit de là, comme plus haut, que le nombre des arcs μ_p de la deuxième catégorie est *limité* et qu'on pourra prendre q assez grand pour que tous les arcs

$\mu_{q+1}, \mu_{q+2}, \ldots$ et en général $\mu_p (p > q)$ soient tous de la première catégorie; en d'autres termes, tous les arcs $\lambda_{q+1}, \lambda_{q+2}, \ldots$ et en général tous les arcs $\lambda_p (p > q)$ sous-tendront un même sommet D.

Il reste à démontrer que le nombre de ces arcs λ_p sous-tendant le sommet D est fini. Nous pouvons faire deux hypothèses :

1° Ou bien D appartient à un cycle de la première ou de la troisième catégorie, et alors ce sommet n'appartient qu'à un nombre fini de polygones R, et par conséquent le nombre des arcs λ_p est nécessairement fini;

2° Ou bien D appartient à un cycle de la deuxième catégorie, c'est-à-dire de la troisième sous-catégorie, puisque nous avons supposé que le polygone R_0 n'admettait pas de cycles de la quatrième sous-catégorie. Nous avons vu (§ V) qu'un arc de courbe ne coupant pas X ne pouvait traverser qu'un nombre fini des polygones auxquels appartient le sommet D. Il suit de là que le nombre des arcs λ_p est fini.

Donc, dans tous les cas, le nombre des arcs λ_p est fini; donc l'arc AMB est de la première sorte. C. Q. F. D.

Donc la partie du plan recouverte par les polygones R *est la partie située au-dessus de* X.

Considérons maintenant un contour fermé AMA de la première sorte, c'est-à-dire ne coupant pas X; appliquons-lui la règle exposée plus haut et supposons qu'en le parcourant on rencontre successivement les polygones $R_0, R_1, \ldots$ pour arriver au polygone R_n quand on sera de retour au point A. Si le polygone R_n est précisément R_0, je dirai que AMA est de la première espèce, et, dans le cas contraire, qu'il est de la deuxième espèce. Pour que le groupe fuchsien existe, il faut et il suffit que tous les contours AMA de la première sorte soient de la première espèce. A ce sujet je démontrerai successivement les théorèmes suivants :

III. *Si le contour* AMA *se compose :* 1° *d'un arc de courbe* AMB, 2° *d'un contour fermé infiniment petit* BNB, 3° *de l'arc* AMB *parcouru en sens contraire, il est de la première espèce.*

En effet, construisons successivement, d'après la règle exposée plus haut, les polygones $R_0, R_1, R_2, \ldots, R_m$ que l'on rencontre en parcourant l'arc AMB. Parcourons ensuite le contour infiniment petit BNB. On peut faire au sujet de ce contour trois hypothèses :

1° Ou bien BNB reste tout entier à l'intérieur du polygone R_m et alors parcourant ce contour on ne sortira pas de ce polygone;

2° Ou bien BNB franchit un des côtés C_m de R_m, mais sans envelopper un des sommets de ce polygone. Alors, en suivant le contour, on sortira d'abord de R_m en franchissant le côté C_m pour entrer dans un nouveau polygone R_{m+1}, puis on sortira de R_{m+1} en franchissant le côté C_m en sens contraire et par conséquent en rentrant dans R_m;

3° Ou bien BNB enveloppe un des sommets de R_m. Ce sommet sera forcément de la première catégorie, puisqu'il ne pourra être sur X. Ce sommet appartiendra à un cycle comprenant par exemple n sommets et la somme des angles correspondants sera $\frac{2\pi}{p}$. On rencontrera alors en parcourant BNB successivement pn polygones $R_{m+1}, R_{m+2}, \ldots, R_{m+pn}$; la somme des angles en D de tous ces polygones étant 2π, R_{m+pn} se confondra avec R_m.

Donc, dans tous les cas possibles, on retombera sur le polygone R_m après avoir parcouru le contour BNB. Parcourons maintenant l'arc AMB en sens contraire; nous rencontrerons successivement les polygones $R_m, R_{m-1}, \ldots, R_1, R_0$, c'est-à-dire, dans l'ordre inverse, ceux que nous avions rencontrés en parcourant une première fois l'arc AMB. Quand nous serons de retour au point A, nous retomberons sur le polygone R_0. Donc le contour AMA sera de la première espèce. C. Q. F. D.

IV. *Si deux contours* AMBPA, APBNA *sont de la première sorte et de la première espèce, il en sera de même du contour* AMBNA *formé par leur réunion.*

Fig. 8.

En effet, si AMBPA, APBNA sont de la première sorte, c'est que ni AMB, ni ANB ne sortent de la région recouverte par les polygones R et, par conséquent, que AMBNA est aussi de la première sorte.

Si AMBPA est de la première espèce, on arrive au même polygone R_n en suivant l'arc AMB ou l'arc ABP; si APBNA est de la première espèce, on arrive au même polygone R_n en suivant l'arc APB ou l'arc ANB. Donc on arrive au même polygone R_n en suivant l'arc AMB ou l'arc ANB. Donc AMBNA est de la première espèce. C. Q. F. D.

V. *Si un contour* AMA *est de la première sorte, tout contour* ANA *qui lui est intérieur est aussi de la première sorte.*

En effet, si AMA ne coupe pas X, il en sera de même du contour intérieur ANA. C. Q. F. D.

VI. *Un contour quelconque* AMA *de la première sorte est de la première espèce.*

En effet, ce contour pourra être décomposé en une infinité de contours comme ceux qui sont considérés dans le théorème III. En vertu du théorème V, ces contours sont tous de la première sorte; donc en vertu du théorème III chacun d'eux est de la première espèce, donc en vertu du théorème IV le contour total lui-même AMA est de la première espèce. C. Q. F. D.

L'existence du groupe fuchsien correspondant à R_0 *est donc démontrée.*

Les polygones R transformés de R_0 par les diverses substitutions de ce groupe recouvriront toute la partie du plan située au-dessus de X et ne la recouvriront qu'une fois.

Je suppose maintenant que R_0 *admette des cycles de la quatrième sous-catégorie* (1).

Les théorèmes I, III et IV seront évidemment encore vrais. Mais il n'en sera pas de même du théorème II. Voyons comment il faudra le modifier dans le cas qui nous occupe.

Reprenons les notations de ce théorème. On démontrera comme plus haut que l'on peut prendre q assez grand pour que tous les arcs λ_p où $p > q$ soient de la première espèce et sous-tendent un même sommet D. Je n'ai rien à ajouter pour le cas où D est de la première ou de la troisième catégorie, ou bien de la troisième sous-catégorie. Supposons maintenant que D soit de la quatrième sous-catégorie. Le nombre des arcs $\lambda_p (p > q)$ sera-t-il fini ou infini? Nous avons vu (§ V) qu'un arc de courbe qui ne coupe pas X traverse un nombre

(1) *Voir* la note de la page 134. N. E. N.

infini des polygones R qui ont un sommet en D ou seulement un nombre fini, selon qu'il coupe ou ne coupe pas un certain cercle C passant par D et ayant son centre sur X.

Il suit de là qu'un arc AMB qui ne coupe pas X peut cependant être de la deuxième sorte.

Considérons un arc AMB de la deuxième sorte venant aboutir à un cercle C et supposons qu'il se déforme d'une façon continue; il ne pourra cesser d'être de la deuxième sorte qu'en cessant de couper C, comme il est aisé de le comprendre.

Le théorème V est encore vrai, mais il a besoin d'une démonstration nouvelle. Envisageons un contour fermé AMA qui soit de la première sorte et un second contour ANA intérieur au premier; je dis que ce second contour ne peut être de la deuxième sorte. En effet, s'il en était ainsi, il devrait couper un certain cercle C; on pourrait passer du contour ANA au contour AMA d'une façon continue, et en variant de la sorte, le contour ANA ne cesserait pas de couper C: il ne cesserait donc pas d'être de la deuxième sorte, de manière que AMA devrait être de la deuxième sorte, ce que nous n'avons pas supposé.

Le théorème V étant démontré, le théorème VI doit être vrai également et par conséquent *l'existence du groupe fuchsien correspondant à* R_0 *est démontrée*. Les polygones R, transformés de R_0 par les substitutions de ce groupe, recouvrent toute une partie du plan S et ne la recouvrent qu'une fois. Cette région S est tout entière au-dessus de X et elle est limitée par des segments de cet axe et par une infinité de cercles tels que C ayant leurs centres sur X (1).

Nous avons donc démontré dans tous les cas possibles l'existence du groupe fuchsien correspondant à R_0; mais la démonstration peut être considérablement simplifiée dans certains cas particuliers, par exemple quand on n'a pas de sommet de la première catégorie. Dans ce cas, en effet, le polygone R_0, s'il a $2n$ côtés de la première sorte, divise la partie du plan située au-dessus de X en $2n+1$ régions, à savoir le polygone R_0 lui-même et la région comprise entre l'axe X et chacun des côtés de la première sorte. Considérons un côté C_i, la région S_i comprise entre C_i et X et le polygone R_i limitrophe de R_0 le long de C_i. Le polygone R_i subdivisera la région S_i en $2n$ régions plus petites, à savoir le polygone R_i lui-même et la région comprise entre l'axe X et chacun

(1) En choisissant R_0 d'une manière convenable, les polygones R recouvriront toujours toute la partie du plan située au-dessus de X. N. E. N.

des côtés de la première sorte restés libres. Quand on aura construit plusieurs polygones $R_0, R_1, \ldots, R_p$, la partie du plan située au-dessus de X se trouvera partagée en un certain nombre de régions, à savoir les polygones $R_0, R_1, \ldots, R_p$ et les régions $S_1, S_2, \ldots, S_q$ comprises entre X et chacun des côtés de la première sorte restés libres. Si l'on cherche à construire un nouveau polygone limitrophe de R_0, $R_1, \ldots, R_p$, il se trouvera tout entier dans une des régions $S_1, S_2, \ldots, S_q$. Il est donc impossible que les polygones ainsi construits se recouvrent mutuellement. L'existence du groupe fuchsien correspondant à R_0 est donc démontrée.

VII. — Principaux exemples.

Avant de donner quelques exemples de ces groupes fuchsiens dont je viens de démontrer l'existence d'une manière générale, je vais expliquer une notation dont je me servirai dans la suite pour définir certaines propriétés du polygone R_0. Je commencerai par désigner chacun des côtés de R_0 par un numéro d'ordre de telle sorte qu'en parcourant le périmètre de ce polygone dans un sens convenable, on rencontre successivement le côté 1, puis le côté 2, etc. Cela fait, j'écrirai le numéro d'un des côtés de la première sorte, puis celui de son conjugué, puis une virgule, puis un autre côté de la première sorte, puis son conjugué, puis une virgule, etc., enfin j'écrirai à la suite les numéros des côtés de la deuxième sorte. Par exemple, Si R_0 est un octogone dont les côtés de rang impair soient de la première sorte, ceux de rang pair de la deuxième sorte et dont les côtés opposés de la première sorte soient conjugués, je dirai que le polygone R_0 est du système

$$(15, 37; 2468).$$

J'aurai ainsi défini le nombre des côtés de chaque sorte et la distribution des côtés en paires. De cette distribution des côtés en paires, nous déduirons celle des sommets en cycles.

Je vais maintenant étudier quelques exemples, en me servant des notations précédentes.

Exemple I (14, 23):

Le polygone R_0 est un quadrilatère dont je désigne les sommets par A, B, C, D; le côté 1 sera le côté AB; le côté 2, le côté BC; le côté 3, le côté CD; le côté 4, le côté DA. Tous les côtés sont de la première sorte, ce sont donc des arcs de cercle ayant leur centre sur X; les côtés AB et AD, CB et CD sont conjugués,

ils sont donc congruents. Enfin l'angle A est égal à $\frac{2\pi}{\alpha}$, l'angle B + D à $\frac{2\pi}{\beta}$, l'angle C à $\frac{2\pi}{\gamma}$, les nombres α, β, γ étant entiers.

Nous pouvons joindre les deux sommets opposés A et C par un arc de cercle ayant son centre sur X, le quadrilatère R_0 se trouvera ainsi décomposé en deux triangles curvilignes ACD et ABC.

Je voudrais maintenant définir une expression dont je serai quelquefois appelé à me servir dans la suite. Envisageons dans le plan une transformation par rayons vecteurs réciproques; soient o le centre de la transformation et K^2 son paramètre; le cercle C dont le centre est o et le rayon K demeure inaltéré par la transformation. Je dirai que cette transformation est une *réflexion sur le cercle* C et que deux figures transformées réciproques sont *symétriques par rapport à ce cercle*.

Cela posé, il est clair que les deux triangles ACD, ABC sont symétriques par rapport au cercle AC. Il suit de là que les angles curvilignes CAD et CAB, ACD et ACB, ABC et ADC sont égaux et par conséquent que le triangle ABC a ses trois angles respectivement égaux à $\frac{\pi}{\alpha}$, $\frac{\pi}{\beta}$, $\frac{\pi}{\gamma}$.

Soit maintenant R_1 un quadrilatère limitrophe de R_0 le long d'un de ses côtés, de AB par exemple; ces deux polygones seront symétriques par rapport au cercle AB.

Ceci nous conduit, dans le cas particulier qui nous occupe, à une construction très simple du système des polygones R.

On construira d'abord un triangle ABC dont les trois angles seront respectivement $\frac{\pi}{\alpha}$, $\frac{\pi}{\beta}$, $\frac{\pi}{\gamma}$; on peut construire une infinité de pareils triangles, mais ils sont tous congruents entre eux; on construira alors les triangles symétriques de ABC par rapport à leurs côtés restés libres et ainsi de suite. On partagera ainsi le plan en une infinité de triangles tous congruents à ABC ou à ACD et en les réunissant deux à deux, on aura partagé le plan en une infinité de quadrilatères congruents à $R_0 = ABCD$.

Qu'arrivera-t-il si l'un des nombres entiers α, β, γ devient infini; supposons par exemple que ce soit γ qui devienne infini; l'angle C qui était égal à $\frac{2\pi}{\gamma}$ deviendra nul; le cycle formé par le sommet C cessera d'être de la première catégorie pour devenir de la troisième sous-catégorie. R_0 se composerait encore de deux triangles ABC, ADC symétriques par rapport au cercle AC. Les deux côtés AC et BC sont des arcs de cercle qui sont tangents en un point C situé

sur X; le côté AB est aussi un arc de cercle coupant AC et BC sous des angles $\frac{\pi}{\alpha}$ et $\frac{\pi}{\beta}$.

Supposons en particulier :

$$\alpha = 3, \qquad \beta = 2.$$

Supposons de plus, pour achever de déterminer le triangle ABC, que les côtés AC et BC se réduisent à deux droites perpendiculaires à X de telle façon que le point C soit rejeté à l'infini; que la droite BC prolongée vienne passer par l'origine O; que la distance des deux parallèles AC et BC soit égale à $\frac{1}{2}$. Le cercle AB aura alors pour centre o et pour rayon 1. On retombera ainsi sur le *Fundamentaldreieck* de M. Klein (*Mathematische Annalen*, Bd. XIV). Le groupe fuchsien correspondant est extrêmement remarquable; il se compose de toutes les substitutions $\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$ telles que a, b, c, d étant entiers, on ait $ad - bc = 1$. C'est la considération de ce groupe et des sous-groupes qui y sont contenus qui est le fondement des recherches de M. Klein sur les fonctions modulaires.

Exemple II (16, 25, 34) :

C'est l'exemple I du paragraphe V. Le polygone R_0 est un hexagone ABCDEF et les sommets forment quatre cycles distincts formés respectivement des sommets A; B et F; C et E; D; les angles curvilignes A, B + F, C + E, D doivent être respectivement égaux à $\frac{2\pi}{\alpha}$, $\frac{2\pi}{\beta}$, $\frac{2\pi}{\gamma}$, $\frac{2\pi}{\delta}$; α, β, γ, δ étant des nombres entiers positifs ou infinis.

Un cas particulier intéressant est celui où l'hexagone se décompose en deux quadrilatères ABCD, ADEF, symétriques par rapport au cercle AD. Dans ce cas, on a, pour les angles curvilignes de ces deux quadrilatères, les valeurs suivantes :

$$BAD = DAF = \frac{\pi}{\alpha}; \qquad CDA = EDA = \frac{\pi}{\delta};$$

$$B = F = \frac{\pi}{\beta}; \qquad C = E = \frac{\pi}{\gamma}.$$

Pour construire tous les hexagones R, on pourra alors opérer comme dans l'exemple précédent; on construira le quadrilatère ABCD, puis les quadrilatères symétriques par rapport à chacun de ses côtés, puis les quadrilatères symétriques de ceux-ci par rapport à chacun de leurs côtés, et ainsi de suite.

Considérons maintenant un exemple plus général. Supposons que R_0 soit un polygone de $2n$ côtés de la première sorte dont les sommets soient successive-

vement $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}, B_n, B_{n-1}, \ldots, B_2$. Supposons que les côtés A_1A_2 et A_1B_2, A_2A_3 et B_2B_3, $\ldots$, $A_{n-1}A_n$ et $B_{n-1}B_n$, A_nA_{n+1} et B_nA_{n+1} soient conjugués. Les sommets se répartiront en $n+1$ cycles :

$$A_1;\quad A_2,\ B_2;\quad A_3,\ B_3;\quad \ldots;\quad A_{n-1},\ B_{n-1};\quad A_n,\ B_n;\quad A_{n+1}$$

et le polygone R_0 s'écrira, dans le système de notation adopté :

$$(1, 2n, 2, 2n-1, 3, 2n-2, \ldots, n-1, n+2, n, n+1).$$

Dans un certain cas particulier, ce polygone R_0 se divisera en deux moitiés $A_1A_2A_3\ldots A_{n+1}$ et $A_1B_2B_3\ldots B_nA_{n+1}$ symétriques par rapport au cercle A_1A_{n+1}. Chacune de ces moitiés est un polygone curviligne dont les côtés ont leurs centres sur X et dont les angles sont des parties aliquotes de π. Pour construire tous les polygones R, il suffit de partir de $A_1A_2A_3\ldots A_{n+1}$, de construire les polygones symétriques de celui-ci par rapport à l'un de ses côtés, puis les polygones symétriques de ceux-ci par rapport à chacun de leurs côtés, et ainsi de suite.

On pourrait citer un grand nombre d'autres exemples de polygones générateurs de groupes fuchsiens. Parlons seulement des exemples déjà cités au paragraphe V. Avec le mode de notation adopté, les polygones R_0 des exemples II, III, IV et V s'écriraient :

(14, 25, 36),
(15, 26, 37, 48),
(13, 24. 57. 68),
(13, 57; 2468).

Quelles sont les conditions auxquelles dans ces quatre exemples doit satisfaire le polygone R_0 pour donner naissance à un groupe fuchsien?

Dans les trois premiers exemples les côtés conjugués doivent être congruents. De plus, dans l'exemple II, la somme des angles de rang pair, comme celle des angles de rang impair, doit être une partie aliquote de 2π; dans les exemples III et IV c'est la somme de tous les angles qui doit diviser 2π.

Dans l'exemple V, le polygone R_0 n'est assujetti à *aucune* condition.

VIII. — Classification en genres.

J'ai fait voir dans ce qui précède comment on pouvait partager la partie du plan qui est au-dessus de X en une infinité de polygones curvilignes R

congruents entre eux. Envisageons maintenant la partie du plan qui est au-dessous de X, et dans cette partie du plan les polygones curvilignes R'_0, R'_1, ... qui sont respectivement symétriques de R_0, R_1, ... par rapport à X. Il est clair que si R_i est le transformé de R_0 par une certaine substitution $f_i(z)$ du groupe G, R'_i sera le transformé de R'_0 par cette même substitution. Les substitutions du groupe G qui transforment R_0 en R_1, R_2, ... transformeront donc de même R'_0 en R'_1, R'_2, ... Mais plusieurs cas sont à considérer: si R_0 n'a pas de sommet de la quatrième sous-catégorie, l'ensemble des polygones R et R′ recouvre tout le plan; si, au contraire, nous avons des sommets de cette sous-catégorie, les polygones R et R′ laissent non recouvertes les régions situées à l'intérieur d'une infinité de cercles ayant leurs centres sur X (¹).

Voici une seconde distinction plus importante pour ce qui va suivre. Supposons que le groupe G soit de la première, de la deuxième ou de la sixième famille, nous n'aurons ni sommet de la troisième catégorie, ni côté de la deuxième sorte. Le polygone R_0 n'ayant pas pour côté de segment de X sera complètement séparé de son symétrique R'_0 ou bien confinera à ce polygone par un sommet seulement (s'il a des sommets de la deuxième catégorie) et non par tout un côté. Supposons, au contraire, que le groupe G soit de la troisième, de la quatrième, de la cinquième ou de la septième famille, le polygone R_0 aura un ou plusieurs côtés de la deuxième sorte et confinera à son symétrique R'_0 tout le long de ces côtés. Supposons qu'on supprime ces côtés de la deuxième sorte qui servent de frontière commune à R_0 et à R'_0 : on pourra considérer l'ensemble des deux figures $R_0 + R'_0$ comme une seule région qui sera limitée seulement par des arcs de cercle ayant leurs centres sur X, c'est-à-dire par les côtés de la première sorte de R_0 et ceux de R'_0. L'ensemble de ces arcs de cercle formera en général plusieurs courbes fermées séparées.

Nous allons maintenant pouvoir parler d'une nouvelle classification des groupes fuchsiens. Considérons d'abord un groupe de la première, de la deuxième ou de la sixième famille : le polygone R_0 n'aura pas de côté de la deuxième sorte; par conséquent les points du périmètre de R_0 seront correspondants deux à deux, puisque à chaque point d'un côté de la première sorte correspond un point de son conjugué; les points intérieurs à R_0 n'auront aucun correspondant ni dans ce polygone, ni sur son périmètre; enfin tous les sommets d'un même cycle seront correspondants. Supposons qu'on découpe

(¹) *Voir* la note de la page 143. N. E. N.

le polygone R_0, puis qu'on le replie en le déformant d'une manière continue et de telle façon que les points correspondants de son périmètre viennent se coller l'un contre l'autre; après cette déformation, R_0 sera devenu une surface fermée. Si, par exemple, on reprend le quadrilatère ABCD de l'exemple I du paragraphe précédent et si, après l'avoir découpé, on le replie en le déformant de telle sorte que AB vienne se coller entre AD, puis BC contre CD, R_0 aura pris l'aspect d'une surface fermée convexe.

Considérons maintenant un quadrilatère ABCD du système (13, 24) de telle sorte que AB soit conjugué de DC et BC de AD. Replions le quadrilatère de façon à coller AB contre DC, il prendra l'aspect d'une sorte de cylindre ouvert par les deux bouts, les côtés BC et AD étant restés libres, mais étant devenus des courbes fermées; si l'on colle ensuite AC contre BD, le quadrilatère prendra l'aspect d'une sorte d'anneau fermé.

On sait que les surfaces fermées sont susceptibles d'être classées en genres de la manière suivante : sur une sphère, par exemple, on ne peut tracer un cycle fermé sans subdiviser la surface de la sphère en deux régions distinctes; il n'en est pas de même sur un tore dont un cercle méridien, par exemple, ne subdivise pas la surface en deux régions distinctes; mais on ne pourrait tracer sur le tore deux cycles fermés séparés sans obtenir une semblable subdivision.

Le genre d'une surface fermée est alors le nombre maximum des cycles fermés séparés que l'on peut tracer sur la surface sans la subdiviser en deux régions distinctes. Ainsi, une surface fermée dans laquelle on aurait percé p trous serait de genre p.

Le genre d'un groupe fuchsien sera le genre de la surface fermée, obtenue comme il vient d'être dit par la déformation de R_0.

Comment obtenir l'expression de ce genre?

Supposons qu'on ait subdivisé une surface de genre p en F polygones curvilignes, que le nombre total des côtés soit A et celui des sommets S, on aura la relation

$$F + S - A = -2p + 2.$$

Reprenons le polygone R_0; soient $2n$ le nombre de ses côtés de la première sorte et q celui des cycles fermés. Après la déformation, les côtés étant venus se coller l'un contre l'autre deux à deux, le nombre des côtés distincts restants sera n; de même le nombre des sommets distincts restants sera q.

On aura donc

$$F = 1, \quad A = n, \quad S = q,$$

d'où

$$q + 1 - n = 2 - 2p$$

ou

$$p = \frac{n + 1 - q}{2}.$$

Reprenons les exemples I et II du paragraphe précédent; nous aurons

$$q = n + 1,$$

d'où

$$p = 0.$$

Je vais donner une autre application de la règle qui précède.

Supposons que le polygone R_0 ait $2n$ côtés de la première sorte et de telle façon que les côtés opposés soient conjugués. Pour trouver le genre du groupe fuchsien correspondant, il faut chercher le nombre des cycles entre lesquels se répartissent les $2n$ sommets. En appliquant la règle du paragraphe V, on trouve que tous les sommets appartiennent à un même cycle si n est pair, et que, si n est impair, on a deux cycles formés, l'un de tous les sommets de rang pair, l'autre de tous les sommets de rang impair. On a donc

$$q = 1 \quad \text{ou} \quad 2$$

selon que n est pair ou impair, et par conséquent

$$p = \frac{n}{2}$$

si n est pair, et

$$p = \frac{n - 1}{2}$$

si n est impair.

Supposons maintenant que le polygone R_0 admette des côtés de la deuxième sorte; il sera contigu tout le long de ces côtés à R'_0, de sorte que la région $R_0 + R'_0$ sera d'une seule pièce; les points situés à l'intérieur de cette région ne pourront être correspondants à aucun autre point de la région; les points du périmètre, qui appartiendront tous à des côtés de la première sorte de R_0 ou de R'_0, seront correspondants deux à deux; enfin les sommets d'un même cycle seront des points correspondants. Découpons maintenant la région $R_0 + R'_0$ et replions-la en la déformant de telle façon que les points correspondants de son périmètre viennent se coller l'un contre l'autre. Le genre du groupe fuchsien sera par définition celui de la surface fermée ainsi obtenue.

Soient encore $2n$ le nombre des côtés de la première sorte de R_0, q celui de ses cycles fermés; R'_0 aura de même $2n$ côtés de la première sorte et q cycles

fermés. Supposons que nous ayons h côtés de la deuxième sorte et par conséquent h cycles ouverts qui seront communs à R_0 et à R'_0.

Reprenons la formule

$$F + S - A = 2 - 2p.$$

Nous aurons $F = 2$, car nous avons deux polygones R_0 et R'_0; nous aurons $A = 2n + h$, car nous avons n paires de côtés de la première sorte provenant de R_0, n paires de côtés de la première sorte provenant de R'_0 et h côtés de la deuxième sorte; enfin on aura $S = 2q + h$, puisque nous avons en tout $2q$ cycles fermés et h cycles ouverts.

Il vient donc

$$p = n - q.$$

Supposons par exemple que R_0 soit de la troisième famille, c'est-à-dire que tous ses sommets soient de la troisième catégorie. On a alors

$$q = 0, \qquad p = n.$$

Ainsi, dans l'exemple V du paragraphe V, le genre est égal à 2.

Comme second exemple, je prends un polynome R_0 dont la distribution des côtés est donnée par la formule suivante :

$$(15, 24; 3)$$

ou, plus généralement,

$$(1.2n+1,\ 2.2n,\ 3.2n-1,\ \ldots,\ n.n+2;\ n+1),$$

de telle sorte que le $(n+1)^{\text{ième}}$ côté soit seul de la deuxième sorte et que les côtés d'ordre m et $2n+2-m$ soient conjugués. On aura dans ce cas

$$q = n,$$

d'où

$$p = 0,$$

IX. — Simplification du polygone générateur.

Nous avons vu au commencement du paragraphe IV que les régions R_0 ne sont pas complètement définies par cette condition que chacune d'elles ne contient qu'un seul point correspondant à un point z donné. Nous avons ensuite imposé à ces régions une condition de plus, celle de se réduire à des polygones curvilignes ayant pour côtés des arcs de cercle et des segments de X. Mais les régions R_0 (ou *polygones générateurs*) ne sont pas encore par là complètement déterminées. En effet, nous avons vu qu'on pouvait ajouter

à R_0 une région quelconque S_0, à la condition d'en retrancher une région S_p transformée de S_0 par une des substitutions du groupe fuchsien, et que la région ainsi obtenue $R_0 + S_0 - S_p$ pouvait servir de la même façon que R_0 à engendrer ce groupe. Si les régions R_0, S_0 et S_p sont contiguës et si elles se réduisent toutes trois à des polygones normaux, c'est-à-dire dont les côtés sont des segments de X ou des arcs de cercle ayant leurs centres sur X, la région résultante $R_0 + S_0 - S_p$ est également un polygone normal. Il suit de là qu'un même groupe fuchsien peut être engendré par une infinité de polygones générateurs R_0 et qu'on peut profiter de cette indétermination pour simplifier ce polygone.

Voici comment peut s'effectuer une pareille simplification. Joignons deux points A et B du périmètre de R_0 par un arc de cercle ayant son centre sur X, de façon à diviser ce polygone en deux autres S_0 et T_0; considérons deux côtés conjugués CD et EF de R_0 et supposons que CD appartienne tout entier au périmètre de S_0 et EF à celui de T_0. Soit R_1 le polygone qui est limitrophe de R_0 le long de EF et supposons-le décomposé en deux polygones S_1 et T_1 respectivement congruents à S_0 et T_0. Le polygone $R'_0 = S_1 + T_0$ pourra servir, aussi bien que R_0, de polygone générateur pour le groupe fuchsien G. Il peut se faire que la considération de R'_0 soit plus avantageuse que celle de R_0, ou bien encore qu'en faisant sur R'_0 une opération analogue à celle qu'on vient de faire sur R_0, on arrive à un polygone R''_0 plus simple que les deux autres.

Dans chaque cas particulier, on se laissera guider par les circonstances du problème, aussi ne veux-je pas insister plus longuement sur ce point. Je me bornerai à quelques exemples, en reprenant les notations du paragraphe VII.

1° Un polygone R_0 du système (16, 23, 45) peut toujours être ramené à un polygone du système (16, 25, 34).

2° Un polygone du système (12, 34, 56, 78) peut toujours être ramené à un polygone du système (18, 27, 36, 45).

3° Un octogone du système (13, 24, 57, 68) peut toujours être ramené à un octogone du système (15, 26, 37, 48).

Quelles sont, dans cette transformation des polygones curvilignes R_0, les propriétés de ce polygone qui demeurent invariables?

1° La famille du polygone R_0 ne change pas, sauf une exception dont je parlerai

2° Son genre ne change pas non plus.

3° Le nombre des cycles fermés de la troisième sous-catégorie ne varie pas.

4° Il en est de même du nombre des cycles fermés de la quatrième sous-catégorie.

5° Le nombre des cycles fermés de la deuxième sous-catégorie ne varie pas non plus. On a vu que la somme des angles correspondants aux divers sommets d'un pareil cycle était égale à $\frac{2\pi}{p}$, p étant un nombre entier supérieur à l'unité. La valeur de ce nombre p demeure également invariable.

6° On peut au contraire, en général, augmenter ou diminuer à volonté le nombre des cycles fermés de la première sous-catégorie, qui sont tels que la somme des angles qui correspondent à tous les sommets du cycle est égale à 2π.

X. — Isomorphisme.

Nous avons vu au commencement du paragraphe III qu'un groupe fuchsien H est isomorphe à un autre groupe fuchsien G si le nombre des substitutions fondamentales est le même et si de plus toutes les relations de la forme (6) (§ III) qui existent entre les substitutions de G subsistent entre celles de H. Pour reconnaître l'isomorphisme de deux groupes donnés, nous sommes donc amenés à chercher les relations de la forme (6) (§ III) qui existent entre les substitutions d'un groupe donné et en particulier les *relations fondamentales* dont toutes les autres ne sont que des combinaisons.

Nous avons vu au paragraphe III qu'on obtenait les relations de la forme (6) de la manière suivante : on décrit à partir d'un point A intérieur à R_0 un contour fermé quelconque AMA ne sortant pas de la région du plan située au-dessus de X. Supposons que ce contour traverse successivement des régions R_0, R_{α_1}, R_{β_1}, ..., $R_{\beta_{s-1}}$, et enfin une région R_{β_s} se confondant avec R_0, qu'il passe de la région $R_{\beta_{s-1}}$ dans la région R_{β_s} en franchissant un côté de $R_{\beta_{s-1}}$ qui est l'homologue de celui des côtés de R_0 qui sert de frontière commune à cette région et à R_{α_s}. Nous pourrons écrire la relation identique

$$z = f_{\alpha_1}[f_{\beta_1}(f_{\alpha_2}\dots(f_{\alpha_s}(z))\dots]$$

qui est de la forme (6) et l'on obtiendra de la sorte toutes les relations de cette forme. Mais, si l'on ne veut écrire que les relations fondamentales, il ne sera pas nécessaire de décrire tous les contours AMA possibles; on se bornera aux contours infiniment petits qui enveloppent les sommets de R_0. Envisageons donc successivement les divers sommets de R_0 et décrivons autour de chacun

d'eux un contour infinitésimal. Comme ce contour AMA ne devra pas sortir de la partie du plan située au-dessus de X, on ne pourra décrire de semblable contour autour des sommets de R_0 qui sont situés sur cet axe X lui-même. Les seuls sommets du polygone R_0 que nous ayons à envisager sont donc les sommets de la première catégorie.

Je suppose que les différents côtés de R_0 soient numérotés de telle sorte qu'en suivant, dans un sens convenable, le périmètre de ce polygone on rencontre successivement les côtés C_1, C_2, C_3, ..., C_q; q étant le nombre total des côtés; A_1 sera le sommet situé entre C_q et C_1; A_2 le sommet situé entre C_1 et C_2, etc. En général, A_i sera le sommet situé entre C_{i-1} et C_i. Si C_i est de la première sorte, la région limitrophe de R_0 le long de C_i s'appellera R_i et la substitution fondamentale correspondante sera

$$[z, f_i(z)].$$

Considérons l'un quelconque des sommets de la première catégorie que j'appelle A_{α_1}. Ce sommet fera partie d'un certain cycle de la première catégorie; on trouvera les autres sommets de ce cycle en appliquant la règle du paragraphe V. Supposons que cette règle donne successivement les sommets

$$A_{\alpha_1},\quad A_{\alpha_2},\quad \dots,\quad A_{\alpha_p}$$

et précisément dans cet ordre. Supposons que la somme des angles correspondants à ces sommets soit $\frac{2\pi}{\lambda}$, λ sera un nombre entier. Posons, pour abréger,

$$\begin{gathered} F(z) = f_{\alpha_1}[f_{\alpha_2}[f_{\alpha_3}\dots[f_{\alpha_p}(z)]\dots], \\ F[F(z)] = F^2(z), \qquad F[F^2(z)] = F^3(z), \qquad \dots, \\ F[F^{\lambda-1}(z)] = F^\lambda(z). \end{gathered}$$

La relation fondamentale, à laquelle conduira, d'après la règle exposée plus haut, un contour infinitésimal décrit autour de A_{α_1}, sera

$$z = F^\lambda(z).$$

Les sommets A_{α_2}, A_{α_3}, ..., A_{α_p} qui appartiennent au même cycle que A_{α_1} conduisent à la même relation. Donc :

Le nombre des relations fondamentales qui existent entre les substitutions fondamentales d'un groupe fuchsien G *est précisément celui des cycles de la première catégorie du polygone* R_0 *correspondant.*

Or les polygones des deuxième, troisième et quatrième familles n'admettent pas de cycle de cette catégorie. Donc il n'y a aucune relation fondamentale entre

les substitutions des groupes de ces familles, et les relations de la forme (6) que l'on pourrait trouver entre ces substitutions se réduisent toutes à des identités.

Voici une première conséquence que l'on peut tirer de ce fait : *Tout groupe* H *dérivé de n substitutions fondamentales est isomorphe à un groupe fuchsien* G *de la deuxième, de la troisième ou de la quatrième famille, pourvu que ce groupe soit également dérivé de n substitutions fondamentales.* En effet, la première condition de l'isomorphisme qui exige que le nombre des substitutions fondamentales soit le même est remplie, et la seconde qui exige que toute relation entre les substitutions de G subsiste entre celles de H est satisfaite d'elle-même, puisqu'il n'existe pas de pareille relation. Seulement une distinction est à faire. S'il y a des relations de la forme (6) entre les substitutions de H, G n'est pas isomorphe à H et par conséquent l'isomorphisme est mériédrique. Si, au contraire, il n'y a pas de semblable relation, l'isomorphisme est réciproque et par conséquent holoédrique. Il en résulte que *deux groupes fuchsiens de la deuxième, de la troisième ou de la quatrième famille sont holoédriquement isomorphes pourvu que le nombre des substitutions fondamentales soit le même, c'est-à-dire pourvu que les deux polygones* R_0 *correspondants aient un même nombre de côtés de la première sorte.*

Considérons maintenant deux polygones R_0 et R'_0 quelconques, mais dont les côtés de la première et de la deuxième sorte soient distribués de la même manière, de telle sorte qu'ils soient désignés par la même formule, si l'on emploie la notation exposée au commencement du paragraphe VII. Ces deux polygones appartiendront évidemment au même genre et à la même famille, et le nombre de cycles, formés par les sommets des deux polygones, est le même, de telle façon qu'à chaque cycle de R_0 corresponde un cycle de R'_0 et réciproquement. D'ailleurs, à un cycle fermé du premier polygone, correspondra dans le second polygone un cycle également fermé. Si, de plus, la somme des angles de chaque cycle fermé de R_0 est la même que la somme des angles du cycle correspondant de R'_0, les deux groupes fuchsiens engendrés par ces deux polygones seront holoédriquement isomorphes.

XI. — Formation effective des groupes fuchsiens.

Un groupe fuchsien est complètement déterminé quand on connaît ses substitutions fondamentales, qu'il suffit de combiner de toutes les manières

possibles pour obtenir toutes les substitutions du groupe. Former un groupe fuchsien, c'est donc calculer les coefficients de ses substitutions fondamentales. Ce problème ne présente aucune difficulté. Supposons, en effet, que l'on ait construit le polygone R_0 correspondant au groupe à former et que l'on ait calculé les coordonnées, et par conséquent les affixes de tous ses sommets. Les substitutions fondamentales cherchées sont celles qui changent chaque côté de la première sorte en son conjugué. Soient donc α, β et γ, δ les affixes des sommets de deux côtés conjugués de R_0. Supposons d'abord que les quantités α, β, γ, δ soient toutes quatre imaginaires, de telle façon qu'aucun de ces sommets ne soit situé sur X. On devra avoir, en appelant α', β', γ', δ' les quantités imaginaires conjuguées de α, β, γ, δ,

$$(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta),$$

c'est-à-dire

$$\frac{\alpha-\alpha'}{\alpha-\beta'}\frac{\beta-\beta'}{\beta-\alpha'} = \frac{\gamma-\gamma'}{\gamma-\delta'}\frac{\delta-\delta'}{\delta-\gamma'}. \tag{1}$$

La substitution réelle qui change $\alpha\beta$ en $\gamma\delta$ est alors parfaitement déterminée; pour l'écrire en mettant en évidence la réalité des coefficients, je poserai :

$$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, \quad \beta = \beta_1 + i\beta_2, \quad \gamma = \gamma_1 + i\gamma_2, \quad \delta = \delta_1 + i\delta_2,$$
$$\alpha' = \alpha_1 - i\alpha_2, \quad \beta' = \beta_1 - i\beta_2, \quad \gamma' = \gamma_1 - i\gamma_2, \quad \delta' = \delta_1 - i\delta_2.$$

La substitution cherchée s'écrira alors

$$\left(z, \frac{Az+B}{Cz+D}\right)$$

où :

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_1\gamma_1 - \alpha_2\gamma_2 & \gamma_1 & 1 \\ \beta_1\delta_1 - \beta_2\delta_2 & \delta_1 & 1 \\ \beta_1\delta_2 + \beta_2\delta_1 & \delta_2 & 0 \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} \alpha_1\gamma_1 - \alpha_2\gamma_2 & \alpha_1 & \gamma_1 \\ \beta_1\delta_1 - \beta_2\delta_2 & \beta_1 & \delta_1 \\ \beta_1\delta_2 + \beta_2\delta_1 & \beta_2 & \delta_2 \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & 1 \\ \beta_1 & \delta_1 & 1 \\ \beta_2 & \delta_2 & 0 \end{vmatrix}, \qquad D = \begin{vmatrix} \alpha_1\gamma_1 - \alpha_2\gamma_2 & \alpha_1 & 1 \\ \beta_1\delta_1 - \beta_2\delta_2 & \beta_1 & 1 \\ \beta_1\delta_2 + \beta_2\delta_1 & \beta_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Mais on peut faire encore deux hypothèses; supposons que α et γ soient réels, tandis que β et δ restent imaginaires; la condition (1) n'a plus alors de raison d'être; la substitution réelle qui change $\alpha\beta$ en $\gamma\delta$ est encore parfaitement déterminée et elle s'écrit

$$\left(z, \frac{Az+B}{Cz+D}\right);$$

les coefficients A, B, C, D ont la même expression que plus haut, mais il faut remarquer que α_2 et γ_2 sont nuls.

Supposons maintenant que les quatre quantités α, β, γ, δ soient réelles, la substitution qui change $\alpha\beta$ en $\gamma\delta$ ne sera plus déterminée. Dans l'expression de ses coefficients entrera un paramètre arbitraire h. Elle s'écrira

$$\left(z, \frac{Az+B}{Cz+D}\right)$$

et les coefficients A, B, C, D auront pour expression :

$$A=\begin{vmatrix} \alpha\gamma & \gamma & 1 \\ \beta\delta & \delta & 1 \\ h & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad B=\begin{vmatrix} \alpha\gamma & \alpha & \gamma \\ \beta\delta & \beta & \delta \\ h & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$C=\begin{vmatrix} \alpha & \gamma & 1 \\ \beta & \delta & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad D=\begin{vmatrix} \alpha\gamma & \alpha & 1 \\ \beta\delta & \beta & 1 \\ h & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

Les quantités réelles α, β, γ, δ pour pouvoir être les sommets d'un polygone R_0 sont assujetties à l'inégalité

$$\left[\frac{1}{\delta-\alpha}-\frac{1}{\gamma-\alpha}\right]\left[\frac{1}{\delta-\alpha}-\frac{1}{\beta-\alpha}\right]<0.$$

Quant à h, c'est un paramètre arbitraire qui est supposé réel et assujetti à l'inégalité

$$(\gamma+h)(\delta+h)(\delta-\gamma)(\beta-\alpha)>0$$

qui exprime que le déterminant AD — BC est positif.

Ainsi, quand on connaît les affixes des sommets de R_0, on peut calculer les coefficients des substitutions fondamentales de G. Il s'agit donc de choisir ces affixes de telle façon que le polygone R_0 satisfasse aux conditions du paragraphe VI qui sont nécessaires pour qu'il donne naissance à un groupe fuchsien. C'est là un problème purement algébrique et qui ne présente aucune difficulté. La grande variété des cas possibles ne me permettra pas de les examiner tous en détail, ce qui m'entraînerait à des répétitions et à des longueurs inutiles. Je me bornerai donc à envisager quelques exemples.

PREMIER EXEMPLE.

Cherchons d'abord à former les groupes fuchsiens de la troisième famille dérivés de n substitutions fondamentales. Le polygone R_0 correspondant aura $2n$ côtés de la première sorte et $2n$ de la deuxième. Pour déterminer complètement un pareil polygone, il faut s'imposer arbitrairement $4n$ conditions. Mais nous avons vu au paragraphe IX qu'un même groupe G peut être engendré par

une infinité de polygones R_0. Si l'on tient compte de cette circonstance, on reconnaîtra aisément que, pour déterminer complètement le groupe de la troisième famille dérivé de n substitutions fondamentales, il faut s'imposer arbitrairement $3n$ conditions. Or c'est là précisément le nombre total des coefficients de n substitutions réelles quelconques. Il ne s'ensuit pas qu'il suffise de prendre au hasard n substitutions réelles pour que le groupe qui en dérive soit un groupe fuchsien de la troisième famille; mais *les coefficients de ces substitutions ne seront assujettis à aucune condition d'égalité; ils devront seulement satisfaire à certaines inégalités.*

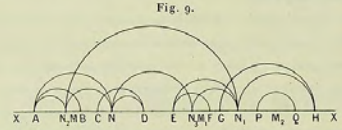
Quelles sont ces inégalités? tel est le problème qu'il nous reste à résoudre. On trouve d'abord sans peine que toutes les substitutions doivent être hyperboliques et par conséquent leurs points doubles doivent être réels et situés sur X. On peut énoncer un résultat général au sujet de la distribution de ces points doubles sur X. En effet, considérons deux côtés conjugués *ab* et *cd* de R_0 et supposons qu'ils soient de la première sorte et appartiennent à la même paire. Supposons de plus pour fixer les idées que le point ∞ fasse partie de R_0 de telle façon que ce polygone soit la région du plan située au-dessus de X et extérieure aux différents cercles qui forment ses côtés de la première sorte. Si cela n'était pas, on ferait un changement convenable de la variable. Il y aura une substitution fondamentale qui changera *ab* en *cd* et *ses deux points doubles seront situés l'un sur le segment ab de* X, *l'autre sur le segment cd.*

Pour pousser plus loin l'étude des inégalités qui ont lieu entre les coefficients des substitutions fondamentales d'un groupe de la troisième famille, je vais prendre un exemple particulier, à savoir l'octogone de l'exemple V du paragraphe V. La méthode que j'emploierai s'étendrait d'ailleurs au cas le plus général.

Les deux substitutions fondamentales changent AB en DC et EF en HG. Considérons d'abord la substitution S qui change AB en DC; ses deux points doubles M et N sont situés respectivement sur les segments AB et CD de l'axe X. Décrivons un cercle sur AN comme diamètre, et envisageons le triangle curviligne ABN; envisageons également le cercle décrit sur DN comme diamètre et le triangle curviligne DCN; la substitution S changera le triangle ABN en DCN; nous pouvons donc en vertu des principes du paragraphe IX remplacer l'octogone R_0 = ABCDEFGH par l'heptagone R_0' = ANDEFGH. Envisageons de même la substitution S_1 qui change HG en EF et ses deux points doubles M_1 et N_1 situés l'un sur le segment EF, l'autre sur le segment GH.

Par un raisonnement tout semblable à celui qui précède, on verrait que l'on peut remplacer l'heptagone R'_0 par l'hexagone $R''_0 = ANDEN_1H$. Remarquons que R''_0 est de la quatrième famille et du deuxième ordre de cette famille, tandis que R_0 était de la troisième famille. C'est là l'exception que j'avais annoncée aux principes du paragraphe IX; on peut simplifier le polygone générateur R_0 de façon à ramener un polygone de la troisième famille à un polygone du deuxième ordre de la quatrième ou même de la deuxième famille, mais jamais à un polygone du premier ordre de la quatrième ou de

Fig. 9.



la deuxième famille. Envisageons maintenant l'opération S_2 qui consiste à faire d'abord la substitution S_1 puis la substitution inverse de S_1. La substitution S change AN en DN, et la substitution inverse de S_1 change DN en un certain cercle QP intérieur à N_1H. La substitution S_2 change donc AN en QP et ses deux points doubles N_2 et M_2 sont situés, l'un sur le segment AN, l'autre sur le segment PQ. La substitution S change N_2 en un certain point N_3; la substitution S_1 devra changer aussi N_2 en N_3; N_3 est donc situé sur le segment M_1E. Décrivons des cercles sur N_2N, N_2N_1, N_1N_3, NN_3 comme diamètres; la substitution S change N_2N en N_3N, la substitution S_1 change N_2N_1 en N_3N_1 et cela nous permet, en vertu des principes du paragraphe IX de remplacer l'octogone R_0 par le quadrilatère $R''_0 = N_1N_2NN_3$. Ce quadrilatère est de la deuxième famille et du deuxième ordre de cette famille (1).

Nous allons maintenant pouvoir trouver les inégalités qui ont lieu entre les coefficients de S et de S_1; on peut toujours supposer que les points doubles de S_1 sont o et ∞ de telle sorte que

$$N_1 = o, \qquad M_1 = \infty,$$

car si cette condition n'était pas remplie, il suffirait d'un changement très simple de variable pour être ramené au cas où l'on a $N_1 = o$, $M_1 = \infty$.

(1) *Voir* la Note à la fin du Volume. N. E. N.

Les deux substitutions s'écrivent alors :

$$S = \left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right), \qquad S_1 = (z, Kz).$$

K est essentiellement positif et plus grand que 1. De plus, on peut toujours supposer que c est positif sans quoi on changerait tous les signes des quatre quantités a, b, c, d. Les points M et N sont les points doubles de S et par conséquent les racines de l'équation

$$cz^2 + (d-a)z - b = o. \tag{1}$$

Les points M_2 et N_2 sont les points doubles de la substitution

$$\left(z, \frac{az+b}{K(cz+d)}\right)$$

ou les racines de l'équation

$$cz^2 + \left(d - \frac{a}{K}\right)z - \frac{b}{K} = o. \tag{2}$$

Le point N_3 et un autre point M_3 sont les points doubles de la substitution

$$\left(z, \frac{az+bK}{cz+dK}\right)$$

et les racines de l'équation

$$cz^2 + (dK-a)z - bK = o. \tag{3}$$

L'inspection de la figure montre que les quantités M, N, M_2, N_2, M_3, N_3 sont toutes réelles et de même signe; positives par exemple; d'où les relations

$$\begin{array}{llll} b<o, & (d-a)^2+4bc>o, & a>d, \\ \dfrac{b}{K}<o, & (dK-a)^2+4Kbc>o, & a>dK, \\ bK<o, & (dK-a)^2+4Kbc>o, & a>dK \end{array}$$

qui se réduisent à

$$b<o, \quad a>dK, \quad (a+d)^2>4, \quad a>d, \quad \left(\frac{a}{\sqrt{K}}+d\sqrt{K}\right)^2>4$$

en tenant compte de

$$ad-bc=1.$$

Exprimons maintenant que M_2 et N_2 sont plus petits et que M_3 et N_3 sont plus grands que M et N. On trouve ainsi les conditions

$$b<o, \quad a^2+bc>1>d^2+bc,$$

$$b<o, \quad \frac{a^2}{K}+bc<1<d^2K+bc, \quad a-dK>a-d>\frac{a}{K}-d.$$

Toutes ces conditions se réduisent aux suivantes :

$$a>0, \quad b<0, \quad d<0, \quad a+d>2,$$
$$\frac{a}{\sqrt{K}}+d\sqrt{K}<-2.$$

Cette méthode s'applique à tous les groupes fuchsiens de la troisième famille. On peut toujours par ce procédé ramener le polygone R_0 à un polygone du deuxième ordre de la deuxième famille. Les sommets de ce nouveau polygone seront connus, car ce seront les points doubles des substitutions fondamentales ou de quelques-unes de leurs combinaisons. Pour trouver les inégalités cherchées, il suffit d'exprimer que ces sommets sont disposés d'une certaine manière.

DEUXIÈME EXEMPLE.

Nous prendrons pour deuxième exemple les groupes de la première famille et du genre 0 et, pour particulariser encore, nous choisirons l'hexagone ABCDEF de l'exemple II du paragraphe VII.

Nous avons ici trois substitutions fondamentales :

S_1 qui change AB en AF,
S_2 qui change BC en FE,
S_3 qui change CD en ED.

Nous envisagerons en outre :

S_4 combinaison de S_2 et de S_1 pris en sens contraire,
S_5 combinaison de S_3 et de S_2 pris en sens contraire.

On peut considérer le groupe comme dérivé de S_1, S_4 et S_5.

Soient a, b, c, d les affixes des points A, B, C, D; a', b', c' d' leurs quantités imaginaires conjuguées; α, β, γ, δ les angles A, B + F, C + E, D qui sont des parties aliquotes de 2π. Les substitutions S_1, S_4, S_5 et S_3^{-1} s'écriront :

$$\left(\frac{z-a}{z-a'}, e^{i\alpha}\frac{z-a}{z-a'}\right), \quad \left(\frac{z-b}{z-b'}, e^{i\beta}\frac{z-b}{z-b'}\right),$$
$$\left(\frac{z-c}{z-c'}, e^{i\gamma}\frac{z-c}{z-c'}\right), \quad \left(\frac{z-d}{z-d'}, e^{i\delta}\frac{z-d}{z-d'}\right).$$

Exprimons que la combinaison des quatre substitutions S_3^{-1}, S_5, S_4, S_1 faites successivement équivaut à la substitution identique (z, z); nous arriverons à trois relations entre a, b, c, d, α, β, γ, δ.

Supposons ces relations satisfaites. Suffiront-elles pour que le groupe dérivé des substitutions S_1, S_5, S_4 soit discontinu? Non, il faudra encore que les

points A, B, C, D puissent former quatre sommets d'un hexagone ABCDEF où les angles

$$A=\alpha, \quad B+F=\beta, \quad C+E=\gamma, \quad D=\delta.$$

Considérons les angles curvilignes du quadrilatère ABCD obtenu en joignant les quatre points A, B, C, D par des arcs de cercle ayant leurs centres sur X. Il faut que les quatre angles A, B, C, D de ce quadrilatère soient respectivement plus petits que α, β, γ, δ; d'où les inégalités

$$(2)\quad \begin{cases} 0<\arg\dfrac{d-a}{d-a'}\dfrac{b-a'}{b-a}<\alpha, \\ 0<\arg\dfrac{a-b}{a-b'}\dfrac{c-b'}{c-b}<\beta, \\ 0<\arg\dfrac{b-c}{b-c'}\dfrac{d-c'}{d-c}<\gamma, \\ 0<\arg\dfrac{c-d}{c-d'}\dfrac{a-d'}{a-d}<\delta. \end{cases}$$

Comment reconnaîtrons-nous maintenant si trois substitutions données S_1, S_4, S_5 peuvent être considérées comme les substitutions fondamentales d'un groupe fuchsien analogue à celui qui nous occupe. On formera la substitution S_3^{-1}, combinaison de la substitution inverse de S_1, de l'inverse de S_4, et de l'inverse de S_5 faites successivement. On calculera les points doubles a, a'; b, b'; c, c'; d, d' de ces quatre substitutions et leurs multiplicateurs $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$, $e^{i\gamma}$, $e^{i\delta}$. Deux conditions devront être remplies : 1° α, β, γ, δ devront être parties aliquotes de 2π; 2° les quantités a, a', b, b', c, c', d, d', α, β, γ, δ devront satisfaire aux inégalités (2).

TROISIÈME EXEMPLE.

Nous prendrons pour troisième exemple les groupes de la deuxième famille, du premier ordre et du genre 0; et parmi ces groupes, nous choisirons encore celui qui est engendré par l'hexagone R_0 = ABCDEF considéré dans l'exemple II du paragraphe VII. Seulement ici cet hexagone devant être de la deuxième famille, tous ses sommets seront sur X. Nous envisagerons, comme dans l'exemple précédent, les substitutions

S_1 qui change AB en AF,
S_2 qui change BC en FE,
S_3 qui change DC en DE,
S_4 combinaison de S_2 et de l'inverse de S_1,
S_5 combinaison de S_3 et de l'inverse de S_2.

Soient a, b, c, d, e, f les affixes des sommets de R_0; ces quantités seront

essentiellement réelles. Les substitutions S_1, S_4, S_5 et S_3 devront être paraboliques, puisque le groupe est supposé du premier ordre, et elles s'écriront :

$$S_1 = \left(\frac{1}{z-a}, \frac{1}{z-a} + \frac{1}{f-a} - \frac{1}{b-a}\right),$$
$$S_4 = \left(\frac{1}{z-b}, \frac{1}{z-b} + \frac{1}{h-b} - \frac{1}{c-b}\right),$$
$$S_5 = \left(\frac{1}{z-c}, \frac{1}{z-c} + \frac{1}{b-c} - \frac{1}{k-c}\right),$$
$$S_3 = \left(\frac{1}{z-d}, \frac{1}{z-d} + \frac{1}{e-d} - \frac{1}{c-d}\right),$$

où h et k sont deux quantités définies par les équations

$$\frac{1}{e-a} = \frac{1}{h-a} + \frac{1}{f-a} - \frac{1}{b-a},$$
$$\frac{1}{f-d} = \frac{1}{k-d} + \frac{1}{e-d} - \frac{1}{c-d}.$$

Quelles sont maintenant les conditions pour que les trois substitutions S_1, S_4, S_5 donnent naissance à un groupe fuchsien? Il faut que les six quantités a, b, c, d, e, f se succèdent précisément dans cet ordre circulaire, ou bien dans l'ordre inverse de sorte qu'on doit avoir

$$\frac{1}{b-a} < \frac{1}{c-a} < \frac{1}{d-a} < \frac{1}{e-a} < \frac{1}{f-a} \tag{3}$$

ou bien

$$\frac{1}{b-a} > \frac{1}{c-a} > \frac{1}{d-a} > \frac{1}{e-a} > \frac{1}{f-a}.$$

Exprimons maintenant que la combinaison des substitutions S_3^{-1}, S_5, S_4, S_1 équivaut à la substitution identique, il viendra

$$(b-a)(d-c)(f-e) = (c-b)(e-d)(f-a). \tag{4}$$

REMARQUE.

Dans les deux exemples qui précèdent, il est peut-être avantageux d'envisager, non l'hexagone ABCDEF de l'exemple II du paragraphe VII, qui serait noté (16, 25, 34), mais l'hexagone noté (12, 34, 56) qui lui est équivalent d'après ce qu'on a vu au paragraphe IX.

Soit ABCDEF cet hexagone, les côtés AB et BC, CD et DE, EF et FA seront conjugués. Envisageons les substitutions

S_1 qui change BA en BC,
S_2 qui change DC en DE,
S_3 qui change FE en FA,
S_4 combinaison de S_1, S_2 et S_3.

Ces quatre substitutions seront elliptiques et leurs multiplicateurs seront $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$, $e^{i\gamma}$, $e^{i\delta}$; α, β, γ, δ étant des parties aliquotes de 2π.

B sera l'un des points doubles de S_4, D l'un des points doubles de S_2, F l'un des points doubles de S_3, A l'un des points doubles de S_4; quant aux autres points doubles de ces substitutions, ce seront respectivement les quantités imaginaires conjuguées de B, D, F, A; C sera le transformé de A par S_1, E celui de C par S_2. Pour que le groupe dérivé de S_1, S_2, S_3 soit discontinu, il suffit que l'hexagone curviligne normal ABCDEF soit convexe; d'où les conditions

$$\begin{cases} 0 < \arg \dfrac{d-b}{d-b'} \dfrac{f-b'}{f-b} < \alpha, \\ 0 < \arg \dfrac{f-d}{f-d'} \dfrac{b-d'}{b-d} < \beta, \\ 0 < \arg \dfrac{b-f}{b-f'} \dfrac{d-f'}{d-f} < \gamma. \end{cases} \tag{5}$$

Pour reconnaître si le groupe dérivé de S_1, S_2, S_3 est discontinu, on calculera les points doubles $b, b', d, d', f, f', a, a'$, et les multiplicateurs $e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}, e^{i\delta}$ de S_1, S_2, S_3 et de leur combinaison S_4 et l'on recherchera si ces quantités satisfont aux inégalités (5) et si α, β, γ, δ sont des parties aliquotes de 2π.

Supposons maintenant que l'hexagone *abcdef* ne soit plus de la première, mais de la deuxième famille et du premier ordre de cette famille, de telle façon que les quantités a, b, c, d, e, f soient réelles. Ces quantités devront satisfaire aux inégalités (3), pour que l'hexagone *abcdef* soit convexe. Les substitutions S_1, S_2, S_3 s'écriront :

$$S_1 = \left(\frac{1}{z-b}, \frac{1}{z-b} + \frac{1}{c-b} - \frac{1}{a-b}\right),$$
$$S_2 = \left(\frac{1}{z-d}, \frac{1}{z-d} + \frac{1}{e-d} - \frac{1}{c-d}\right),$$
$$S_3 = \left(\frac{1}{z-f}, \frac{1}{z-f} + \frac{1}{a-f} - \frac{1}{e-f}\right).$$

Si nous exprimons que la combinaison S_4 de S_1, S_2, S_3 est une substitution parabolique, nous trouverons que les quantités a, b, c, d, e, f satisfont à l'égalité (4). Cette égalité jointe aux inégalités (3) est la condition pour que le groupe dérivé de S_1, S_2, S_3 soit discontinu.

QUATRIÈME EXEMPLE.

Comme quatrième exemple nous prendrons un quadrilatère *abcd*, dont les côtés opposés *ab*, *dc* et *bc*, *ad* sont conjugués; les quatre sommets forment un

seul cycle et la somme des angles Σ est une partie aliquote de 2π. Ce quadrilatère engendre un groupe de la première famille et du genre 1. Joignons deux sommets opposés bd par un arc de cercle ayant son centre sur X. Nous obtiendrons ainsi un triangle abd sur les côtés duquel nous marquerons trois points α, β, γ, le premier sur bd, le second sur da, le troisième sur ab et de telle façon que

$$(b, \alpha) = (\alpha, d), \qquad (d, \beta) = (\beta, a), \qquad (a, \gamma) = (\gamma, b).$$

Il existera alors une substitution S_1 qui change αb en αd, une autre S_2 qui change βd en βa et une autre S_3 qui change γa en γb; toutes trois auront pour multiplicateur -1. Le groupe dérivé de S_1, S_2, S_3 sera discontinu et aura pour polygone générateur l'hexagone $b\alpha d\beta a\gamma$ dont les côtés $b\alpha$, αd; $d\beta$, βa; $a\gamma$, γb sont conjugués et situés dans le prolongement l'un de l'autre. C'est donc un cas particulier des groupes engendrés par un hexagone $abcdef$ et étudiés dans la remarque relative à l'exemple précédent.

Les substitutions fondamentales du groupe engendré par le quadrilatère $abcd$ sont S_3 qui change ab en dc et S_6 qui change bc en ad, et il est aisé de voir que S_5 est la combinaison de S_3 et de S_1; S_6 est la combinaison de S_2 et de S_1; d'où la règle suivante pour former tous les groupes fuchsiens dérivés d'un quadrilatère tel que $abcd$:

On prendra trois substitutions S_1, S_2, S_3 de multiplicateur -1 et satisfaisant aux conditions énoncées dans la remarque relative à l'exemple précédent; on combinera S_3 et S_1, ainsi que S_2 et S_1 et l'on aura les substitutions fondamentales du groupe cherché.

XII. — Généralisation.

Jusqu'ici nous avons supposé que toutes les substitutions étaient réelles; mais une première généralisation peut être faite immédiatement.

Soit

$$(1) \qquad \left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right)$$

une substitution réelle quelconque; et faisons-lui correspondre la substitution

$$(2) \qquad \left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, \frac{a\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}+b}{c\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}+d}\right),$$

où α, β, γ, δ sont des constantes imaginaires quelconques. Supposons que nous

donnions à α, β, γ, δ des valeurs fixes et que l'on fasse parcourir aux quatre quantités a, b, c, d toutes les valeurs réelles telles que $ad - bc = 1$. Il est clair que les substitutions (2) formeront un groupe; et ce groupe jouira des propriétés suivantes :

1° Ses substitutions n'altéreront pas le cercle dont l'équation est

$$\text{partie imaginaire de } \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} = 0$$

et que j'appellerai *cercle fondamental;*

2° Le transformé d'un point z par une des substitutions (2) sera intérieur ou extérieur au cercle fondamental selon que le point z sera lui-même intérieur ou extérieur à ce cercle.

Nous supposerons par exemple que, si z est intérieur au cercle fondamental, le point $\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ sera au-dessus de X.

Supposons maintenant que l'on égale successivement les coefficients de (1) à ceux des diverses substitutions d'un groupe fuchsien G. On obtiendra ainsi une infinité de substitutions (2) qui formeront un groupe G', et ce groupe sera évidemment discontinu. A ce groupe G correspondra une décomposition de la partie du plan située au-dessus de X en une infinité de polygones normaux R_0, R_1, ..., R_i, ..., tous congruents entre eux. Supposons que $\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ parcoure l'un de ces polygones R_i dont les côtés sont, on l'a vu, ou bien des segments de X ou bien des arcs de cercle ayant leurs centres sur X; le point z parcourra de son côté un certain polygone S_i dont les côtés seront, ou bien des arcs du cercle fondamental, ou bien des arcs de circonférence coupant orthogonalement ce cercle.

Ainsi, de même qu'au groupe G correspondait une division de la partie du plan située au-dessus de X en une infinité de polygones normaux congruents, de même au groupe G' correspondra une division de l'intérieur du cercle fondamental en une infinité de polygones normaux congruents, à la condition d'adopter les dénominations suivantes :

Un polygone normal est un polygone curviligne dont les côtés sont des arcs du cercle fondamental ou bien des arcs de circonférence coupant orthogonalement ce cercle.

Deux figures sont congruentes si l'on passe de l'une à l'autre par une substitution telle que (2), c'est-à-dire par une substitution qui conserve le cercle fondamental. Tout ce qu'on a dit de la distribution des côtés en paires et des

sommets en cycles, et de la classification des polygones normaux en familles, en ordres et en genres, reste vrai comme dans le cas particulier auquel nous nous étions restreints jusqu'ici.

Quelles seront maintenant les conditions pour qu'un polygone normal donne naissance à un groupe discontinu G′? Ce seront les mêmes conditions que nous avons trouvées dans le cas particulier des groupes de substitutions réelles, mais l'énoncé de ces conditions doit être convenablement modifié :

1° La somme des angles des divers sommets correspondant à un même cycle doit être une partie aliquote de 2π;

2° Si ab et cd sont deux côtés conjugués, on devra avoir, comme dans le cas des substitutions réelles,

$$\frac{a-a'}{a-b'}\,\frac{b-b'}{b-a'}=\frac{c-c'}{c-d'}\,\frac{d-d'}{d-c'};$$

mais a', b', c', d' ne désigneront plus les quantités imaginaires conjuguées de a, b, c, d, mais les symétriques de a, b, c, d par rapport au cercle fondamental (*voir* la définition du paragraphe VII). En d'autres termes, si α est le centre du cercle fondamental et ρ son rayon,

$$a'=\alpha+\text{imaginaire conjuguée de }\frac{\rho^2}{a-\alpha}$$

et de même pour b', c', d'.

Nous appellerons *groupes fuchsiens* les groupes discontinus tels que G′; car ils ne diffèrent pas essentiellement des groupes de substitutions réelles et nous réserverons le nom de *groupes kleinéens* à ceux des groupes dont les substitutions ne conservent pas un même cercle fondamental. Nous ferons de ces groupes l'objet d'un Mémoire spécial.

Les particularités qui peuvent se présenter sont les mêmes que pour les groupes correspondants de substitutions réelles.

Si le polygone générateur R_0 est du deuxième ordre de la deuxième, de la quatrième, de la sixième ou de la septième famille, l'ensemble des polygones R_i ne recouvrira pas tout l'intérieur du cercle fondamental, mais l'intérieur d'un certain domaine limité par une infinité de circonférences coupant orthogonalement ce cercle (¹).

Si le polygone R_0 est de la troisième, de la quatrième, de la cinquième ou de la septième famille, il a des côtés de la deuxième sorte. Nous avons vu au

(¹) *Voir* la note de la page 142. N. E. N.

commencement du paragraphe VIII que dans ce cas il y a avantage à adjoindre à chaque polygone R_i son symétrique R_i' par rapport à X; de telle façon que le plan tout entier se trouve divisé en une infinité de régions R_i+R_i' limitées par une ou plusieurs périphéries séparées. Dans le cas qui nous occupe maintenant, nous adjoindrons à chaque polygone R_i son symétrique R_i' par rapport au cercle fondamental, de telle façon que le plan tout entier va se trouver encore divisé en une infinité de régions R_i+R_i'.

Laissons de côté pour le moment les régions que nous venons d'appeler R_i' et ne nous occupons que des polygones R_i eux-mêmes. La somme des surfaces de ces polygones, tous intérieurs au cercle fondamental, sera *finie*, ce qui est très important au point de vue des applications ultérieures. Il y aurait exception lorsque le cercle fondamental se réduit à une droite, ce qui arrive en particulier dans le cas des groupes de substitutions réelles; mais comme on l'a vu au commencement de ce paragraphe, un changement linéaire de variable suffirait pour ramener au cas général.

Dans mes travaux ultérieurs, je supposerai pour fixer les idées que le cercle fondamental a pour centre l'origine et pour rayon l'unité. Si l'on n'était pas placé dans ce cas, un changement très simple de variable y ramènerait aisément.

XIII. — Historique.

Le premier exemple de groupe discontinu formé de substitutions linéaires est celui que l'on rencontre en étudiant le module k d'une fonction elliptique (notation habituelle) ou le module J (notation de M. Klein) considérés comme fonctions du rapport des périodes. M. Hermite a fait une étude approfondie de cette sorte de transcendante et, en montrant qu'elle était uniforme, il faisait voir du même coup que le groupe correspondant était discontinu.

Les fonctions k et J ont été dans la suite, ainsi que le groupe discontinu correspondant, étudiées par MM. Dedekind, Fuchs et Klein et plus récemment par M. Hurwitz. Nous citerons en particulier les importants travaux de M. Klein que l'on trouve dans les *Mathematische Annalen* et un remarquable Mémoire de M. Fuchs inséré au Tome 83 du *Journal de Crelle*.

Il est évident qu'un groupe quelconque G en contient une infinité d'autres qui seront tous discontinus, si le groupe G l'est lui-même; de sorte que la connaissance d'un seul groupe discontinu permet d'en former très aisément une infinité d'autres. C'est cette remarque qui est le point de départ des belles

recherches de M. Klein sur la transformation des fonctions elliptiques et sur les fonctions modulaires en général.

Outre ces groupes contenus dans le groupe modulaire dont la discontinuité était évidente, il y a encore un autre groupe dont la discontinuité avait été remarquée par M. Schwarz dans un Mémoire inséré au Tome 75 du *Journal de Crelle;* c'est l'exemple I du paragraphe VII. C'était la première fois qu'on arrivait à un pareil résultat sans prendre pour point de départ la théorie des fonctions elliptiques. Enfin M. Fuchs reprit une question analogue dans des travaux insérés au Tome 89 du *Journal de Crelle* et dans les Actes de la Société de Göttingen. Bien que les groupes étudiés dans ce dernier travail se ramenassent tous à des groupes déjà connus, c'est la lecture de ce remarquable Mémoire qui m'a guidé dans mes premières recherches et qui m'a permis de trouver la loi de génération des groupes fuchsiens et d'en donner une démonstration rigoureuse.

Je l'ai donnée d'abord dans un Mémoire que j'eus l'honneur de soumettre au jugement de l'Académie des Sciences dans le concours pour le Grand Prix des Sciences mathématiques du 1er juin 1880 et j'ai poursuivi l'étude des groupes dans une série de travaux insérés aux *Comptes rendus* de l'année 1881.

Le mode de représentation que j'ai employé, c'est-à-dire la division d'une portion du plan en une infinité de polygones curvilignes, peut être très utile pour l'étude des propriétés générales d'un groupe; c'est ce que j'ai cherché à faire voir. Aux géomètres qui désireraient poursuivre dans cet ordre d'idées l'étude d'un groupe fuchsien ou de tout autre groupe, je recommanderai la lecture de l'*Habilitationsschrift* de M. Walther Dyck de l'Université de Leipzig, qui emploie un mode de représentation analogue et en fait ressortir les nombreux avantages.

SUR

LES FONCTIONS FUCHSIENNES[1]

Acta mathematica, t. I, p. 193-294 (1882).

I. — Séries thétafuchsiennes.

Dans un Mémoire antérieur [2], j'ai montré comment il est possible de former des groupes discontinus avec des substitutions de la forme

$$(1) \qquad \left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$$

en choisissant les coefficients α_i, β_i, γ_i, δ_i de telle façon que les diverses substitutions du groupe n'altèrent pas un certain cercle appelé *cercle fondamental*. Je supposerai, dans tout ce qui va suivre, que ce cercle fondamental a pour centre l'origine et pour rayon l'unité, de telle sorte que son équation soit

$$\mod z = 1.$$

Je considère un de ces groupes discontinus, dits *groupes fuchsiens*, que j'appelle G. A ce groupe correspondra une décomposition du cercle fondamental en une infinité de polygones normaux R, tous congruents entre eux.

Je me propose de démontrer qu'il existe toujours un système de fonctions uniformes de z qui demeurent inaltérées par les diverses substitutions du groupe G et que j'appellerai *fonctions fuchsiennes*.

A cet effet, j'envisage les diverses substitutions de G comprises dans la for-

[1] Terminé le 23 octobre 1882, imprimé le 29 novembre 1882.
[2] *Théorie des groupes fuchsiens*, ce Tome, p. 108-168.

mule (1) et je pose, pour abréger,

$$\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}=f_i(z)$$

comme je l'ai fait au paragraphe III du Mémoire cité. Je forme ensuite la série

$$\sum_0^\infty{}_i \bmod\left[\frac{df_i(z)}{dz}\right]^m, \tag{2}$$

où m est un entier positif plus grand que 1.

Je vais démontrer que cette série est convergente en faisant successivement diverses hypothèses :

1° Supposons d'abord que z soit intérieur au cercle fondamental : il sera alors intérieur à l'un des polygones R, par exemple au polygone R_h qui correspond à la substitution de G qui a pour indice h et qui s'écrit

$$[z, f_h(z)].$$

Soit

$$f_k(z)=f_i[f_h(z)].$$

La substitution

$$[z, f_k(z)]$$

fera partie du groupe G et correspondra à un certain polygone R_k. Puisque z est supposé intérieur à R_k, $f_i(z)$ sera intérieur à R_k.

Supposons qu'on décrive autour de z un contour très petit C_0, enveloppant le point z et étant situé tout entier à l'intérieur de R_k; le transformé de C_0 par la substitution $[z, f_i(z)]$ sera un certain contour très petit C_i, enveloppant le point $f_i(z)$ et situé tout entier à l'intérieur de R_k.

Afin d'établir la convergence de la série (2), nous allons démontrer successivement un certain nombre de lemmes.

LEMME I. — *La somme des surfaces de tous les contours* C_i *est égale à une quantité finie* C.

En effet, ces différents contours C_i en nombre infini sont tous intérieurs au cercle fondamental; de plus, ils n'ont aucune partie commune, puisque chacun d'eux est tout entier intérieur à l'un des polygones R. La somme de leurs surfaces est donc plus petite que la surface du cercle fondamental. Elle est donc finie. C. Q. F. D.

LEMME II. — *Le rapport de la plus grande à la plus petite valeur que*

puisse prendre le module de $\frac{df_i}{dz}$ *quand* z *reste intérieur à* C_0 *est plus petit qu'une certaine quantité* K *indépendante de* i.

En effet, on a

$$\frac{df_i}{dz}=\frac{1}{(\gamma_i z+\delta_i)^2}.$$

Le module de $\frac{df_i}{dz}$ est donc égal à $\frac{1}{\bmod\gamma_i^2}$ divisé par le carré de la distance du point z au point $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$. Les points $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$ sont les divers transformés du point ∞; ils sont donc tous extérieurs au cercle fondamental comme le point ∞ lui-même, et ils ne peuvent être infiniment voisins les uns des autres que dans le voisinage de ce cercle. Soient M_i et m_i la plus grande et la plus petite valeur que puisse prendre ce module quand z reste intérieur à C_0; soient a et b la plus grande et la plus petite distance du point $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$ au contour C_0; nous aurons évidemment

$$\frac{M_i}{m_i}=\frac{a^2}{b^2}.$$

Or tous les points $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$ sont extérieurs au cercle fondamental. Soient donc A et B la plus grande et la plus petite distance de l'origine, centre du cercle fondamental, au contour C_0. Ces deux distances seront plus petites que 1, puisque C_0 est tout entier intérieur au cercle fondamental. On a alors

$$a<1+A\ (1), \qquad b>1-B,$$

d'où

$$\frac{M_i}{m_i}<\left(\frac{1+A}{1-B}\right)^2.$$

D'ailleurs $\left(\frac{1+A}{1-B}\right)^2=K$ est indépendant de i. C. Q. F. D.

(1) Cette inégalité n'est pas satisfaite. Mais si l'on suppose, ce qui n'a pas d'inconvénient, que C_0 soit un cercle, on trouve $b>1-A$ et

$$\frac{a}{b}=1+\frac{a-b}{b}=1+\frac{A-B}{b}<1+\frac{A-B}{1-A}=\frac{1-B}{1-A},$$

d'où

$$\frac{M_i}{m_i}<\left(\frac{1-B}{1-A}\right)^2=K.$$

Si l'on veut que C_0 soit un contour très petit quelconque, on peut raisonner comme il suit. Les divers transformés du point ∞ sont à distance finie de l'origine. Supposons qu'ils soient tous intérieurs à un cercle qui a pour centre l'origine et pour rayon R. On a alors

$$a<R+A, \qquad b>1-A,$$

d'où

$$\frac{M_i}{m_i}<\left(\frac{R+A}{1-A}\right)^2=K,$$

K étant indépendant de i. N. E. N.

LEMME III. — *On a, quel que soit i,*

$$M_i^2 < K^2 \frac{C_i}{C_0}.$$

En effet, soit $z = x + iy$; la surface du contour C_0 s'écrit alors

$$C_0 = \int\int dx\, dy,$$

et la surface du contour C_i

$$C_i = \int\int \left(\operatorname{mod} \frac{df_i}{dz}\right)^2 dx\, dy,$$

les deux intégrales doubles étant prises à l'intérieur du contour C_0. On a donc

$$C_i > \int\int m_i^2\, dx\, dy = m_i^2 C_0,$$

ou bien

$$C_i > \frac{M_i^2}{K^2} C_0,$$

ou enfin

$$M_i^2 < K^2 \frac{C_i}{C_0}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Rien n'est plus aisé maintenant que d'établir la convergence de la série (2). Supposons, en effet, d'abord $m = 2$; nous aurons à envisager la série

$$(2) \qquad \sum \operatorname{mod}\left(\frac{df_i}{dz}\right)^2 = \sum \operatorname{mod}(\gamma_i z + \delta_i)^{-4}.$$

Or nous aurons

$$\operatorname{mod}\left(\frac{df_i}{dz}\right)^2 \leq M_i^2 < \frac{K^2}{C_0} C_i.$$

Les termes de la série (2) sont donc plus petits respectivement que $\frac{K^2}{C_0}$ multiplié par le terme correspondant de la série $\sum C_i$, dont la somme est un nombre fini C, d'après le lemme I.

La série (2) aura donc aussi une somme finie S. On a par conséquent *a fortiori*, quel que soit i,

$$\operatorname{mod} \frac{df_i}{dz} < \sqrt{S}.$$

On aura donc, pourvu que $m > 2$,

$$\left(\operatorname{mod} \frac{df_i}{dz}\right)^m < \left(\operatorname{mod} \frac{df_i}{dz}\right)^2 S^{\frac{m-2}{2}}.$$

C'est-à-dire que chaque terme de la série $\sum \left(\operatorname{mod} \frac{df_i}{dz}\right)^m$ est plus petit que la constante $S^{\frac{m-2}{2}}$ multipliée par le terme correspondant de la série $\sum \left(\operatorname{mod} \frac{df_i}{dz}\right)^2$ qui est convergente.

La convergence de la série (2) est donc démontrée et il s'agit ici, non d'une semi-convergence, mais d'une convergence absolue, puisque tous les termes de la série sont positifs.

2° Supposons maintenant que le point z soit extérieur au cercle fondamental.

Si le point z est l'un des points $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$, l'un des termes de la série est infini et la convergence est impossible. Supposons donc que le point z ne se confonde avec aucun des points $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$; je dis que la série (2) sera encore convergente.

Considérons, en effet, un autre point z_1, intérieur au cercle fondamental La série

$$(2^a) \qquad \sum \operatorname{mod}\left[\frac{df_i(z_1)}{dz_1}\right]^m = \sum \operatorname{mod}(\gamma_i z_1 + \delta_i)^{-2m}$$

est convergente d'après ce qu'on vient de voir. Je dis qu'il en est de même de la série

$$(2) \qquad \sum \operatorname{mod}\left(\frac{df_i}{dz}\right)^m = \sum \operatorname{mod}(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}.$$

En effet, nous pouvons trouver une limite supérieure R de $\operatorname{mod}\left(z_1 + \frac{\delta_i}{\gamma_i}\right)$ et une limite inférieure r de $\operatorname{mod}\left(z + \frac{\delta_i}{\gamma_i}\right)$; car les points $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$ ont un module fini et limité, et ils ne sont pas infiniment rapprochés du point z.

On a donc

$$\frac{\operatorname{mod}(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}}{\operatorname{mod}(\gamma_i z_1 + \delta_i)^{-2m}} < \frac{R^{2m}}{r^{2m}}.$$

Chaque terme de la série (2) est donc plus petit que $\left(\frac{R}{r}\right)^{2m}$ multiplié par le terme correspondant de la série (2^a) qui est convergente.

La série (2) est donc aussi convergente.

3° Supposons maintenant que le point z soit sur la circonférence du cercle fondamental. La démonstration précédente sera encore applicable, pourvu que le point z ne soit pas infiniment rapproché d'une infinité de points $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$. C'est ce qui arrivera si le point z appartient à l'un des côtés de la deuxième sorte de l'un des polygones R. La série (2) est alors convergente. Dans le cas contraire, les termes de la série (2) sont susceptibles de croître indéfiniment, de sorte que la convergence n'a pas lieu.

Les points de la circonférence du cercle fondamental se divisent en deux classes : les uns appartiennent à l'un des côtés de la deuxième sorte de l'un des polygones R; les autres, qui ne satisfont pas à cette condition, s'appelle-

ront les *points singuliers essentiels du groupe* G, de sorte que la condition de convergence de la série (2) pourra s'énoncer ainsi : *Le point z devra ne se confondre ni avec aucun des points* $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$, *ni avec aucun des points singuliers essentiels du groupe* G.

La série (2) définit une fonction de z, mais cette fonction n'est pas monogène, comme on le voit aisément d'après la forme même de la série. La somme de la série (2) dépend également du groupe G, et si l'on suppose que les coefficients des substitutions fondamentales de ce groupe sont des fonctions d'un certain paramètre t, la somme de la série (2) sera aussi une fonction de t.

Une petite digression est nécessaire pour me permettre d'exprimer plus nettement ma pensée. Reportons-nous au paragraphe XI du Mémoire sur les groupes fuchsiens, paragraphe intitulé : « Formation effective des groupes fuchsiens », et prenons, pour fixer les idées, l'exemple I de ce paragraphe. Dans cet exemple, il s'agissait de former les groupes fuchsiens de la troisième famille, engendrés par un polygone normal ayant $2n$ côtés de la première sorte et $2n$ côtés de la deuxième sorte. Nous avons vu que les coefficients des n substitutions fondamentales de ce groupe ne sont assujettis qu'à des inégalités. Il est donc possible de les exprimer en fonctions rationnelles de $3n$ paramètres arbitraires

$$u_1,\quad u_2,\quad \ldots,\quad u_{3n}$$

assujettis seulement à être réels et à satisfaire à certaines inégalités. Les coefficients de toutes les substitutions du groupe sont alors, comme ceux des substitutions fondamentales, des fonctions rationnelles des paramètres u. De plus, il est évident que tous les groupes différents qu'on obtient en attribuant aux u différents systèmes de valeurs sont tous isomorphes entre eux.

Ce qui précède peut être étendu au cas le plus général et, pour énoncer plus facilement les résultats qui vont suivre, je vais introduire une définition nouvelle qui nous sera utile dans la suite. Considérons deux polygones normaux R_0 et R'_0 ; je suppose qu'ils soient désignés par la même notation dans le système de notation du paragraphe VII du Mémoire cité. Les cycles de chaque catégorie seront en même nombre dans R_0 et R'_0 et ils se correspondront un à un. Je suppose de plus que la somme des angles de R_0 qui appartiennent à un même cycle de la première catégorie est la même que la somme des angles du cycle correspondant de R'_0. Je dirai alors que les deux polygones, ainsi que les deux groupes qu'ils engendrent, font partie de la même *classe*. Il est clair que, dans ce cas, les deux groupes sont isomorphes entre eux.

Considérons donc une infinité de groupes appartenant à la même classe C et dérivés de n substitutions fondamentales. Prenons n substitutions quelconques et cherchons si elles peuvent être prises pour les substitutions fondamentales d'un groupe discontinu appartenant à la classe C. Nous trouverons, en général, que leurs coefficients doivent satisfaire à certaines égalités et à certaines inégalités. Ces coefficients pourront alors s'exprimer rationnellement en fonctions de p paramètres arbitraires

$$u_1,\quad u_2,\quad \ldots,\quad u_p$$

assujettis seulement à rester réels et à satisfaire à certaines inégalités. La seule différence avec l'exemple I du paragraphe XI, c'est qu'on a en général

$$p < 3n,$$

au lieu de $p = 3n$.

Deux groupes qui sont de la même classe sont, en général, de la même famille. Il y a cependant des exceptions. Ainsi, reprenons l'exemple I du paragraphe XI que j'ai cité plus haut. Les groupes envisagés sont en général de la troisième famille ; mais, dans certains cas limites, ils peuvent se réduire à des groupes de la deuxième ou de la quatrième famille. En général, un groupe de la deuxième ou de la quatrième famille peut être regardé comme appartenant à une classe formée de groupes de la troisième famille qui ne se réduisent à la deuxième et à la quatrième famille que pour certaines valeurs particulières des paramètres u. De même, un groupe de la sixième ou de la septième famille peut être regardé comme appartenant à une classe formée de groupes de la cinquième famille, qui ne se réduisent à la sixième ou à la septième famille que pour certaines valeurs particulières des paramètres u. Cette remarque nous sera utile dans la suite.

Ainsi, il existe des classes de groupes fuchsiens qui sont tous isomorphes entre eux ; les coefficients de leurs substitutions sont des fonctions rationnelles de certains paramètres réels u, assujettis à certaines inégalités. Si l'on forme la série (2) à l'aide des différents groupes appartenant à une même classe, la somme de cette série sera évidemment une fonction des u ; je dis que ce sera une fonction *continue* de ces paramètres.

Il est clair que chaque terme de la série, étant rationnel par rapport aux u, sera une fonction continue de ces paramètres ; mais cela ne suffit pas pour qu'il en soit de même de la somme de cette série. Si nous considérons, en effet, une série

$$S(x) = F_1(x) + F_2(x) + \ldots + F_n(x) + \ldots,$$

dont les termes sont des fonctions continues de x et qui est convergente, la somme $S(x)$ de cette série peut être une fonction discontinue de x. Mais faisons une hypothèse de plus. Supposons que, quand on a

$$x_1 \geq x \geq x_0, \tag{3}$$

on ait

$$\operatorname{mod} F_n(x) < C_n,$$

et que la série

$$C_1 + C_2 + \ldots + C_n + \ldots$$

soit convergente; on sait que $S(x)$ restera fonction continue de x tant que cette variable satisfera aux inégalités (3). Ce résultat est d'ailleurs facile à étendre au cas de plusieurs variables. Ainsi, pour démontrer que la série (2) est une fonction continue des u, il suffit de faire voir qu'on peut trouver une infinité de nombres positifs Λ_i (indépendants des u), tels que la série $\sum \Lambda_i$ soit convergente et que l'inégalité

$$\left(\operatorname{mod} \frac{df_i}{dz}\right)^m < \Lambda_i$$

soit satisfaite quels que soient les u, pourvu que ces paramètres restent compris entre certaines limites qui peuvent d'ailleurs être aussi voisines qu'on veut du système de valeurs pour lequel on veut démontrer la continuité de la somme de la série (2).

Pour démontrer cette continuité, je vais faire usage de certaines considérations qui me fourniront en même temps une démonstration nouvelle de la convergence de cette série, ce qui ne sera pas inutile, vu l'importance de ce résultat. Je vais rappeler quelques-unes des définitions du paragraphe II du Mémoire sur les groupes fuchsiens. Dans ce paragraphe, j'avais appelé *figures congruentes* deux figures qui sont les transformées l'une de l'autre par une substitution linéaire à coefficients réels. Posant ensuite

$$z = x + y\sqrt{-1},$$

j'avais appelé L d'un arc l'intégrale

$$\int \frac{\operatorname{mod} dz}{y}$$

prise le long de cet arc et S d'une aire plane l'intégrale

$$\iint \frac{dx\,dy}{y^2}$$

prise à l'intérieur de cette aire.

La L d'un arc et la S d'une aire sont des invariants pour ces figures, c'est-à-dire que deux arcs congruents ont même L et que deux aires congruentes ont même S.

Plus tard, au paragraphe XII du Mémoire cité, j'ai envisagé des groupes de substitutions qui n'étaient plus assujetties à être réelles, mais à conserver un certain *cercle fondamental*. Par une extension toute naturelle, deux figures seront dites *congruentes* lorsqu'elles seront transformées l'une de l'autre par une substitution linéaire conservant le cercle fondamental. Il y aura pour les arcs et les aires deux invariants analogues à ceux que nous avons rencontrés dans le cas des substitutions réelles et que nous appellerons, par extension, L et S. Par exemple, dans le cas qui nous occupe, le cercle fondamental a pour centre l'origine et pour rayon l'unité. Posons

$$z = \rho\, e^{i\omega}.$$

J'appellerai L d'un arc l'intégrale

$$\int \frac{\operatorname{mod} dz}{1-\rho^2}$$

prise le long de cet arc et S d'une aire l'intégrale

$$\iint \frac{\rho\, d\rho\, d\omega}{(1-\rho^2)^2}$$

prise à l'intérieur de cette aire. On vérifie aisément que deux arcs congruents ont même L, pendant que deux aires congruentes ont même S.

Considérons un cercle ayant pour centre l'origine et pour rayon ρ. Sa S sera

$$\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^{\rho} \frac{\rho\, d\rho}{(1-\rho^2)^2} = \frac{\pi\rho^2}{1-\rho^2}.$$

La L de son rayon sera

$$R = \int_0^{\rho} \frac{d\rho}{1-\rho^2} = \frac{1}{2} L \frac{1+\rho}{1-\rho};$$

nous appellerons cette quantité le R du cercle.

On a, en fonction de R,

$$\rho = \frac{e^{2R}-1}{e^{2R}+1},$$

$$S = \frac{\pi}{4}(e^{2R} + e^{-2R} - 2).$$

Passons maintenant à la démonstration de la convergence de la série (2)

et supposons, pour fixer les idées, que le point z est intérieur au cercle fondamental; la démonstration s'étendrait sans peine au cas général.

Nous décrirons autour de z un contour C_0 que nous pourrons prendre assez petit pour qu'il soit tout entier à l'intérieur de l'un des polygones R, de R_k par exemple. Quand les paramètres u varieront entre les limites que nous leur avons fixées, les polygones R varieront, mais nous pourrons toujours supposer que C_0 est assez petit pour rester constamment tout entier à l'intérieur de R_k. Si nous considérons maintenant les différents transformés du point z, c'est-à-dire les différents points $\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}$, chacun de ces points sera contenu à l'intérieur d'un petit contour C_i situé tout entier à l'intérieur d'un certain polygone R_k, ainsi qu'on l'a vu plus haut. Tous les contours C_i seront *congruents entre eux et extérieurs les uns aux autres*.

J'appellerai σ la S de C_0 qui sera celle de tous les C_i. Si je considère maintenant diverses circonférences coupant orthogonalement le cercle fondamental et les arcs de ces circonférences qui sont interceptés par C_0, la L de ces arcs restera inférieure à une certaine limite que j'appelle λ.

Démontrons maintenant quelques lemmes.

LEMME IV. — *Considérons les points transformés de z, c'est-à-dire les points*

$$\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i},$$

qui sont intérieurs à un cercle C' qui a pour centre l'origine et pour rayon

$$\rho'=\frac{e^{2R'}-1}{e^{2R'}+1};$$

le nombre de ces points est plus petit que

$$\frac{\pi}{4\sigma}\left(e^{2(R'+\lambda)}+e^{-2(R'+\lambda)}-2\right)$$

En effet, soit N ce nombre.

Si un point $\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}$ est intérieur au cercle C', le contour C_i correspondant sera évidemment tout entier à l'intérieur du cercle C'' qui a pour centre l'origine et dont le R surpasse de λ celui du cercle C', c'est-à-dire dont le R est égal à $R'+\lambda$.

Il y a donc à l'intérieur du cercle C'' au moins N contours C_i dont la S totale est égale à $N\sigma$.

Or la S du cercle C'' est

$$\frac{\pi}{4}\left(e^{2(R'+\lambda)}+e^{-2(R'+\lambda)}-2\right).$$

On a donc

$$N<\frac{\pi}{4\sigma}\left(e^{2(R'+\lambda)}+e^{-2(R'+\lambda)}-2\right). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

LEMME V. — *On a identiquement*

$$\operatorname{mod}\frac{1}{(\gamma_i z+\delta_i)^2}=\frac{1-\operatorname{mod}\left(\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}\right)^2}{1-\operatorname{mod} z^2}.$$

En effet, envisageons un contour infiniment petit C_0 décrit autour du point z et le transformé C_i de ce contour par la substitution

$$\left(z,\ \frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}\right).$$

Soient ω_0 et ω_i leurs surfaces, on aura

$$\frac{\omega_i}{\omega_0}=\operatorname{mod}\left[\frac{d\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}}{dz}\right]^2=\operatorname{mod}\frac{1}{(\gamma_i z+\delta_i)^4}.$$

Les S de ω_0 et ω_i seront

$$\iint\frac{dx\,dy}{(1-\operatorname{mod} z^2)^2}=\frac{\omega_0}{(1-\operatorname{mod} z^2)^2},$$

$$\iint\frac{dx\,dy}{\left[1-\operatorname{mod}\left(\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}\right)^2\right]^2}=\frac{\omega_i}{\left[1-\operatorname{mod}\left(\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}\right)^2\right]^2}.$$

Or ces figures sont congruentes et ont même S.

On a donc

$$\frac{\omega_i}{\omega_0}=\left[\frac{1-\operatorname{mod}\left(\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}\right)^2}{1-\operatorname{mod} z^2}\right]^2,$$

d'où

$$\operatorname{mod}\frac{1}{(\gamma_i z+\delta_i)^2}=\frac{1-\operatorname{mod}\left(\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}\right)^2}{1-\operatorname{mod} z^2}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Considérons deux cercles ayant pour centre l'origine et passant, l'un par le point z et l'autre par le point $\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}$.

Soient A le R du premier cercle et R' le R du second cercle. On aura

$$\operatorname{mod} z=\frac{e^{2A}-1}{e^{2A}+1},\qquad \operatorname{mod}\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}=\frac{e^{2R'}-1}{e^{2R'}+1}$$

et enfin

$$\mod \frac{1}{(\gamma_i z+\delta_i)^2} = \frac{e^{2\lambda}+e^{-2\lambda}+2}{e^{2R'}+e^{-2R'}+2}.$$

THÉORÈME. — *La série* (2) *est convergente.*

Décrivons, en effet, une infinité de cercles ayant pour centre commun l'origine et dont les R croissent en progression arithmétique. Soient K_1, K_2, ..., K_n, ... ces cercles, et soit nr le R du cercle K_n.

Écrivons la série (2) sous la forme suivante :

(2 *bis*) $$\Sigma = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n + \ldots.$$

On obtient le terme U_n de la série (2 *bis*) en groupant tous les termes de la série (2) qui correspondent à des points $\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}$ compris dans la couronne circulaire située entre les deux cercles K_{n-1} et K_n.

Comme les termes de la série (2) sont positifs, un pareil groupement est licite et la convergence de la série (2 *bis*) entraîne celle de la série (2).

Le nombre des termes de (2) groupés ensemble dans le terme U_n est, en vertu du lemme IV, plus petit que

$$\frac{\pi}{4\sigma}\left(e^{2(nr+\lambda)}+e^{-2(nr+\lambda)}-2\right) < \frac{\pi}{4\sigma}e^{2(nr+\lambda)}.$$

Chacun d'eux est, en vertu du lemme V, plus petit que

$$\left(\frac{e^{2\lambda}+e^{-2\lambda}+2}{e^{2(nr-r)}+e^{-2(nr-r)}+2}\right)^m < \left(\frac{e^{2\lambda}+e^{-2\lambda}+2}{e^{2(nr-r)}}\right)^m.$$

On a donc

$$U_n < \frac{\pi}{4\sigma}\left(e^{2\lambda}+e^{-2\lambda}+2\right)^m e^{2\lambda+2mr} e^{-2n(m-1)r}.$$

Posons

$$\frac{\pi}{4\sigma}\left(e^{2\lambda}+e^{-2\lambda}+2\right)^m e^{2\lambda+2mr} = K,$$

on aura

(4) $$U_n < \frac{K}{e^{2n(m-1)r}};$$

K sera une constante indépendante de n et le second membre de l'inégalité (4) sera, puisque $m>1$, le $n^{\text{ième}}$ terme d'une progression géométrique décroissante. La série (2 *bis*), et par conséquent la série (2), est donc convergente.

C. Q. F. D.

Voyons quelle erreur on commet quand on se restreint dans la série (2) aux termes qui correspondent aux points $\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}$ intérieurs à un cercle ayant pour

centre l'origine et dont le R est $(n-1)r$. La somme des termes négligés est égale à

$$U_n + U_{n+1} + \ldots$$

et par conséquent plus petite que

$$\frac{K\, e^{2n(1-m)r}}{1-e^{2r(1-m)}}.$$

THÉORÈME. — *La somme* Σ *de la série* (2) *est une fonction continue des paramètres* u.

En effet soit Σ la valeur de cette somme pour certaines valeurs

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_p$$

de ces paramètres u.

Soit $\Sigma+\Delta\Sigma$ la valeur de cette même somme pour des valeurs voisines

$$u_1+\Delta u_1, \quad u_2+\Delta u_2, \quad \ldots, \quad u_p+\Delta u_p$$

de ces mêmes paramètres. Je dis qu'on peut prendre les Δu assez petits pour que

$$|\Delta\Sigma| < \varepsilon,$$

ε étant une quantité donnée.

Soit Σ_0 la somme des $n-1$ premiers termes de la série (2 *bis*)

$$\Sigma_0 = U_1 + U_2 + \ldots + U_{n-1}.$$

Soit

$$\Sigma_1 = U_n + U_{n+1} + \ldots,$$
$$\Sigma = \Sigma_0 + \Sigma_1.$$

Soit de même $\Sigma_0+\Delta\Sigma_0$, $\Sigma_1+\Delta\Sigma_1$ la somme des termes correspondants de la série $\Sigma+\Delta\Sigma$; de telle sorte que

$$\Sigma+\Delta\Sigma = (\Sigma_0+\Delta\Sigma_0)+(\Sigma_1+\Delta\Sigma_1).$$

On aura

$$\Sigma_1 < \frac{K\, e^{2n(1-m)r}}{1-e^{2r(1-m)}}, \qquad \Sigma_1+\Delta\Sigma_1 < \frac{K\, e^{2n(1-m)r}}{1-e^{2r(1-m)}}.$$

Nous pourrons donc prendre n assez grand pour que

$$\Sigma_1 < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \Sigma_1+\Delta\Sigma_1 < \frac{\varepsilon}{3},$$

Or, une fois n choisi, Σ_0 sera fonction continue des u; on pourra donc prendre les Δu assez petits pour que

$$|\Delta\Sigma_0| < \frac{\varepsilon}{3},$$

et par conséquent pour que

$$|\Delta\Sigma| < \varepsilon.$$

C. Q. F. D.

Considérons maintenant la série suivante

$$\Theta(z)=\sum \mathrm{H}\left(\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}\right)(\gamma_i z+\delta_i)^{-2m}. \tag{5}$$

Je suppose :

1° Que l'algorithme $\mathrm{H}(z)$ représente une fonction rationnelle de z dont aucun infini n'est situé sur le cercle fondamental, mais qui est d'ailleurs quelconque ;

2° Que le nombre m est un entier plus grand que 1. La fonction $\mathrm{H}(z)$ aura un certain nombre d'infinis

$$a_1,\quad a_2,\quad \ldots,\quad a_\mu.$$

Si le point z se confond avec un des points

$$\frac{\alpha_i a_k+\beta_i}{\gamma_i a_k+\delta_i}$$

l'un des termes de la série est infini et, par conséquent, la série ne peut être convergente.

Supposons au contraire que cela n'ait pas lieu. Nous pourrons trouver un nombre positif M tel qu'on ait, quel que soit i,

$$\operatorname{mod}\mathrm{H}\left(\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}\right)<\mathrm{M},$$

on pourra même choisir M assez grand pour que cette inégalité subsiste quand on fait varier les paramètres u entre certaines limites.

Je dis maintenant que la série $\Theta(z)$, que j'appellerai *série thétafuchsienne*, est convergente. En effet, nous aurons

$$\operatorname{mod}\left[\mathrm{H}\left(\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}\right)(\gamma_i z+\delta_i)^{-2m}\right]<\mathrm{M}\operatorname{mod}(\gamma_i z+\delta_i)^{-2m}.$$

Le module de chaque terme de la série (5) est donc plus petit que le terme correspondant d'une série convergente à termes positifs. C'est-à-dire que la série (5) est convergente et que sa somme est indépendante de l'ordre des termes.

D'ailleurs on démontrerait, comme pour la somme de la série (2), que la somme de la série (5) est une fonction *continue* des paramètres u.

II. — Classification et propriétés générales.

Ainsi la série (5) est convergente, sauf pour certains points singuliers ; dans ces conditions elle définit une fonction $\Theta(z)$ holomorphe. La fonction $\Theta(z)$ est

essentiellement uniforme, mais elle cesse d'être holomorphe aux points singuliers pour lesquels la série (5) cesse d'être convergente.

Ces points singuliers sont :

1° Les points

$$\frac{\alpha_i a_k+\beta_i}{\gamma_i a_k+\delta_i},$$

c'est-à-dire les divers transformés des infinis de $\mathrm{H}(z)$; ces points sont des pôles dans le voisinage desquels $\Theta(z)$ est méromorphe ;

2° Les points $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$, c'est-à-dire les divers transformés du point ∞. Ces points sont encore des pôles dans le voisinage desquels $\Theta(z)$ est méromorphe.

On démontrerait ce double fait en remarquant que, dans le voisinage de ces points, un des termes de la série (5) devient infini et que si l'on supprime ce terme, la série reste convergente.

3° Nous avons enfin les points singuliers essentiels du groupe G, c'est-à-dire les points du cercle fondamental qui n'appartiennent pas à un côté de la deuxième sorte de l'un des polygones R. Ce sont aussi, pour la fonction $\Theta(z)$, des points singuliers essentiels.

Voici maintenant la propriété fondamentale de cette fonction. Considérons une substitution quelconque du groupe G, par exemple

$$\left(z,\ \frac{\alpha_k z+\beta_k}{\gamma_k z+\delta_k}\right); \tag{6}$$

cherchons quelle relation il y a entre

$$\Theta\left(\frac{\alpha_k z+\beta_k}{\gamma_k z+\delta_k}\right)\quad\text{et}\quad\Theta(z).$$

Le système des substitutions

$$\left(z,\ \frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}\right)$$

formant un groupe dont fait partie la substitution (6) sera identique au système des substitutions

$$\left[z,\ \frac{\alpha_i\left(\frac{\alpha_k z+\beta_k}{\gamma_k z+\delta_k}\right)+\beta_i}{\gamma_i\left(\frac{\alpha_k z+\beta_k}{\gamma_k z+\delta_k}\right)+\delta_i}\right]=\left\{z, f_i[f_k(z)]\right\},$$

en posant, pour abréger,

$$\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}=f_i(z),\qquad \frac{\alpha_k z+\beta_k}{\gamma_k z+\delta_k}=f_k(z),$$

ce qui permet d'écrire

$$\Theta(z)=\sum \mathrm{H}\{f_i[f_k(z)]\}\left(\frac{d\{f_i[f_k(z)]\}}{dz}\right)^m,$$

ou

$$\Theta(z)=\sum \mathrm{H}[f_i(f_k)]\left[\frac{df_i(f_k)}{df_k}\right]^m\left(\frac{df_k}{dz}\right)^m.$$

On a d'ailleurs

$$\Theta(f_k)=\sum \mathrm{H}[f_i(f_k)]\left[\frac{df_i(f_k)}{df_k}\right]^m.$$

On a donc

$$\Theta(f_k)=\Theta(z)\left(\frac{df_k}{dz}\right)^{-m},$$

ou bien

$$\Theta\left(\frac{\alpha_k z+\beta_k}{\gamma_k z+\delta_k}\right)=\Theta(z)(\gamma_k z+\delta_k)^{2m}. \tag{7}$$

Nous appellerons *fonction thétafuchsienne* toute fonction uniforme de z jouissant de la propriété (7). Nous classerons les fonctions thétafuchsiennes de la même façon que les groupes fuchsiens, à l'aide des propriétés du polygone normal R_0 correspondant.

On a vu que les polygones R_0 pouvaient se distribuer en sept familles et que la première, la deuxième, la quatrième, la sixième et la septième de ces familles se subdivisent en deux ordres. Mais tout groupe du deuxième ordre de la deuxième, de la quatrième, de la sixième et de la septième famille est identique à un groupe de la troisième ou de la cinquième famille, ou à un groupe du premier ordre de la sixième ou de la septième famille (*voir* § IX et XI du Mémoire sur les groupes fuchsiens). Nous pouvons donc toujours supposer que le groupe G n'appartient pas au deuxième ordre de la deuxième, de la quatrième, de la sixième ou de la septième famille.

Cela posé, je dirai que la fonction $\Theta(z)$ fait partie de la première, de la troisième et de la cinquième famille si le groupe G fait partie de l'une de ces familles, et que la fonction $\Theta(z)$ fait partie de la deuxième, de la quatrième, de la sixième ou de la septième famille si le groupe G appartient au premier ordre de l'une de ces familles.

De même je dirai qu'une fonction thétafuchsienne est du genre p, si le groupe G correspondant est de ce genre.

Je puis également étendre aux fonctions thétafuchsiennes la classification des groupes fuchsiens en classes dont j'ai parlé dans le paragraphe précédent.

Envisageons d'abord les fonctions de la première, de la deuxième et de la sixième famille. Les polygones R correspondants n'ont pas de côtés de la

deuxième sorte, de telle manière que tous les points du cercle fondamental sont des points singuliers essentiels. Le plan se trouve divisé en deux parties, à savoir l'intérieur et l'extérieur de ce cercle, par une ligne singulière essentielle; il faut en conclure, conformément aux principes actuellement admis dans la théorie des fonctions, et mis en lumière par les travaux de M. Weierstrass, que le développement (5) représente deux fonctions distinctes, selon que z est intérieur ou extérieur au cercle fondamental. La première de ces fonctions n'existera qu'à l'intérieur de ce cercle et admettra comme espace lacunaire toute la partie du plan qui lui est extérieure; la seconde, au contraire, n'existera qu'à l'extérieur du cercle fondamental. Dans ce qui va suivre, nous n'envisagerons jamais que la première de ces fonctions; en effet, la seconde d'entre elles, c'est-à-dire celle qui n'existe qu'à l'extérieur du cercle fondamental, peut aisément par un changement de z en $\frac{1}{z}$ se ramener à une fonction thétafuchsienne n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental.

Considérons donc une fonction thétafuchsienne n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental et définie par une série telle que (5); nous pouvons faire deux hypothèses :

Nous pouvons supposer qu'un ou plusieurs des infinis de $\mathrm{H}(z)$ sont intérieurs au cercle fondamental; alors la fonction $\Theta(z)$ aura des infinis (sauf dans certains cas exceptionnels où plusieurs infinis de cette fonction se détruisent mutuellement) et nous dirons qu'elle est de la *première espèce;* nous serons certains alors que la somme de la série (5) n'est pas identiquement nulle, puisque cette somme peut croître indéfiniment.

On peut supposer, au contraire, que tous les infinis de $\mathrm{H}(z)$ sont extérieurs au cercle fondamental; alors la fonction $\Theta(z)$ n'a pas d'infinis et nous dirons qu'elle est de la *deuxième espèce*. La fonction $\Theta(z)$ peut alors se développer en une série ordonnée suivant les puissances croissantes de z et qui reste convergente tant que z reste intérieur au cercle fondamental, c'est-à-dire tant que la fonction $\Theta(z)$ existe.

Rien n'empêche dans ce cas que la somme de la série (5) ne soit identiquement nulle, et nous démontrerons en effet plus loin que toutes les fonctions Θ de *deuxième espèce* s'expriment linéairement à l'aide d'un nombre fini d'entre elles.

Passons maintenant aux fonctions de la troisième, de la quatrième, de la cinquième et de la septième famille; les polygones R ont alors des côtés de la deuxième sorte, tous les points du cercle fondamental ne sont plus des points

singuliers essentiels; nous n'avons plus une ligne singulière essentielle, mais une infinité de points singuliers isolés. Il résulte de là que la série (5) au lieu représenter deux fonctions distinctes selon que z est intérieur ou extérieur au cercle fondamental, représente une seule et même transcendante qui est partout holomorphe, sauf en certains points isolés. La fonction $\Theta(z)$ est donc une transcendante uniforme existant dans toute l'étendue du plan et présentant une infinité de points singuliers essentiels.

On peut se demander quelle place elle occupe dans la classification que M. Mittag-Leffler a donné de pareilles fonctions dans sa communication du 3 avril 1882 aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*.

Les points singuliers essentiels étant en nombre infini seront infiniment rapprochés dans le voisinage de certains points singuliers de deuxième espèce; ceux-ci à leur tour, s'ils sont en nombre infini, seront infiniment rapprochés dans le voisinage de certains points singuliers de troisième espèce, et ainsi de suite.

Je dis que nous ne serons jamais arrêtés et que nous trouverons ainsi une infinité de points singuliers de toutes les espèces. En effet, si nous avons une infinité de points singuliers de la $(n-1)^{\text{ième}}$ espèce, il y aura au moins un point singulier de la $n^{\text{ième}}$ espèce; mais s'il y en a un, il y en aura une infinité, car tous ses transformés par les diverses substitutions du groupe G devront aussi être des points singuliers de la $n^{\text{ième}}$ espèce. C. Q. F. D.

Nous avons donc affaire à une de ces fonctions que M. Mittag-Leffler a appelées du *deuxième genre*.

Il semble d'abord que toutes les fonctions aient des infinis, car elles existent dans tout le plan et elles doivent avoir pour pôles ceux de la fonction rationnelle $H(z)$ qui doit devenir infinie en quelque point du plan. Mais il peut arriver que plusieurs des infinis de la fonction $\Theta(z)$ se détruisent mutuellement; de sorte qu'on peut construire, comme dans le cas précédent, des fonctions thétafuchsiennes de la deuxième espèce; on en verra un exemple au paragraphe VIII.

Parmi les points singuliers de nos fonctions thétafuchsiennes, il en est qui doivent particulièrement attirer notre attention : ce sont les sommets des polygones R qui sont de la deuxième catégorie et qui appartiennent à un cycle de la troisième sous-catégorie (*voir* le paragraphe V du Mémoire sur les groupes fuchsiens).

Soit α un pareil sommet; il y aura parmi les substitutions du groupe G une

substitution parabolique de la forme

$$\left(\frac{1}{z-\alpha}, \frac{1}{z-\alpha}+\beta\right).$$

C'est là la définition même des cycles de la troisième sous-catégorie.

Posons

$$\frac{2i\pi}{\beta}\frac{1}{z-\alpha}=t, \qquad \frac{2i\pi}{\beta}\frac{1}{f_i(z)-\alpha}=\varphi_i(t),$$

en conservant pour le symbole $f_i(z)$ la signification qu'on lui a donnée plus haut, c'est-à-dire

$$f_i(z)=\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}.$$

Définissons maintenant un symbole H_1 de la façon suivante :

$$H_1(t)=H\left(\alpha+\frac{2i\pi}{\beta t}\right)\left(\frac{-2i\pi}{\beta t^2}\right)^m.$$

Il est clair que H_1 sera l'algorithme d'une fonction rationnelle. On trouvera alors identiquement

$$\Theta(z)=\sum H[f_i(z)]\left[\frac{df_i(z)}{dz}\right]^m=\sum H_1[\varphi_i(t)]\left[\frac{d\varphi_i(t)}{dt}\right]^m\left(\frac{dt}{dz}\right)^m.$$

Mais, la série $\Theta(z)$ étant absolument convergente, on peut en ordonner les termes comme on le veut. Voici comment nous allons les ordonner :

Parmi les fonctions $\varphi_i(t)$ on peut en choisir une infinité

$$\theta_0(t)=t, \qquad \theta_1(t), \quad \theta_2(t), \quad \ldots$$

de telle façon que toute fonction $\varphi_i(t)$ puisse se mettre d'une manière et d'une seule sous la forme

$$\varphi_i(t)=\theta_k(t+2hi\pi),$$

h étant un entier positif ou négatif; ce qui permet d'écrire

$$\Theta(z)=\left(\frac{dt}{dz}\right)^m\sum_{k=0}^{k=\infty}\sum_{h=-\infty}^{h=+\infty}H_1[\theta_k(t+2hi\pi)]\left[\frac{d\theta_k(t+2hi\pi)}{dt}\right]^m$$

Considérons un nouvel algorithme $H'_k(t)$ défini comme il suit :

$$H'_k(t)=H_1[\theta_k(t)]\left(\frac{d\theta_k}{dt}\right)^m,$$

d'où

$$\Theta(z)=\left(\frac{dt}{dz}\right)^m\sum_{k=0}^{k=\infty}\sum_{h=-\infty}^{h=+\infty}H'_k(t+2hi\pi$$

Il faut d'abord effectuer la sommation par rapport à h; or $H'_k(t)$ est une fonction rationnelle de t qui tend vers zéro quand t tend vers l'infini. On aura donc

$$\sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} H'_k(t+2hi\pi) = H''_k(e^t),$$

$H''_k(e^t)$ désignant une fonction rationnelle de e^t qui tend vers zéro quand t tend vers l'infini. Il vient donc

$$\Theta(z) = \left(\frac{dt}{dz}\right)^m \sum_k H''_k(e^t).$$

La convergence de cette série est évidente, puisqu'on l'a obtenue en groupant d'une certaine manière les termes de la série (5) qui est absolument et uniformément convergente. De plus, les termes sont rationnels en e^t et leurs infinis ne sont pas infiniment rapprochés dans le voisinage de

$$e^t = 0 \qquad \text{ou de} \qquad e^t = \infty,$$

de telle sorte qu'on peut trouver une limite supérieure et inférieure des modules des valeurs de e^t qui rendent infinie l'une des fonctions H'_k.

Il suit de là que, dans le voisinage du point singulier $z = \alpha$, la fonction $\Theta(z)(z-\alpha)^{2m}$ est holomorphe en $e^{\frac{2i\pi}{\beta(z-\alpha)}}$ ou en $e^{\frac{2i\pi}{\beta(\alpha-z)}}$ selon qu'on approche du point α par l'intérieur ou par l'extérieur du cercle fondamental.

En d'autres termes, α est pour la fonction Θ un *point singulier logarithmique*.

Ainsi, si l'on envisage les différents sommets des polygones R, on reconnaîtra :

1° Que les sommets qui font partie d'un cycle de la première et de la troisième catégorie sont pour la fonction Θ des points ordinaires ou des pôles ;

2° Que les sommets qui font partie d'un cycle de la troisième sous-catégorie sont des points singuliers logarithmiques ;

3° Que les sommets qui font partie d'un cycle de la quatrième sous-catégorie sont des points singuliers d'une nature plus élevée.

III. — Zéros et infinis.

Nous allons maintenant étudier la distribution des zéros et des infinis de la fonction Θ. Il est clair que, si un point z est pour cette fonction un zéro ou un

infini, il en sera de même de tous les points correspondant à z, c'est-à-dire de tous les points $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$. De cette façon, à tout zéro contenu à l'intérieur du polygone R_0, correspondra un zéro contenu dans chacun des polygones R, et que nous ne regarderons pas comme *réellement distinct* du premier. De sorte que le nombre des zéros et des infinis *réellement distincts* de la fonction Θ sera le nombre des zéros et des infinis contenus à l'intérieur de R_0 si la fonction n'existe que dans le cercle fondamental, et à l'intérieur de $R_0 + R'_0$ si elle existe dans tout le plan. Je rappelle que R'_0 est le polygone symétrique de R_0 par rapport au cercle fondamental.

Cependant, quelques conventions spéciales sont nécessaires, si l'on veut pouvoir énoncer simplement le résultat auquel nous allons arriver au sujet du nombre des zéros et des infinis. Il est d'abord évident qu'un zéro double ou un infini double doit compter pour deux zéros ou pour deux infinis; de même pour les zéros et les infinis multiples. Mais, outre les zéros contenus à l'intérieur de R_0, il peut y en avoir qui se trouvent sur le périmètre de ce polygone. Supposons qu'il y en ait un sur un côté ab de la première sorte, il y en aura un autre, correspondant au premier sur le côté conjugué de ab. Ces deux zéros ne seront pas réellement distincts et l'on ne devra les compter que pour un seul zéro, ou, si l'on veut, on devra compter chacun d'eux pour un demi-zéro. Supposons maintenant qu'un sommet de la première catégorie soit un zéro d'ordre p; les sommets qui font partie du même cycle seront au nombre de n par exemple et chacun d'eux sera un zéro d'ordre p comme le premier. Supposons que la somme des angles qui correspondent à ces sommets soit $\frac{2\pi}{k}$; chacun d'eux appartiendra à $n.k$ polygones différents, de manière qu'on devra en quelque sorte le partager entre ces $n.k$ polygones et que la part du polygone R_0 sera un zéro d'ordre $\frac{p}{n.k}$. Il résulte de là que les différents sommets du cycle représenteront seulement $\frac{p}{k}$ zéros distincts.

Il est facile d'étendre cette convention au cas où l'un des zéros est un des sommets de la deuxième catégorie et appartenant à un cycle de la troisième sous-catégorie. Nous avons vu que si α est un pareil sommet, la fonction Θ peut se mettre sous la forme

$$(z-\alpha)^{-2m}\,\Phi\left[e^{\frac{2i\pi}{\beta(\alpha-z)}}\right],$$

Φ étant une fonction holomorphe de $e^{\frac{2i\pi}{\beta(\alpha-z)}}$ s'annulant pour

$$z = \alpha,$$

c'est-à-dire pour

$$\frac{2i\pi}{e^{\beta(\alpha-z)}}=0.$$

$u=0$ sera alors un zéro de la fonction $\Phi(u)$. Supposons que ce soit un zéro d'ordre p. Nous dirons alors que les différents sommets du cycle auquel appartient α représentent p zéros distincts de la fonction Θ.

Ce qui précède s'applique évidemment aux infinis.

Occupons-nous d'abord des infinis. La série (5) devient infinie quand $H\left(\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}\right)$ ou $\frac{1}{\gamma_i z+\delta_i}$ devient infini. Supposons d'abord que la fonction Θ n'existe qu'à l'intérieur du cercle fondamental. Alors $\frac{1}{\gamma_i z+\delta_i}$ ne peut devenir infini; de plus, à chaque infini de $H(z)$ intérieur au cercle fondamental correspondra en général un infini de l'un des $H\left(\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}\right)$ qui sera intérieur à R_0.

Donc :

Le nombre des infinis distincts de Θ *est égal au nombre des infinis de* H *intérieurs au cercle fondamental.*

Supposons maintenant que Θ existe dans tout le plan.

A tout infini de $H(z)$ intérieur au cercle fondamental correspond un infini de l'un des $H\left(\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}\right)$ intérieur à R_0.

A tout infini de $H(z)$ extérieur au cercle fondamental correspond un infini de l'un des $H\left(\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}\right)$ intérieur à R'_0.

A l'intérieur de chacun des polygones R'_i et par conséquent à l'intérieur de R'_0, nous trouverons un des points $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$ qui sont pour Θ des infinis d'ordre $2m$. Il y a cependant une exception : les points $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$ sont les différents points correspondants de l'infini; la surface de l'un des polygones R' contient le point ∞ et ne contient pas de point $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$; le point ∞ n'est pas en général un infini de Θ. Nous supposerons, pour éviter cette difficulté, que le polygone R'_0 ne contient pas le point ∞ et nous pourrons énoncer le résultat suivant :

Le nombre des infinis de Θ contenus à l'intérieur de $R_0+R''_0$, c'est-à-dire *le nombre des infinis distincts de* Θ *est égal au nombre des infinis de* H *augmenté de* $2m$.

Passons à la recherche des zéros. Parmi eux, il y en a qui doivent d'abord attirer l'attention : je veux parler des sommets de la première catégorie qui dans certains cas sont forcément des zéros d'ordre déterminé.

Soient α un sommet de la première catégorie et α' son symétrique par rapport au cercle fondamental. Supposons que α fasse partie d'un cycle et que la somme des angles de ce cycle soit $\frac{2\pi}{k}$. L'une des substitutions de G sera

$$\left(\frac{z-\alpha}{z-\alpha'},\ e^{\frac{2i\pi}{k}}\frac{z-\alpha}{z-\alpha'}\right)=[z,f_1(z)].$$

Nous aurons

$$\Theta[f_1(z)]=\Theta(z)\left(\frac{df_1}{dz}\right)^{-m},$$

ou

$$\Theta(f_1)(f_1-\alpha')^{2m}=\Theta(z)(z-\alpha')^{2m}\left[\frac{d\left(\frac{f_1-\alpha}{f_1-\alpha'}\right)}{d\left(\frac{z-\alpha}{z-\alpha'}\right)}\right]^{-m}. \tag{8}$$

Mais

$$\frac{f_1-\alpha}{f_1-\alpha'}=e^{\frac{2i\pi}{k}}\frac{z-\alpha}{z-\alpha'}.$$

Remarquons de plus que nous pouvons développer $\Theta(z)(z-\alpha')^{2m}$ suivant les puissances de $\frac{z-\alpha}{z-\alpha'}$, de façon à poser

$$\Theta(z)(z-\alpha')^{2m}=\Theta_1\left(\frac{z-\alpha}{z-\alpha'}\right)=\sum A_\mu\left(\frac{z-\alpha}{z-\alpha'}\right)^\mu.$$

L'équation (8) devient alors

$$\sum A_p e^{\frac{2ip\pi}{k}}\left(\frac{z-\alpha}{z-\alpha'}\right)^p=\sum A_p e^{-\frac{2mi\pi}{k}}\left(\frac{z-\alpha}{z-\alpha'}\right)^p.$$

Cette identité exige qu'on ait

$$A_p=0,$$

ou bien

$$e^{\frac{2i\pi p}{k}}=e^{-\frac{2mi\pi}{k}},$$

c'est-à-dire

$$p+m\equiv 0 \pmod k. \tag{9}$$

Donc le développement de Θ_1 ne contient que des termes dont l'ordre p satisfait à la congruence (9). Si donc k ne divise pas m, $z=\alpha$ est un zéro pour Θ_1 et par conséquent pour Θ.

Ce zéro est d'ordre au moins égal au reste de la division de $m(k-1)$ par k; et si l'ordre de ce zéro diffère de ce reste c'est d'un multiple de k. Il y a exception évidemment si α est un infini de Θ.

De même nous avons vu que les sommets qui appartiennent à un cycle de la troisième sous-catégorie sont, en général, des zéros de la fonction Θ.

Nous allons maintenant chercher quel est le nombre des zéros réellement distincts de notre fonction Θ et, pour fixer les idées, nous supposerons qu'il s'agit d'une fonction de la première famille. Soit q le nombre des infinis distincts, soit p le nombre des zéros réellement distincts, c'est-à-dire le nombre cherché; soit maintenant p_0 le nombre des zéros situés à l'intérieur de R_0 en laissant de côté les zéros qui pourraient se trouver sur le périmètre et sur les sommets. Nous supposerons, ce qui arrivera en général, qu'il n'y a pas de zéro sur le périmètre en dehors de ceux qui sont sur les sommets; s'il y en avait, on n'aurait qu'à considérer les zéros situés sur les côtés comme des sommets séparant deux côtés consécutifs du polygone situés dans le prolongement l'un de l'autre. Supposons maintenant que les sommets se répartissent en un certain nombre de cycles de la première catégorie C_1, C_2, ..., C_i, ... Supposons que tous les sommets du cycle C_i soient des zéros d'ordre p_i et que la somme des angles de ce cycle soit $\frac{2\pi}{k_i}$ de telle sorte que l'ensemble de ces zéros doivent être comptés, d'après la convention faite plus haut, pour $\frac{p_i}{k_i}$ zéros distincts. On devra avoir

$$p_i + m \equiv 0 \pmod{k_i},$$

$$p = p_0 + \sum \frac{p_i}{k_i}.$$

Le problème consiste à évaluer p_0. Pour cela il faut prendre l'intégrale

$$\int \frac{\Theta'(z)\,dz}{\Theta(z)} \tag{10}$$

le long du périmètre de R_0. La partie réelle de cette intégrale sera nulle et la partie imaginaire s'écrira

$$2i\pi(p_0 - q).$$

L'évaluation de l'intégrale (10) présente ici une difficulté spéciale.

En effet la fonction sous le signe $\int$ devient infinie en divers points du contour d'intégration, puisque nous avons vu qu'un certain nombre de sommets de R_0 étaient des zéros de Θ. On tournera cette difficulté en décrivant autour de chacun de ces sommets comme centre des arcs de cercle infiniment petits, raccordant les deux côtés qui aboutissent au sommet considéré; il faudra décrire ces arcs de cercle à l'intérieur de R_0, de façon à laisser les sommets en dehors du contour, puisque nous voulons évaluer p_0, c'est-à-dire le nombre des zéros *intérieurs* à R_0.

Il faudra donc évaluer l'intégrale (10) :

1° Le long des arcs de cercle infiniment petits décrits autour des sommets;

2° Le long des côtés de la première sorte;

3° Le long des côtés de la deuxième sorte.

Il suffira d'ailleurs de calculer la partie imaginaire de l'intégrale, car nous savons d'avance que la partie réelle est nulle, et cette partie imaginaire n'est autre chose que la variation de l'argument de Θ.

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'une fonction de la première famille, de telle façon que nous n'ayons que des sommets de la première catégorie et des côtés de la première sorte. Soit $2n$ le nombre de ces côtés.

Considérons d'abord un des petits arcs de cercle décrit autour d'un sommet; supposons que ce sommet appartienne au cycle C_i dont la somme des angles est $\frac{2\pi}{k_i}$ et dont tous les sommets sont des zéros d'ordre p_i. Soit λ l'angle du sommet considéré. L'intégrale prise le long du petit arc de cercle correspondant sera $-\sqrt{-1}\,p_i\lambda$; prise le long de tous les arcs de cercle décrits autour des divers sommets du cycle, elle sera

$$-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{k_i}p_i.$$

Enfin, l'intégrale (10), prise le long de tous les arcs infiniment petits décrits autour des sommets de R_0, sera

$$-2\pi\sqrt{-1}\sum\frac{p_i}{k_i}.$$

Il reste à évaluer notre intégrale le long des côtés de la première sorte. Soient donc ab, $a'b'$ deux côtés conjugués de R_0. Il faut calculer

$$J = \int_a^b \frac{\Theta'\,dz}{\Theta} + \int_{b'}^{a'} \frac{\Theta'\,dz}{\Theta} = \int_a^b \frac{\Theta'\,dz}{\Theta} - \int_{a'}^{b'} \frac{\Theta'\,dz}{\Theta}.$$

Soit $[z, f_i(z)]$ celle des substitutions du groupe G qui change $a'b'$ en ab. Nous aurons, d'après ce qu'on a vu plus haut,

$$\Theta(f_i) = \Theta(z)\left(\frac{df_i}{dz}\right)^{-m},$$

ou

$$\mathrm{L}\,\Theta(f_i) = \mathrm{L}\Theta(z) - m\,\mathrm{L}\frac{df_i}{dz}.$$

Donc

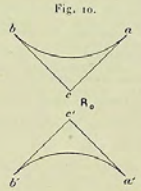
$$J = \int_{a'}^{b'} \left[\frac{\Theta'(f_i)}{\Theta(f_i)} - \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)}\right] dz = -m\int_{a'}^{b'} d\left[\mathrm{L}\frac{df_i}{dz}\right] \quad (1).$$

(1) $$\Theta'(f_i) = \frac{d\Theta[f_i(z)]}{dz}.$$

Il reste donc à chercher comment varie la partie imaginaire de $L\frac{df_i}{dz}$ ou l'argument de $\frac{df_i}{dz}$ quand z varie de a' à b'.

Je rappelle que les côtés de R_0, ab, $a'b'$ sont des arcs de cercle; je vais mener aux points a, b, a', b', les tangentes aux arcs de cercle ab, $a'b'$; soient ac, bc; $a'c'$, $b'c'$ ces tangentes. Soient maintenant ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 les arguments des quantités imaginaires $(c-a)$, $(b-c)$, $(c'-a')$, $(b'-c')$.

Fig. 10.



Supposons qu'on opère de la même manière pour tous les côtés du polygone curviligne R_0; on obtiendra un polygone rectiligne P_0 de $4n$ côtés, dont les côtés seront les tangentes menées aux côtés de R_0 par les sommets de R_0 et dont les sommets seront ceux de R_0 et les points tels que c, c'; je désignerai simplement par les lettres c et c' les angles du polygone P_0 qui correspondent aux sommets c et c'. Outre les sommets tels que c, le polygone P_0 admet $2n$ angles qui lui sont communs avec R_0 et dont la somme est $\sum\frac{2\pi}{k_i}$, d'où la relation

$$\sum c+\sum\frac{2\pi}{k_i}=(4n-2)\pi.$$

Nous pouvons écrire maintenant

$$\arg.\frac{df_i}{dz}=\omega_1-\omega_2, \qquad \text{pour } z=a,$$

$$\arg.\frac{df_i}{dz}=\omega_2-\omega_3, \qquad \text{pour } z=b',$$

$$\text{partie imag. de } J=-m(\omega_2-\omega_1-\omega_4+\omega_3)\sqrt{-1},$$

$$c=\omega_1-\omega_2+\pi,$$

$$c'=\pi-\omega_3+\omega_4,$$

$$\text{partie imag. de } J=m(c+c'-2\pi)\sqrt{-1}.$$

L'intégrale (10) prise le long de tous les côtés de la première sorte aura

donc pour valeur la partie imaginaire de $\sum J$ ou bien

$$\sqrt{-1}\,m\sum c-2nm\pi\sqrt{-1}$$

ou

$$(4n-2)m\pi\sqrt{-1}-2\pi\sqrt{-1}\sum\frac{m}{k_i}-2nm\pi\sqrt{-1}=(n-1)2m\pi\sqrt{-1}-2\pi\sqrt{-1}\sum\frac{m}{k_i}.$$

L'intégrale (10) se réduit alors à

$$2\pi\sqrt{-1}\left[m(n-1)-\sum\frac{p_i+m}{k_i}\right],$$

d'où la relation

$$p_0=q+m(n-1)-\sum\frac{p_i+m}{k_i}.$$

Ce nombre p_0 des zéros intérieurs à R_0 est entier à cause des congruences

$$p_i+m\equiv 0 \pmod{k_i}.$$

Exprimons maintenant le nombre p des zéros réellement distincts, défini par les conventions faites plus haut; nous trouverons

$$p=q+m\left(n-1-\sum\frac{1}{k_i}\right).$$

Ainsi, l'excès du nombre des zéros distincts sur celui des infinis distincts ne dépend que du nombre m, du nombre $2n$ des côtés de R_0 et de la somme $\sum\frac{2\pi}{k_i}$ des angles de ce polygone.

Cette somme satisfait à l'inégalité

$$\sum\frac{2\pi}{k_i}<\pi(2n-2),$$

d'où

$$\sum\frac{1}{k_i}<n-1,$$

et par conséquent $p>q$. L'expression $\left(n-1-\sum\frac{1}{k_i}\right)$ est proportionnelle à la S du polygone R_0.

Supposons maintenant que la fonction Θ soit de la deuxième ou de la sixième famille. Nous n'aurons toujours que des côtés de la première sorte; mais, outre les cycles de la première catégorie C_1, C_2, ..., C_i, ..., que nous avions rencontrés dans le premier cas, nous aurons des cycles C'_1, C'_2, ..., C'_i de la deuxième catégorie et de la troisième sous-catégorie. Considérons le cycle C'_i; les divers sommets de ce cycle seront des zéros; je suppose d'après la conven-

tion faite plus haut qu'ils comptent pour h_i zéros distincts. On aura alors

$$p = p_0 + \sum \frac{p_i}{k_i} + \sum h_i. \tag{11}$$

Il faut évaluer l'intégrale (10) :

1° Le long des arcs de cercle infiniment petits décrits autour des sommets de la première catégorie;

2° Le long des côtés de la première sorte;

3° Le long des arcs de cercle infiniment petits décrits autour des sommets de la deuxième catégorie.

La première partie de l'intégrale se réduit, comme plus haut, à $-2\pi\sqrt{-1}\sum\frac{p_i}{k_i}$; la seconde à

$$\sum \mathrm{J} = 2\pi m\sqrt{-1}\left(n - 1 - \sum\frac{1}{k_i}\right).$$

Pour évaluer la troisième, il suffit d'étudier comment varie l'argument de Θ dans le voisinage des sommets de la deuxième catégorie; à cet effet, il faut mettre la fonction Θ sous la forme

$$(z-\alpha)^{-2m}\,\Phi\left[e^{\frac{2i\pi}{\beta(\alpha-\varepsilon)}}\right]$$

(Φ étant l'algorithme d'une fonction holomorphe), ce qui est possible, ainsi qu'on l'a vu plus haut. On reconnaîtra alors que cette troisième partie de l'intégrale se réduit à $-2\pi\sqrt{-1}\sum h_i$.

Il restera donc, pour l'expression de l'intégrale (10),

$$2\pi\sqrt{-1}\left[m(n-1) - \sum\frac{p_i+m}{k_i} - \sum h_i\right],$$

d'où

$$p_0 = q + m(n-1) - \sum\frac{p_i+m}{k_i} - \sum h_i$$

et

$$p = q + m\left(n - 1 - \sum\frac{1}{k_i}\right).$$

Nous sommes conduits, pour l'excès du nombre des zéros distincts sur celui des infinis distincts, à la même expression que dans le cas précédent. Cet excès est proportionnel au nombre m et dépend en outre du nombre des côtés du polygone R_0 et de la somme de ses angles, ou bien encore il est proportionnel à la fois à m et à la S de R_0.

Supposons enfin que la fonction Θ soit de la troisième, de la quatrième, de la cinquième ou de la septième famille, c'est-à-dire existe dans tout le plan.

Nous aurons alors des côtés de la première et de la deuxième sorte, des sommets de la première et de la troisième catégorie et des sommets de la deuxième catégorie appartenant à des cycles de la troisième sous-catégorie. Nous allons chercher le nombre des zéros et des infinis distincts; ce nombre sera défini comme précédemment. Cependant il y a une remarque à faire au sujet du nombre des infinis distincts; ce sera en général le nombre des infinis intérieurs à R_0 et à R'_0, mais une difficulté se présentera si le point ∞ fait partie de la région R'_0. Dans ce cas il peut se faire que ∞ ne soit pas un infini de Θ, mais que tous les transformés du point ∞ par les substitutions du groupe G soient des infinis de Θ. Le nombre des infinis réellement distincts sera égal alors au nombre des infinis intérieurs à $\mathrm{R}_0 + \mathrm{R}'_0$ *plus* $2m$. Pour éviter cette difficulté, je supposerai que le polygone R_0 ait été choisi de telle sorte que le point ∞ ne fasse pas partie de la région R'_0.

Cela posé reprenons l'intégrale (10); il va falloir l'évaluer le long du contour de R_0, puis le long du contour de R'_0 et ajouter. Soient $2n$ le nombre des côtés de la première sorte; l celui des côtés de la deuxième sorte; conservons d'ailleurs les notations employées plus haut : p_0 et q représenteront alors le nombre des zéros et des infinis intérieurs à $\mathrm{R}_0 + \mathrm{R}'_0$.

Il faut évaluer l'intégrale :

1° Le long des petits arcs de cercle décrits autour des sommets de la première catégorie;

2° Le long des petits arcs de cercle décrits autour des sommets de la troisième sous-catégorie;

3° Le long des côtés de la première sorte;

4° Le long des côtés de la deuxième sorte.

La première et la deuxième partie de l'intégrale seront égales à

$$-2i\pi\left(\sum\frac{p_i}{k_i} + \sum h_i\right).$$

La troisième partie sera égale, comme plus haut, à la partie imaginaire de $\sum \mathrm{J}$.

Construisons un polygone P_0 en menant, par les différents sommets de R_0, des tangentes aux côtés de la première sorte. Le polygone rectiligne ainsi obtenu aura $4n + l$ côtés; ses angles seront de deux sortes : les uns seront analogues aux angles que nous avons appelés plus haut c, c'; les autres lui seront communs avec les angles de R_0, mais parmi ceux-ci les uns, dont la

somme sera $\sum \frac{2\pi}{k_i}$, correspondront aux sommets de la première catégorie; les autres, qui seront nuls, correspondront aux sommets de la deuxième catégorie; les autres enfin, qui seront droits et au nombre de $2l$, correspondront aux sommets de la troisième catégorie; d'où la relation

$$\sum c + \sum \frac{2\pi}{k_i} + l\pi = (4n + l - 2)\pi.$$

Or on a trouvé, plus haut,

$$\text{partie imag. de} \sum J = m\sqrt{-1}\left(\sum c - 2n\pi\right);$$

on aura donc

$$\text{partie imag. de} \sum J = 2\pi m\sqrt{-1}\left(n - 1 - \sum \frac{1}{k_i}\right).$$

Appelons enfin $2\pi I\sqrt{-1}$ la partie imaginaire de l'intégrale prise le long des côtés de la deuxième sorte; nous trouverons pour l'intégrale (10) prise le long de R_0 :

$$2\pi\sqrt{-1}\left[m(n-1) - \sum \frac{p_i + m}{k_i} - \sum h_i + 1\right].$$

Il faut prendre maintenant l'intégrale (10) le long de R'_0. Supposons que, d'après les conventions faites plus haut, les sommets de la première catégorie de R'_0 comptent pour $\sum \frac{p'_i}{k_i}$ zéros distincts et ceux de la deuxième catégorie pour $\sum h'_i$ zéros distincts. Nous trouverons pour la valeur de l'intégrale prise le long de R'_0, en raisonnant comme plus haut,

$$2\pi\sqrt{-1}\left[m(n-1) - \sum \frac{p'_i + m}{k_i} - \sum h'_i - 1\right],$$

ou en ajoutant les deux intégrales

$$2\pi\sqrt{-1}\left[2m(n-1) - \sum \frac{p_i + m}{k_i} - \sum \frac{p'_i + m}{k_i} - \sum h_i - \sum h'_i\right],$$

d'où

$$p_0 = q + 2m(n-1) - \sum \frac{p_i + m}{k_i} - \sum \frac{p'_i + m}{k_i} - \sum (h_i + h'_i).$$

Mais, si p désigne, comme plus haut, le nombre des zéros distincts, on aura

$$p = p_0 + \sum \frac{p_i}{k_i} + \sum \frac{p'_i}{k_i} + \sum h_i + \sum h'_i,$$

d'où

$$p = q + 2m\left(n - 1 - \sum \frac{1}{k_i}\right).$$

Ainsi, l'excès du nombre des zéros distincts sur celui des infinis distincts ne dépend que du nombre m, du nombre $2n$ des côtés de la première sorte et de la somme des angles de la première catégorie.

Ce qu'il importe surtout de remarquer, c'est que, dans tous les cas possibles, le nombre des zéros et celui des infinis distincts sont toujours finis.

IV. — Fonctions fuchsiennes.

Si une fonction $F(z)$ est uniforme, si elle se reproduit par toutes les substitutions d'un groupe fuchsien G, de telle sorte que, si

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$$

est une substitution de ce groupe, on ait identiquement

$$F\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) = F(z),$$

si enfin la fonction $F(z)$ n'a qu'un nombre fini de zéros et d'infinis réellement distincts, je dirai que cette fonction est une *fonction fuchsienne*. Existe-t-il de pareilles fonctions? Il est aisé d'en former.

Considérons, en effet, deux fonctions thétafuchsiennes correspondant à un même groupe G et à une même valeur de l'entier m, leur quotient sera une fonction fuchsienne. Il est aisé de généraliser ce procédé. Nous dirons que le nombre m est le *degré* de la série Θ. Si nous envisageons ensuite un produit de plusieurs séries telles que Θ, le degré de ce monome sera la somme des degrés de tous les facteurs. Si nous considérons un polynome entier par rapport à diverses séries Θ, nous dirons que ce polynome est homogène et de degré k si tous ses termes sont d'un même degré k; le quotient de deux polynomes homogènes de degrés k et k' sera une fonction rationnelle homogène de degré $k - k'$. Il est clair que toute fonction rationnelle, homogène de degré 0 par rapport à diverses séries Θ, est une fonction fuchsienne. Nous verrons plus tard comment toute fonction fuchsienne peut s'exprimer de cette façon.

Quelles sont les propriétés des fonctions fuchsiennes?

1° *Les singularités sont les mêmes que celles des fonctions thétafuchsiennes;* nous avons par conséquent des fonctions fuchsiennes n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental et pour lesquelles toute la circonférence de cercle est une ligne singulière essentielle, et d'autres qui existent dans tout

le plan et dont les points singuliers essentiels, situés tous sur le cercle fondamental, sont isolés quoique en nombre infini.

2° Le nombre des zéros distincts d'une fonction fuchsienne $F(z)$ est égal à celui de ses infinis distincts; il est égal, d'autre part, au nombre des zéros distincts de la fonction fuchsienne $F(z)-a$, c'est-à-dire au nombre des points réellement distincts pour lesquels $F(z)$ prend la valeur a. En conséquence, le nombre des points intérieurs à R_θ (ou à $R_\theta+R'_\theta$) et pour lesquels $F(z)$ reprend une même valeur est *constant* et *fini*.

3° Soient deux fonctions fuchsiennes $F(z)$ et $F_1(z)$ correspondant à un même groupe fuchsien G, et supposons que la première reprenne p fois, et la seconde p_1 fois, la même valeur à l'intérieur de R_θ; je dis qu'il y aura entre F et F_1 une relation algébrique. En effet, à chaque valeur de F correspondent p_1 valeurs de F_1; toute fonction symétrique de ces p_1 valeurs est méromorphe en F pour toutes les valeurs de F finies ou infinies. Toutes ces fonctions symétriques sont donc des fonctions rationnelles de F; donc F_1 elle-même est fonction algébrique de F. C. Q. F. D.

4° Considérons maintenant toutes les fonctions fuchsiennes qui correspondent à un même groupe G. Entre deux quelconques d'entre elles nous venons de voir qu'il y a une relation algébrique. Il suit de là que toutes ces fonctions s'exprimeront rationnellement à l'aide de deux d'entre elles que j'appellerai x et y. Nous aurons d'ailleurs entre x et y une relation algébrique

$$\psi(x,y)=0. \tag{1}$$

Quel est le genre de la relation (1) ou, ce qui revient au même, celui de la surface de Riemann correspondante? Pour résoudre cette question, il faut se reporter au paragraphe VIII du Mémoire sur les groupes fuchsiens, paragraphe intitulé *Classification en genres;* dans ce paragraphe, je supposais que l'on découpait la région R_θ (ou $R_\theta+R'_\theta$), puis qu'on la repliait en la déformant de manière à recoller ensemble les côtés conjugués et à obtenir ainsi une surface fermée. Il est clair qu'au point de vue de la géométrie de situation la surface fermée ainsi obtenue ne diffère pas de la surface de Riemann qui nous occupe. Il en résulte que le genre de la relation (1) est précisément ce que j'ai appelé, dans le Mémoire en question, *le genre du groupe* G. Si donc le groupe G est de genre zéro, il en sera de même de la relation (1) et, par conséquent, toutes les fonctions fuchsiennes pourront s'exprimer rationnellement à l'aide d'*une seule* d'entre elles que j'appellerai x.

On peut éviter ces considérations empruntées à la géométrie de situation. C'est ce que j'ai fait dans un travail inséré dans les Mémoires de l'Académie de Caen (1), où je détermine le genre de la relation (1) par le nombre des cycles distincts que l'on peut faire décrire au point analytique (x,y), mais on est conduit ainsi à une discussion assez longue.

5° Considérons la fonction fuchsienne que nous venons d'appeler x et formons les deux fonctions suivantes :

$$v_1=\sqrt{\frac{dx}{dz}}, \qquad v_2=z\sqrt{\frac{dx}{dz}}. \tag{2}$$

Il est clair que l'on aura

$$\frac{1}{v_1}\frac{d^2v_1}{dx^2}=\frac{1}{v_2}\frac{d^2v_2}{dx^2}=\frac{2\dfrac{d^3x}{dz^2}\dfrac{dx}{dz}-3\left(\dfrac{d^2x}{dz^2}\right)^2}{4\left(\dfrac{dx}{dz}\right)^4}.$$

On vérifie aisément que le troisième membre de cette double égalité est une fonction fuchsienne de z : c'est donc, d'après ce que nous venons de voir, une fonction rationnelle de x et de y, que j'appellerai $\varphi(x,y)$.

Les deux intégrales de l'équation linéaire

$$\frac{d^2v}{dx^2}=v\,\varphi(x,y) \tag{3}$$

sont donc

$$v=v_1, \qquad v=v_2.$$

Ainsi la considération de la fonction fuchsienne x permet d'intégrer l'équation linéaire (3) dont les coefficients sont des fonctions rationnelles du point analytique (x,y). On voit que la variable indépendante x s'exprime par une fonction fuchsienne de z, c'est-à-dire du rapport des intégrales. Quand on connaît cette fonction fuchsienne on en déduit les intégrales elles-mêmes à l'aide des formules (2).

Dans le cas particulier où le groupe G est de genre zéro, l'équation (3) pourra s'écrire

$$\frac{d^2v}{dx^2}=v\,\varphi(x). \tag{3 bis}$$

$\varphi(x)$ étant une fonction rationnelle de x seulement; dans ce cas, en effet, nous venons de voir que toute fonction fuchsienne s'exprime rationnellement en x.

(1) Ce Tome, p. 75.

Cherchons maintenant quels sont les points singuliers de l'équation (3) et comment se comportent les intégrales dans le voisinage de chacun d'eux. En général, les intégrales seront des fonctions holomorphes de x; il y aura deux exceptions qui nous donnent deux sortes de points singuliers :

1° Pour les points singuliers de la relation (1), y cesse d'être fonction holomorphe de x, et il en est de même des intégrales v_1 et v_2; mais v_1 et v_2 restent *fonctions holomorphes du point* analytique (x, y). Nous n'avons donc pas ainsi un véritable point singulier.

2° Pour les points (x, y) qui correspondent aux divers sommets du polygone R_0. Dans cette seconde espèce de points singuliers, nous distinguerons :

1° Ceux qui correspondent à des sommets de la première catégorie. Dans le voisinage d'un pareil point singulier, les intégrales de l'équation (3) sont régulières, pour employer l'expression de M. Fuchs. Si nous formons maintenant l'équation déterminante correspondant à ce point singulier, la différence des racines de cette équation est l'inverse d'un nombre entier. En effet, le point singulier correspond à un sommet de R_0 qui fait partie d'un cycle de la première catégorie, et la somme des angles de ce cycle est égale à $\frac{2\pi}{p}$, p étant un nombre entier; on voit aisément que la différence des racines de l'équation déterminante est précisément $\frac{1}{p}$.

Dans le cas particulier où le sommet de R_0 envisagé appartient à un cycle de la première sous-catégorie, on a $p = 1$, d'après la définition même de cette sous-catégorie. Par conséquent, la différence des racines de l'équation déterminante est l'unité. Un semblable point n'est donc pas un point singulier.

2° Considérons maintenant un point singulier qui corresponde à un sommet de R_0 appartenant à un cycle de la deuxième catégorie. Ce cycle sera de la troisième sous-catégorie, puisque, d'après ce que nous avons vu plus haut, on peut toujours supposer qu'il n'y a pas de cycle de la quatrième sous-catégorie. Formons l'équation déterminante correspondant à un pareil point singulier; les racines de cette équation seront égales et les intégrales de l'équation (3) seront *logarithmiques*, mais *régulières*.

3° Il faudrait envisager enfin les points analytiques (x, y) qui correspondent à des sommets de la troisième catégorie, mais on reconnaîtrait aisément que ce ne sont pas des points singuliers.

En résumé, les intégrales de l'équation (3) sont partout régulières et [si on laisse de côté les points singuliers de la relation (1)] le nombre des points singuliers de l'équation différentielle (3) est égal à celui des cycles de la deuxième ou de la troisième sous-catégorie que présente le polygone R_0 (ou les deux polygones R_0 et R_0').

V. — Première famille; genre zéro.

Après avoir étudié les propriétés des fonctions fuchsiennes en général, nous allons nous occuper, séparément, des diverses familles et des divers genres entre lesquels se répartissent ces fonctions; nous commencerons par l'étude spéciale des fonctions les plus simples; celles de la première famille et du genre zéro.

Je rappelle d'abord quelle est, pour de semblables fonctions, la forme du polygone R_0. Les côtés sont tous de la première sorte et au nombre de $2n$; les côtés de rang p et $2n + 1 - p$ sont conjugués et, par conséquent, congruents. Les cycles sont au nombre de $n + 1$; deux d'entre eux ne contiennent qu'un seul sommet, le premier le sommet de rang 1; le second le sommet de rang $n + 1$. Les $n - 1$ autres cycles sont formés de deux sommets, à savoir des sommets de rang p et $2n + 2 - p$. (C'est l'exemple II du paragraphe VII du Mémoire sur les groupes fuchsiens.)

Un cas particulier remarquable est celui où le polygone R_0 est symétrique par rapport à l'arc de cercle qui coupe orthogonalement le cercle fondamental et qui joint les sommets de rang 1 et $n + 1$. Je dirai alors simplement que ce polygone est symétrique.

Dans le cas qui nous occupe, le genre est égal à 0, et par conséquent toutes les fonctions fuchsiennes s'expriment rationnellement à l'aide de l'une d'entre elles, que j'appellerai x ou bien $f(z)$. Cette condition ne détermine pas complètement la fonction $x = f(z)$. Si, en effet, toutes les fonctions fuchsiennes s'expriment rationnellement à l'aide de x, elles s'expriment aussi rationnellement à l'aide de $\frac{ax + b}{cx + d}$, a, b, c, d étant des constantes quelconques. Il faut donc, pour définir complètement la fonction $x = f(z)$, s'imposer encore trois conditions. Voici celles que nous choisirons. Soient α_1, α_2, α_{n+1} les sommets de rang 1, 2 et $n + 1$; nous supposerons que l'on a

$$f(\alpha_1) = 0, \quad f(\alpha_2) = 1, \quad f(\alpha_{n+1}) = \infty.$$

La fonction $f(z)$ sera alors entièrement déterminée. A l'égard de cette fonction, je remarquerai ce qui suit : Si le polygone R_0 est symétrique, la fonction $f(z)$ est réelle et positive sur tout le périmètre de ce polygone.

J'appellerai α_i le sommet de rang i; ce sommet formera avec α_{2n+2-i} un cycle dont la somme des angles sera $\frac{2\pi}{\beta_i}$, β_i étant un nombre entier. Enfin je poserai

$$a_i = f(\alpha_i) = f(\alpha_{2n+2-i}),$$

d'où

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = 1, \qquad a_{n+1} = \infty.$$

Pour $z = \alpha_i$, les $\beta_i - 1$ premières dérivées de $f(z)$ s'annulent de sorte que le développement de $f(z)$ est de la forme

$$f(z) = a_i + b_1(z-\alpha_i)^{\beta_i} + b_2(z-\alpha_i)^{\beta_i+1} + \dots.$$

Pour $z = \alpha_{n+1}$, $f(z)$ est un infini d'ordre β_{n+1}, de sorte que le développement de $f(z)$ est de la forme

$$f(z) = \frac{b_1}{(z-\alpha_{n+1})^{\beta_{n+1}}} + \frac{b_2}{(z-\alpha_{n+1})^{\beta_{n+1}+1}} + \dots.$$

Nous avons vu que si l'on pose

$$v = \sqrt{\frac{dx}{dz}},$$

la fonction v ainsi définie satisfait à une équation

$$\frac{d^2v}{dx^2} = v\,\varphi(x), \tag{3 bis}$$

$\varphi(x)$ étant rationnel en x. Quelle est ici la forme de la fonction $\varphi(x)$? On trouve aisément :

$$\varphi(x) = \frac{P(x)}{(x-a_1)^2(x-a_2)^2\dots(x-a_n)^2} = \frac{P(x)}{Q^2(x)},$$

$Q(x)$ étant le produit $(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$ et $P(x)$ étant un polynome en x de degré $2n-2$.

Le polynome $P(x)$ doit satisfaire aux conditions suivantes :

$$P(a_i) = Q'^2(a_i)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4\beta_i^2}\right).$$

Nous désignons par la notation $Q'(x)$ la dérivée de $Q(x)$. De plus, le coefficient de x^{2n-2} dans $P(x)$ doit être égal à

$$-\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4\beta_{n+1}^2}\right).$$

Voilà donc $n+1$ conditions nécessaires auxquelles doit satisfaire le polynome $P(x)$ pour que l'équation (3 *bis*) soit intégrable de la façon que nous avons dite. Ces conditions ne sont pas suffisantes. En effet, le polynome $P(x)$ étant de degré $2n-2$, il reste dans ce polynome $n-2$ paramètres arbitraires; mais, dans ces $n-2$ paramètres, qui sont des quantités *complexes*, je dois distinguer les parties réelles et imaginaires de telle façon qu'ils équivalent à $2n-4$ paramètres *réels*. Or, combien avons-nous de paramètres arbitraires dans le groupe G? Le groupe G est défini par un polygone R_0 de $2n$ côtés. Pour définir un pareil polygone il faut, en général, $4n-3$ conditions. Mais notre polygone n'est pas quelconque : en effet, les côtés conjugués doivent être congruents, ce qui fait n conditions; la somme des angles des divers cycles doit être respectivement égale à $\frac{2\pi}{\beta_1}$, $\frac{2\pi}{\beta_2}$, ..., $\frac{2\pi}{\beta_{n+1}}$, ce qui fait $n+1$ conditions. Il reste donc, en tout, dans notre groupe G, $2n-4$ paramètres arbitraires. Dans notre fonction $\varphi(x)$, au contraire, nous avons $2n-4$ paramètres qui restent arbitraires dans $P(x)$; nous avons en outre, dans $Q(x)$, $n-2$ paramètres complexes arbitraires, à savoir $a_3, a_4, \dots, a_n$; cela équivaut à $2n-4$ paramètres réels. Donc, dans la fonction $\varphi(x)$, il y a $2n-4$ paramètres arbitraires de plus que dans le groupe G. Donc, pour que l'équation (3 *bis*) s'intègre de la façon que j'ai dite, il faut, outre les conditions énoncées plus haut, que $2n-4$ autres conditions soient remplies. Ces conditions sont transcendantes et très compliquées; leur étude trouvera place dans un autre Mémoire (1).

Supposons maintenant que l'on se donne $a_3, a_4, \dots, a_n$, c'est-à-dire les points singuliers de l'équation (3 *bis*), $Q(x)$ sera déterminé et il nous restera les $2n-4$ paramètres de $P(x)$. Le nombre des paramètres restés arbitraires est alors précisément le nombre des conditions à remplir. Dans une question où n'entreraient que des fonctions algébriques ou des transcendantes simples, on pourrait conclure de là que l'on peut toujours disposer de ces paramètres pour satisfaire à ces conditions, et par conséquent qu'*il existe toujours une équation de la forme* (3 *bis*) *intégrable par les fonctions fuchsiennes seules et où les points singuliers* $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ *sont donnés à l'avance*. Mais ici, nous ne pouvons nous contenter d'un pareil aperçu, et ce théorème, fort important, exigera une démonstration spéciale que je donnerai dans un Mémoire ultérieur (1).

(1) *Sur les groupes des équations linéaires* (*Acta mathematica*, t. IV, p. 201-312 et plus loin). N. E. N.

Dans le cas particulier où le polygone R_0 est symétrique, les points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ ainsi que les coefficients de $P(x)$, sont réels.

Dans le cas plus particulier encore où $n = 2$, l'équation (3 *bis*) se ramène aisément à l'équation hypergéométrique de Gauss. De plus, nous avons

$$2n - 4 = 0,$$

de telle sorte que le nombre des conditions transcendantes dont il a été question plus haut est nul. Alors, pour que x soit fonction fuchsienne du rapport des intégrales, il faut et il suffit que

$$P(0) = -\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\beta_1^2}\right),$$

$$P(1) = -\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\beta_2^2}\right),$$

et que le coefficient de x^2 dans $P(x)$

$$= -\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\beta_3^2}\right),$$

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ étant entiers.

Étudions maintenant les fonctions thétafuchsiennes.

Soit $\Theta(z)$ une fonction thétafuchsienne jouissant de la propriété caractéristique

$$\Theta\left(\frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}\right) = \Theta(z)(\gamma_k z + \delta_k)^{2m}.$$

Reprenons la fonction fuchsienne $f(z) = x$ et sa dérivée $f'(z)$, il est clair que la fonction

$$\frac{\Theta(z)}{[f'(z)]^m}$$

sera une fonction fuchsienne et par conséquent une fonction rationnelle de x. Nous avons donc pour l'expression générale des fonctions $\Theta(z)$:

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x), \tag{1}$$

F étant l'algorithme d'une fonction rationnelle.

Parmi les fonctions thétafuchsiennes, nous avons vu qu'il y en avait de deux espèces : les unes devenant infinies, les autres ne devenant pas infinies à l'intérieur du cercle fondamental.

Quelle sera la forme générale de celles de la seconde espèce ? L'expression (1) ne doit devenir infinie pour aucune valeur de x. Dans ce cas $F(x)$ ne pourra devenir infini que si $\frac{dx}{dz}$ devient nul, c'est-à-dire si x vient en l'un des points singuliers $x = a_1, x = a_2, \ldots, x = a_n$.

Il suit de là que l'on doit avoir

$$\Theta(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^m \frac{\theta_p(x)}{(x-a_1)^{\lambda_1}(x-a_2)^{\lambda_2}\ldots(x-a_n)^{\lambda_n}}, \tag{2}$$

$\theta_p(x)$ désignant un polynome d'ordre p. Exprimons maintenant que $\Theta(z)$ ne devient infini ni pour $x = a_1$, ni pour $x = a_2, \ldots$, ni pour $x = a_n$, ni pour $x = \infty$; il viendra

$$\begin{cases} \lambda_i < m\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right), \\ p < \sum \lambda_i - m\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right). \end{cases} \tag{3}$$

Ces $n+1$ inégalités sont compatibles.

Ces inégalités ne permettent pas de donner à p des valeurs aussi grandes que l'on veut, de sorte qu'il existera toujours un nombre q tel que l'on ait constamment $p < q$ et que les inégalités (3) permettent à p d'atteindre la limite $q - 1$.

Supposons le nombre m donné; le nombre q sera alors déterminé, et il est clair qu'entre q fonctions thétafuchsiennes de la seconde espèce, il y aura toujours une relation linéaire identique.

Si l'on se rapporte à l'expression que nous avons donnée de ces transcendantes dans le paragraphe I, on verra qu'il y entre une fonction rationnelle $H(z)$ renfermant un nombre infini de paramètres arbitraires. Il suit de là qu'il y a une infinité de fonctions rationnelles H telles que la série thétafuchsienne correspondante soit identiquement nulle.

Il existe donc une infinité de relations identiques linéaires entre ces séries thétafuchsiennes. Nous les étudierons plus loin.

Revenons à l'expression (2). Jusqu'ici nous avons supposé que les nombres $m, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ qui y entrent étaient entiers. S'ils ne l'étaient pas, la fonction définie par cette expression ne jouirait plus de la propriété fondamentale des fonctions thétafuchsiennes, mais elle pourrait rester uniforme. Pour cela il suffit que les nombres

$$m(\beta_i - 1) - \lambda_i \beta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et

$$m(\beta_{n+1} + 1) - \Sigma \lambda_i \beta_{n+1}$$

soient entiers.

Il est clair que les $n+1$ équations

$$\begin{cases} m(\beta_i - 1) - \lambda_i \beta_i = \varepsilon_i, \\ m(\beta_{n+1} + 1) - \Sigma \lambda_i \beta_{n+1} = \varepsilon_{n+1}, \end{cases} \tag{4}$$

où les ε sont des nombres entiers donnés, fourniront toujours des valeurs pour

les λ et pour m, car ce sont des équations linéaires dont le déterminant n'est pas nul.

Supposons donc que, dans les équations (4), on donne à tous les ε la valeur zéro excepté à ε_k auquel on donne la valeur 1. Portons ensuite dans l'expression (2) les valeurs de m et des λ tirées des équations (4) et remplaçons dans cette même expression θ_p par une constante. Nous aurons défini une fonction X_k qui est holomorphe dans tout le cercle fondamental, et qui n'a d'autres zéros que le point α_k et les points correspondants. Tous ces zéros sont d'ailleurs simples.

Ces fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}$, dont le rôle est très important, ont été découvertes par M. Halphen dans le cas particulier de $n = 2$. On peut trouver entre elles et x certaines relations intéressantes. Considérons en effet les séries X_1 et X_{n+1}. Soient m_1 et m_{n+1} les valeurs correspondantes du nombre m. Ces valeurs seront fractionnaires.

Soit, en effet, Y une fonction uniforme quelconque susceptible d'être mise sous la forme

$$(2\ bis) \qquad Y = \left(\frac{dx}{dz}\right)^M \frac{K}{(x-a_1)^{\lambda_1}(x-a_2)^{\lambda_2}\ldots(x-a_n)^{\lambda_n}},$$

K désignant un facteur numérique. Cette fonction n'a d'autres zéros ou infinis que les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ et leurs correspondants. Supposons que ces zéros soient respectivement d'ordre $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n+1}$; il va sans dire que, si α_i par exemple était un infini, γ_i serait négatif. On aura

$$Y = K X_1^{\gamma_1} X_2^{\gamma_2} \ldots X_{n+1}^{\gamma_{n+1}},$$

K étant un facteur numérique. On aura, en particulier,

$$x = K_1 X_1^{\beta_1} X_{n+1}^{-\beta_{n+1}},$$

et

$$x - a_i = K_i X_i^{\beta_i} X_{n+1}^{-\beta_{n+1}},$$

les K étant toujours des facteurs numériques : d'où les relations identiques

$$K_1 X_1^{\beta_1} = K_i X_i^{\beta_i} + a_i X_{n+1}^{\beta_{n+1}}.$$

Nous avons exprimé les fonctions thétafuchsiennes de deux manières tout à fait différentes : soit par la série (5) (§ I), soit par la formule (1) de ce paragraphe.

Nous savons donc *a priori* qu'il existe une infinité d'identités de la forme

$$\sum H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m} = \left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x),$$

où H et F sont les algorithmes de deux fonctions rationnelles.

Écrire effectivement ces identités et en particulier reconnaître dans quel cas la fonction F est identiquement nulle, tel est le problème dont il s'agit maintenant de donner une solution aussi complète que possible.

Mais, pour y arriver, il est nécessaire d'avoir recours à des considérations d'un ordre un peu différent.

Jusqu'ici nous avons toujours regardé le nombre m comme positif; supposons-le maintenant entier, mais négatif. Considérons en particulier la fonction suivante :

$$\Lambda(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h} \frac{[f(z)-a_1]^{\mu_1}[f(z)-a_2]^{\mu_2}\ldots[f(z)-a_n]^{\mu_n}}{[f(z)-f(z_1)][f(z)-f(z_2)]\ldots[f(z)-f(z_p)]}.$$

Je suppose que h est un entier positif ainsi que les exposants $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ et que ces nombres entiers satisfont, ainsi que le nombre p des facteurs du dénominateur, aux inégalités suivantes :

$$(5) \qquad \begin{cases} \mu_i > h\left(1 - \frac{1}{\gamma_i}\right), \\ \sum \mu_i < h\left(1 + \frac{1}{\gamma_{n+1}}\right) + p. \end{cases}$$

D'après ces inégalités, la fonction $\Lambda(z)$ ne peut devenir infinie que si l'un des facteurs du dénominateur s'annule. Il en résulte que les infinis de cette fonction sont tous simples et qu'ils sont compris dans l'une des formules

$$(6) \qquad \frac{\alpha_i z_1 + \beta_i}{\gamma_i z_1 + \delta_i}, \quad \frac{\alpha_i z_2 + \beta_i}{\gamma_i z_2 + \delta_i}, \quad \ldots, \quad \frac{\alpha_i z_p + \beta_i}{\gamma_i z_p + \delta_i},$$

où

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$$

représente une des substitutions du groupe G.

Posons

$$F(z) = [f(z)-a_1]^{\mu_1}[f(z)-a_2]^{\mu_2}\ldots[f(z)-a_n]^{\mu_n}$$

et

$$\frac{1}{[f(z)-f(z_1)][f(z)-f(z_2)]\ldots[f(z)-f(z_p)]} = \frac{A_1}{f(z)-f(z_1)} + \frac{A_2}{f(z)-f(z_2)} + \ldots + \frac{A_p}{f(z)-f(z_p)},$$

de telle sorte que

$$(7) \qquad \begin{cases} A_1 + A_2 + \ldots + A_p = 0, \\ A_1 f(z_1) + A_2 f(z_2) + \ldots + A_p f(z_p) = 0, \\ A_1 f^2(z_1) + A_2 f^2(z_2) + \ldots + A_p f^2(z_p) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_1 f^{p-2}(z_1) + A_2 f^{p-2}(z_2) + \ldots + A_p f^{p-2}(z_p) = 0, \\ A_1 f^{p-1}(z_1) + A_2 f^{p-1}(z_2) + \ldots + A_p f^{p-1}(z_p) = 1. \end{cases}$$

Le résidu correspondant à l'infini

$$\frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}$$

s'écrira

$$\frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} (\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2(h+1)}.$$

Il en résulte que l'on aura identiquement

$$(8) \qquad A(z) = \sum_i \sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \frac{(\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2(h+1)}}{z - \frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}} + G(z),$$

$G(z)$ désignant une fonction holomorphe à l'intérieur du cercle fondamental. Plus généralement, si $\varphi(z)$ est une fonction rationnelle de z n'ayant pas d'infini intérieur au cercle fondamental, on aura

$$(9) \qquad A(z)\varphi(z) = \sum_0^{\infty} \sum_1^{p} \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \frac{\varphi\left(\frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right)}{(\gamma_i z_k + \delta_i)^{2(h+1)}} \frac{1}{z - \frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}} + G(z).$$

Je dis que, dans les formules (8) et (9), la fonction holomorphe $G(z)$ est identiquement nulle.

PREMIÈRE DÉMONSTRATION.

Considérons un cercle C ayant pour centre l'origine et pour rayon r; concentrique par conséquent au cercle fondamental.

Envisageons les différents polygones R_i qui sont, tout entièrement ou en partie, à l'intérieur de ce cercle.

L'ensemble de ces polygones formera une figure polygonale S ne dépendant que du rayon r du cercle C. Considérons l'intégrale

$$\int \frac{A(z)\varphi(z)\,dz}{z - x}$$

prise le long du contour de cette figure S. Le théorème que j'ai énoncé pourra être regardé comme démontré si j'établis que cette intégrale tend vers o quand r tend vers 1, c'est-à-dire vers le rayon du cercle fondamental.

Pour cela je vais faire voir :

1° Que le périmètre de S reste fini, quel que soit r;

2° Que le module de la fonction sous le signe $\int$ reste plus petit qu'une certaine quantité M quand la variable reste sur le contour d'intégration;

3° Que M tend vers o quand r tend vers 1.

En vertu du lemme IV du paragraphe I, le nombre des polygones R_i qui sont en tout ou en partie intérieurs au cercle C est plus petit que

$$N = \frac{\pi}{4\sigma}(e^{2(R+\lambda)} + e^{-2(R+\lambda)} - 2),$$

σ et λ étant des quantités constantes et R étant défini par l'égalité

$$r = \frac{e^{2R} - 1}{e^{2R} + 1}.$$

Donc, *a fortiori*, le nombre des côtés de S sera plus petit que $2n$N. Considérons l'un de ces côtés appartenant à un polygone R_i et soient l_i la longueur de ce côté, l_0 celle du côté correspondant de R_0; soit enfin $\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ celle des substitutions de G qui correspond à R_i, on aura

$$l_i < l_0 H,$$

H étant la plus grande valeur que puisse prendre

$$\operatorname{mod} \frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^2}$$

quand la variable z décrit le côté l_0.

Supposons que le polygone R_0 soit tout entier contenu dans un cercle ayant pour centre l'origine et pour rayon

$$\frac{e^{2\lambda} - 1}{e^{2\lambda} + 1}.$$

En vertu du lemme V du paragraphe I on aura

$$H < \frac{e^{2\lambda} + e^{-2\lambda} + 2}{e^{2R} + e^{-2R} + 2}.$$

Soit L le plus grand côté de R_0. Le périmètre de S sera plus petit que

$$2n\,N.H.L$$

ou *a fortiori* que

$$\frac{2n\pi L}{\sigma}(e^{2\lambda} + e^{-2\lambda} + 2)\frac{2e^{2(R+\lambda)}}{e^{2R}}.$$

Il sera donc fini. C. Q. D. F.

Nous devons évidemment supposer que x ne se trouve sur aucun des contours d'intégration. La fonction $\frac{\varphi(z)}{z - x}$ est alors une fonction rationnelle bien déterminée et ne devenant infinie pour aucune des valeurs de la variable situées sur les divers contours d'intégration. On peut donc aisément trouver une limite supérieure M_1 que son module ne peut dépasser.

Nous pourrons supposer aussi que la fonction $\Lambda(z)$ ne devient pas infinie le long du périmètre de R_0 et nous pourrons trouver une limite supérieure M_2 que son module ne peut dépasser quand z décrit le contour de R_0. Mais on aura identiquement

$$\Lambda\left(\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}\right)=\Lambda(z)\frac{1}{(\gamma_i z+\delta_i)^{2h}}.$$

On en conclut que, quand z décrit le contour de S, le module de $\Lambda(z)$ est plus petit que

$$M_2 H^h,$$

et celui de la fonction sous le signe $\int$ plus petit que

$$M = M_1 M_2 H^h.$$

D'ailleurs, quand r tend vers 1, M tend vers 0, puisque M_1 et M_2 sont des constantes et que H tend vers 0.

Le théorème énoncé est donc démontré.

DEUXIÈME DÉMONSTRATION.

Posons

$$\Phi(z,a)=\sum_i \frac{\varphi\left(\frac{\alpha_i a+\beta_i}{\gamma_i a+\delta_i}\right)}{z-\frac{\alpha_i a+\beta_i}{\gamma_i a+\delta_i}}\frac{1}{(\gamma_i a+\delta_i)^{2(h+1)}},$$

Si, dans cette expression, on regarde z comme une constante, $\Phi(z,a)$ sera une fonction thétafuchsienne de a. Supposons d'abord que z et a soient tous deux intérieurs au cercle fondamental; cette fonction thétafuchsienne ne deviendra infinie que pour $a=z$ et pour les points correspondants, c'est-à-dire pour $f(a)=f(z)$. Le résidu correspondant à l'infini $z=a$ sera égal à $-\varphi(z)$. On aura donc

$$\Phi(z,a)=\frac{[f'(a)]^{h+1}}{f(z)-f(a)}\frac{\theta_q[f(a)]}{F_1(a)}\frac{F_1(z)\varphi(z)}{\theta_q[f(z)][f'(z)]^h}. \tag{10}$$

Dans cette expression (10), $F_1(a)$ désigne le produit suivant :

$$[f(a)-a_1]^{\lambda_1}[f(a)-a_2]^{\lambda_2}\dots[f(a)-a_n]^{\lambda_n},$$

$\theta_q[f(a)]$ désigne un polynome entier de degré q en $f(a)$ dont les coefficients peuvent être des fonctions de z.

Enfin les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ et q doivent satisfaire aux inégalités (3)

$$\begin{cases} \lambda_i < (h+1)\left(1-\frac{1}{\beta_i}\right), \\ q < \sum\lambda_i - (h+1)\left(1+\frac{1}{\beta_{n+1}}\right)+1. \end{cases} \tag{11}$$

On voit aisément en effet que telle doit être la forme de toute fonction thétafuchsienne de a n'admettant aucun infini distinct de l'infini $a=z$.

En comparant les inégalités (3) et (11), on trouve

$$\lambda_i \leqq \mu_i, \qquad q<p.$$

Je me propose maintenant d'établir l'égalité (9) en montrant que $G(z)$ est identiquement nul, c'est-à-dire de démontrer l'identité

$$\varphi(z)\Lambda(z)=\sum_1^p{}_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}}\Phi(z,z_k),$$

ou bien

$$\varphi(z)\Lambda(z)=\sum_k \frac{A_k}{f(z)-f(z_k)}\frac{F(z_k)}{F_1(z_k)}\theta_q[f(z_k)]\frac{F_1(z)\varphi(z)}{\theta_q[f(z)][f'(z)]^h}.$$

Nous pouvons simplifier le second membre en supposant qu'on a

$$\lambda_i=\mu_i.$$

Si cela n'avait pas lieu, on multiplierait $F_1(a)$ et $\theta_q[f(a)]$ par

$$[f(a)-a_1]^{\mu_1-\lambda_1}[f(a)-a_2]^{\mu_2-\lambda_2}\dots[f(a)-a_n]^{\mu_n-\lambda_n}.$$

Le degré du polynome $\theta_q[f(a)]$ serait alors augmenté, mais il resterait inférieur à p.

On peut donc toujours supposer

$$\lambda_i=\mu_i,$$

et, par conséquent,

$$F(z)=F_1(z),$$

tout en continuant à supposer

$$p>q.$$

L'identité à démontrer se simplifie alors et s'écrit

$$\sum_k \frac{A_k}{f(z)-f(z_k)}\frac{F(z)\varphi(z)}{[f'(z)]^h}=\sum_k \frac{A_k}{f(z)-f(z_k)}\frac{\theta_q[f(z_k)]}{\theta_q[f(z)]}\frac{F(z)\varphi(z)}{[f'(z)]^h}.$$

Si nous posons maintenant

$$\frac{\theta_q[f(z_k)]-\theta_q[f(z)]}{f(z)-f(z_k)}=P[f(z_k)],$$

P représentera un polynome en $f(z_k)$ dont le degré sera égal à $q-1$ et ne

pourra, par conséquent, surpasser $p-2$. L'identité à démontrer se réduit alors à

$$\Sigma A_k P[f(z_k)] = 0,$$

et, sous cette forme, elle est évidente en vertu des relations (7). Le théorème énoncé est donc encore démontré.

Cette seconde démonstration nous conduit tout naturellement à un théorème important relatif aux fonctions thétafuchsiennes de seconde espèce. Soit

$$\Sigma H\left(\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}\right)(\gamma_i z+\delta_i)^{-2(h+1)} \tag{12}$$

une série où H est l'algorithme d'une fonction rationnelle n'ayant pas d'infini à l'intérieur du cercle fondamental. On a vu que cette série représente une fonction thétafuchsienne sans infini et peut être égalée à une expression de la forme

$$[f'(z)]^{h+1}\frac{\theta_{q-1}[f(z)]}{F(z)}, \tag{13}$$

θ_{q-1} étant un polynome de degré $q-1$ en $f(z)$ et q étant le plus grand nombre entier satisfaisant aux inégalités (11).

Toute expression telle que (13) peut s'exprimer linéairement à l'aide de q d'entre elles; donc toute expression telle que (12) peut s'exprimer linéairement à l'aide de q d'entre elles. Mais on peut faire deux hypothèses.

Ou bien toute expression telle que (13) peut être mise sous la forme (12) et alors toute expression telle que (12) ne peut s'exprimer linéairement à l'aide de $q-1$ d'entre elles.

Ou bien il n'est pas possible de mettre toute expression (13) sous la forme (12), et alors toute expression telle que (12) peut s'exprimer linéairement à l'aide de $q-1$ d'entre elles.

Cette deuxième hypothèse doit être rejetée.

Supposons-la, en effet, satisfaite et soient

$$\theta_1,\ \theta_2,\ \ldots,\ \theta_{q-1}$$

les $q-1$ fonctions telles que (12), à l'aide desquelles toutes les autres s'expriment linéairement.

Soient maintenant

$$z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_q$$

q valeurs quelconques de z. On pourra toujours trouver q nombres

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_q$$

satisfaisant aux conditions

$$\begin{aligned}
&A_1\theta_1(z_1)+A_2\theta_1(z_2)+\ldots+A_q\theta_1(z_q)=0,\\
&A_1\theta_2(z_1)+A_2\theta_2(z_2)+\ldots+A_q\theta_2(z_q)=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&A_1\theta_{q-1}(z_1)+A_2\theta_{q-1}(z_2)+\ldots+A_q\theta_{q-1}(z_q)=0.
\end{aligned}$$

On aura alors, quelle que soit la fonction H qui entre dans l'expression (12),

$$\sum_i^q\sum_l A_k H\left(\frac{\alpha_l z_k+\beta_l}{\gamma_l z_k+\delta_l}\right)(\gamma_l z_k+\delta_l)^{-2(h+1)}=0. \tag{14}$$

Soit $\left(z, \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)$ une substitution quelconque du groupe G; on démontre aisément l'identité suivante en reprenant la fonction $\Phi(z, z_k)$ définie plus haut et y faisant $\varphi(z)=1$:

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, z_k\right)-(\gamma z+\delta)^{-2h}\Phi(z, z_k)&\\
=\Sigma_l(\gamma_l z_k+\delta_l)^{-2h-2}\frac{\left\{\dfrac{(\gamma z+\delta)^{2h+1}-\left[\gamma\left(\dfrac{\alpha_l z_k+\beta_l}{\gamma_l z_k+\delta_l}\right)+\delta\right]^{2h+1}}{z-\dfrac{\alpha_l z_k+\beta_l}{\gamma_l z_k+\delta_l}}\right\}}{(\gamma z+\delta)^{2h}\left[\gamma\left(\dfrac{\alpha_l z_k+\beta_l}{\gamma_l z_k+\delta_l}\right)+\delta\right]^{2h+1}}&\\
=\Sigma_l(\gamma_l z_k+\delta_l)^{-2h-2}H\left(\frac{\alpha_l z_k+\beta_l}{\gamma_l z_k+\delta_l}\right),&
\end{aligned} \tag{15}$$

$H(z)$ étant l'algorithme d'une fonction rationnelle ne devenant pas infinie à l'intérieur du cercle fondamental.

Posons maintenant

$$\Lambda(z)=\Sigma_k A_k\Phi(z, z_k).$$

Des formules (14) et (15), nous déduisons

$$\Lambda\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)-(\gamma z+\delta)^{-2h}\Lambda(z)=0.$$

Comme cela a lieu quelle que soit la substitution $\left(z, \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)$ qu'on ait choisie dans le groupe G, il faudrait qu'on eût

$$\Lambda(z)=\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h}F(x),$$

$F(x)$ étant rationnel en x.

Mais $\Lambda(z)$ n'aurait que q infinis distincts, $z_1, z_2, \ldots, z_q$. Or, il est aisé de voir qu'une fonction de la forme $\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h}F(x)$ doit toujours avoir plus de q infinis distincts.

Donc l'hypothèse faite au début est absurde.

Donc toute expression de la forme (13) peut toujours être mise sous la forme (12).

Donc toute fonction de la forme (1) peut toujours être exprimée par une série de la forme (5) (I, p. 182), pourvu que $m > 1$.

Comment maintenant, étant donnée une série de la forme (5) (I), pourrons-nous la mettre effectivement sous la forme (1)?

On donne une série $\Theta(z)$ de la forme (5) du paragraphe I, et il s'agit de la mettre sous la forme

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m \mathrm{F}(x).$$

Nous connaissons d'abord les infinis de $\Theta(z)$ et les résidus correspondants; mais cela ne suffit pas pour déterminer complètement $\mathrm{F}(x)$; il reste dans cette fonction rationnelle un certain nombre de coefficients indéterminés. On peut d'abord calculer un nombre suffisant de valeurs de la série $\Theta(z)$ pour avoir des équations qui permettent de déterminer ces coefficients. Il est plus simple d'opérer de la manière suivante. Considérons la fonction

$$\Theta(z)\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-m} = \mathrm{F}(x).$$

Elle devient infinie, non seulement quand $\Theta(z)$ est infinie, mais quand $\frac{dx}{dz}$ est nul, c'est-à-dire pour

$$z = \alpha_1, \quad z = \alpha_2, \quad \ldots, \quad z = \alpha_n.$$

On développera alors la série $\Theta(z)\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-m}$ suivant les puissances croissantes de $z - \alpha_i$ et l'on calculera les coefficients de toutes les puissances négatives. Quand ces coefficients seront connus, ainsi que les premiers coefficients du développement de x suivant les puissances de $z - \alpha_i$, la fonction $\mathrm{F}(x)$ sera aussi connue.

Mais pour trouver ces coefficients eux-mêmes, il faut calculer un certain nombre de valeurs de la série $\Theta(z)$ et de séries analogues. Il est pourtant des cas où cette difficulté peut être évitée.

Reprenons la fonction

$$\Lambda(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h} \frac{\mathrm{F}(z)}{[f(z)-f(z_1)][f(z)-f(z_2)]\ldots[f(z)-f(z_p)]},$$

que nous avons étudiée plus haut; nous avons démontré l'identité suivante :

$$\Lambda(z) = \sum_i \sum_k \frac{\Lambda_k \mathrm{F}(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \frac{(\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2(h+1)}}{z - \frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}}. \tag{8}$$

Différentions cette identité $2h+1$ fois par rapport à z; il viendra

$$\frac{1}{(2h+1)!}\frac{d^{2h+1}\Lambda}{dz^{2h+1}} = -\sum_i \sum_k \frac{\Lambda_k \mathrm{F}(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \frac{(\gamma_i z_k + \delta_i)^{-2(h+1)}}{\left(z - \frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right)^{2(h+1)}}; \tag{16}$$

le second membre peut s'écrire

$$-\sum_i \sum_k \frac{\Lambda_k \mathrm{F}(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \frac{(\gamma_i z - \alpha_i)^{-2(h+1)}}{\left(z_k - \frac{-\delta_i z + \beta_i}{\gamma_i z - \alpha_i}\right)^{2(h+1)}}.$$

Remarquons que, si, dans le groupe G, nous avons la substitution $\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$, nous aurons également la substitution inverse $\left(z, \frac{-\delta_i z + \beta_i}{\gamma_i z - \alpha_i}\right)$. C'est-à-dire que l'expression précédente peut s'écrire

$$-\sum_i \sum_k \frac{\Lambda_k \mathrm{F}(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \frac{(\gamma_i z + \delta_i)^{2(h+1)}}{\left(z_k - \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)^{2(h+1)}}.$$

Le second membre de l'identité (16) est donc une série de la forme (5) (I, p. 182); il reste à mettre le premier membre sous la forme (1). C'est là un calcul qui ne présente pas de difficultés. J'en indique le résultat dans le cas de $h = 1$ et dans celui de $h = 2$. Soit

$$\Lambda(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h} \Lambda_0(x),$$

et soient $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ les dérivées successives de Λ_0 par rapport à x. Reprenons maintenant l'équation

$$\frac{d^2v}{dx^2} = v\varphi(x), \tag{3 bis}$$

et soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ les dérivées successives de φ par rapport à x. On aura, dans le cas de $h = 1$,

$$\frac{d^3\Lambda}{dz^3} = (\Lambda_3 - 2\Lambda_0\varphi_1 - \tfrac{3}{4}\Lambda_1\varphi)\left(\frac{dx}{dz}\right)^2, \tag{17}$$

et, dans le cas de $h = 2$,

$$\frac{d^5\Lambda}{dz^5} = (\Lambda_5 - 21\Lambda_3\varphi - 30\Lambda_2\varphi_1 - 18\Lambda_1\varphi_2 - \tfrac{45}{4}\Lambda_0\varphi_3 + \tfrac{63}{4}\Lambda_1\varphi^2 + 63\Lambda_0\varphi\varphi_1)\left(\frac{dx}{dz}\right)^5. \tag{18}$$

On peut trouver une infinité de relations analogues à la relation (16) par

divers procédés; par exemple en différentiant cette relation par rapport aux divers paramètres $z_1, z_2, \ldots, z_p$.

Je vais maintenant poser un dernier problème que je ne résoudrai que partiellement.

Considérons la série (5) (§ I),

$$\Sigma H\left(\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}\right)(\gamma_i z+\delta_i)^{-2m};$$

elle dépend de la fonction rationnelle H et je la représenterai pour cette raison par la notation

$$\Theta[z, H].$$

Comment faut-il choisir la fonction rationnelle H *pour que* Θ *soit identiquement nul?*

La solution complète de ce problème serait sans doute très compliquée; mais on peut s'aider, dans chaque cas particulier, des considérations suivantes:

1° Si l'on a identiquement

$$\Theta(z, H_1)=\Theta(z, H_2)=0,$$

on aura également

$$\Theta(z, H_1+H_2)=0.$$

2° Si la fonction rationnelle H peut se développer en une série convergente de la forme suivante:

$$(S) \qquad k_1H_1+k_2H_2+\ldots+k_nH_n+\ldots,$$

où $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sont des coefficients constants et où $H_1, H_2, \ldots, H_n$ sont des fonctions rationnelles telles que

$$\Theta(z, H_n)=0,$$

et si la série (S) est convergente toutes les fois que z est intérieur au cercle fondamental, on aura identiquement

$$\Theta(z, H)=0.$$

3° Si l'on a identiquement

$$\Theta(z, H)=0,$$

et si, $\left(z, \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)$ désignant une des substitutions de G, on pose

$$H_1(z)=H\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)(\gamma z+\delta)^{-2m},$$

on aura identiquement

$$\Theta(z, H_1)=0.$$

En effet, posons pour abréger

$$\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}=f_i(z), \qquad \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}=f_1(z), \qquad \frac{-\delta z+\beta}{\gamma z-\alpha}=f_1^{-1}(z),$$

la série (5) pourra se mettre sous la forme

$$\Theta(z, H)=\Sigma H\left[f_1\left[f_i\left[f_1^{-1}(z)\right]\right]\right]\left[\frac{df_1\left[f_i\left[f_1^{-1}(z)\right]\right]}{dz}\right]^m.$$

Remplaçons maintenant z par $f_1(z)$ dans l'équation identique

$$\Theta(z, H)=0,$$

il viendra

$$0=\Sigma H\left[f_1[f_i(z)]\right]\left[\frac{df_1[f_i(z)]}{df_i(z)}\right]^m\left[\frac{df_i}{dz}\right]^m\left[\frac{dz}{df_1(z)}\right]^m=\Theta(z, H_1)\left[\frac{dz}{df_1(z)}\right]^m,$$

ce qui démontre l'identité annoncée.

4° Soit, pour reprendre les notations employées au début de ce paragraphe, α_r l'un des sommets du polygone R_0, α'_r son symétrique par rapport au cercle fondamental. Une des substitutions de G s'écrira

$$\left(\frac{z-\alpha_r}{z-\alpha'_r}, e^{\frac{2i\pi}{\beta_r}}\frac{z-\alpha_r}{z-\alpha'_r}\right),$$

β_r étant un nombre entier connu. Si nous posons

$$H(z)=\left(\frac{z-\alpha_r}{z-\alpha'_r}\right)^p\frac{1}{(z-\alpha'_r)^{2m}},$$

on aura identiquement

$$\Theta(z, H)=0,$$

à moins que

$$p+m=0 \pmod{\beta_r}.$$

En effet, considérons les diverses substitutions (z, f_i) du groupe G, on peut en choisir une infinité

$$(z, \varphi_0), \quad (z, \varphi_1), \quad (z, \varphi_2), \quad \ldots, \quad (z, \varphi_n), \quad \ldots,$$

et de telle sorte que chacune des fonctions $f_i(z)$ puisse être définie, d'une manière et d'une seule, par une relation de la forme suivante:

$$\frac{f_i-\alpha_r}{f_i-\alpha'_r}=e^{\frac{2ki\pi}{\beta_r}}\frac{\varphi_k-\alpha_r}{\varphi_k-\alpha'_r},$$

k étant un entier égal ou inférieur à β_r. On aura alors

$$\Theta(z, H)=\sum_i\frac{(f_i-\alpha_r)^p}{(f_i-\alpha'_r)^{p+2m}}\left(\frac{df_i}{dz}\right)^m$$

ou

$$\Theta(z, H) = \sum_0^{\infty} \sum_1^{\beta_r} \frac{(\varphi_k - \alpha_r)^p}{(\varphi_k - \alpha_r')^{p+2m}} \left(\frac{d\varphi_k}{dz}\right)^m e^{\frac{2hi(p+m)i\pi}{\beta_r}}.$$

Or, si l'on n'a pas

$$P + m = 0 \pmod{\beta_r},$$

on aura

$$\sum_1^{\beta_r} e^{\frac{2hi(p+m)i\pi}{\beta_r}} = 0.$$

On aura donc

$$\Theta(z, H) = 0.$$

C. Q. F. D.

5° Reprenons l'identité

$$\varphi(z)\Lambda(z) = \sum_k \frac{\Lambda_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \Phi(z, z_k) \tag{9}$$

où

$$\Phi(z, z_k) = \sum_i \frac{\varphi\left(\frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right)}{z - \frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}} \frac{1}{(\gamma_i z_k + \delta_i)^{2(h+1)}}.$$

Faisons-y successivement

$$\varphi(z) = 1 \qquad \text{et} \qquad \varphi(z) = \frac{1}{z - b},$$

b étant une quantité constante extérieure au cercle fondamental, nous obtiendrons deux identités de la forme (9).

Multiplions la première par $\frac{1}{z-b}$ et retranchons-en la seconde ; il viendra

$$\sum_k \frac{\Lambda_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \Psi(b, z_k) = 0, \tag{19}$$

en posant

$$\Psi(b, a) = \sum_i \frac{1}{b - \frac{\alpha_i a + \beta_i}{\gamma_i a + \delta_i}} \frac{1}{(\gamma_i a + \delta_i)^{2(h+1)}}.$$

Posons encore

$$\Theta(b, a) = -\frac{d^{2h+1}\Psi}{db^{2h+1}} \frac{1}{(2h+1)!},$$

il viendra, en différentiant $2h+1$ fois la relation (19) par rapport à b,

$$\sum_k \frac{\Lambda_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \Theta(b, z_k) = 0. \tag{20}$$

Or, $\Theta(b, z_k)$ est une fonction thétafuchsienne de b. Le premier membre de l'identité (20) est donc une série de la forme (5) (§ I). Nous obtenons donc ainsi une série de cette forme qui est identiquement nulle quand b, qui est ici la variable indépendante, reste *extérieure* au cercle fondamental.

Mais ce que nous cherchons, c'est une série de la forme (5) (§ I) qui reste identiquement nulle quand la variable indépendante reste *intérieure* au cercle fondamental. Heureusement il est facile de passer d'un cas à l'autre. Posons en effet

$$b = \frac{1}{z}.$$

On aura

$$\frac{\alpha_i b + \beta_i}{\gamma_i b + \delta_i} = \frac{1}{\frac{\alpha_i' z + \beta_i'}{\gamma_i' z + \delta_i'}},$$

α_i', β_i', γ_i', δ_i' désignant les quantités imaginaires conjuguées de α_i, β_i, γ_i, δ_i ; de sorte que les substitutions $\left(z, \frac{\alpha_i' z + \beta_i'}{\gamma_i' z + \delta_i'}\right)$ forment un groupe G′ conjugué de G.

De même, en posant

$$b_i = \frac{\alpha_i b + \beta_i}{\gamma_i b + \delta_i}, \qquad z_i = \frac{\alpha_i' z + \beta_i'}{\gamma_i' z + \delta_i'},$$

on aura

$$\frac{db_i}{db} = \frac{z^2}{z_i^2} \frac{dz_i}{dz}.$$

Nous aurons donc

$$\Theta(b, a) = \sum_i \frac{1}{(b_i - a)^{2h+2}} \left(\frac{db_i}{db}\right)^{h+1} = \sum_i \frac{z^{2h+2}}{(1 - a z_i)^{2h+2}} \left(\frac{dz_i}{dz}\right)^{h+1}$$

ou enfin

$$\Theta(b, a) = z^{2h+2} \Theta'(z, a),$$

en posant

$$\Theta'(z, a) = \sum_i \frac{1}{(1 - a z_i)^{2h+2}} \left(\frac{dz_i}{dz}\right)^{h+1}.$$

Nous arrivons à l'identité suivante :

$$\sum_k \frac{\Lambda_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \Theta'(z, z_k) = 0.$$

Les fonctions Θ' sont des fonctions thétafuchsiennes de z, de sorte que nous avons bien une identité de la forme cherchée. Mais le groupe des fonctions Θ' n'est pas le groupe G, mais le groupe conjugué G′. Passons donc du groupe G au groupe G en changeant $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$; il viendra

$$\sum_k \left\{\frac{\Lambda_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}}\right\}' \Theta_1'(z, z_k') = 0.$$

Dans cette formule, $\left\{\frac{\Lambda_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}}\right\}'$ et z_k' désignent les quantités imaginaires

conjuguées de $\frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}}$ et de z_k et l'on a posé

$$\theta_1'(z,a) = \sum \frac{1}{\left(1 - a\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)^{2h+2}} \frac{1}{(\gamma_i z + \delta_i)^{2h+2}};$$

de sorte que, si nous posons

$$H(z) = \sum_k \left\{ \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{h+1}} \right\}' \frac{1}{(1 - z_k' z)^{2h+2}},$$

nous aurons identiquement

$$\theta(z, H) = 0,$$

tant que z restera intérieur au cercle fondamental.

6° Supposons qu'on ait identiquement

$$\theta(z, H) = 0,$$

et que H dépende d'un paramètre arbitraire λ ; on aura également

$$\theta\left(z, \frac{dH}{d\lambda}\right) = 0.$$

En combinant de diverses manières les six principes qui précèdent, on obtiendra une infinité de relations de la forme

$$\theta(z, H) = 0.$$

VI. — Première famille; genre quelconque.

Nous nous sommes étendus sur les fonctions de la première famille et du genre zéro, parce qu'elles sont les plus simples de toutes et parce que les principes généraux, une fois démontrés dans ce cas particulier, s'étendent sans trop de peine aux fonctions de toutes les familles et de tous les genres. Nous insisterons moins sur les autres fonctions fuchsiennes et nous nous bornerons à faire connaître les particularités les plus remarquables qui les concernent.

Lorsque le polygone R_0, tout en restant de la première famille, n'est pas de la forme simple étudiée dans le paragraphe précédent, ou n'est pas susceptible d'y être ramené, les fonctions fuchsiennes correspondantes sont de la première famille et de genre plus grand que zéro.

Commençons par un exemple simple. Soit un polygone R_0 de $4n$ côtés et tel que les côtés opposés soient conjugués. Tous les sommets forment alors un

seul cycle, de sorte que la somme de tous les angles du polygone R_0 est une partie aliquote de 2π. Supposons d'abord qu'elle soit précisément égale à 2π. On pourra alors exprimer toutes les fonctions fuchsiennes dérivées du polygone R_0 à l'aide de deux d'entre elles que nous appellerons x et y, et entre lesquelles il y a une relation algébrique

$$\psi(x, y) = 0, \tag{1}$$

qui est de genre n.

Reprenons l'équation (3) du paragraphe IV. Elle s'écrit

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = v\,\varphi(x, y), \tag{3}$$

et l'on a identiquement

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}\frac{x''' x'}{(x')^2} - \frac{3}{4}\frac{(x'')^2}{(x')^3},$$

en désignant par x', x'', x''' les dérivées successives de x par rapport à z.

Quelle est la forme de la fonction $\varphi(x, y)$? Pour simplifier, je vais supposer que la fonction y de x définie par l'équation (1) ne présente que des points singuliers de la nature la plus simple; c'est-à-dire que toutes les fois qu'on a

$$\frac{d\psi}{dy} = 0,$$

on a ou bien

$$\frac{d\psi}{dx} \gtrless 0, \qquad \frac{d^2\psi}{dy^2} \gtrless 0$$

[ce qui correspond, pour la courbe algébrique $\psi(x, y) = 0$, à une tangente parallèle à l'axe des y et n'ayant avec la courbe qu'un contact du premier ordre], ou bien

$$\frac{d\psi}{dx} = 0, \qquad \left(\frac{d^2\psi}{dx\,dy}\right)^2 - \frac{d^2\psi}{dx^2}\frac{d^2\psi}{dy^2} \lesseqgtr 0, \qquad \frac{d^2\psi}{dy^2} \gtrless 0$$

[ce qui correspond pour la courbe algébrique $\psi(x, y) = 0$ à un point double ordinaire].

Nous supposerons en outre que, si l'équation (1) est d'ordre r, on a, pour x infini, r valeurs finies et distinctes du rapport $\frac{y}{x}$ [ce qui correspond pour la courbe $\psi(x, y) = 0$ à r directions asymptotiques distinctes].

Ces hypothèses ne restreignent pas la généralité; en effet, on peut, parmi les fonctions fuchsiennes correspondant au groupe G, choisir d'une infinité de manières les fonctions x et y de telle sorte que toutes les autres s'expriment

rationnellement en x et y, et ce choix peut toujours se faire de façon à satisfaire aux hypothèses précédentes.

Reprenons maintenant notre fonction $\varphi(x, y)$. Il est clair que, pour les valeurs infinies de x, elle reste finie; qu'elle est finie également toutes les fois que x' n'est pas nul. Or, x' ne peut s'annuler que si l'on a à la fois

$$\frac{d\psi}{dy} = 0, \qquad \frac{d\psi}{dx} \gtrless 0.$$

Les seuls infinis de la fonction $\varphi(x, y)$ sont donc les points singuliers de l'équation (1) en n'y comprenant que les points singuliers ordinaires et non les points doubles de la courbe (1).

Considérons l'un de ces infinis, et soient α, β, γ les valeurs correspondantes de x, de y et de z. On voit aisément que le développement de $x - \alpha$ commence par un terme en $(z - \gamma)^2$, celui de $y - \beta$ par un terme en $z - \gamma$ et l'on en conclut qu'on a

$$\lim (y - \beta)^2 \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \varphi(x, y) = -\frac{3}{4} \qquad (\text{pour } x = \alpha, y = \beta).$$

Ces conditions ne suffisent pas pour déterminer complètement la fonction $\varphi(x, y)$. Celle-ci est assujettie en outre à un certain nombre de conditions transcendantes dont l'étude approfondie fera l'objet d'un Mémoire ultérieur. Nous démontrerons de plus, dans un autre Mémoire, que si ces conditions ne sont pas remplies, mais si les coefficients de $\varphi(x, y)$ satisfont à certaines inégalités, x n'est plus, il est vrai, fonction fuchsienne de z, mais en est encore fonction uniforme (kleinéenne).

De combien de paramètres distincts dépend notre groupe G?

Pour définir un polygone de $4n$ côtés, il faut $8n - 3$ conditions; mais notre polygone R_0 n'est pas arbitraire. Il est assujetti à $2n + 1$ conditions, à savoir que les côtés opposés soient congruents et que la somme des angles soit égale à 2π. Il reste donc $6n - 4$ paramètres arbitraires. Mais on a vu, au paragraphe IX du Mémoire sur les groupes fuchsiens, qu'un même groupe G pouvait être considéré comme dérivé d'une infinité de polygones différents et, en effet, dans le cas qui nous occupe, on peut remplacer le polygone R_0 par un autre R'_0 ayant ses côtés en même nombre et disposés de la même manière, mais ayant pour sommet un point quelconque du plan; de sorte qu'à un même groupe G correspond une double infinité de polygones R_0 et que le nombre des paramètres de G est de deux unités inférieur à celui des paramètres de R_0. *Le groupe* G *dépend donc de* $6n - 6$ *paramètres*.

De combien de paramètres dépend la relation (1)? Bien entendu, je ne considère pas comme distinctes deux relations

$$\psi(x, y) = 0, \qquad \psi_1(\xi, \eta) = 0,$$

si l'on peut passer de l'une à l'autre par une transformation uniforme, c'est-à-dire en remplaçant ξ et η par des fonctions rationnelles de x et de y. La théorie des fonctions abéliennes nous apprend que ces paramètres sont, pour une relation du genre n, au nombre de $3n - 3$. Mais il s'agit de $3n - 3$ paramètres *complexes* qui correspondent à $6n - 6$ paramètres *réels*; c'est-à-dire que le nombre des paramètres dont dépend la relation (1) est précisément le même que celui des paramètres du groupe G. S'ensuit-il qu'on puisse disposer des paramètres du groupe G de telle sorte qu'on ait entre x et y telle relation algébrique que l'on veut? C'est ce que nous démontrerons dans un Mémoire ultérieur.

Dans le cas particulier de $n = 1$, nous n'avons plus affaire à des fonctions fuchsiennes proprement dites. En effet, dans les polygones curvilignes R_0, dont tous les côtés sont des arcs de cercle coupant orthogonalement le cercle fondamental, la somme des angles est toujours plus petite que celle d'un polygone rectiligne d'un même nombre de côtés. Pour un quadrilatère, la somme des angles devrait être plus petite que 2π. Mais ici nous avons supposé que la somme des angles de notre polygone curviligne de $4n$ côtés était précisément 2π. Si l'on veut faire $n = 1$, le polygone R_0 devra devenir rectiligne, le rayon du cercle fondamental deviendra infini et le quadrilatère R_0 se réduira à un simple parallélogramme rectiligne; le groupe G se réduira alors à des substitutions de la forme $(z, z + \alpha)$ et les fonctions fuchsiennes qui en dérivent se réduiront à des fonctions doublement périodiques. C'est dans ce sens qu'on peut dire que les fonctions elliptiques sont des cas particuliers des fonctions fuchsiennes.

Supposons donc $n > 1$. Le polygone R_0 peut présenter différentes sortes de symétrie. Il peut d'abord être symétrique par rapport à un cercle coupant orthogonalement le cercle fondamental; dans ce cas, les coefficients des fonctions $\psi(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ sont réels. Supposons maintenant qu'il soit symétrique par rapport à un point, ou qu'il puisse être ramené, soit par un changement convenable de la variable z, soit par l'application de la règle du

paragraphe IX du Mémoire sur les groupes fuchsiens, à être symétrique par rapport à un point : dans ce cas, la relation (1) se ramène à la relation hyperelliptique

$$y^2 = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{2n}).$$

Mais la réciproque n'est pas vraie.

Considérons maintenant une intégrale abélienne de première espèce

$$\int g(x,y)\,dx, \tag{4}$$

et remplaçons x et y par leurs valeurs en z ; il viendra

$$\int g(x,y)\,dx = \int g(z)\frac{dx}{dz}\,dz = \mathrm{G}(z),$$

$g(z)$ désignant une fonction fuchsienne de z et $\mathrm{G}(z)$ une fonction uniforme de z, holomorphe à l'intérieur du cercle fondamental et cessant d'exister à l'extérieur de ce cercle.

Soit $\left(z, \frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}\right)$ une des substitutions du groupe fuchsien ; on aura identiquement

$$\mathrm{G}\left(\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}\right) = \mathrm{G}(z) + \mathrm{K}_i,$$

K_i étant l'une des périodes de l'intégrale abélienne. Ainsi, à chaque substitution de notre groupe correspond une des périodes de l'intégrale (4).

Mais on peut se placer à un autre point de vue. Soit ab un des côtés du polygone R_0 ; on aura

$$\int_a^b g(z)\frac{dx}{dz}\,dz = \mathrm{G}(b) - \mathrm{G}(a),$$

$\mathrm{G}(b)-\mathrm{G}(a)$ sera alors une des périodes de l'intégrale (4), de sorte qu'à chaque côté de R_0 correspond une de ces périodes.

Si cd est le côté conjugué de ab, on aura évidemment

$$\mathrm{G}(b) - \mathrm{G}(a) = \mathrm{G}(c) - \mathrm{G}(d).$$

Il en résulte qu'à deux côtés conjugués correspond la même période prise en sens contraire et qu'aux $2n$ paires de côtés conjugués de notre polygone correspondra un système fondamental de $2n$ périodes de l'intégrale (4). Mais ces périodes ne seront pas les périodes normales.

Mais, parmi les polygones équivalents à R_0, en vertu de la règle du paragraphe IX du Mémoire sur les groupes fuchsiens, il en est un qui présente à cet

égard une particularité remarquable. Considérons un polygone R'_0 de $4n$ côtés dont les sommets soient, en suivant le périmètre, dans le sens positif :

$$a_1,\ b_1,\ c_1,\ d_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2,\ d_2,\ \dots,\ a_n,\ b_n,\ c_n,\ d_n.$$

Pour plus de symétrie dans les notations, je désignerai indifféremment ce dernier sommet par les lettres d_n et d_0. Je suppose que le côté $d_{i-1}a_i$ soit conjugué de $c_i b_i$ et que le côté $a_i b_i$ soit conjugué de $d_i c_i$. En d'autres termes, le côté de rang $4p+1$ est conjugué du côté de rang $4p+3$, et le côté de rang $4p+2$ conjugué du côté de rang $4p+4$. On voit sans peine que tous les sommets d'un pareil polygone appartiennent à un même cycle et que le polygone R'_0 appartient au genre n. Je suppose, de plus, que la somme des angles soit égale à 2π; on voit alors facilement qu'il peut être ramené à un polygone tel que R_0 par l'application de la règle du paragraphe IX.

Envisageons maintenant deux intégrales abéliennes de première espèce,

$$\int g(x,y)\,dx = \int g(z)\frac{dx}{dz}\,dz = \mathrm{G}(z), \tag{4}$$

$$\int g_1(x,y)\,dx = \int g_1(z)\frac{dx}{dz}\,dz = \mathrm{G}_1(z). \tag{5}$$

Posons

$$\int_{d_{i-1}}^{a_i} g(z)\frac{dx}{dz}\,dz = -\int_{b_i}^{c_i} g(z)\frac{dx}{dz}\,dz = \mathrm{G}(a_i) - \mathrm{G}(d_{i-1}) = \mathrm{A}_i,$$

$$\int_{a_i}^{b_i} g(z)\frac{dx}{dz}\,dz = -\int_{c_i}^{d_i} g(z)\frac{dx}{dz}\,dz = \mathrm{G}(b_i) - \mathrm{G}(a_i) = \mathrm{B}_i,$$

$$\int_{d_{i-1}}^{a_i} g_1(z)\frac{dx}{dz}\,dz = -\int_{b_i}^{c_i} g_1(z)\frac{dx}{dz}\,dz = \mathrm{G}_1(a_i) - \mathrm{G}_1(d_{i-1}) = \mathrm{A}'_i,$$

$$\int_{a_i}^{b_i} g_1(z)\frac{dx}{dz}\,dz = -\int_{c_i}^{d_i} g_1(z)\frac{dx}{dz}\,dz = \mathrm{G}_1(b_i) - \mathrm{G}_1(a_i) = \mathrm{B}'_i.$$

Les périodes A_i, B_i, A'_i, B'_i des intégrales (4) et (5) correspondront ainsi aux divers côtés du polygone R'_0.

Si, maintenant, nous prenons l'intégrale

$$\int \mathrm{G}_1(z)\,g(z)\frac{dx}{dz}\,dz$$

le long du périmètre de R'_0, cette intégrale doit être nulle, et, en développant l'intégrale, on trouve sans peine l'identité bien connue

$$\sum_i (\mathrm{A}_i \mathrm{B}'_i - \mathrm{B}_i \mathrm{A}'_i) = 0,$$

ce qui prouve que les périodes A_i, B_i, ... sont les périodes normales.

Je n'insiste pas sur ces considérations qui montrent quel parti on pourra tirer des fonctions fuchsiennes pour l'étude des intégrales abéliennes.

Je suppose maintenant que la somme des angles de R_0 soit, non plus 2π, mais $\frac{2\pi}{\beta}$, β étant un entier.

Voyons quel changement cette hypothèse apportera dans ce qui précède. La relation (1) sera toujours de genre n. La fonction $\varphi(x, y)$ jouira des mêmes propriétés que dans le cas précédent, avec cette seule différence qu'elle deviendra infinie pour $x = a$, $y = b$; c'est-à-dire pour les valeurs de x et de y qui correspondent aux sommets du polygone R_0.

On aura alors

$$\lim(x-a)^2\varphi(x,y) = -\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\beta^2}\right) \qquad (\text{pour } x=a, y=b).$$

Les points singuliers de l'équation (3) sont alors ceux de la relation (1) et le point a, b.

Considérons maintenant un polygone R_0 de la première famille, mais d'ailleurs tout à fait quelconque; soit $2n$ le nombre des côtés et p le nombre des cycles. Supposons que, si l'on calcule la somme des angles appartenant aux différents cycles, on trouve respectivement $\frac{2\pi}{\beta_1}, \frac{2\pi}{\beta_2}, \ldots, \frac{2\pi}{\beta_p}$, pour le premier, le second, etc., et le $p^{\text{ième}}$ de ces cycles. Les fonctions fuchsiennes dérivées de ce polygone R_0 s'exprimeront rationnellement à l'aide de deux d'entre elles, que j'appellerai x et y et entre lesquelles il y aura une relation algébrique

$$\psi(x, y) = 0 \tag{1}$$

de genre

$$P = \frac{n-p+1}{2}.$$

Soient (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_p, b_p) les valeurs que prennent x et y quand la variable z vient en l'un des sommets du premier, du second, etc., ou du $p^{\text{ième}}$ cycle.

J'appelle (c_i, d_i) les points analytiques pour lesquels on a

$$\frac{d\psi}{dy} = 0, \qquad \frac{d\psi}{dx} \gtrless 0.$$

J'appelle (e_i, f_i) les points analytiques pour lesquels on a

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{dy} = 0.$$

Je conserve d'ailleurs, pour la fonction $\psi(x, y)$, que je suppose d'ordre r, les hypothèses faites plus haut. Le nombre des points c_i, d_i est alors

$$r(r-1) + 2P - (r-1)(r-2) = 2r + 2P - 2,$$

et celui des points e_i, f_i est

$$\frac{(r-1)(r-2)}{2} - P.$$

L'équation (3) s'écrira

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \varphi\varphi(x, y).$$

La fonction $\varphi(x, y)$, rationnelle en x et en y, devient infinie :

1° Pour $x = c_i$, $y = d_i$; on a alors

$$\lim(y-d_i)^2\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\varphi(x,y) = -\frac{3}{4} \qquad (\text{pour } x=c_i, y=d_i).$$

2° Pour $x = a_i$, $y = b_i$; on a alors

$$\lim(x-a_i)^2\varphi(x,y) = \frac{1-\beta_i^2}{4\beta_i^2} \qquad (\text{pour } x=a_i, y=b_i).$$

Les conditions auxquelles on doit assujettir le groupe G pour que l'on ait entre x et y une relation (1) donnée et pour que les quantités (a_i, b_i) et les nombres entiers β_i aient des valeurs données sont au nombre de $6P - 6 + 2p$. Le nombre des paramètres dont dépend le groupe G est aussi de $6P - 6 + 2p$. Il ne s'ensuit pas immédiatement que l'on puisse disposer de ces $6P - 6 + 2p$ paramètres de façon à satisfaire à ces $6P - 6 + 2p$ conditions. Mais je démontrerai, dans un Mémoire ultérieur, qu'il en est effectivement ainsi, et qu'il existe *toujours* deux fonctions fuchsiennes x et y qui correspondent à un même groupe G, entre lesquelles il y a une relation algébrique *donnée*

$$\psi(x, y) = 0,$$

et qui, pour p systèmes *donnés* de valeurs $(x=a_1, y=b_1)$, $(x=a_2, y=b_2)$, ..., $(x=a_p, y=b_p)$, voient leurs dérivées des $\beta_1 - 1$, $\beta_2 - 1$, ..., $\beta_p - 1$ premiers ordres s'annuler (β_1, β_2, ..., β_p étant des nombres entiers *donnés*).

Étudions maintenant les fonctions thétafuchsiennes. Leur forme générale sera

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x, y), \tag{6}$$

F désignant une fonction rationnelle de x et de y.

Quelles sont les conditions pour que cette fonction thétafuchsienne soit de

seconde espèce, c'est-à-dire reste holomorphe à l'intérieur du cercle fondamental. La fonction $F(x,y)$ pourra toujours s'écrire :

$$\frac{P(x,y)}{\left(\frac{d\psi}{dy}\right)^m (x-a_1)^{\lambda_1}(x-a_2)^{\lambda_2}\dots(x-a_p)^{\lambda_p}},$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ étant les plus grands nombres entiers satisfaisant aux inégalités

$$\lambda_i \leq m\left(1-\frac{1}{\beta_i}\right).$$

On reconnaîtra ensuite aisément quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction (6) soit de seconde espèce :

1° La fonction rationnelle $P(x,y)$ devra se réduire à un polynome entier.

2° Les $p(r-1)$ points d'intersection de la courbe $\psi(x,y)=0$, avec les droites $x=a_1$, $x=a_2$, ..., $x=a_p$ [en exceptant les points singuliers $(x=a_1, y=b_1)$, $(x=a_2, y=b_2)$, ..., $(x=a_p, y=b_p)$] devront appartenir à la courbe $P(x,y)=0$; cette dernière devra avoir un contact d'ordre λ_i-1 avec la courbe $\psi(x,y)=0$, aux points où cette courbe rencontre la droite $x=a_i$ (en exceptant toujours le point singulier $x=a_i$, $y=b_i$).

Cela équivaut, pour le polynome $P(x,y)$, à

$$(r-1)(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_p)=(r-1)\sum\lambda_i$$

conditions.

3° Le degré du polynome $P(x,y)$ devra être au plus égal à

$$\sum\lambda_i+m(r-3).$$

4° Considérons maintenant les points $x=e_i$, $y=f_i$, c'est-à-dire les points doubles de la courbe $\psi(x,y)=0$; ils devront appartenir à la courbe $P(x,y)=0$, et même (puisque $m>1$) être pour cette courbe un point double. Enfin, les deux branches de la courbe $P=0$ devront avoir respectivement, avec les deux branches de la courbe $\psi=0$, un contact d'ordre $m-2$. Cela équivaut, pour le polynome $P(x,y)$, à $2m-1$ conditions pour chacun des points doubles $x=e_i$, $y=f_i$, c'est-à-dire, en tout, à

$$(2m-1)\left[\frac{(r-1)(r-2)}{2}-P\right]$$

conditions.

Un polynome de degré $\sum\lambda+m(r-3)$ dépend de

$$\frac{1}{2}\left[\sum\lambda+m(r-3)+1\right]\left[\sum\lambda+m(r-3)+2\right]$$

paramètres. Mais, si l'on tient compte de la relation (1) et si l'on a

$$\sum\lambda+m(r-3)\geq r, \tag{7}$$

ce nombre se réduit à

$$r\sum\lambda+\left(m-\frac{1}{2}\right)r(r-3).$$

Mais notre polynome est assujetti, d'une part, à $(r-1)\sum\lambda$, d'autre part, à $(2m-1)\left[\frac{(r-1)(r-2)}{2}-P\right]$ conditions. Il reste donc, dans ce polynome,

$$\sum\lambda+(2m-1)(P-1) \tag{8}$$

paramètres arbitraires. Mais ce n'est là qu'une limite inférieure du nombre des paramètres arbitraires restant réellement dans notre polynome. Car il peut se faire :

1° Que la condition (7) ne soit pas remplie. Alors, l'expression du nombre des paramètres arbitraires restant dans notre polynome n'est plus

$$\sum\lambda+(2m-1)(P-1)$$

mais

$$\frac{1}{2}\left[\sum\lambda+m(r-3)+1\right]\left[\sum\lambda+m(r-3)+2\right]$$
$$-(r-1)\sum\lambda-(2m-1)\left[\frac{(r-1)(r-2)}{2}-P\right].$$

Cette seconde expression diffère de la première de

$$\frac{1}{2}\left[\sum\lambda+m(r-3)-r+1\right]\left[\sum\lambda+m(r-3)-r+2\right].$$

Il en résulte que les deux expressions ne diffèrent pas si l'on a

$$\sum\lambda+m(r-3)-r=-1 \text{ ou } -2.$$

L'expression (8) ne cesse, par conséquent, de représenter le nombre des paramètres restés arbitraires que si l'on a

$$\sum\lambda+(m-1)r-3m<-2.$$

Or, cette inégalité, jointe à $m\geq 2$, $r\geq 3$, entraîne les égalités suivantes :

$$r=3, \qquad \sum\lambda=0.$$

Mais ce cas, où l'on a $r=3$, $P=1$, $\sum\lambda=0$, et où, par conséquent, tous les λ sont nuls, est précisément celui des fonctions elliptiques dont nous n'avons pas à nous occuper.

2° On peut se demander aussi si les

$$(r-1)\sum\lambda+(2m-1)\left[\frac{(r-1)(r-2)}{2}-P\right]$$

conditions auxquelles nous avons assujetti notre polynome sont toutes distinctes. Voici comment on peut tourner la difficulté. Soit N le nombre des zéros distincts de l'expression (6); le nombre $N+1$ sera évidemment une limite supérieure du nombre des paramètres restés arbitraires dans cette expression. Mais cette limite peut encore être abaissée. En effet, l'expression (6) s'annule quand la variable z vient en l'un des sommets de R_0; ce sont là des zéros qui ne sont pas arbitraires. Si donc N′ est le nombre des zéros réellement distincts qui coïncident avec les sommets de R_0, nous devons prendre pour notre limite supérieure $N-N'+1$. Ce n'est pas tout. Si l'on considère une expression rationnelle en x et y, admettant q zéros et q infinis, la théorie des intégrales abéliennes nous apprend qu'on ne peut pas choisir arbitrairement les q zéros et les q infinis, mais que la connaissance des q infinis et de $q-P$ des zéros suffit pour déterminer les P derniers zéros. Or, les $N-N'$ zéros qui restent de notre expression (6) sont ceux de la fonction rationnelle

$$\frac{P(x,y)}{[F'(y)]^m(x-a_1)^{\lambda_1}(x-a_2)^{\lambda_2}\dots(x-a_p)^{\lambda_p}}$$

dont nous connaissons les infinis. Il en résulte que $N-N'-P$ d'entre eux suffisent pour déterminer tous les autres et que nous devons prendre finalement pour notre limite supérieure $N-N'-P+1$.

Or, les principes du paragraphe III nous donnent

$$N=m\left(n-1-\sum\frac{1}{\beta_i}\right),$$

$$N'=\sum\frac{m(\beta_i-1)-\lambda_i\beta_i}{\beta_i}=mp-m\sum\frac{1}{\beta_i}-\sum\lambda,$$

$$N-N'-P+1=\sum\lambda+(2m-1)(P-1),$$

c'est-à-dire que notre limite supérieure coïncide avec la limite inférieure trouvée plus haut. Il y aurait exception dans le cas $\sum\lambda=0$, $P=1$,

c'est-à-dire dans le cas des fonctions elliptiques dont nous n'avons pas à parler.

Il résulte de là que toutes les fonctions thétafuchsiennes de la seconde espèce [aussi bien celles qui peuvent s'exprimer par une série de la forme (5) (§ I), que celles qui ne peuvent s'exprimer par une pareille série] peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de $\sum\lambda+(2m-1)(P-1)$ d'entre elles.

Considérons maintenant une fonction de la forme

$$\Lambda(z)=\left(\frac{dx}{dz}\right)^{1-m}F(x,y),$$

F désignant une fonction rationnelle en x et en y, et cherchons quel est le minimum du nombre des infinis distincts d'une pareille expression.

Nous supposerons que les sommets de R_0 ne sont pas des infinis de notre fonction $\Lambda(z)$. Pour que le nombre des infinis soit minimum, il faut que celui des zéros le soit aussi; il faut, par conséquent, que les sommets de R_0 soient des zéros d'un ordre aussi peu élevé que possible et qu'en dehors de ces sommets, il y ait aussi peu de zéros que possible. Pour réaliser cela, posons, ce qui est toujours possible,

$$F(x,y)=\frac{(x-a_1)^{\lambda_1}(x-a_2)^{\lambda_2}\dots(x-a_p)^{\lambda_p}\left(\frac{d\psi}{dy}\right)^{m-1}}{P(x,y)},$$

les λ étant précisément les nombres entiers définis plus haut. Nous reconnaîtrons que, pour que le nombre des zéros distincts soit un minimum, il faut et il suffit : 1° que $P(x,y)$ soit un polynome entier de degré

$$\sum\lambda+(m-1)(r-3);$$

2° que la courbe $P=0$ passe par tous les points d'intersection de la courbe $\psi=0$ avec les droites $x=a_1$, $x=a_2$, …, $x=a_p$ autres que les points singuliers $(x=a_i, y=b_i)$ et que les deux courbes aient en ces points un contact d'ordre λ_i-1; 3° enfin que la courbe $P=0$ admette les mêmes points doubles que $\psi=0$, et de façon que les branches qui se croisent en ces points doubles aient avec celles de $\psi=0$ des contacts d'ordre $m-2$.

En effet, il est possible de satisfaire à ces conditions, car le polynome $P(x,y)$ contient, comme on l'a vu,

$$r\sum\lambda+\left(m-\frac{3}{2}\right)r(r-3)$$

paramètres et nous n'avons à remplir que

$$(r-1)\sum\lambda+\left(m-\frac{3}{2}\right)[(r-1)(r-2)-2\mathrm{P}]$$

conditions.

Il reste donc

$$\sum\lambda+(2m-3)(\mathrm{P}-1)$$

paramètres arbitraires dans notre polynome $\mathrm{P}(x,y)$. De plus, on voit aisément que, si nos conditions sont remplies, le nombre des zéros distincts, et, par conséquent, celui des infinis, est minimum, car le nombre des zéros distincts qui se confondent avec les sommets de R_θ est aussi petit que possible, et il n'y a pas de zéro en dehors de ces sommets. On trouve, en appliquant la règle du paragraphe III, que le nombre minimum des infinis est

$$\mathrm{J}=\sum\lambda+(2m-2)(\mathrm{P}-1).$$

Comme le polynome $\mathrm{P}(x,y)$ ne dépend que de $\sum\lambda+(2m-3)(\mathrm{P}-1)$ paramètres, il s'ensuit que nos J infinis distincts ne peuvent pas être choisis arbitrairement, mais que la connaissance de $\mathrm{J}-\mathrm{P}$ d'entre eux suffit pour déterminer les P autres. On ne peut donc, en général, déterminer la fonction A, de telle sorte qu'elle ait J infinis donnés et qu'elle n'en ait pas d'autres.

Quel est le plus petit nombre J′ tel que l'on puisse toujours déterminer la fonction A, de telle sorte qu'elle ait J′ infinis donnés et n'en ait pas d'autres? La fonction A admettra alors $\mathrm{J}'-\mathrm{J}$ zéros et $\mathrm{J}'-\mathrm{J}$ infinis distincts de plus que les fonctions de même forme qui n'ont que J infinis et, par conséquent, elle contiendra $2\mathrm{J}'-2\mathrm{J}$ paramètres de plus qu'elles, ou en tout

$$2\mathrm{J}'-2\mathrm{J}+\sum\lambda+(2m-3)(\mathrm{P}-1)$$

ou, en remplaçant J par sa valeur

$$2\mathrm{J}'-\sum\lambda-(2m-1)(\mathrm{P}-1);$$

on doit donc avoir

$$2\mathrm{J}'-\sum\lambda-(2m-1)(\mathrm{P}-1)\geq\mathrm{J}'+1$$

ou

$$\mathrm{J}'\geq\sum\lambda+(2m-1)(\mathrm{P}-1)+1. \tag{9}$$

Voilà donc la limite inférieure cherchée du nombre J′.

Maintenant, nous allons pouvoir résoudre une question importante qui se pose tout naturellement. Nous avons vu que toutes les expressions de la forme (6) qui n'ont pas d'infinis peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de $\sum\lambda+(2m-1)(\mathrm{P}-1)$ d'entre elles. Les séries thétafuchsiennes de la forme (5) (§ I) et de la seconde espèce pouvant toutes se mettre sous la forme (6), pourront donc s'exprimer linéairement à l'aide de $\sum\lambda+(2m-1)(\mathrm{P}-1)$ d'entre elles. Mais nous ne savons pas encore si toutes les expressions de la forme (6) qui n'ont pas d'infinis peuvent s'exprimer par une série (5) (§ I). Dans le cas où il n'en serait pas ainsi, toutes les séries de la forme (5) (§ I) et de la seconde espèce s'exprimeraient linéairement à l'aide de

$$\sum\lambda+(2m-1)(\mathrm{P}-1)-1$$

d'entre elles. Je vais démontrer que cette hypothèse est impossible.

En effet, nous avons vu, dans le paragraphe précédent (p. 214 et suiv.), que, si toutes les séries de la forme (5) (§ I) et de la seconde espèce s'expriment linéairement à l'aide de $q-1$ d'entre elles, on pourrait construire une fonction

$$\mathrm{A}(z)=\left(\frac{dx}{dz}\right)^{1-m}\mathrm{F}(z),$$

$\mathrm{F}(z)$ représentant une fonction fuchsienne de z admettant q infinis *donnés* et n'en admettant aucun autre. Donc, si l'hypothèse faite au début était possible, on pourrait construire une fonction $\mathrm{A}(z)$ admettant

$$\mathrm{J}'=\sum\lambda+(2m-1)(\mathrm{P}-1)$$

infinis *donnés* et n'en admettant aucun autre. Le nombre J′ ne satisferait pas alors à l'inégalité (9), ce qui est contraire à ce qu'on a vu plus haut.

En conséquence, toute expression de la forme (6) qui n'a pas d'infinis peut se mettre sous la forme d'une série (5) (§ I) de la seconde espèce; donc *toute expression de la forme* (6) avec ou sans infinis, *pourra se mettre sous la forme d'une série* (5) (§ I) de la première ou de la seconde espèce.

Passons à une propriété importante des fonctions de la forme $\mathrm{A}(z)$. Ces fonctions auront toujours une infinité d'infinis; soient $z_1, z_2, \ldots, z_i, \ldots$ ces infinis, que nous supposerons tous simples pour fixer les idées, $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_i$ les résidus correspondants. Soit $\varphi(z)$ une fonction rationnelle n'ayant pas

d'infinis à l'intérieur du cercle fondamental. On aura, identiquement,

$$\Lambda(z)\varphi(z)=\sum_i \frac{\Lambda_i\varphi(z_i)}{z-z_i}.$$

Cela se démontre de la même manière que dans le paragraphe précédent; la première démonstration peut se répéter sans qu'on y change un mot; la seconde demanderait, pour être appliquée, quelques modifications légères.

Les divers termes du second membre de l'identité précédente peuvent être groupés d'une manière plus avantageuse. Soient, en effet, q le nombre des infinis distincts de $\Lambda(z)$; $z_1, z_2, \ldots, z_q$ ces infinis; $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_q$ les résidus correspondants; nous pourrons écrire

$$(10)\qquad \Lambda(z)\varphi(z)=\sum_k \Lambda_k \sum_i \frac{\varphi\left(\frac{\alpha_i z_k+\beta_i}{\gamma_i z_k+\delta_i}\right)}{\left(z-\frac{\alpha_i z_k+\beta_i}{\gamma_i z_k+\delta_i}\right)(\gamma_i z_k+\delta_i)^{2m}}.$$

Dans cette formule, on désigne par la notation $\left(z, \frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}\right)$ les diverses substitutions du groupe G. En différentiant la relation (10) $2m-1$ fois par rapport à z, on arrive à une formule tout à fait analogue à la formule (16) du paragraphe précédent. Le premier membre est une expression de la forme (6) et le second membre est une série de la forme (5) (§ I).

VII. — Deuxième famille; genre zéro.

Considérons un polynome R_0 dont les sommets, au nombre de $2n$, sont tous situés sur le cercle fondamental, et dont les côtés sont des arcs de cercle coupant orthogonalement le cercle fondamental. Tous les angles de notre polygone sont donc formés par deux arcs de cercle tangents l'un à l'autre, et, par conséquent, ils sont tous nuls. Je supposerai que les côtés de rang p et $2n+1-p$ sont conjugués; les cycles seront alors au nombre de $n+1$, dont deux formés d'un seul sommet, le premier du sommet de rang 1; le second du sommet de rang $n+1$. Les $n-1$ autres cycles seront formés de deux sommets, à savoir des sommets de rang p et $2n+2-p$.

J'appelle S_p la substitution qui change le côté de rang p en celui de rang $2n+1-p$. Nous aurons ainsi n substitutions $S_1, S_2, \ldots, S_n$ qui seront les substitutions fondamentales de notre groupe G.

Je définis ensuite les substitutions $S'_2, \ldots, S'_n$ par les égalités suivantes :

$$S'_2=S_2S_1^{-1},\qquad S'_3=S_3S_2^{-1},\qquad \ldots,\qquad S'_n=S_nS_{n-1}^{-1}$$

et je pose, pour plus de symétrie dans les notations,

$$S_1=S'_1,\qquad S_n=S'_{n+1}.$$

J'appelle maintenant α_i le sommet de rang i; il est clair que α_i sera l'un des points doubles de S'_i. Je supposerai que *les $n+1$ substitutions $S'_1, S'_2, \ldots, S'_{n+1}$ sont paraboliques*. Cela ne serait pas possible si les $2n$ points α_i étaient choisis arbitrairement sur le cercle fondamental. Il faut qu'il y ait entre eux la relation

$$(1)\qquad \begin{aligned}&(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_3)\ldots(\alpha_{2p}\ \ -\alpha_{2p-1})\ldots(\alpha_{2n}-\alpha_{2n-1})\\ &=(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_5-\alpha_4)\ldots(\alpha_{2p+1}-\alpha_{2p}\ \ )\ldots(\alpha_{2n}-\alpha_1).\end{aligned}$$

Dans ces conditions, notre polygone R_0 est du genre zéro et du premier ordre de la deuxième famille; notre groupe G et les fonctions fuchsiennes qui en dérivent sont du genre zéro et de la deuxième famille. Nous pourrons, comme dans le paragraphe V, choisir, parmi ces fonctions fuchsiennes, une d'entre elles que j'appellerai $x=f(z)$, et en fonction de laquelle toutes les autres s'expriment rationnellement. Pour achever de la définir, je supposerai que l'on a

$$f(\alpha_1)=0,\qquad f(\alpha_2)=1,\qquad f(\alpha_{n+1})=\infty.$$

Je poserai, en outre, comme dans le paragraphe V,

$$a_i=f(\alpha_i)=f(\alpha_{2n+2-i}),$$

d'où

$$a_1=0,\qquad a_2=1,\qquad a_{n+1}=\infty.$$

Si l'on pose

$$v=\sqrt{\frac{dx}{dz}},$$

v satisfait à une équation linéaire

$$(3\ bis)\qquad \frac{d^2v}{dx^2}=v\,\varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant rationnel en x. Quelle est ici la forme de la fonction $\varphi(x)$? On trouve aisément :

$$\varphi(x)=\frac{P(x)}{[Q(x)]^2},$$

$Q(x)$ étant le produit $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$ et $P(x)$ étant un poly-

nome entier de degré $2n-2$. Le polynome $P(x)$ doit satisfaire aux conditions suivantes :

$$P(a_i) = \frac{1}{4} Q'^2(a_i)$$

et

$$\text{coefficient de } x^{2n-2} \text{ dans } P(x) = -\frac{1}{4}.$$

Ces conditions ne sont pas suffisantes pour que x soit une fonction fuchsienne du rapport des intégrales de l'équation (3 *bis*). Il faut, en outre, assujettir $P(x)$ à $2n-4$ conditions transcendantes.

Nous démontrerons, dans un autre Mémoire, que l'on peut toujours choisir le groupe G, de telle sorte que les nombres $a_2, a_4, \ldots, a_n$ aient des valeurs données quelconques.

Dans le cas particulier où le polygone R_0 est symétrique par rapport au cercle qui joint α_1 à α_{n+1} en coupant orthogonalement le cercle fondamental, les coefficients de la fonction rationnelle $\varphi(x)$ sont tous réels.

Si, de plus, $n=2$, $f(z)$ se réduit à la fonction modulaire k^2.

Voyons comment se comportent les intégrales de l'équation (3 *bis*) dans le voisinage de l'un des points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Les intégrales seront *régulières et logarithmiques*, pour employer les expressions de M. Fuchs et de ses disciples. Les deux racines de l'équation déterminante seront $\frac{1}{2}$; de telle sorte que les intégrales pourront se mettre sous la forme

$$v_1 = (x-a_i)^{\frac{1}{2}}[P_i + Q_i \log(x-a_i)]$$

et

$$v_2 = (x-a_i)^{\frac{1}{2}} Q_i,$$

P_i et Q_i étant des fonctions holomorphes en $x-a_i$, dont la première s'annule et la deuxième ne s'annule pas pour $x=a_i$.

Pour $x=\infty$, on a de même

$$v_1 = x^{\frac{1}{2}}(P_{n+1} + Q_{n+1}\log x), \qquad v_2 = x^{\frac{1}{2}} Q_{n+1},$$

P_{n+1} et Q_{n+1} étant des fonctions holomorphes en $\frac{1}{x}$, dont la première s'annule et la seconde ne s'annule pas pour $x=\infty$.

Exprimons maintenant, dans le voisinage de chacun de ces points singuliers, z en fonction de x. On devra avoir, dans le voisinage de $x=a_i$,

$$z = \frac{\lambda Q_i + \mu[Q_i \log(x-a_i) + P_i]}{\lambda' Q_i + \mu'[Q_i \log(x-a_i) + P_i]},$$

$\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ étant des constantes convenablement choisies. Supposons que la substitution S_i' s'écrive

$$\left(\frac{1}{z-\alpha_i}, \frac{1}{z-\alpha_i} + \beta_i\right)$$

et posons

$$e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{(z-\alpha_i)\beta_i}} = t_i;$$

exprimons ensuite que z se réduit à α_i pour $x=a_i$ et subit la substitution S_i' quand $\log(x-a_i)$ se change en $\log(x-a_i) + 2\pi\sqrt{-1}$. Nous verrons que la relation qui précède peut s'écrire

$$\frac{2\pi\sqrt{-1}}{(z-\alpha_i)\beta_i} = P_i' + \log(x-a_i),$$

P_i' étant une fonction holomorphe en $x-a_i$. On tire de là

$$t_i = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{(z-\alpha_i)\beta_i}} = Q_i',$$

Q_i' étant une fonction holomorphe en $(x-a_i)$; le développement de Q_i' suivant les puissances de $(x-a_i)$ commence par un terme en $(x-a_i)$ dont le coefficient ne peut jamais être nul. On tire de là

$$x = a_i + \Phi_i(t_i),$$

Φ_i désignant une fonction holomorphe en t_i et dont le développement suivant les puissances de cette variable commence par un terme du premier degré dont le coefficient n'est jamais nul. Telle est la forme de l'expression de x en fonction de z dans le voisinage du point singulier $x=a_i$. De même, dans le voisinage de $z=\alpha_{n+1}$, $x=\infty$, on aura

$$\frac{1}{x} = \Phi_{n+1}(t_{n+1}),$$

Φ_{n+1} désignant une fonction holomorphe en t_{n+1} dont le développement suivant les puissances de cette variable commence par un terme du premier degré qui n'est jamais nul. On peut encore écrire la relation précédente sous la forme

$$x = \frac{1}{t_{n+1}} \Psi(t_{n+1}),$$

Ψ désignant une fonction holomorphe de t_{n+1} ne s'annulant pas avec cette variable. Quant à la dérivée $\frac{dx}{dz}$, elle pourra se mettre sous une forme analogue,

Dans le voisinage de $z = \alpha_i$, on aura

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{(z-\alpha_i)^2}\, t_i \Phi_i(t_i),$$

Φ_i' étant une fonction holomorphe de t_i qui ne s'annule pas avec cette variable. De même, dans le voisinage de $z = \alpha_{n+1}$, on aura

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{(z-\alpha_{n+1})^2}\, \frac{\Psi'(t_{n+1})}{t_{n+1}},$$

Ψ' désignant une fonction holomorphe de t_{n+1} ne s'annulant pas avec cette variable.

Passons maintenant à l'étude des fonctions thétafuchsiennes.

Toute fonction représentée par une série de la forme (5) (§ I) pourra toujours se mettre sous la forme suivante :

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m \mathrm{F}(x), \tag{2}$$

F désignant une fonction rationnelle de x. Mais la réciproque n'est pas vraie. En effet, nous avons vu au paragraphe **2** que toute série de la forme (5) (§ I) peut, dans le voisinage de $z = \alpha_i$, se mettre sous la forme

$$\frac{1}{(z-\alpha_i)^{2m}}\, \mathrm{R}(t_i),$$

R désignant une fonction holomorphe de t_i qui s'annule avec cette variable. Il en résulte que, pour $x = a_i$, la fonction $(x-a_i)^m \mathrm{F}(x)$ doit s'annuler et que, quand x augmente indéfiniment, $x^m \mathrm{F}(x)$ doit tendre vers zéro. Telles sont les conditions *nécessaires* auxquelles doit satisfaire l'expression (2) pour pouvoir représenter une série de la forme (5) (§ I).

Nous les appellerons les conditions A.

Supposons maintenant que la fonction (2) n'admette pas d'infini à l'intérieur du cercle fondamental. $\mathrm{F}(x)$ devra être de la forme

$$\frac{\Pi(x)}{(x-a_1)^{\lambda_1}(x-a_2)^{\lambda_2}\dots(x-a_n)^{\lambda_n}},$$

$\Pi(x)$ désignant un polynome entier en x. Mais, à cause des conditions A, les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont au plus égaux à $m-1$ et le degré de $\Pi(x)$ au plus égal à $n(m-1)-m-1$. Par conséquent, toutes les séries thétafuchsiennes de la forme (5) (§ I) et de la seconde espèce s'expriment linéairement au moyen de $n(m-1)-m$ d'entre elles.

Mais nous ne savons pas encore si toute expression de la forme (2) n'ayant pas d'infini et satisfaisant aux conditions A peut se mettre sous la forme d'une série (5) (§ I); ni, par conséquent, si toutes les séries de cette forme et de la seconde espèce ne peuvent pas s'exprimer linéairement à l'aide de $n(m-1)-m-1$ d'entre elles.

Pour reconnaître s'il en est ainsi, considérons une fonction de la forme

$$\Lambda(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{1-m} \mathrm{F}(x),$$

F désignant une fonction rationnelle, et cherchons quel est le minimum du nombre J' de ses infinis distincts, à supposer qu'elle tende vers zéro quand z tend vers α_i.

Nous pourrons écrire

$$\mathrm{F}(x) = \frac{(x-a_1)^{m-1}(x-a_2)^{m-1}\dots(x-a_n)^{m-1}\,\Pi(x)}{\Phi(x)},$$

$\Pi(x)$ et $\Phi(x)$ désignant deux polynomes en x. Pour que $\Lambda(z)$ tende vers zéro quand z tend vers α_i, il faut et il suffit que

$$\Phi(a_1), \quad \Phi(a_2), \quad \dots, \quad \Phi(a_n)$$

ne soient pas nuls et que le degré du numérateur surpasse au plus de $m-1$ celui du dénominateur. Or, le degré de $\Phi(x)$ est le nombre J' des infinis distincts de $\Lambda(z)$. On a donc

$$\mathrm{J}' \geq n(m-1) - m + 1.$$

Je dis alors qu'il est impossible d'exprimer linéairement toutes les séries de la forme (5) (§ I) et de la seconde espèce à l'aide de $n(m-1)-m-1$ d'entre elles; car, si cela avait lieu, on pourrait construire une fonction de la forme $\Lambda(z)$ ayant $n(m-1)-m$ infinis distincts, ce qui ne se peut pas comme nous venons de le voir. On en conclura donc (comme dans les deux paragraphes précédents) que toute expression de la forme (2) satisfaisant aux conditions A peut être exprimée par une série de la forme (5) (§ I).

La formule (10) du paragraphe précédent s'applique aussi aux fonctions qui nous occupent. On la démontrerait comme dans les deux paragraphes précédents; la première démonstration demanderait quelques modifications légères, la seconde peut s'appliquer sans qu'on y change rien. Toutes les conséquences que nous avons déduites de cette formule (10) dans les deux

paragraphes précédents, et entre autres la formule (16) du paragraphe V, sont encore vraies dans le cas qui nous occupe.

On voit aisément comment on étendrait les principes qui précèdent aux fonctions de la seconde et de la sixième familles et de genre quelconque.

Nous pouvons donc passer à l'étude des fonctions fuchsiennes qui existent dans toute l'étendue du plan.

VIII. — Troisième famille.

Parmi celles-ci, les plus simples sont celles de la troisième famille dont nous allons parler d'abord.

Supposons qu'on nous donne n paires de cercles (c_1 et c'_1), (c_2 et c'_2), ..., (c_n et c'_n).

Je suppose que ces $2n$ cercles soient tous extérieurs les uns aux autres, qu'ils coupent orthogonalement le cercle fondamental et soient, par conséquent, symétriques par rapport à ce cercle. Je suppose que l'on considère n substitutions S_1, S_2, ..., S_n, telles que S_i, tout en conservant le cercle fondamental, change c_i en c'_i. Le groupe dérivé des substitutions S_i sera un groupe fuchsien G dont le polygone générateur R_0 se composera de la partie du plan qui est intérieure au cercle fondamental et extérieure aux divers cercles c et c'. Le polygone R_0 aura $2n$ côtés de la première sorte, formés par les arcs des cercles c et c' intérieurs au cercle fondamental et $2n$ côtés de la seconde sorte formés par les arcs du cercle fondamental extérieurs aux différents cercles c et c'. Tous les sommets de R_0 sont de la troisième catégorie. Quant au polygone R'_0, symétrique de R_0 par rapport au cercle fondamental, ce sera la partie du plan qui est extérieure à la fois au cercle fondamental et aux cercles c et c'. Le groupe G et, par conséquent, les fonctions fuchsiennes qui en dérivent seront de la troisième famille et du genre n.

Toutes ces fonctions fuchsiennes pourront s'exprimer rationnellement à l'aide de deux d'entre elles que j'appellerai x et y et entre lesquelles il y aura une relation algébrique de genre n

$$\psi(x,y)=0. \tag{1}$$

Si l'on pose de plus

$$v=\sqrt{\frac{dx}{dz}},$$

la fonction v satisfera à l'équation (3) du paragraphe IV, à savoir :

$$\frac{d^2v}{dx^2}=v\varphi(x,y), \tag{3}$$

φ étant rationnel en x et en y.

Le groupe G ne dépendant que de $3n-3$ paramètres réels distincts, on ne peut en disposer de manière que la relation $\psi(x,y)=0$ soit quelconque. Combien, en effet, reste-t-il de paramètres arbitraires dans une relation algébrique de genre n

$$\psi(x,y)=0, \tag{1}$$

lorsque l'on convient de ne pas regarder comme distinctes de cette relation celles qu'on en déduit en y remplaçant x et y par des fonctions rationnelles de x' et de y'. On sait qu'il reste $3n-3$ paramètres qu'on appelle les *modules* de la relation (1) et qui sont pour ainsi dire des invariants à l'égard de cette relation et des opérations qui consistent à y remplacer x et y par des fonctions rationnelles de x' et de y'. En nous proposant d'obtenir entre nos deux fonctions fuchsiennes x et y une relation algébrique *donnée*, nous nous imposons donc $3n-3$ conditions *complexes* qui équivalent à $6n-6$ conditions *réelles*. Ce nombre surpasse de $3n-3$ celui des paramètres dont nous disposons. Ainsi, le premier membre de la relation (1) est assujetti à $3n-3$ conditions réelles; il est aisé de les trouver.

En effet, on peut supposer qu'on fasse une opération qui consiste à changer z en son symétrique par rapport au cercle fondamental. Cela revient à changer $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$ et à faire ensuite un changement linéaire de variable. On change ainsi R_0 en R'_0 et réciproquement, de sorte que le groupe G et le système des fonctions fuchsiennes qui en dérivent ne changent pas. Les $3n-3$ modules de la relation (1) ne changent donc pas non plus. Mais quand on a changé $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$, ces modules ont dû se changer en leurs imaginaires conjugués; puis, quand on a fait un changement linéaire de variable, ils n'ont pas changé. Par conséquent, les $3n-3$ *modules de la relation* (1) ne diffèrent pas de leurs imaginaires conjugués, *ils sont donc réels*.

Il en résulte qu'on pourra toujours choisir x et y parmi les fonctions fuchsiennes dérivées du groupe G, de telle sorte que *tous les coefficients de la relation* (1) *soient réels*. Alors les coefficients de $\varphi(x,y)$ seront aussi tous réels.

Je suppose de plus qu'on ait choisi x et y, ce qui est toujours possible, de

façon que la relation (1) satisfasse aux conditions que nous avons imposées à la relation (1) du paragraphe VI, au commencement de ce paragraphe (p. 223).

Cela posé, la fonction $\varphi(x, y)$ satisfera aux conditions suivantes :

1° Quand x devient infiniment grand du premier ordre, elle devient infiniment petite du quatrième ordre;

2° Les seuls infinis de la fonction $\varphi(x, y)$ seront les points singuliers de la fonction y de x, définie par la relation (1), en n'y comprenant pas les points doubles de la courbe algébrique $\psi(x, y) = 0$. Si l'un de ces points est $x = a$, $y = b$, on aura

$$\lim (y-b)^3 \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \varphi(x, y) = -\frac{3}{4}$$

pour $x = a$, $y = b$.

Ces conditions qui, on le remarquera, sont les mêmes que celles que nous avions trouvées dans le premier exemple, examiné au paragraphe VI, ne suffisent pas pour déterminer la fonction rationnelle $\varphi(x, y)$. Celle-ci est en outre assujettie à n conditions transcendantes. Voici sous quelle forme on peut présenter ces conditions transcendantes :

La fonction $\varphi(x, y)$ devra être choisie de telle sorte qu'en faisant décrire au point analytique $(x, y)n$ cycles convenablement choisis (correspondant à n périodes convenablement choisies d'une intégrale abélienne de première espèce $\int g(x, y)\, dx$), on voie revenir les intégrales de l'équation (3) à leurs valeurs intiales.

Passons maintenant à l'étude des séries thétafuchsiennes

$$\Theta(z) = \Sigma_i \, \mathrm{H}\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) (\gamma_i z + \delta_i)^{-2m},$$

c'est-à-dire à l'étude des séries de la forme (5) (§ I), et d'abord cherchons comment il peut arriver que la fonction définie par cette série ne présente aucun infini en dehors des points singuliers essentiels.

En général, la série $\Theta(z)$ admet comme infinis, ainsi qu'on l'a vu au paragraphe III : 1° les points correspondants du point ∞, c'est-à-dire les points

$$z = -\frac{\delta_i}{\gamma_i};$$

2° les infinis de la fonction $\mathrm{H}(z)$ et les points correspondants.

Supposons pour fixer les idées que la fonction $\mathrm{H}(z)$ ne devienne infinie pour

aucun des points $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$. Quelle est d'abord la condition pour que les points $-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$ ne soient pas des infinis de $\Theta(z)$? Pour cela, il faut et il suffit que le degré du dénominateur de la fonction rationnelle $\mathrm{H}(z)$ surpasse de $2m$ unités celui du numérateur.

Considérons maintenant un infini a de la fonction $\mathrm{H}(z)$ elle-même. Dans la série $\Theta(z)$, le terme

$$\mathrm{H}(z)$$

(correspondant à $\alpha_i = 1$, $\delta_i = 1$, $\beta_i = 0$, $\gamma_i = 0$, c'est-à-dire à la substitution unité) deviendra infini pour $z = a$. Pour que $\Theta(z)$ reste fini pour $z = a$, il faut donc qu'un autre terme de cette série devienne infini, de façon que la somme de ces deux termes (qui séparément croissent indéfiniment quand z tend vers a) tende au contraire vers une limite finie. Il faut pour cela que, parmi les infinis de $\mathrm{H}(z)$, il y en ait un autre $z = b$, tel que

$$b = \frac{\alpha a + \beta}{\gamma a + \delta},$$

$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ étant une des substitutions du groupe G. Il est clair alors que le terme

$$\mathrm{H}\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) (\gamma z + \delta)^{-2m}$$

deviendra infini pour $z = a$. Mais il faut que la somme de ce terme et du terme $\mathrm{H}(z)$ reste finie pour $z = a$. Soient donc A et B les résidus de $\mathrm{H}(z)$ qui correspondent à $z = a$ et $z = b$. On aura

$$\mathrm{H}(z) = \frac{\mathrm{A}}{z - a} + \mathrm{H}'(z),$$

$$\mathrm{H}\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) (\gamma z + \delta)^{-2m} = \frac{\mathrm{B}}{z - a} (\gamma a + \delta)^{2-2m} + \mathrm{H}_1'(z).$$

$\mathrm{H}'(z)$ et $\mathrm{H}_1'(z)$ étant des fonctions rationnelles de z qui restent finies pour $z = a$. On devra donc avoir

$$\mathrm{A} + \mathrm{B}(\gamma a + \delta)^{2-2m} = 0.$$

Telles sont les deux conditions nécessaires et suffisantes pour que $\Theta(z)$ reste fini pour $z = a$ et, par conséquent, aussi pour les points correspondants.

Cela posé, voici comment il faudra s'y prendre pour construire une fonction $\Theta(z)$ qui n'admette aucun infini. Prenons une fonction rationnelle $\mathrm{H}(z)$ admettant $2p$ infinis $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots, a_p, b_p$, et ayant pour résidus correspondants $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{B}_3, \ldots, \mathrm{A}_p, \mathrm{B}_p$.

Je suppose, de plus, qu'on ait :

$$b_1=\frac{\alpha_1 a_1+\beta_1}{\gamma_1 a_1+\delta_1},\qquad b_2=\frac{\alpha_2 a_2+\beta_2}{\gamma_2 a_2+\delta_2},\qquad \ldots,\qquad b_p=\frac{\alpha_p a_p+\beta_p}{\gamma_p a_p+\delta_p},$$
$$\left(z,\frac{\alpha_1 z+\beta_1}{\gamma_1 z+\delta_1}\right),\quad \left(z,\frac{\alpha_2 z+\beta_2}{\gamma_2 z+\delta_2}\right),\quad \ldots,\quad \left(z,\frac{\alpha_p z+\beta_p}{\gamma_p z+\delta_p}\right)$$

étant p substitutions du groupe G. J'assujettis de plus les $2p$ résidus à deux systèmes de conditions. D'abord

$$\begin{aligned}
&A_1+B_1+A_2+B_2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+A_p+B_p=0,\\
&A_1a_1+B_1b_1+A_2a_2+B_2b_2+\ldots+A_pa_p+B_pb_p=0,\\
&A_1a_1^2+B_1b_1^2+A_2a_2^2+B_2b_2^2+\ldots+A_pa_p^2+B_pb_p^2=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&A_1a_1^{2m-2}+B_1b_1^{2m-2}+\ldots\ldots\ldots\ldots+A_pa_p^{2m-2}+B_pb_p^{2m-2}=0,
\end{aligned}$$

pour que le degré du dénominateur de $H(z)$ surpasse de $2m$ unités celui du numérateur. Ensuite

$$A_k+B_k(\gamma_k a_k+\delta_k)^{2-2m}=0\qquad (k=1,2,\ldots,p),$$

pour que a_k et b_k ne soient pas des infinis de $\Theta(z)$.

Ces $p+2m-1$ conditions seront compatibles pourvu que

$$p>2m-1,$$

et si elles sont remplies, la série $\Theta(z)$ formée à l'aide de la fonction rationnelle

$$H(z)=\sum_{k=1}^{k=p}\left[\frac{A_k}{z-a_k}+\frac{B_k}{z-b_k}\right]$$

n'aura aucun infini. Je dirai alors qu'elle est de la seconde espèce, de sorte que nous avons ici, comme dans les trois paragraphes précédents, la distinction entre les deux espèces de séries de thétafuchsiennes.

Toute série de la forme $\Theta(z)$, à quelque espèce qu'elle appartienne, peut se mettre sous la forme

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x,y), \tag{2}$$

$F(x,y)$ désignant une fonction rationnelle de x et de y. Celles des fonctions de la forme (2) qui n'admettent pas d'infinis, s'expriment linéairement, ainsi qu'on l'a vu au paragraphe VI, à l'aide de $(2m-1)(n-1)$ d'entre elles. Il résulte de là que toutes les séries $\Theta(z)$ de la seconde espèce s'expriment

linéairement à l'aide de $(2m-1)(n-1)$ d'entre elles. Il nous reste à démontrer, comme dans les trois paragraphes précédents, qu'il est impossible de les exprimer linéairement à l'aide de $(2m-1)(n-1)-1$ d'entre elles.

Posons, pour abréger,

$$q=(2m-1)(n-1).$$

Supposons que toutes les séries $\Theta(z)$ de la seconde espèce puissent s'exprimer linéairement à l'aide de $q-1$ d'entre elles que j'appellerai $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_{q-1}$; je vais montrer que cette hypothèse est absurde.

En effet, choisissons *au hasard* q points, $z_1, z_2, \ldots, z_q$; on pourra toujours trouver q nombres $A_1, A_2, \ldots, A_q$ tels que

$$\begin{aligned}
&A_1\Theta_1(z_1)+A_2\Theta_1(z_2)+\ldots+A_q\Theta_1(z_q)=0,\\
&A_1\Theta_2(z_1)+A_2\Theta_2(z_2)+\ldots+A_q\Theta_2(z_q)=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&A_1\Theta_{q-1}(z_1)+A_2\Theta_{q-1}(z_2)+\ldots+A_q\Theta_{q-1}(z_q)=0,
\end{aligned}$$

et, par conséquent, tels que

$$A_1\Theta(z_1)+A_2\Theta(z_2)+\ldots+A_q\Theta(z_q)=0, \tag{5}$$

$\Theta(z)$ désignant une série quelconque de la forme (5) (§ I) et de la seconde espèce.

Soit p un nombre entier plus petit que $2m$. Je pourrai toujours former une fonction $\theta_p(z)$ qui satisfasse aux conditions suivantes : elle n'admettra d'autre infini que les points $z=-\frac{\delta_i}{\gamma_i}$; ces infinis seront d'ordre $2m-p$. Dans ces conditions, le point $z=\infty$ n'est pas un infini de notre fonction $\theta_p(z)$, c'est pour elle un zéro d'ordre p.

Je suppose que

$$\begin{aligned}
&\lim z^p\theta_p(z)=1 && \text{pour } z=\infty,\\
&\lim z^{2m-1-p}[z^p\theta_p(z)-1]=0 && \text{pour } z=\infty.
\end{aligned}$$

Ces conditions ne suffisent pas pour définir complètement la fonction $\theta_p(z)$, car si $\Theta(z)$ est une série de la forme (5) (§ I) et de la seconde espèce, $\theta_p(z)+\Theta(z)$ y satisfera comme $\theta_p(z)$. Mais nous choisirons pour notre fonction $\theta_p(z)$ une quelconque des séries de la forme (5) (§ I), qui satisfont aux conditions énoncées.

Considérons une série quelconque de la forme (5) (§ I) et de la première espèce

$$W(z)=\sum_i H\left(\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}\right)(\gamma_i z+\delta_i)^{-2m}.$$

Supposons que la partie entière de la fonction rationnelle

$$z^{2m}\,\Pi(z)$$

se réduit à

$$B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + \ldots + B_{2m} z^{2m},$$

on verra aisément que le point $z = \infty$ est, pour la fonction thétafuchsienne

$$\Psi(z) = B_0\,\theta_0(z) - B_1\,\theta_1(z) - B_2\,\theta_2(z) - \ldots - B_{2m}\,\theta_{2m}(z),$$

un zéro d'ordre $2m$ au moins et par conséquent que cette fonction thétafuchsienne ne devient pas infinie pour $z = -\frac{\delta_i}{\gamma_i}$.

Cela posé, envisageons la fonction suivante :

$$\Phi(z, a) = \sum_i \frac{1}{z - \frac{\alpha_i a + \beta_i}{\gamma_i a + \delta_i}} (\gamma_i a + \delta_i)^{-2m}.$$

Considérée comme fonction de z, elle n'a d'autres infinis que les points

$$z = \frac{\alpha_i a + \beta_i}{\gamma_i a + \delta_i},$$

c'est-à-dire les points correspondants de a.

Considérée comme fonction de a, c'est une série thétafuchsienne et elle admet comme infinis :

1° Les points $a = \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$, c'est-à-dire les points correspondants de z;

2° Les points $a = -\frac{\delta_i}{\gamma_i}$, c'est-à-dire les points correspondants de $a = \infty$. Ces points sont des infinis d'ordre $2m - 1$. Quant au point $a = \infty$ lui-même, c'est pour notre série un zéro du premier ordre.

Cherchons la partie entière de la fonction rationnelle

$$\frac{a^{2m}}{z - a};$$

nous trouverons

$$-(a^{2m-1} + z a^{2m-2} + z^2 a^{2m-3} + \ldots + z^{2m-2} a + z^{2m-1}).$$

On en conclut que la fonction thétafuchsienne

$$\Omega(z, a) = \Phi(z, a) + z^{2m-1}\,\theta_0(a) + z^{2m-2}\,\theta_1(a) + \ldots + z\,\theta_{2m-2}(a) + \theta_{2m-1}(a)$$

n'admet pas comme infinis les points $a = -\frac{\delta_i}{\gamma_i}$.

En conséquence elle n'aura d'autre infini que les points

$$a = \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i};$$

le résidu correspondant sera

$$-(\gamma_i z + \delta_i)^{2m-2}.$$

Soit $\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ une substitution quelconque de notre groupe G. La fonction

$$(\gamma z + \delta)^{2m-2}\,\Omega\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, a\right)$$

sera comme $\Omega(z, a)$ une fonction thétafuchsienne de a; elle n'admettra comme elle d'autre infini que les points

$$a = \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$$

et avec les mêmes résidus; donc on pourra écrire :

$$(\gamma z + \delta)^{2m-2}\,\Omega\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, a\right) - \Omega(z, a) = \Theta(a), \tag{6}$$

$\Theta(a)$ désignant une fonction thétafuchsienne de a, susceptible d'être mise sous la forme (5) (§ I) et de la seconde espèce. Posons maintenant

$$\Lambda(z) = A_1\,\Omega(z, z_1) + A_2\,\Omega(z, z_2) + \ldots + A_q\,\Omega(z, z_q). \tag{7}$$

En rapprochant les équations (5), (6) et (7), on trouve aisément l'identité suivante :

$$(\gamma z + \delta)^{2m-2}\,\Lambda\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = \Lambda(z),$$

qui a lieu pour toutes les substitutions $\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ du groupe G. Il suit de là que $\Lambda(z)$ peut se mettre sous la forme

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^{1-m} F(x, y), \tag{8}$$

$F(x, y)$ désignant une fonction rationnelle de x et de y. Or, la fonction $\Lambda(z)$ admet q infinis distincts $z_1, z_2, \ldots, z_q$, qui ont été choisis au hasard, et n'en admet pas d'autre à distance finie. On pourrait donc construire une fonction de la forme (8) admettant q infinis *donnés* et n'en admettant pas d'autre. Or, nous avons vu au paragraphe VI que cela était impossible. Donc l'hypothèse faite au début était absurde.

On en conclut comme dans les trois paragraphes précédents :

1° Que toutes les séries de la forme (5) (§ I) et de la seconde espèce ne peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de $q-1$ d'entre elles ;

2° Que toute expression de la forme (2) qui n'a pas d'infinis peut se mettre sous la forme (5) (§ I) ;

3° Que toute expression de la forme (2) peut être exprimée par une série de la forme (5) (§ I) (pourvu que $m > 1$) ;

4° Que toute fonction fuchsienne peut être égalée d'une infinité de manières au quotient de deux séries de la forme (5) (§ I).

Considérons la fonction

$$\Lambda(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{1-m} \mathrm{F}(x, y).$$

Supposons qu'elle admette une infinité d'infinis $z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots$, avec les résidus $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$. Supposons de plus qu'on ait

$$\Lambda(z) = B_h z^h + B_{h-1} z^{h-1} + \ldots + B_1 z + \Lambda_1(z),$$

$\Lambda_1(z)$ tendant vers une limite finie quand z croit indéfiniment. On aura identiquement

$$\Lambda(z) = B_h z^h + B_{h-1} z^{h-1} + \ldots + B_1 z + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{A_k}{z - z_k}. \tag{9}$$

Cette identité se démontre de deux manières comme l'identité correspondante du paragraphe V.

Un cas particulier bien remarquable est celui de $n = 1$.

Dans ce cas les substitutions du groupe G se réduisent à

$$\left(\frac{az+b}{cz+d},\ \mathrm{K}^p \frac{az+b}{cz+d}\right),$$

a, b, c, d étant des constantes, K étant un nombre réel positif et plus grand que 1, et l'exposant p pouvant prendre dans les diverses substitutions toutes les valeurs entières positives ou négatives.

Voici comment on peut former les fonctions fuchsiennes dans le cas qui nous occupe. Soit $f(\xi)$ une fonction doublement périodique admettant les périodes $2i\pi$ et $\log \mathrm{K}$. La transcendante $f\left[\log\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\right]$ sera alors une fonction fuchsienne.

Posons, par exemple,

$$x = \mathrm{sn}\left(\log\frac{az+b}{cz+d}\right), \qquad y = \mathrm{cn}\left(\log\frac{az+b}{cz+d}\right)\mathrm{dn}\left(\log\frac{az+b}{cz+d}\right).$$

Les expressions de la forme

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m \mathrm{F}(x, y) \tag{2}$$

pourront s'écrire

$$\frac{f\left(\log\frac{az+b}{cz+d}\right)}{(az+b)^m (cz+d)^m}, \tag{10}$$

$f(\xi)$ désignant toujours une fonction doublement périodique.

Les séries $\Theta(z)$ de la forme (5) (§ I) deviendront d'autre part

$$\sum_i \frac{\mathrm{K}^{mi}\varphi\left(\mathrm{K}^i \frac{az+b}{cz+d}\right)}{(cz+d)^{2m}}, \tag{11}$$

φ étant l'algorithme d'une fonction rationnelle.

Égalons les expressions (10) et (11) et faisons-y

$$\frac{az+b}{cz+d} = e^{\xi},$$

il viendra

$$f(\xi) = \Sigma_i \mathrm{K}^{mi} e^{m\xi} \varphi(\mathrm{K}^i e^{\xi}).$$

On obtient ainsi le développement d'une fonction doublement périodique de ξ suivant une série dont les termes sont des fonctions rationnelles de e^{ξ}. Si au lieu de ξ, on avait pris pour variable indépendante $\eta_1 = \xi\sqrt{-1}$, le premier membre serait une fonction doublement périodique de η_1, et, dans la série du second membre, tous les termes seraient des fonctions rationnelles de $\sin\eta_1$ et $\cos\eta_1$. Nous retrouvons par une voie détournée un résultat auquel Jacobi est parvenu directement et d'où il a tiré tant de belles conséquences.

Voyons maintenant ce que devient la formule (9) dans le cas particulier qui nous occupe.

On a

$$\Lambda(z) = (az+b)^{m-1}(cz+d)^{m-1} f(\xi),$$

$f(\xi)$ étant toujours une fonction doublement périodique.

On a d'autre part dans le second membre :

1° Un polynome du degré h en z; mais il est aisé de voir que, dans le cas

général, c'est-à-dire à moins que

$$f\left(\log\frac{a}{c}\right)=\infty,$$

le degré h ne peut dépasser $2m-2$. On peut donc le regarder comme un polynome homogène de degré $2m-2$ en $(az+b)$ et $(cz+d)$. Si on le divise par $(az+b)^{m-1}(cz+d)^{m-1}$, il prendra la forme suivante :

$$P_{m-1}(e^{\xi})+P'_{m-1}(e^{-\xi}),$$

P_{m-1} et P'_{m-1} désignant des polynomes de degré $m-1$ en e^{ξ} et en $e^{-\xi}$.

2° Un ensemble de termes $\sum\frac{A_k}{z-z_k}$ qu'on peut grouper de la façon suivante : soient $z_1, z_2, \ldots, z_q$ les q infinis distincts de $\Lambda(z)$ et supposons qu'il n'y en ait pas d'autre; soient $A_1, A_2, \ldots, A_q$ les résidus correspondants; soient $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_q$ les valeurs correspondantes de ξ. Groupons ensemble tous les termes de la forme $\frac{A_\ell}{z-z_k}$ qui correspondent à des infinis qui ne sont pas distincts de $z=z_p$. Leur somme sera

$$A_p\sum_i\frac{ce^{\xi}-a}{(cK^i e^{\xi_p}-a)^{2m-1}}\,\frac{K^{im}}{e^{\xi}-K^i e^{\xi_p}}(ce^{\xi_p}-a)^{2m}.$$

Comme on a d'autre part

$$(az+b)^{m-1}(cz+d)^{m-1}=e^{(m-1)\xi}(ce^{\xi}-a)^{2-2m},$$

on trouvera pour la fonction doublement périodique $f(\xi)$ l'expression suivante :

$$f(\xi)=P_{m-1}(e^{\xi})+P'_{m-1}(e^{-\xi})+\sum_{p=1}^{p=q}\left[A_p(ce^{\xi_p}-a)^{2m}\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty}\left(\frac{ce^{\xi}-a}{cK^i e^{\xi_p}-a}\right)^{2m-1}\frac{K^{mi}e^{(1-m)\xi}}{e^{\xi}-K^i e^{\xi_p}}\right].$$

IX. — Cinquième famille; genre zéro.

Je crois inutile de multiplier davantage les exemples. Ceux que j'ai étudiés jusqu'ici suffisent en effet pour faire voir comment on doit appliquer les principes généraux à chaque cas particulier.

Je veux cependant, sans traiter complètement les questions qui les concernent, dire quelques mots de certaines fonctions remarquables de la cinquième famille.

Considérons un polygone R_0 limité de la façon suivante : Il aura $2n$ côtés de la première sorte et un côté de la seconde sorte; je suppose que ses sommets soient, en suivant le périmètre dans le sens positif, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \ldots, \alpha_{2n}$. Je suppose que le côté $\alpha_n\alpha_{n+1}$ soit de la seconde sorte et les autres de la première sorte, de telle façon que les côtés $\alpha_0\alpha_1$ et $\alpha_0\alpha_{2n}$, $\alpha_1\alpha_2$ et $\alpha_{2n}\alpha_{2n-1}$, $\alpha_2\alpha_3$ et $\alpha_{2n-1}\alpha_{2n-2}$, $\ldots$, $\alpha_{p+1}\alpha_{p+2}$ et $\alpha_{2n-p}\alpha_{2n-p-1}$, $\ldots$, et enfin $\alpha_{n-1}\alpha_n$ et $\alpha_{n+2}\alpha_{n+1}$, soient conjugués et par conséquent congruents. Si on laisse de côté α_n et α_{n+1}, tous les sommets seront de la première catégorie et se répartiront en n cycles fermés. L'un des cycles ne comprendra que le sommet α_0; les autres seront formés respectivement des sommets α_1 et α_{2n}, α_2 et α_{2n-1}, α_3 et α_{2n-2}, $\ldots$, enfin α_{n-1} et α_{n+2}; de sorte que les angles curvilignes α_0, $\alpha_1+\alpha_{2n}$, $\alpha_2+\alpha_{2n-1}$, $\ldots$, $\alpha_{n-1}+\alpha_{n+2}$ devront être des parties aliquotes de 2π. Quant aux angles α_n et α_{n+1}, ils seront forcément droits, puisque les côtés de la première sorte $\alpha_{n-1}\alpha_n$ et $\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}$ coupent orthogonalement le cercle fondamental, dont le côté $\alpha_n\alpha_{n+1}$ n'est qu'un arc. Nous construirons ensuite un polygone R'_0 symétrique de R_0 par rapport au cercle fondamental. J'appellerai α'_i le sommet de R'_0 qui est symétrique de α_i par rapport au cercle fondamental.

On voit aisément que le polygone R_0 est de la cinquième famille et du genre zéro, et qu'on peut s'en servir pour définir un groupe fuchsien et une infinité de fonctions fuchsiennes. Celles-ci peuvent toutes s'exprimer rationnellement à l'aide de l'une d'entre elles que j'appellerai

$$x=f(z).$$

Comme on peut choisir d'une infinité de manières, parmi nos fonctions fuchsiennes, une d'entre elles à l'aide de laquelle toutes les autres s'expriment rationnellement, la fonction $x=f(z)$ ne serait pas complètement déterminée si nous n'ajoutions quelques conditions de plus.

Soient β et γ deux points du côté de la seconde sorte $\alpha_n\alpha_{n+1}$; je supposerai qu'on a

$$f(\alpha_n)=f(\alpha_{n+1})=0,\qquad f(\beta)=1,\qquad f(\gamma)=\infty.$$

Je poserai ensuite

$$f(\alpha_i)=a_i,\qquad f(\alpha'_i)=a'_i.$$

Le polygone $R_0+R'_0$ étant symétrique par rapport au cercle fondamental, on peut voir, par un raisonnement analogue à celui du paragraphe précédent, que les nombres a_i et a'_i sont imaginaires conjugués.

Posons maintenant

$$v = \sqrt{\frac{dx}{dz}},$$

la fonction v satisfera à une équation différentielle de la forme (3 *bis*) (§ IV) puisque le groupe fuchsien correspondant est de genre zéro. Cette équation, comme on le voit aisément, peut s'écrire :

$$\frac{d^2v}{dx^2} = v\,\frac{P(x)}{[Q(x)]^2}, \tag{3 bis}$$

$Q(x)$ étant le produit $(x-a_0)(x-a'_0)(x-a_1)(x-a'_1),\ldots,(x-a_{n-1})(x-a'_{n-1})$ et $P(x)$ étant un polynome de degré $4n-4$ en x, ayant tous ses coefficients réels.

X. — Résumé.

En étudiant les exemples précédents, j'ai rencontré différents résultats qui sont communs à toutes les fonctions fuchsiennes. Je ne crois pas utile d'en donner la démonstration dans le cas le plus général; car elle ne différerait pas de celles que nous avons données dans les divers cas particuliers et je serais entraîné à des redites sans intérêt. Je me bornerai donc à les énoncer ici sous forme de résumé.

Formons avec une fonction rationnelle quelconque $H(z)$ la série thétafuchsienne

$$\sum_i H\left(\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}\right)(\gamma_i z+\delta_i)^{-2m} = \theta[z, H(z)]. \tag{1}$$

Cette série pourra toujours se mettre sous la forme

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m F(x,y), \tag{2}$$

$F(x,y)$ désignant une fonction rationnelle de ces deux fonctions fuchsiennes x et y, à l'aide desquelles toutes les autres s'expriment rationnellement et entre lesquelles il y a une relation algébrique

$$\psi(x,y) = 0. \tag{3}$$

Pour qu'une expression de la forme (2) puisse se mettre sous la forme (1), il faut qu'elle s'annule quand z vient en un des sommets de la deuxième catégorie du polygone R_0.

A cette condition, toute expression de la forme (2) *peut se mettre sous la forme* (1) *pourvu que m soit un entier plus grand que* 1.

Il en résulte que toute fonction fuchsienne peut se mettre d'une infinité de manières sous la forme du quotient de deux séries telles que (1).

Les séries de la forme (1) sont de deux espèces : celles qui ont des infinis et celles qui n'en ont pas. Ces dernières peuvent s'exprimer linéairement à l'aide d'un nombre fini d'entre elles. Il y a donc entre les séries thétafuchsiennes de la deuxième espèce une infinité de relations linéaires.

Voici une de ces relations qui peut servir de point de départ pour trouver, sinon toutes les autres, au moins un grand nombre d'entre elles.

Soit $\left(z, \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)$ une substitution quelconque du groupe G. On aura identiquement

$$\theta[z, H(z)] = \theta\left[z, H\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)(\gamma z+\delta)^{-2m}\right](\gamma z+\delta)^{2m}.$$

Considérons maintenant une fonction de la forme suivante :

$$\Lambda(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{1-m} F(x,y),$$

$F(x,y)$ désignant toujours une fonction rationnelle et m un entier plus grand que 1. Je suppose de plus que cette fonction s'annule quand z vient en un des sommets de la deuxième catégorie de R_0.

Soit q le nombre des infinis distincts de $\Lambda(z)$; soient $z_1, z_2, \ldots, z_q$ ces infinis distincts; $A_1, A_2, \ldots, A_q$ les résidus correspondants; soit $\varphi(z)$ une fonction rationnelle quelconque de z n'ayant pas d'infini à l'intérieur du cercle fondamental.

On aura identiquement

$$\Lambda(z)\varphi(z) = \sum_{k=1}^{k=q}\sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{A_k\,\varphi\left(\frac{\alpha_i z_k+\beta_i}{\gamma_i z_k+\delta_i}\right)}{z-\frac{\alpha_i z_k+\beta_i}{\gamma_i z_k+\delta_i}}(\gamma_i z_k+\delta_i)^{-2m}, \tag{4}$$

si les fonctions fuchsiennes n'existent qu'à l'intérieur du cercle fondamental, et

$$\Lambda(z) = \sum_{k=1}^{k=q}\sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{A_k}{z-\frac{\alpha_i z_k+\beta_i}{\gamma_i z_k+\delta_i}}(\gamma_i z_k+\delta_i)^{-2m} + P(z) \tag{4 bis}$$

[$P(z)$ étant un polynome entier en z] si les fonctions fuchsiennes existent dans tout le plan.

Il en résulte que toute fonction fuchsienne peut d'une infinité de manières se mettre sous la forme du quotient de deux séries telles que (4) ou (4 *bis*).

XI. — Historique.

Si on laisse de côté les fonctions doublement périodiques, les premières fonctions fuchsiennes qui aient été signalées sont les fonctions modulaires. Elles se présentaient pour ainsi dire d'elles-mêmes dans l'étude des transcendantes elliptiques, et leurs propriétés principales, en particulier celles d'être uniformes et d'admettre une ligne singulière essentielle, ont été remarquées depuis longtemps. D'ailleurs les travaux dont elles ont été l'objet et les résultats remarquables obtenus dans ces derniers temps par MM. Hermite, Dedekind, Fuchs et Klein sont trop connus pour que j'aie besoin d'insister.

Mais il est une autre catégorie de fonctions fuchsiennes dont l'existence a été signalée dès 1872. Ce sont celles auxquelles donne naissance l'équation hypergéométrique de Gauss; ces fonctions ne sont qu'un cas particulier de celles que nous avons étudiées dans le paragraphe V et on les obtient quand le polygone R_0 considéré dans ce paragraphe est symétrique et se réduit à un quadrilatère.

Dans un Mémoire inséré au Tome 75 du *Journal de Borchardt*, M. Schwarz annonce sans démonstration que ces fonctions sont uniformes et admettent un cercle comme ligne singulière essentielle. C'était du même coup annoncer la discontinuité du groupe correspondant, comme je l'ai déjà fait remarquer dans l'historique du Mémoire sur les groupes fuchsiens. Malheureusement, détourné de ce sujet par d'autres études, M. Schwarz s'est borné aux quelques lignes qu'il avait consacrées à ces transcendantes et n'a pas poussé plus loin ses recherches.

Dans un autre ordre d'idées, M. Schwarz avait obtenu d'autres résultats qui se rapportent indirectement à notre sujet. Dans divers Mémoires insérés aux Tomes 70 et 74 du *Journal de Borchardt* et aux *Monatsberichte* de l'Académie de Berlin, M. Schwarz a démontré d'une manière rigoureuse le principe dit de Dirichlet et la possibilité de l'*Abbildung* du cercle sur une figure plane quelconque et en particulier sur un polygone limité par des arcs de cercle. S'il

avait connu les conditions de discontinuité des groupes, il aurait pu être conduit ainsi à démontrer l'existence des fonctions fuchsiennes dans le cas particulier où le polygone R_0 est symétrique.

J'aurais donc pu me servir de ces résultats, mais j'ai préféré suivre une autre voie :

1° Parce ce que je n'aurais pu démontrer ainsi l'existence des fonctions fuchsiennes dans le cas où le polygone R_0 n'est pas symétrique;

2° Parce que les développements en séries dont j'ai fait usage me donnaient non seulement la démonstration de l'existence de la fonction, mais son expression analytique.

MÉMOIRE

SUR

LES GROUPES KLEINÉENS[1]

Acta mathematica, t. 3, p. 49-92; 1883.

I. — Substitutions imaginaires.

Dans un Mémoire antérieur [2], j'ai étudié les groupes discontinus formés par les substitutions linéaires à coefficients réels. Dans le présent travail, j'ai l'intention d'exposer quelques résultats relatifs aux groupes de substitutions linéaires à coefficients imaginaires. Ces substitutions se classent naturellement en quatre catégories, comme on va le voir.

Soit

$$\left(z, \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)$$

une substitution quelconque où je suppose toujours

$$\alpha\delta-\beta\gamma=1.$$

Si l'on a

$$(\alpha+\delta)^2=4,$$

la substitution peut se mettre sous la forme

$$\left(\frac{1}{z-a}, \frac{1}{z-a}+K\right),$$

a et K étant des constantes. On dit alors qu'elle est *parabolique*.

Si l'on a

$$(\alpha+\delta)^2<4.$$

(1) Terminé le 19 mai 1883; imprimé le 8 septembre 1883. N. E. N.

(2) *Théorie des groupes fuchsiens*, ce Tome, p. 108-168. N. E. N.

la substitution peut se mettre sous la forme

$$\left(\frac{z-a}{z-b}, K\frac{z-a}{z-b}\right),$$

a, b, K étant des constantes.

Si l'on a

$$(\alpha+\delta)^2 \text{ réel positif et } >4,$$

K est réel positif et la substitution est *hyperbolique*.

Si l'on a

$$(\alpha+\delta)^2 \text{ réel positif et } <4,$$

K est imaginaire ou négatif et a pour module 1, la substitution est *elliptique*.

Si enfin $(\alpha+\delta)^2$ est imaginaire ou négatif, K est également imaginaire ou négatif et la substitution est *loxodromique*.

Une propriété commune à toutes ces substitutions linéaires c'est de transformer les cercles en cercles. Représentons, en effet, à l'exemple de M. Hermite, les quantités imaginaires conjuguées de u, v, ... par la notation u_0, v_0, ...

La substitution

$$\left(z, \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right) \tag{1}$$

peut s'écrire

$$\left(z_0, \frac{\alpha_0 z_0+\beta_0}{\gamma_0 z_0+\delta_0}\right).$$

L'équation générale d'un cercle s'écrit d'ailleurs

$$Azz_0+Bz+B_0z_0+C=0, \tag{2}$$

A et C étant essentiellement réels [1], et il est clair qu'on retombera sur ce cercle (2) en appliquant la substitution (1) au cercle dont voici l'équation

$$\begin{aligned}&A(\alpha z+\beta)(\alpha_0 z_0+\beta_0)+B(\alpha z+\beta)(\gamma_0 z_0+\delta_0)\\&+B_0(\gamma z+\delta)(\alpha_0 z_0+\beta_0)+C(\gamma z+\delta)(\gamma_0 z_0+\delta_0)=0\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}(3)\qquad &zz_0(A\alpha\alpha_0+B\alpha\gamma_0+B_0\gamma\alpha_0+C\gamma\gamma_0)\\&+z(A\alpha\beta_0+B\alpha\delta_0+B_0\gamma\beta_0+C\gamma\delta_0)\\&+z_0(A\beta\alpha_0+B\beta\gamma_0+B_0\delta\alpha_0+C\delta\gamma_0)\\&+(A\beta\beta_0+B\beta\delta_0+B_0\delta\beta_0+C\delta\delta_0)=0.\end{aligned}$$

Écrivons maintenant l'équation d'une inversion par rapport au cercle (2),

(1) Pour que le rayon du cercle soit réel, il faut encore que $BB_0-AC>0$. On vérifie aisément que l'expression analogue formée avec les coefficients de l'équation (3) est égale à

$$(BB_0-AC)(\alpha\delta-\beta\gamma)(\alpha_0\delta_0-\beta_0\gamma_0)=BB_0-AC$$

et par conséquent positive. N. E. N.

c'est-à-dire de l'opération qui consiste à changer un point quelconque z en son transformé par rayons vecteurs réciproques, en prenant pour pôle de la transformation le centre du cercle (2) et pour paramètre de la transformation le carré du rayon de ce cercle. Voici cette équation :

Soit t le transformé de z par cette inversion, on aura

$$t + \frac{B_0}{A} = \frac{BB_0 - AC}{A(Az_0 + B)}.$$

Soient C_1 et C_2 deux cercles quelconques, et appelons I_1 et I_2 les inversions opérées respectivement par rapport à ces deux cercles. Si nous faisons subir à un point quelconque l'inversion I_1 puis l'inversion I_2, l'opération résultante qu'on pourra représenter par la notation $I_1 I_2$, sera une substitution linéaire comme il est aisé de s'en assurer. Cette substitution sera parabolique si les deux cercles C_1 et C_2 se touchent, elliptique s'ils se coupent, et hyperbolique s'ils ne se coupent pas.

Supposons qu'on étudie la résultante non plus de deux, mais de plusieurs inversions successives. Si ces inversions sont en nombre pair, la résultante sera une substitution linéaire; si elles sont en nombre impair, la résultante sera une opération plus complexe qui pourra être regardée comme une substitution linéaire suivie d'une inversion. De plus, *toute substitution linéaire peut être regardée d'une infinité de manières comme la résultante d'un nombre pair d'inversions.*

Le groupe obtenu en combinant de diverses manières les différentes inversions imaginables contient donc toutes les substitutions linéaires.

Posons

$$z = \xi + \eta\sqrt{-1},$$

ξ et η seront les coordonnées d'un point représentatif de z dans son plan.

Considérons maintenant un point quelconque, non plus dans le plan $\xi\eta$, mais dans l'espace, et soi entξ, η, ζ ses coordonnées; je supposerai ζ positif de telle façon que le point considéré soit au-dessus du plan des $\xi\eta$. On a vu que la substitution (1) change un point quelconque ξ, η du plan des $\xi\eta$ en un autre point de ce même plan. Nous allons étendre la définition de la substitution (1) de façon qu'on puisse appliquer cette substitution, non seulement à un point du plan $\xi\eta$, mais à un point quelconque de l'espace. La substitution (1), nous l'avons vu, peut être regardée comme la résultante d'un certain nombre d'inversions faites successivement par rapport à certains cercles

du plan des $\xi\eta$ que j'appelle $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Soient $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ les sphères qui ont même centre et même rayon que ces cercles. Considérons l'opération qui consiste à effectuer n inversions successivement par rapport aux sphères $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$. Cette opération, si on l'applique à un point du plan des $\xi\eta$, ne diffère pas de la substitution (1). On pourra donc définir encore ainsi la substitution (1) quand il s'agira de l'appliquer à un point de l'espace situé en dehors du plan des $\xi\eta$.

Une inversion par rapport à l'une des sphères $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ transforme les sphères en sphères; elle transforme en lui-même le plan des $\xi\eta$; elle conserve les angles; elle transforme toute figure infiniment petite en une figure infiniment petite semblable; toutes ces propriétés appartiennent donc à leur résultante, c'est-à-dire à la substitution (1) généralisée.

Supposons que l'inversion par rapport au cercle C_1, par exemple, change un certain cercle K du plan des $\xi\eta$ en un autre cercle K_1 de ce même plan. Soient S et S_1 les sphères qui ont même centre et même rayon que K et K_1; il est clair que l'inversion par rapport à la sphère Σ_1 changera S en S_1. Si donc la substitution (1) change le cercle K en un certain cercle K_n, et si S et S_n sont les sphères qui ont même rayon que K et K_n, la substitution (1) généralisée changera S en S_n. En effet, la substitution (1) équivaut à n inversions opérées respectivement par rapport aux cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n$; ces inversions changent successivement le cercle K en K_1 puis en K_2, ... puis enfin en K_n. Soit S_i la sphère qui a même rayon et même centre que K_i. La substitution (1) généralisée équivaudra à n inversions opérées respectivement par rapport aux sphères $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \ldots, \Sigma_n$, et ces inversions changeront successivement la sphère S en S_1, puis en S_2, ..., puis enfin en S_n. C. Q. F. D.

Pour justifier la définition précédente, il faut établir ce qui suit :

La substitution (1) peut être regardée d'une *infinité de manières* comme la résultante d'un nombre pair d'inversions opérées par rapport à divers cercles du plan des $\xi\eta$. Les cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ne sont donc pas parfaitement déterminés. Il faut faire voir que la substitution (1) généralisée est cependant une opération parfaitement déterminée. Supposons, en effet, que la substitution (1) puisse être regardée :

1° D'une part, comme la résultante de n inversions opérées par rapport aux cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n$;

2° D'autre part, comme la résultante de p inversions opérées par rapport à p autres cercles $C'_1, C'_2, \ldots, C'_p$ du plan des $\xi\eta$.

Soit Σ'_i la sphère qui a même centre et même rayon que C'_i.

Soit maintenant un point P quelconque de l'espace; appliquons-lui successivement les inversions par rapport aux sphères $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$; nous obtiendrons un certain point Q. Appliquons maintenant au point P successivement les inversions par rapport aux sphères $\Sigma'_1, \Sigma'_2, \ldots, \Sigma'_p$, nous obtiendrons un certain point Q'. Appelons ces deux opérations (P, Q), (P, Q'); elles satisfont toutes deux à la définition de la substitution (1) généralisée, il faut donc démontrer que les deux points Q et Q' coïncident. Eh bien, nous pouvons faire passer par le point P trois sphères S, S', S'', ayant leurs centres dans le plan des $\xi\eta$ et coupant ce plan suivant trois grands cercles K, K', K''.

La substitution (1) changera ces trois grands cercles en trois autres cercles K_1, K'_1 et K''_1 du plan des $\xi\eta$. Soient S_1, S'_1 et S''_1 les sphères qui ont même centre et même rayon que ces cercles; l'opération (P, Q), de même que l'opération (P, Q'), change S, S' et S'' en S_1, S'_1 et S''_1. Le point Q, de même que le point Q', se trouve donc à l'intersection des trois sphères S_1, S'_1 et S''_1. Donc ces deux points coïncident. Donc la substitution (1) généralisée est une opération parfaitement déterminée. C. Q. F. D.

Il reste à trouver les équations de cette opération. Pour définir un point P de l'espace, nous emploierons les trois coordonnées suivantes

$$z = \xi + i\eta, \qquad z_0 = \xi - i\eta, \qquad \rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = zz_0 + \zeta^2;$$

ζ étant supposé positif, ces trois coordonnées suffisent pour définir complètement le point P.

Soient ρ'^2, z' et z'_0 les trois coordonnées du point Q transformé de P par la substitution (1) généralisée. Exprimons que le point P se trouve sur la sphère qui a même centre et même rayon que le cercle (3); j'ai à écrire

$$\begin{aligned}(4)\qquad &\rho^2(A\alpha\alpha_0 + B\alpha\gamma_0 + B_0\gamma\alpha_0 + C\gamma\gamma_0)\\ &+ z\,(A\alpha\beta_0 + B\alpha\delta_0 + B_0\gamma\beta_0 + C\gamma\delta_0)\\ &+ z_0(A\beta\alpha_0 + B\beta\gamma_0 + B_0\delta\alpha_0 + C\delta\gamma_0)\\ &+ \quad (A\beta\beta_0 + B\beta\delta_0 + B_0\delta\beta_0 + C\delta\delta_0) = 0.\end{aligned}$$

Si le point P est sur la sphère qui a même centre et même rayon que le cercle (3), le point Q devra se trouver sur la sphère qui a même centre et même rayon que le cercle (2) transformé de (3) par la substitution (1); d'où l'équation

$$(5)\qquad A\rho'^2 + Bz' + B_0 z'_0 + C = 0.$$

Ces deux équations, si l'on y regarde A, B, B_0 et C comme les inconnues, doivent être équivalentes. On a donc

$$\rho'^2 = \frac{\rho^2\alpha\alpha_0 + z\alpha\beta_0 + z_0\beta\alpha_0 + \beta\beta_0}{\rho^2\gamma\gamma_0 + z\gamma\delta_0 + z_0\delta\gamma_0 + \delta\delta_0},$$

$$z' = \frac{\rho^2\alpha\gamma_0 + z\alpha\delta_0 + z_0\beta\gamma_0 + \beta\delta_0}{\rho^2\gamma\gamma_0 + z\gamma\delta_0 + z_0\delta\gamma_0 + \delta\delta_0},$$

$$z'_0 = \frac{\rho^2\gamma\alpha_0 + z\gamma\beta_0 + z_0\delta\alpha_0 + \delta\beta_0}{\rho^2\gamma\gamma_0 + z\gamma\delta_0 + z_0\delta\gamma_0 + \delta\delta_0}.$$

Telles sont les équations de la substitution (1) généralisée.

Passons aux propriétés générales de cette substitution.

Si la substitution (1) est elliptique, elle change en eux-mêmes tous les points du cercle C qui passe par les deux points doubles, qui a son centre dans le plan des $\xi\eta$ au milieu de la droite qui joint ces deux points doubles, et dont le plan est perpendiculaire au plan des $\xi\eta$. Elle change également en eux-mêmes une infinité de cercles dont la propriété caractéristique est que toutes les sphères qui passent par ces cercles coupent orthogonalement le cercle C précédemment défini. Nous appellerons ce cercle C *cercle double* de la substitution elliptique.

Si la substitution (1) est hyperbolique, il n'y a que deux points de l'espace qui ne sont pas altérés par la substitution : ce sont les deux points doubles situés dans le plan des $\xi\eta$. La substitution change en elles-mêmes toutes les circonférences et toutes les sphères qui passent par ces deux points.

Si la substitution (1) est parabolique, il n'y a qu'un seul point double inaltéré par cette opération qui change d'ailleurs en elles-mêmes toutes les circonférences et toutes les sphères qui sont tangentes au point double à une certaine droite du plan des $\xi\eta$.

Supposons enfin que la substitution (1) soit loxodromique; elle n'altérera pas le cercle C qui a pour diamètre la droite qui joint les points doubles et dont le plan est normal au plan des $\xi\eta$. Mais, à l'exception des points doubles, elle altérera tous les points de ce cercle.

En résumé, toute substitution qui n'altère pas un point situé en dehors du plan des $\xi\eta$ est elliptique.

Nous avons vu plus haut que la substitution (1) généralisée transforme toute figure infiniment petite en une figure infiniment petite semblable. Cherchons le rapport de similitude. Si l'on considère une inversion unique, il est évident que les dimensions homologues de deux figures infiniment petites transformées

l'une et l'autre, seront entre elles comme les coordonnées ζ des centres de gravité de ces figures. Il en sera donc de même quand, au lieu d'une inversion unique, on envisagera la résultante de plusieurs inversions, c'est-à-dire la substitution (1) généralisée.

Si donc on appelle ds, $d\omega$ ou dv un arc de courbe infiniment petit, ou une aire plane ou courbe infiniment petite, ou un volume infiniment petit, et si ζ est la distance de cet arc, de cette aire ou de ce volume au plan des $\xi\eta$; si l'on appelle ds', $d\omega'$ ou dv' les transformées de ds, $d\omega$ ou dv par la substitution (1) généralisée, et si ζ' est la distance de ds', $d\omega'$ ou dv' au plan des $\xi\eta$, on aura

$$\frac{ds}{\zeta} = \frac{ds'}{\zeta'}, \qquad \frac{d\omega}{\zeta^2} = \frac{d\omega'}{\zeta'^2}, \qquad \frac{dv}{\zeta^3} = \frac{dv'}{\zeta'^3}. \tag{6}$$

Nous dirons que deux figures sont *congruentes* lorsqu'elles seront transformées l'une de l'autre par une opération telle que la substitution (1) généralisée.

Nous appellerons L d'un arc l'intégrale

$$\int \frac{ds}{\zeta},$$

étendue aux différents éléments de cet arc. Nous appellerons S d'une aire plane ou courbe, l'intégrale

$$\int \frac{d\omega}{\zeta^2},$$

étendue aux divers éléments de cette aire et enfin nous appellerons V d'un solide l'intégrale

$$\int \frac{dv}{\zeta^3},$$

étendue aux divers éléments de ce solide.

Il résulte des équations (6) que deux arcs congruents ont même L, que deux aires congruentes ont même S et deux solides congruents même V.

Supposons maintenant qu'on enlève aux mots *droite* et *plan* leur signification pour appeler *droite* ou *plan* toute circonférence ou toute sphère qui coupe orthogonalement le plan des $\xi\eta$. Supposons aussi qu'enlevant aux mots *longueurs*, *surfaces* et *volumes* leur signification, on appelle ainsi ce que nous venons d'appeler L, S et V. Supposons enfin que l'on conserve aux mots *circonférence*, *sphère* et *angle* leur signification habituelle. On reconnaîtra alors

qu'interprétés de la sorte, tous les théorèmes de la géométrie non euclidienne de Lobatschewski, c'est-à-dire de la géométrie qui n'admet pas le postulatum d'Euclide, sont parfaitement exacts. On voit aussi quel lien il y a entre la théorie des substitutions linéaires et la géométrie non euclidienne. C'est de ce même lien que M. Klein a fait usage pour trouver tous les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire.

II. — Groupes discontinus.

Je me propose de former les groupes discontinus qui sont dérivés d'un nombre fini de substitutions linéaires à coefficients imaginaires. Mais, avant d'aller plus loin, il y a lieu de faire une distinction qui n'avait pas de raison d'être dans la théorie des groupes fuchsiens, mais qui est ici d'une importance capitale. Cette distinction a été très nettement établie par M. Klein (*Mathematische Annalen*, Bd XXI, p. 176).

Nous appellerons *substitution infinitésimale* toute substitution linéaire telle que les modules de $\alpha - 1$, β, γ, $\delta - 1$ soient infiniment petits.

Si un groupe contient une substitution infinitésimale, c'est-à-dire si l'on peut trouver dans ce groupe des substitutions telles que les quatre modules cités plus haut soient plus petits que toute quantité donnée sans être nuls, le groupe est continu.

Mais, parmi les groupes qui ne satisfont pas à cette condition, c'est-à-dire parmi les groupes discontinus, il y a lieu de distinguer deux classes que nous appellerons les *groupes proprement* et *improprement discontinus*.

Un groupe sera improprement discontinu dans le voisinage d'un point z si, dans un domaine D enveloppant le point z, on peut trouver une infinité de transformés de ce point par les substitutions du groupe, et cela quelque petit que soit le domaine D.

Le groupe sera proprement discontinu dans le cas contraire.

Si, par exemple, il s'agit d'un groupe de substitutions appliquées à une quantité réelle z, on pourra prendre pour le domaine D le segment de droite compris entre le point $z - \varepsilon$ et le point $z + \varepsilon$; s'il s'agit de substitutions appliquées à une quantité imaginaire z ou à un point z du plan, le domaine D sera un cercle ayant pour centre le point z; s'il s'agit d'un point P de l'espace, D sera une sphère ayant P pour centre, etc.

Pour éclaircir ce qui précède par un exemple simple, considérons le groupe formé par les substitutions

$$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right),$$

où α, β, γ, δ sont des entiers réels, tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Il est clair que ce groupe ne contient pas de substitution infinitésimale, il est donc discontinu. On voit de plus que si z est réel, on peut choisir α, β, γ, δ de telle façon que

$$\operatorname{mod}\left(z - \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$$

soit aussi petit qu'on veut, sans être nul; tandis que cela est impossible si z est imaginaire. Le groupe est donc improprement discontinu pour z réel et proprement discontinu pour z imaginaire.

Ce qui fait que nous n'avons pas eu à faire cette distinction dans le cas des groupes fuchsiens, c'est que tout groupe discontinu formé de substitutions réelles est proprement discontinu toutes les fois que z est imaginaire. C'est ce que je vais démontrer ici, car la démonstration que je veux donner de ce fait permettra de comprendre plus facilement ce qui se rapporte au cas plus général qui nous occupe dans ce Mémoire.

Soit G un groupe quelconque formé de substitutions réelles, soit z un point imaginaire quelconque; supposons que, dans tout domaine D entourant le point z, il y ait une infinité de transformés de ce point par des substitutions de G; je dis que ce groupe contiendra des substitutions infinitésimales.

En effet je dirai qu'une quantité qui dépend d'une variable ε est de l'ordre de ε si elle s'annule avec cette variable et qu'une substitution est de l'ordre de ε si $\alpha - 1$, $\delta - 1$, β et γ s'annulent avec ε. Cela posé :

1° Toute substitution Σ qui change z en $z + \zeta$, ζ étant une quantité infiniment petite de l'ordre de ε, peut être regardée comme la résultante d'une substitution elliptique S qui admet le point z comme point double et d'une substitution hyperbolique s qui est infinitésimale et de l'ordre de ε. Nous écrirons

$$\Sigma = Ss.$$

2° Si s et s_1 sont deux substitutions de l'ordre de ε, leur résultante ss_1 sera aussi infinitésimale et de l'ordre de ε.

3° Si s est une substitution de l'ordre de ε et S une substitution finie, la résultante de la substitution inverse de S, de s et de S, résultante que nous écrirons $S^{-1}sS$ (1), sera infinitésimale et de l'ordre de ε.

4° Si S et S_1 sont deux substitutions elliptiques ayant le point z pour point double, elles seront permutables, c'est-à-dire qu'on aura

$$SS_1 = S_1S, \qquad S_1 = S^{-1}S_1S. \tag{1}$$

Maintenant, par hypothèse, nous avons dans le groupe une infinité de substitutions qui changent z en $z + \zeta$, $z + \zeta_1$, ...; ζ, ζ_1, ... étant des quantités de l'ordre de ε. Soient Σ et Σ_1 deux quelconques d'entre elles. On aura

$$\Sigma = Ss, \qquad \Sigma_1 = S_1s_1,$$

S et S_1 admettant le point z comme point double, s et s_1 étant infinitésimales.

La substitution

$$\Sigma\Sigma_1\Sigma^{-1}\Sigma_1^{-1}$$

fera partie du groupe; elle ne se réduira pas à la substitution identique (z, z) parce qu'en général Σ et Σ_1 n'auront pas même point double.

Je dis qu'elle sera infinitésimale. En effet elle peut s'écrire

$$Ss\,S_1s_1s^{-1}S^{-1}s_1^{-1}S_1^{-1}$$

ou en vertu de la relation (1)

$$Ss\,S^{-1}S_1Ss_1s^{-1}S^{-1}s_1^{-1}S_1^{-1}.$$

Or, en appliquant les principes 2° et 3° de la page 266, on verrait successivement que SsS^{-1}, que s_1s^{-1}, que $S(s_1s^{-1})S^{-1}$, que $(Ss_1s^{-1}S^{-1})s_1^{-1}$, que $S_1(Ss_1s^{-1}S^{-1}s_1^{-1})S_1^{-1}$, et enfin que

$$(SsS^{-1})(S_1Ss_1s^{-1}S^{-1}s_1^{-1}S_1^{-1})$$

sont infinitésimales et de l'ordre de ε.

Le groupe contient donc une substitution infinitésimale, il est continu.

Mais si un groupe de substitutions réelles ne peut être improprement discontinu dans le voisinage d'un point z imaginaire, il peut au contraire être improprement discontinu dans le voisinage d'un point z réel. En effet le groupes fuchsiens de la première, de la deuxième et de la sixième familles,

(1) Nous désignerons, suivant l'usage, par la notation S^{-1} la substitution inverse de S; par la notation SS, la résultante de S et de S_1, par la notation S^m la résultante de m substitutions S successives.

c'est-à-dire ceux dont les polygones générateurs n'ont pas de côté de la seconde sorte, sont improprement discontinus dans le voisinage de tous les points z réels. Au contraire les groupes fuchsiens des autres familles sont proprement discontinus dans le voisinage des points réels qui appartiennent à un côté de la seconde sorte du polygone générateur ou d'un de ses transformés; ils ne sont improprement discontinus que dans le voisinage des points singuliers.

Revenons à l'étude des groupes formés de substitutions imaginaires ou plutôt des substitutions plus générales définies dans le paragraphe précédent.

Je dis qu'un pareil groupe ne peut être improprement discontinu dans le voisinage d'un point P situé en dehors du plan des $\xi\eta$. Soit, en effet, un pareil point P situé au-dessus du plan des $\xi\eta$ et un domaine D entourant ce point P. Supposons que, quelque petit que soit ce domaine D, il contienne une infinité de transformés du point P par les substitutions du groupe; je dis que le groupe sera continu. En effet :

1° Soit Σ une substitution qui change P en P', la distance PP' étant infinitésimale de l'ordre de ε; je dis qu'on pourra écrire

$$\Sigma = Ss,$$

S étant une substitution elliptique dont le cercle double passe par P et s étant une substitution hyperbolique infinitésimale de l'ordre de ε. En effet, la substitution Σ^{-1} changera P' en P. Il existera une substitution hyperbolique infinitésimale qui changera P' en P, puisque les points P' et P sont infiniment voisins. Je l'appelle s^{-1} et je pose

$$\Sigma^{-1} = s^{-1}S^{-1}, \qquad \text{d'où} \qquad \Sigma = Ss.$$

La substitution S n'altérera pas le point P; donc, d'après les principes du paragraphe précédent, ce sera une substitution elliptique dont le cercle double passe par P. C. Q. D. F.

2° et 3° Les principes 2° et 3° de la page 266 subsistent ici, cela est évident.

4° Si S et S_1 sont deux substitutions elliptiques ayant même cercle double, on aura

$$SS_1 = S_1S, \qquad S_1 = S^{-1}S_1S.$$

5° Si S_1 est une substitution elliptique ayant pour cercle double C_1; si C_1' est un cercle, orthogonal au plan des $\xi\eta$, et rencontrant le cercle C_1 en un point P situé au-dessus du plan des $\xi\eta$ sous un angle infiniment petit, on pourra

poser

$$S_1 = S_1'\sigma,$$

S_1' étant une substitution elliptique admettant C_1' pour cercle double et σ étant une substitution elliptique infinitésimale.

Cela posé, nous avons par hypothèse dans le groupe une infinité de transformations $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ qui change P en des points infiniment voisins. On aura

$$\Sigma = Ss, \qquad \Sigma_1 = S_1s_1, \qquad \Sigma_2 = S_2s_2, \qquad \ldots,$$

$s, s_1, \ldots$ seront infinitésimales pendant que $S, S_1, S_2, \ldots$ seront des substitutions elliptiques dont les cercles doubles passeront par P. On aura donc une infinité de substitutions elliptiques dont les cercles doubles passeront par P. Il faut de toute nécessité qu'on puisse trouver parmi elles deux substitutions S et S_1 dont les cercles doubles C et C_1 se coupent sous un angle nul ou infiniment petit. On pourra alors poser

$$S_1 = S_1'\sigma,$$

σ étant infinitésimale ou se réduisant à la substitution identique et S_1' admettant même cercle double C que S de telle façon qu'on ait

$$S_1' = S^{-1}S_1'S.$$

Considérons donc ces deux substitutions S et S_1 et les substitutions correspondantes Σ, Σ_1. La substitution

$$\Sigma\Sigma_1\Sigma^{-1}\Sigma_1^{-1}$$

fera partie du groupe; je dis qu'elle sera infinitésimale. En effet elle peut s'écrire

$$Ss\,S_1s_1s^{-1}S^{-1}s_1^{-1}S_1^{-1}$$

ou bien

$$Ss\,S_1'\sigma s_1s^{-1}S^{-1}s_1^{-1}\sigma^{-1}S_1'^{-1}$$

ou enfin

$$T = Ss\,S^{-1}S_1'\,S\sigma s_1s^{-1}S^{-1}s_1^{-1}\sigma^{-1}S_1'^{-1}.$$

Or en vertu du principe 3° $T_1 = Ss\,S^{-1}$ sera infinitésimale,

» 2° $T_2 = \sigma s_1 s^{-1}$ »

» 3° $T_3 = ST_2S^{-1}$ »

» 2° $T_4 = T_3 s_1^{-1}\sigma^{-1}$ »

» 3° $T_5 = S_1' T_4 S_1'^{-1}$ »

Enfin » 2° $T = T_1T_5$ »

C. Q. F. D.

Ainsi donc, si nous envisageons un groupe discontinu, il sera proprement discontinu pour tout point P situé en dehors du plan des $\xi\eta$. Il résulte de là que toute la partie de l'espace située au-dessus de ce plan sera divisée en une infinité de régions $R_0, R_1, \ldots, R_i, \ldots$; qu'à chacune de ces régions correspondra une des substitutions du groupe; à la région R_i, par exemple, la substitution S_i, et de telle façon que cette substitution S_i change R_0 en R_i. C'est tout à fait la même chose que ce que nous avons observé pour les groupes fuchsiens.

Mais ce que nous nous proposons, c'est d'obtenir des groupes de substitutions imaginaires proprement discontinus même pour les points du plan des $\xi\eta$. Ce sont ceux-là seuls, en effet, qui peuvent être utiles dans la théorie des fonctions.

Eh bien, rappelons-nous ce que nous avons observé pour les groupes fuchsiens. Ces groupes sont tous proprement discontinus pour les valeurs imaginaires de z, de sorte que la partie du plan située au-dessus de l'axe des quantités réelles se trouve divisée en une infinité de polygones $R_0, R_1, \ldots, R_i, \ldots$. Comment voit-on alors si le groupe reste proprement discontinu pour les valeurs réelles de z? Si le polygone R_0 n'a pas de côté de la seconde sorte, c'est-à-dire s'il est tout entier au-dessus de l'axe des quantités réelles, le groupe est improprement discontinu pour les valeurs réelles de z; il est proprement discontinu, au contraire, si R_0 a un côté de la seconde sorte, c'est-à-dire si tout un côté de ce polygone appartient à l'axe des quantités réelles.

C'est la même chose ici; si la région R_0 définie plus haut est tout entière au-dessus du plan des $\xi\eta$, ou n'a avec ce plan qu'un point commun ou une ligne commune, le groupe est improprement discontinu pour les points du plan des $\xi\eta$; il est proprement discontinu, au contraire, si une portion de la surface de la région R_0 appartient à ce plan.

III. — Polygones générateurs.

Considérons un groupe de substitutions imaginaires proprement discontinu, même pour les points du plan des $\xi\eta$.

Nous dirons que c'est un *groupe kleinéen*. Un pareil groupe subdivisera une partie du plan des $\xi\eta$ en une infinité de régions $R_0, R_1, \ldots, R_i, \ldots$, de telle façon qu'à chaque région R_i corresponde une substitution S_i du groupe qui change

R_0 en R_i. Considérons la région R_0 et une autre région quelconque R_i limitrophe de R_0; elles seront séparées par une portion du périmètre de R_0 qui leur servira de frontière commune et que j'appellerai *côté* de R_0. Maintenant un pareil côté pourra être une courbe fermée ou un arc de courbe limité à deux points qui seront des *sommets* de R_0. Soit C un quelconque des côtés de R_0, il y aura toujours un autre côté C′ de R_0 tel qu'une des substitutions du groupe change C en C′. Les côtés C et C′ seront dits *conjugués*.

La subdivision du plan ou d'une partie du plan en une infinité de régions R peut se faire d'une infinité de manières (*cf.* § IV et IX du *Mémoire sur les groupes fuchsiens*). Commençons par donner quelques définitions. La région R_0 s'appellera *polygone générateur du groupe;* je dirai que deux régions R et R′ sont équivalentes par rapport à un groupe G quand on peut passer de l'une à l'autre de la façon suivante. Décomposons R en un certain nombre de parties $r'_1, r'_2, \ldots, r'_p$. Soit r''_i la transformée de r'_i par une substitution S_i du groupe G. L'ensemble des régions partielles r''_i devra former la nouvelle région R″. Il est clair que si R_0 est un polygone générateur du groupe G, on pourra prendre aussi pour polygone générateur de ce groupe toute région équivalente à R_0. Supposons, en particulier, qu'on retranche de R_0 une portion quelconque P_0 de sa surface et qu'on ajoute à R_0 la surface P'_0 transformée de P_0 par une quelconque des substitutions du groupe. On obtient ainsi une région $R'_0 = R_0 + P'_0 - P_0$ équivalente à R_0, et l'on pourra, par conséquent, remplacer le polygone générateur R_0 par le polygone R'_0.

Nous pouvons profiter de cette circonstance pour simplifier la région R_0. En effet, soient C un côté quelconque de R_0 et C′ son conjugué. Si C est un côté fermé, il en est de même de C′; si, au contraire, C est un côté ouvert ab, C′ sera aussi un côté ouvert $a'b'$. Dans le premier cas, appelons K un cercle quelconque; dans le second cas, K sera un arc de cercle limité aux deux sommets a et b du côté C. Soit maintenant K′ le transformé de K par celle des substitutions du groupe qui change C en C′. Dans le premier cas, K′ sera, comme K, un cercle fermé; dans le second cas, K′ sera un arc de cercle limité aux deux sommets a' et b' du côté C′. Appelons P_0 la portion du plan comprise entre K′ et C′; P'_0 la portion comprise entre K′ et C′. P'_0 sera la transformée de P_0 par une des substitutions du groupe. Nous pourrons donc remplacer la région R_0 par $R'_0 = R_0 - P_0 + P'_0$. Dans la nouvelle région R'_0, les côtés C et C′ sont remplacés par les côtés K et K′ qui sont des arcs de cercle.

Il est bon de remarquer que la région R'_0 n'est pas ainsi entièrement définie,

car le cercle K n'est pas absolument déterminé par les conditions que nous lui avons imposées.

En opérant de même sur chacun des côtés de R_0, on finira par arriver à remplacer R_0 par une région analogue dont tous les côtés seront des cercles ou des arcs de cercle.

On peut rencontrer ici la même difficulté que nous avons observée dans le paragraphe IV du *Mémoire sur les groupes fuchsiens*. Il peut se faire que la région P_0, telle que nous l'avons définie, ne fasse pas tout entière partie de R_0. Dans ces conditions, on arriverait à une région R'_0 concave, au sens donné à ce mot dans le paragraphe cité; on tournerait la difficulté comme dans ce paragraphe.

Nous pouvons donc toujours supposer que la région R_0 est un polygone limité par des cercles et des arcs de cercle; mais il peut se faire que ce polygone ne soit pas simplement connexe, mais présente une connexion d'un ordre plus élevé.

Reportons-nous, en effet, au cas des groupes fuchsiens, à ceux de la troisième famille, par exemple. Le polygone R_0, tel que nous l'avons défini dans le Mémoire des *Acta mathematica*, t. I (1), est simplement connexe et limité par des côtés de la première et de la deuxième sorte; mais si l'on adjoint au polygone R_0 le polygone R'_0 symétrique de R_0 par rapport à l'axe des quantités réelles, la région totale $R_0 + R'_0$, qui est l'analogue de la région R_0 étudiée ici, sera multiplement connexe.

Nous serons conduits, ici comme dans le paragraphe V du *Mémoire sur les groupes fuchsiens*, à distribuer en cycles les sommets de R_0; mais comme nous n'avons ici rien d'analogue aux côtés de la deuxième sorte, nous n'aurons que des cycles *fermés* et pas de cycles *ouverts*. Soit A_0 un sommet quelconque de R_0; soient $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ les sommets qui appartiennent au même cycle que A_0, écrits dans l'ordre où on les rencontre en appliquant la règle du paragraphe cité. Décrivons autour de A_0 un contour infiniment petit et supposons qu'en suivant ce contour on rencontre successivement les polygones R_0, $R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}, R_n, \ldots$. Si $i < n$, le sommet A_0 considéré comme appartenant à R_i sera l'homologue de A_i; considéré comme appartenant à R_n, il sera l'homologue de A_0. Il suit de là que la substitution qui change R_0 en R_n admet A_0 pour point double. Elle peut être d'ailleurs elliptique, parabolique

(1) *Théorie des groupes fuchsiens*, ce Tome, p. 129.

ou hyperbolique, mais non loxodromique. Cette quatrième hypothèse doit être rejetée (1).

En effet, soit $K = \rho e^{i\omega}$ le multiplicateur de notre substitution loxodromique; soit p un nombre entier assez grand pour que $p\omega > 2\pi$. Désignons par Σ_0 l'ensemble des polygones $R_0, R_1, \ldots, R_{n-1}$; par Σ_1 l'ensemble des polygones $R_n, R_{n+1}, \ldots, R_{2n-1}$, c'est-à-dire la transformée de Σ_0 par notre substitution loxodromique; soient ensuite Σ_2 la transformée de Σ_1, Σ_3 celle de Σ_2, etc. Il est aisé de voir que Σ_p recouvrira partiellement l'une des régions $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_{p-1}$, ce qui est absurde puisque le groupe est supposé proprement discontinu.

Reste à examiner les trois premières hypothèses.

Dans le premier cas, nous dirons que le cycle est elliptique (2); la somme des angles du cycle devra être une partie aliquote de 2π.

Dans le deuxième cas, le cycle sera parabolique; tous les angles du cycle seront nuls.

Dans le troisième cas, nous aurons un cycle hyperbolique; tous les angles du cycle seront encore nuls. Nous verrons dans le paragraphe suivant qu'on peut toujours remplacer le polygone R_0 par un autre équivalent et n'admettant pas de cycle hyperbolique (3).

Je dis maintenant qu'on peut toujours supposer qu'un cycle donné se compose d'un seul sommet. En effet, reprenons le polygone R_0, le sommet A_0 de ce polygone et les sommets $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ qui appartiennent au même cycle. Considérons aussi le contour infiniment petit que nous avons décrit autour de A_0 et les polygones $R_1, R_2, \ldots$ qu'on rencontre successivement en suivant ce contour. Soit S_i la substitution qui change R_0 en R_i. Décomposons

(1) La troisième hypothèse doit aussi être rejetée. Pour la même raison que dans le cas d'un groupe fuchsien, le polygone R_0 ne peut pas admettre de cycle hyperbolique. *Voir* la Note page 134. N. E. N.

(2) Les cycles que nous appelons ici *elliptiques*, *paraboliques* et *hyperboliques* sont analogues respectivement aux cycles de la première catégorie, de la troisième sous-catégorie et de la quatrième sous-catégorie du Mémoire sur les groupes fuchsiens.

(3) Nous avons vu déjà aux paragraphes IX et XI du *Mémoire sur les groupes fuchsiens* et au paragraphe II du *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes*, que tout groupe du deuxième ordre de la deuxième, de la quatrième, de la sixième ou de la septième famille, est identique à un groupe de la troisième ou de la cinquième famille, ou à un groupe du premier ordre de la sixième ou de la septième famille. En d'autres termes, si le polygone générateur d'un groupe fuchsien admet un cycle de la quatrième sous-catégorie, on peut toujours, par le procédé du paragraphe IX, le remplacer par un autre polygone n'admettant pas de cycle de cette sous-catégorie. Il en est de même ici.

le polygone R_0 en n polygones partiels $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$, de telle façon que le polygone partiel r_i admette le sommet A_i et n'admette aucun des autres sommets $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$. Soit maintenant r'_i le transformé de r_i par S_i. Alors r'_0 ne différera pas de r_0; l'ensemble des régions partielles $r'_0, r'_1, \ldots, r'_{n-1}$ formera un polygone R'_0 qui sera équivalent à R_0 et qui pourra, par conséquent, servir de polygone générateur pour notre groupe. Mais R'_0 admet le sommet A_0, et de telle façon que le cycle dont fait partie A_0 ne se compose que de ce seul sommet.

IV. — Polyèdres générateurs.

Considérons maintenant la moitié de l'espace située au-dessus du plan des $\xi\eta$ et la subdivision de cette portion de l'espace en une infinité de régions P_0, $P_1, \ldots, P_i, \ldots$, telles que la substitution S_i de notre groupe change P_0 en P_i.

Considérons la région P_0 et une région quelconque P_i limitrophe de P_0; elles seront séparées par une portion de la surface de P_0 que j'appellerai une *face* de P_0; je dirai que ce sera une face de la première sorte. Si une portion du plan des $\xi\eta$ fait partie de la superficie de P_0, ce sera une face de la deuxième sorte. Ces dénominations sont tout à fait analogues à celles que nous avons employées dans la théorie des groupes fuchsiens. Deux faces limitrophes de P_0 seront séparées par une *arête*. Cette arête sera de la première sorte si elle sépare deux faces de la première sorte, et de la deuxième sorte si elle sépare une face de la première sorte et une de la deuxième sorte. Les faces de la première sorte seront conjuguées deux à deux, de telle façon que chacune de ces faces soit changée en sa conjuguée par l'une des substitutions du groupe. Il résulte de là que deux faces conjuguées sont congruentes.

De même que les faces se répartissent en paires, de même les arêtes se répartissent en cycles à la façon des sommets des polygones générateurs. Soit A_0 une arête quelconque de la première sorte; voici comment on trouvera les arêtes du même cycle. Soient F_0 l'une des faces que sépare l'arête A_0, F'_0 sa conjuguée; les faces F_0 et F'_0 sont congruentes. Soit A_1 celle des arêtes de F'_0 qui est homologue de A_0; elle séparera la face de F'_0 d'une autre face F_1. Nous opérerons sur la face F_1 et sur l'arête A_1 comme nous avons opéré sur la face F_0 et l'arête A_0. Nous obtiendrons ainsi une suite des faces $F_0, F_1, F_2, F_3, \ldots$ et une suite d'arêtes $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots$, et nous nous arrêterons quand

nous retomberons sur l'arête A_0. Toutes les arêtes ainsi obtenues feront partie d'un même cycle.

Soient $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ ces arêtes que je suppose au nombre de n. Supposons qu'autour de l'arête A_0 nous décrivions un contour infiniment petit; en décrivant ce contour, on traversera successivement q régions $P_0, P_1, \ldots, P_{q-1}$. Si $i < n$, l'arête A_0 considérée comme appartenant à P_i sera l'homologue de A_i; considérée comme appartenant à P_n, elle sera l'homologue de A_0. Ainsi, la substitution qui change P_0 en P_n n'altère pas A_0. Il suit de là :

1° Que $\frac{q}{n}$ est un nombre entier;

2° Que la substitution qui change P_0 en P_n est elliptique et a pour multiplicateur $e^{2i\pi\frac{n}{q}}$;

3° Que *l'arête* A_0 *est un cercle symétrique par rapport au plan des* $\xi\eta$;

4° Que la somme des dièdres relatifs aux différentes arêtes du cycle est une partie aliquote de 2π.

Ainsi, toutes les arêtes de la première sorte sont des circonférences dont le plan est perpendiculaire au plan des $\xi\eta$ et dont le centre est dans ce plan.

Les extrémités des arêtes s'appelleront des *sommets*. Parmi les sommets nous distinguerons :

1° Ceux qui sont en dehors du plan des $\xi\eta$, auxquels aboutissent trois ou plusieurs arêtes de la première sorte;

2° Ceux qui sont sur le plan des $\xi\eta$, auxquels aboutiront une ou plusieurs arêtes de la première sorte et deux ou plusieurs arêtes de la deuxième sorte;

3° Il faut ajouter aussi les *sommets isolés*. Si deux faces sont tangentes entre elles, le point de contact peut être en effet regardé comme un sommet et cependant il n'appartient à aucune arête de la première sorte.

Il est clair qu'on peut remplacer, comme dans le paragraphe précédent, la région P_0 par toute autre région P'_0 *équivalente*. Je dis qu'on pourra toujours s'arranger de telle façon que P'_0 soit un polyèdre limité par des sphères ou par des portions de sphères. Toutes les faces de la première sorte seront des sphères ou portions de sphères ayant leur centre dans le plan des $\xi\eta$; toutes les arêtes seront des circonférences ou des arcs de cercle.

Soient, en effet, F une face quelconque de la première sorte, F′ sa conjuguée; S la substitution qui change F en F′. Plusieurs cas sont possibles :

1° Ou bien la face F est limitée par une arête de la deuxième sorte, et cette arête est une courbe fermée. On appellera alors F_1 une demi-sphère quelconque ayant son centre dans le plan des $\xi\eta$, et Q_0 la région limitée par F et F_1; la substitution S changera alors F_1 en une autre demi-sphère F_1' et Q_0 en Q_0', région limitée par F′ et F_1'. Les régions P_0 et $P_0' = P_0 - Q_0 + Q_0'$ seront alors équivalentes;

2° Ou bien la face F est limitée par deux arêtes, dont une de la première sorte et admet deux sommets. On raisonnera de la même façon; on devra seulement s'astreindre à faire passer la sphère F_1 par l'arête de la première sorte, qui est une circonférence d'après ce qu'on a vu plus haut;

3° Ou bien la face F admet plusieurs arêtes de la première sorte situées sur une même sphère Σ qui a son centre dans le plan des $\xi\eta$. Dans ce cas la sphère F_1 devra être la sphère Σ;

4° Ou bien enfin les différentes arêtes de la première sorte de la face F ne sont pas sur une même sphère ayant son centre dans le plan des $\xi\eta$. Dans ce cas, nous pourrons partager la face F en plusieurs autres f, f', f'', ... Je supposerai, par exemple, que la face partielle f n'est contiguë qu'à la face f', que f' n'est contiguë qu'à f et à f''; f'' à f' et à f''', etc. Je supposerai que la face partielle f est séparée de la face f' par une ligne α', dont les extrémités sont β' et γ'; que la face f' est séparée de la face f'' par une ligne α'' dont les extrémités sont β'' et γ'', etc. Je supposerai que toutes les arêtes de la première sorte contenues dans f et les sommets β' et γ' sont sur une même sphère f_1 ayant son centre dans le plan des $\xi\eta$; que les arêtes de la première sorte contenues dans f' et les sommets β', γ', β'', γ'' sont sur une même sphère f_1' ayant son centre dans le plan des $\xi\eta$, ..., et ainsi de suite. On envisagera la portion de f_1 limitée par les arêtes de la première sorte de f et par l'intersection de f_1 et de f_1'; la portion de f_1' limitée par les arêtes de la première sorte de f' et par les intersections de f_1' avec f_1 et f_1'', etc. L'ensemble de ces portions de surfaces sphériques formera la nouvelle face F_1 sur laquelle on raisonnera comme plus haut.

Dans tous les cas on aura remplacé la région P_0 par une autre équivalente, mais où les faces F et F′ seront remplacées par les faces F_1 et F_1' formées de portions de sphères ayant leur centre dans le plan des $\xi\eta$. En opérant de même

sur toutes les faces de la première sorte de la région P_0, on remplacera cette région par une autre équivalente dont toutes les faces de la première sorte seront formées de pareilles portions de surfaces sphériques.

En résumé, nous pourrons toujours supposer que notre région P_0 est un polyèdre dont toutes les faces de la première sorte sont des portions de sphères ayant leurs centres dans le plan des $\xi\eta$. Nous l'appellerons *polyèdre générateur du groupe*.

On voit aisément qu'un pareil polyèdre ne peut avoir de *sommet isolé* en dehors du plan des $\xi\eta$.

Les faces de la deuxième sorte du polyèdre générateur P_0 seront des polygones limités par des arcs de cercle, et ces arcs de cercle seront les traces des faces de la première sorte sur le plan des $\xi\eta$. Ces polygones peuvent être regardés comme les polygones générateurs d'un groupe kleinéen.

Supposons que notre polyèdre P_0 ait n faces de la deuxième sorte F_0^1, F_0^2, ..., F_0^n; le polyèdre homologue P_i aura aussi n faces de la deuxième sorte F_i^1, F_i^2, ..., F_i^n. Si l'on excepte certains points ou certaines lignes singulières, tout point du plan des $\xi\eta$ appartient à l'une des faces F_i^k de l'un des polyèdres P_i, et il ne peut d'ailleurs appartenir qu'à l'une d'elles, puisque aucun point de l'espace n'appartient à plus d'un polyèdre P_i.

Le groupe est donc proprement discontinu, même pour les points du plan des $\xi\eta$, si l'on excepte toujours les points et les lignes singulières dont il a été question plus haut.

Le groupe considéré est donc kleinéen.

Le plan des $\xi\eta$ sera partagé en n régions R^1, R^2, ..., R^n; la région R^k se subdivise elle-même en une infinité de polygones F_0^k, F_1^k, F_2^k, ..., F_i^k, ... telles que la substitution S_i change F_0^k en F_i^k.

Ainsi, on peut prendre, pour polygone générateur du groupe, l'une quelconque des faces de la deuxième sorte du polyèdre générateur, c'est-à-dire un des polygones ayant pour côtés les cercles qui ont même centre et même rayon que les sphères qui forment les faces de la première sorte de ce polyèdre.

La réciproque n'est pas vraie. Considérons un groupe kleinéen quelconque, et soit R_0 l'un des polygones que l'on peut choisir pour son polygone générateur; construisons les sphères qui ont même centre et même rayon que les arcs de cercle qui servent de côtés à ce polygone et envisageons le polyèdre P_0 limité par ces sphères. En général, ce ne sera pas un polyèdre générateur du

groupe. En effet, dans un polyèdre générateur, deux faces conjuguées doivent être congruentes. Or, considérons un côté quelconque bc de R_0, les côtés adjacents ab et cd, le côté conjugué $b'c'$, les côtés adjacents $a'b'$ et $c'd'$. Construisons les sphères S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 correspondant respectivement à ces six côtés. A chaque côté de R_0 correspondra une face de P_0. Au côté bc correspondra la portion de la surface de S_1 qui est limitée par l'intersection de cette sphère avec S_2 et S_3; au côté $b'c'$ correspondra la portion de la surface de S_4 qui est limitée par l'intersection de cette sphère avec S_5 et S_6. Ce devrait être là deux faces conjuguées de P_0; or, ces deux faces ne seront pas en général congruentes.

Pour que le polyèdre P_0 soit un polyèdre générateur du groupe, il faut et il suffit que ses faces conjuguées soient congruentes, et pour cela, voici quelle est la condition nécessaire et suffisante :

Soient encore bc un côté de R_0, ab et cd les côtés adjacents, $b'c'$ le côté conjugué, $a'b'$ et $c'd'$ les côtés adjacents. Prolongeons les cercles dont font partie ces six côtés. Soit b_1 le second point d'intersection des cercles ab et bc, et de même c_1, b'_1, c'_1 les intersections respectives de bc et de cd; de $a'b'$ et de $b'c'$; de $b'c'$ et de $c'd'$. Le rapport anharmonique des quatre points b, c, b_1, c_1 doit être égal à celui des quatre points b', c', b'_1, c'_1.

Parmi les polygones équivalents à R_0, qui sont en nombre infini et qui peuvent être choisis comme polygones générateurs, il y en a toujours qui remplissent cette condition, puisque tout groupe kleinéen est proprement discontinu pour les points non situés sur le plan des $\xi\eta$ et admet par conséquent un polyèdre générateur. Nous supposerons toujours que le polygone R_0 a été choisi de façon à satisfaire à cette condition.

A chaque côté de R_0 correspondra alors une face de P_0; à deux côtés conjugués correspondront deux faces conjuguées. A chaque sommet de R_0 appartenant à un cycle elliptique correspondra une arête de P_0 et aux divers sommets d'un même cycle, correspondront les diverses arêtes d'un même cycle; à un sommet de R_0 appartenant à un cycle parabolique ou hyperbolique correspondra un sommet isolé de P_0. On voit ainsi que les sommets isolés de P_0 se répartissent en cycles.

Je dis maintenant qu'on peut toujours supposer que R_0 et par conséquent P_0 n'admettent pas de cycle hyperbolique. En effet, supposons que P_0 admette un sommet isolé appartenant à un cycle hyperbolique, je dis qu'on pourra remplacer ce polyèdre par un autre équivalent n'admettant pas de cycle hyperbolique. En effet, d'après ce qu'on a vu à la fin du paragraphe précédent, on peut toujours supposer que ce cycle hyperbolique se compose d'un seul sommet A.

Le sommet A est un sommet isolé de P_0, c'est-à-dire qu'il est le point de contact de deux faces de la première sorte de P_0, tangentes l'une à l'autre, et que j'appellerai F et F'. Ces deux faces sont conjuguées; car si elles ne l'étaient pas, le cycle dont fait partie A devrait contenir encore d'autres sommets. Une des substitutions du groupe, que j'appelle S, changera F en F', et elle sera hyperbolique, par hypothèse. La face F ne sera limitée par aucune arête, ou bien elle le sera par une seule arête, ou bien par plus d'une arête. Je dis d'abord qu'on peut toujours supposer que le troisième cas ne se présentera pas. En effet, s'il se présentait, on tracerait sur la face F une demi-circonférence, dont le plan devrait être perpendiculaire au plan des $\xi\eta$, et qui devrait être assez petite pour être tout entière contenue dans la face F; cela est toujours possible. Cette demi-circonférence partagerait la face F en deux autres F_1 et F_2; à F_1 contiendrait par exemple le sommet A; la face F' congruente à F se diviserait de même en deux autres F'_1 et F'_2 congruentes respectivement à F_1 et à F_2. Le sommet A fera alors partie de deux faces F_1 et F'_1 qui ne seront limitées que par une seule arête.

Supposons donc que la face F admette au plus une arête. Construisons une sphère Φ peu différente de F. Si la face F admet une arête, j'assujettirai la sphère Φ à passer par cette arête. La substitution hyperbolique S changera Φ en une autre sphère Φ', et l'on aura toujours pu choisir Φ de telle façon que ces deux sphères ne se coupent ni ne se touchent. Il suffit pour cela que la sphère Φ diffère suffisamment peu de F et que, si A et B sont les deux points doubles de la substitution S, ces deux points soient l'un intérieur, l'autre extérieur à Φ. Soit p_0 la portion de l'espace comprise entre Φ et F, p'_0 la portion comprise entre Φ' et F'. La substitution S changera p_0 en p'_0. Le polyèdre $P'_0 = P_0 - p_0 + p'_0$ est donc équivalent à P_0; donc il peut servir de polyèdre générateur. Mais il ne possède plus le sommet hyperbolique A, puisque les sphères Φ et Φ' ne se coupent pas.

Nous pouvons donc toujours supposer que notre polygone R_0 et notre polyèdre P_0 ne présentent pas de cycle hyperbolique; c'est ce que nous ferons désormais (1).

(1) Cette démonstration n'est pas exacte. Le polyèdre P'_0 n'est pas équivalent au polyèdre P_0, mais à un domaine plus compliqué, formé : 1° du polyèdre P_0; 2° d'un segment de la sphère

V. — Existence des groupes kleinéens.

Supposons un polyèdre générateur P_0 satisfaisant aux conditions énoncées dans le paragraphe précédent : ses faces conjuguées sont congruentes, ses arêtes de la première sorte se répartissent en cycles elliptiques, de telle façon que la somme des dièdres correspondant aux arêtes d'un même cycle soit une partie aliquote de 2π. Le groupe correspondant à ce polyèdre est entièrement défini. Il reste à démontrer que ce groupe est discontinu, c'est-à-dire que les polyèdres transformés de P_0 remplissent toute la partie de l'espace située au-dessus du plan des $\xi\eta$ et ne se recouvrent pas mutuellement.

La démonstration est tout à fait la même que dans le cas des groupes fuchsiens.

Soient en effet A un point quelconque intérieur à P_0, B un point situé au-dessus du plan des $\xi\eta$. Joignons A et B par un arc de courbe AMB ne coupant pas ce plan. Cet arc sortira du polyèdre P_0 par une face de la première sorte, on pourra construire le polyèdre P_1, limitrophe de P_0 le long de cette face; l'arc AMB sortira de P_1 par une certaine face, on construira le polyèdre P_2 limitrophe de P_1 le long de cette face, et ainsi de suite.

Voici ce que nous avons à démontrer :

1° Qu'après un nombre fini d'opérations on arrive à un polyèdre P_n à l'intérieur duquel se trouve le point B;

2° Que si le point B se confond avec le point A, de telle façon que l'arc AMB se réduise à un contour fermé AMA, le polyèdre P_n se confond avec P_0.

Le premier point s'établit comme dans la théorie des groupes fuchsiens.

La L de l'arc AMB sera une longueur finie L_1. Je dis que cet arc ne pourra rencontrer qu'un nombre fini de polyèdres P, ou, ce qui revient au même, un

ayant AB pour diamètre et coupant orthogonalement le plan des $\xi\eta$; 3° d'un polyèdre situé à l'intérieur de cette sphère et ayant en A un point de contact avec le polyèdre P_0.

La démonstration est en défaut parce que le domaine p_2 contient *une infinité* de points homologues entre eux par la substitution hyperbolique, et les principes de la page 271 ne s'appliquent évidemment pas dans ce cas.

On en conclut qu'il existe seulement des cycles elliptiques et des cycles paraboliques.

N. E. N.

nombre fini de faces F de la première sorte appartenant à ces polyèdres. En effet, on établit aisément les lemmes suivants :

I. *On peut trouver un nombre entier ν assez grand pour que ν polyèdres* P *quelconques et ν faces* F *quelconques ne puissent avoir d'autre point commun qu'un sommet parabolique.*

II. *Si ν faces n'ont pas de sommet parabolique commun et n'ont par conséquent aucun point commun, et si un arc de courbe traverse ces ν faces, la* L *de cet arc est supérieure à une certaine limite λ.*

III. *Tout arc qui ne rencontre pas le plan des $\xi\eta$, ne peut traverser qu'un nombre fini de faces* F *ayant un sommet parabolique commun.*

(*Voir* paragraphes I et VI du Mémoire sur les groupes fuchsiens.)

Il résulte de là que, quand l'arc AMB aura traversé $\frac{\nu L_1}{\lambda}$ faces F, il ne pourra plus traverser que des faces ayant un sommet parabolique commun, et, en vertu du lemme III, il n'en traversera qu'un nombre fini.

Le premier point une fois démontré, le second s'établit sans peine. En effet, on voit immédiatement qu'il suffit de le démontrer pour un contour AMA infiniment petit. Or le théorème est évident pour un pareil contour, soit qu'il ne tourne pas autour d'une arête de la première sorte, soit même qu'il tourne autour d'une pareille arête, puisque, par hypothèse, cette arête fait partie d'un cycle dont la somme des dièdres est une partie aliquote de 2π.

Pour les détails de la démonstration je renverrai au paragraphe VI du Mémoire sur les groupes fuchsiens.

Ainsi les polyèdres P_i ne se recouvrent pas mutuellement; si P_0 admet une face de la deuxième sorte R_0 dont les transformées sont les faces R_i des polyèdres P_i, ces faces R_i ne se recouvrent pas non plus mutuellement. Ainsi notre *polygone générateur et ses transformés ne se recouvrent pas.*

C'est ce point que je voulais établir, et pour y parvenir j'ai eu recours à un artifice dont je ne pouvais guère me dispenser dans le cas général : j'ai dû passer du plan à l'espace et des polygones R aux polyèdres P. Mais si ce détour est nécessaire dans le cas le plus général, on peut s'en affranchir dans un grand nombre de cas particuliers; c'est ce que nous verrons plus loin.

VI. — Classification.

Parmi les groupes kleinéens, il en est qui doivent attirer particulièrement l'attention à cause de leur importance au point de vue des applications. Ce sont ceux dont les groupes fuchsiens sont des cas particuliers, de telle sorte qu'on peut passer d'un pareil groupe kleinéen à un groupe fuchsien en faisant varier d'une *façon continue* certains paramètres. Ce seront les groupes de la première espèce.

Ceux de la deuxième espèce seront ceux qui ne jouiront pas de cette propriété.

On peut classer aussi les groupes kleinéens en genres. Nous définirons le genre du polygone générateur R_0 comme dans le paragraphe VIII du Mémoire sur les groupes fuchsiens et le genre d'un groupe sera celui de son polygone générateur.

Voici maintenant quelque chose d'analogue à la classification en familles.

Nous classerons d'abord les polyèdres générateurs d'après le nombre de leurs faces de la deuxième sorte. C'est là, en effet, un point fort important; car si un polyèdre P_0 a n faces de la deuxième sorte, le plan des $\xi\eta$ se trouve divisé en n parties, et chacune de ces parties en une infinité de polygones R, de telle façon qu'à chaque substitution du groupe corresponde un polygone R et un seul.

Nous classerons ensuite les polyèdres qui admettent un même nombre de faces de la deuxième sorte en familles, selon qu'ils admettent ou n'admettent pas des cycles elliptiques, ou des cycles paraboliques.

Donnons le détail de cette classification pour les groupes les plus importants qui sont ceux de la première espèce, en conservant aux familles les mêmes numéros que dans la théorie des groupes fuchsiens.

1° Polyèdres admettant deux faces de la deuxième sorte :

Première famille. — Admettent des cycles elliptiques.
Deuxième famille. — Admettent des cycles paraboliques.
Sixième famille. — Admettent des cycles elliptiques et paraboliques.

2° Polyèdres admettant une face de la deuxième sorte :

Troisième famille. — Polyèdres dont toutes les faces de la première sorte sont des demi-sphères complètes, ne se coupant ni ne se touchant mutuellement, et qui n'admettent ni cycle elliptique, ni cycle parabolique.

Quatrième famille. — Admettent des cycles paraboliques.
Cinquième famille. — Admettent des cycles elliptiques.
Septième famille. — Admettent des cycles elliptiques et paraboliques.

VII. — Troisième famille.

Voici quel est le mode de génération des groupes de la troisième famille:

Considérons $2n$ cercles qui ne se coupent ni ne se touchent; je supposerai, pour fixer les idées, que ces $2n$ cercles soient tous extérieurs les uns aux autres. Le polygone R_0 sera la portion du plan qui est extérieure à la fois à tous ces cercles. J'appelle ces cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n; C'_1, C'_2, \ldots, C'_n$. Je suppose que les cercles C_i et C'_i soient conjugués. Soit S_i une substitution qui change C_i en C'_i, et de telle façon que l'extérieur de C_i se change dans l'intérieur de C'_i. S_i est alors une substitution hyperbolique ou loxodromique dont un point double est intérieur à C_i et l'autre à C'_i.

Le groupe dérivé des substitutions S_i est alors un groupe kleinéen de la troisième famille.

Pour démontrer que ce groupe est discontinu, il n'est pas nécessaire d'avoir recours à la marche détournée du paragraphe V. En effet, construisons le polygone R_i limitrophe de R_0 le long de C'_i, c'est-à-dire le transformé de R_0 par la substitution S_i; il sera tout entier à l'intérieur de C_i. L'ensemble des polygones R_0 et R_i se compose alors de la partie du plan extérieure à la fois à $4n-2$ cercles (extérieurs les uns aux autres) qui servent de côtés à ces deux polygones. Soit C_k l'un de ces cercles; si l'on veut construire le polygone R_k limitrophe de R_0 ou de R_i le long de C_k, ce polygone sera tout entier intérieur à C_k, et ainsi de suite. On voit aisément, en continuant de la sorte, que les polygones ainsi construits ne peuvent se recouvrir mutuellement, et par conséquent que le groupe est discontinu.

Quelles sont maintenant les conditions imposées aux substitutions S_i? Ces n substitutions doivent être telles qu'on puisse trouver n cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n$, de telle façon que ces n cercles et leurs transformés respectifs $C'_1, C'_2, \ldots, C'_n$ soient tous extérieurs les uns aux autres. Ce ne sont là que des conditions d'inégalité; ainsi, le groupe dérivé de n substitutions est dis-

continu, pourvu que les coefficients de ces substitutions satisfassent à certaines inégalités.

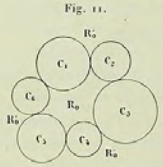
Parmi les groupes de la troisième famille, il en est qui méritent une mention particulière. On peut supposer que le polygone R_0 est symétrique par rapport à un certain cercle C_{n+1}, de telle façon que les cercles conjugués C_i et C'_i soient symétriques l'un de l'autre, et que toutes les substitutions du groupe puissent s'obtenir en combinant les inversions par rapport aux cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n, C_{n+1}$. Nous dirons alors que le groupe est symétrique.

VIII. — Deuxième famille.

Supposons que $2n$ cercles $C_1, C_2, \ldots, C_{2n}$ soient situés de telle sorte : 1° qu'ils soient tous extérieurs les uns aux autres; 2° que le cercle C_i touche extérieurement les cercles C_{i-1} et C_{i+1}; 3° que le cercle C_{2n} touche extérieurement les cercles C_{2n-1} et C_1. Appelons A_i le point de contact des cercles C_{i-1} et C_i et A_1 le point de contact des cercles C_{2n} et C_1. Le plan se trouve divisé en trois parties : 1° le polygone R_0 extérieur à chacun des cercles C et intérieur à la figure formée par l'ensemble de ces cercles; ce sera notre polygone générateur; 2° le polygone R'_0 extérieur à la fois à tous ces cercles et à la figure formée par leur ensemble; 3° enfin l'intérieur des divers cercles C.

Si nous formons le polyèdre générateur P_0, ce polyèdre présentera $2n$ faces de la première sorte formées par les surfaces des sphères qui ont même centre et même

Fig. 11.



rayon que les cercles C; deux faces de la deuxième sorte qui seront les polygones R_0 et R'_0 et $2n$ sommets isolés $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$. Je supposerai que les faces C_i et C_{2n+1-i} sont conjuguées et que le polyèdre admet $n+1$ cycles paraboliques, formés respectivement des sommets A_1; A_2 et A_{2n}; ...; A_i

et A_{2n+2-i}; ...; A_n et A_{n+2}; A_{n+1}. Cela suppose que nous avons entre les sommets A la relation

$$(A_2-A_1)(A_4-A_3)\ldots(A_{2n}-A_{2n-1}) = -(A_3-A_2)(A_5-A_4)\ldots(A_1-A_{2n}).$$

Ici, comme dans le paragraphe précédent, la discontinuité du groupe peut se démontrer directement, sans qu'il soit besoin de recourir à l'artifice du paragraphe V. On voit que le plan se décompose en deux domaines D et D'; le premier est recouvert par le polygone R_0 et ses transformés, le second par le polygone R'_0 et ses transformés. Ces deux domaines sont séparés par une ligne L, si l'on peut appeler cela une ligne.

Supposons que l'on ait construit un certain nombre de polygones R_0, $R_1, \ldots, R_n$ et les polygones correspondants $R'_0, R'_1, \ldots, R'_n$. On sera certain : 1° que tout point faisant partie de l'un des polygones R appartiendra au domaine D; 2° que tout point faisant partie de l'un des polygones R' appartiendra au domaine D'; 3° que tout sommet de l'un des polygones R appartient à la ligne L.

Les sommets des divers polygones R forment *eine unendliche Punktmenge* (1) P, et pour obtenir la ligne L, il faut ajouter à cette *Punktmenge* son *erste Ableitung* P'. On voit que la ligne L est *eine perfecte und zusammenhängende Punktmenge*. C'est dans ce sens que c'est une ligne. Mais nous allons voir qu'elle ne jouit pas de toutes les propriétés que nous sommes habitués à attribuer aux lignes.

Cherchons d'abord si cette ligne possède une tangente. A ce point de vue nous devons distinguer les points de la *Punktmenge* P et ceux qui appartiennent à son *Ableitung* P' sans appartenir à P. Envisageons d'abord un point de P; je dis qu'en ce point il y aura une tangente. D'abord nous pouvons supposer que ce point est un sommet de R_0, car rien ne distingue R_0 des autres polygones R_i; nous pouvons supposer que ce point est précisément A_1, car ce qui distingue A_1 des autres sommets de R_0, c'est que le cycle dont fait partie A_1 ne contient pas d'autre sommet; or nous avons vu à la fin du paragraphe III que l'on peut toujours supposer qu'un cycle donné ne se compose que d'un seul sommet. Le groupe envisagé contiendra alors une certaine substitution parabo-

(1) Pour le sens précis des diverses expressions allemandes que je vais employer, *voir* G. CANTOR : *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*. Leipzig, Teubner, 1883. *Voir* aussi la traduction française de ce Mémoire : *Acta mathematica*, t. 2, p. 381-408.

lique S qui aura A_1 pour point double. Soit

$$\left(\frac{1}{z-A_1}, \frac{1}{z-A_1}+h\right)$$

cette substitution. Soit N un tel point que

$$\arg(N-A_1) = -\arg h.$$

Joignons A_1N, je dis que A_1N sera tangente à notre ligne L. Voici ce que j'entends par là. Supposons que ρ et ω soient les coordonnées polaires d'un point de L en prenant A_1 pour pôle et A_1N pour axe polaire; je dis que, quand ρ tendra vers zéro, ω tendra vers zéro, de telle façon que A_1N sera la limite d'une sécante A_1B_1 de la ligne L, lorsque le point B_1 se rapprochera indéfiniment de A_1.

Pour démontrer cela, je vais construire deux cercles K et K′ se touchant extérieurement en A_1 et tangents tous deux à A_1N. Je choisirai le cercle K de telle façon qu'il coupe les côtés A_1A_2 et A_1A_{2n} du polygone R_0 et ne coupe aucun autre côté de ce polygone. De même, le cercle K′ devra couper les côtés A_1A_2 et A_1A_{2n} du polygone R'_0 et ne couper aucun autre côté de ce polygone. Soient r_0 la partie de R_0 qui est intérieure à K et r'_0 la partie de R'_0 qui est intérieure à K′. Il est clair que les transformés successifs de r_0 par les puissances positives et négatives de la substitution S rempliront tout ce cercle K, de sorte que ce cercle fait tout entier partie du domaine D. De même le cercle K′ fera tout entier partie du domaine D′. Il en résulte que la ligne L est tout entière dans la portion du plan extérieure à la fois aux deux cercles K et K′. Cela suffit pour démontrer le théorème énoncé.

Toutefois, la ligne A_1N ne jouit pas des mêmes propriétés que les tangentes aux lignes ordinaires. On voit aisément, en effet, que si l'on joint par une droite BC deux points B et C de la *Punktmenge* P, et que l'on fasse tendre B et C simultanément vers le point A_1, la limite de la droite BC n'est pas en général la tangente A_1N. Considérons, en effet, deux points B_0 et C_0 de la *Punktmenge* P, choisis de telle sorte que le cercle $A_1B_0C_0$ ne soit pas tangent à A_1N. Considérons les transformés successifs B_1C_1, B_2C_2, ..., B_nC_n de B_0C_0 par les puissances positives de S. Quand n croîtra indéfiniment, B_n et C_n se rapprocheront de A_1 et l'angle de B_nC_n avec A_1N tendra vers une limite finie. De plus, j'ai tout lieu de croire qu'il n'y a pas de tangente aux points de L qui ne font pas partie de P.

Je dis maintenant que la ligne L n'a pas de cercle osculateur. Je dis que si l'on mène un cercle k tangent en A_1 à la droite A_1N et passant par un point B_1 de L, ce cercle ne tendra pas vers une limite déterminée lorsque le point B_1 se rapprochera du point A_1. Menons, en effet, deux cercles k' et k'' tangents tous deux en A_1 à la droite A_1N et passant respectivement par deux points B'_0 et B''_0 de la ligne L. Soient B'_1, B'_2, ..., B'_n les transformés successifs de B'_0 par les puissances de S. Ils seront tous sur k' et deviendront infiniment rapprochés de A_1 quand n deviendra infini.

Donc si le cercle osculateur existait, ce devrait être le cercle k'. Mais ce devrait être en même temps le cercle k''. Donc le cercle osculateur n'existe pas.

J'en ai dit assez, je pense, pour faire comprendre à quel point la ligne L diffère d'une ligne analytique.

IX. — Groupes symétriques.

Considérons un polygone Π_0 limité par $n+1$ arcs de cercles A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_{n+1}, $A_{n+1}A_1$ se coupant en $n+1$ points A_1, A_2, ..., A_{n+1} qui sont les sommets de ce polygone. Construisons les polygones Π symétriques de Π_0 par rapport à ses divers côtés, puis les polygones symétriques des $n+1$ polygones Π par rapport à leurs divers côtés et ainsi de suite. Si les divers polygones ainsi construits ne se recouvrent pas mutuellement, on aura un groupe kleinéen.

Soit Π'_0 le polygone symétrique de Π_0 par rapport au côté $A_{n+1}A_1$; le polygone $\Pi_0+\Pi'_0=R_0$ sera le polygone générateur du groupe; il admettra $2n$ côtés, à savoir les n côtés A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_{n+1} de Π_0 et les côtés symétriques de Π'_0. Deux côtés symétriques seront d'ailleurs conjugués.

La première condition évidemment nécessaire pour que le groupe soit discontinu, c'est que tous les angles A_1, A_2, ..., A_n, A_{n+1} du polygone Π_0 soient nuls ou soient des parties aliquotes de π; ils sont donc tous droits ou aigus.

Supposons cette condition remplie et construisons le polyèdre P_0 générateur du groupe. Pour cela, construisons les sphères $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_{n+1}$ qui ont même centre et même rayon que les arcs de cercle A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n+1}A_1$. Ces sphères limiteront un certain polyèdre K_0. On construira ensuite le polyèdre K'_0

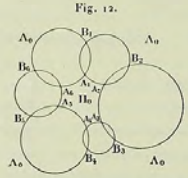
symétrique de K_0 par rapport à la sphère Σ_{n+1}. Le polyèdre $P_0 = K_0 + K'_0$ sera alors le polyèdre générateur du groupe.

Les sphères Σ_{n+1} et Σ_1 se couperont suivant une circonférence C_1 qui coupera le plan des $\xi\eta$ en deux points A_1 et B_1 dont le premier est un sommet de Π_0. De même, les sphères Σ_{i-1} et Σ_i se couperont suivant une circonférence C_i qui coupera le plan des $\xi\eta$ en deux points A_i et B_i dont le premier est un sommet de Π_0.

Cela posé, on peut faire diverses hypothèses :

1° On peut supposer que les sphères Σ n'ont pas d'autre intersection que les circonférences $C_1, C_2, \ldots, C_{n+1}$. C'est ce qui arrive par exemple dans le cas de la figure 12. Dans ce cas, le polyèdre K_0 admet deux faces de la deuxième sorte Π_0 et A_0. La face A_0 est formée dans le cas de la figure 12 de la portion du plan

Fig. 12.



extérieure au contour polygonal curviligne $B_1B_2B_3 \ldots B_{n+1}$. Le polyèdre K_0 admet en outre $n+1$ faces de la première sorte qui sont les portions des sphères $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_{n+1}$, limitées respectivement par les circonférences C_1 et C_2, C_2 et C_3, $\ldots$, C_{n+1} et C_1, et $n+1$ arêtes de la première sorte qui sont ces circonférences elles-mêmes. Le polyèdre $P_0 = K_0 + K'_0$ admet de même deux faces de la deuxième sorte, $2n$ faces de la première sorte et $2n$ arêtes de la première sorte.

Les conditions de discontinuité du groupe sont remplies et nous avons un groupe kleinéen. De plus il est de la première espèce, car on peut, en déformant d'une manière continue le polygone Π_0, passer au cas où les côtés de ce polygone sont orthogonaux à une circonférence, c'est-à-dire au cas des groupes fuchsiens. Le plan est divisé en deux domaines D et D', le premier rempli par le polygone Π_0 et ses transformés, le second par le polygone A_0 et ses transformés.

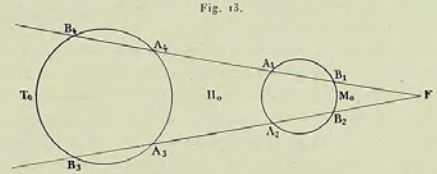
2° On pourrait supposer aussi que les sphères Σ admettent d'autres intersections que les circonférences $C_1, C_2, \ldots, C_{n+1}$; qu'elles se coupent par exemple suivant d'autres circonférences $k_1, k_2, \ldots, k_p$; mais que ces circonférences restent tout entières extérieures au polyèdre K_0, de telle façon qu'elles ne soient pas des arêtes de ce polyèdre. Mais il est aisé de voir que cette supposition est incompatible avec l'hypothèse que nous avons faite que les angles de Π_0 sont tous droits ou aigus.

3° On peut supposer que le polyèdre K_0 admet comme arêtes, outre les circonférences C_i une ou plusieurs des circonférences k et que les angles dièdres correspondants ne sont pas des parties aliquotes de π. Il est clair alors que le groupe n'est pas discontinu.

4° Il peut arriver enfin que le polyèdre K_0 admette comme arêtes, outre les circonférences C_i une ou plusieurs des circonférences k et que les dièdres correspondants soient des parties aliquotes de π. Dans ce cas, le groupe est discontinu, mais on ne peut passer au cas des groupes fuchsiens en déformant le polygone Π_0. Le groupe est donc de la deuxième espèce.

Prenons comme exemple le cas de la figure 13. Le polygone Π_0 est un quadri-

Fig. 13.



latère $A_1A_2A_3A_4$ dont deux côtés opposés A_1A_4 et A_2A_3 sont des lignes droites qui prolongées vont se couper en F. Je suppose de plus que les angles A_1, A_2, A_3, A_4 et F sont des parties aliquotes de π. Le polyèdre K_0 n'admet alors que des dièdres égaux à des parties aliquotes de π. Il a trois faces de la deuxième sorte, Π_0, M_0 et T_0; il a quatre faces de la première sorte faisant partie respectivement des sphères A_1A_2 et A_3A_4 et des plans A_1A_4 et A_2A_3. Le groupe G considéré est donc discontinu.

Si l'on prend le polyèdre K'_0 symétrique de K_0 par rapport au plan A_2A_3, l'ensemble de ces polyèdres sera P_0 et aura pour faces de la deuxième sorte $\Pi_0 + \Pi'_0$, $M_0 + M'_0$ et $T_0 + T'_0$ en appelant Π'_0, M'_0 et T'_0 les polygones symé-

triques de Π_0, M_0 et T_0. Le plan des $\xi\eta$ va se trouver divisé en trois domaines D, D′ et D″ recouverts respectivement par les transformés de $\Pi_0 + \Pi'_0$, par ceux de $M_0 + M'_0$ et par ceux de $T_0 + T'_0$.

Étudions d'abord le domaine D′. Supposons que l'on construise les triangles symétriques de M_0 par rapport à ses trois côtés, puis les triangles symétriques de ceux-ci par rapport à leurs divers côtés et ainsi de suite. Tous les triangles ainsi construits recouvriront un certain cercle H qui a pour centre F et qui coupe orthogonalement le cercle $A_1A_2B_1B_2$. Ce cercle H sera donc une partie du domaine D′, mais une partie seulement. En effet, le cercle H est recouvert par les transformés de $M_0 + M'_0$ par certaines substitutions du groupe G. Ces substitutions s'obtiennent en combinant de toutes les manières possibles les trois inversions par rapport aux cercles FB_1, FB_2 et B_1B_2, de telle façon que le nombre total des substitutions combinées soit pair. Ces substitutions forment un groupe g qui est fuchsien et qui est un sous-groupe du groupe kleinéen G. Pour avoir les autres transformés du quadrilatère $M_0 + M'_0$ et par conséquent les autres parties du domaine D′, il faut prendre les symétriques du cercle H par rapport au cercle A_3A_4 et à ses transformés. On obtient ainsi une infinité de cercles H_1, H_2, ... dont l'ensemble constitue le domaine D′. Ce domaine n'est donc pas d'une seule pièce.

Il en est de même de D″. En effet, on démontrerait de même qu'en construisant les triangles symétriques de T_0 par rapport aux trois côtés de ce triangle, puis les triangles symétriques de ceux-ci par rapport à leurs divers côtés, et ainsi de suite, on obtient tous les transformés de $T_0 + T'_0$ par les substitutions d'un sous-groupe fuchsien g_1 du groupe kleinéen G. Ces transformés recouvrent la portion du plan extérieure à un certain cercle J et cette portion du plan ainsi que l'intérieur des divers cercles J_1, J_2, ..., symétriques de J par rapport au cercle A_1A_2 et à ses transformés, constituent le domaine D″.

Au contraire, le domaine D est d'une seule pièce. Si, en effet, nous construisons les polygones symétriques de Π_0 par rapport aux côtés de ce quadrilatère, puis les polygones symétriques de ceux-ci par rapport à leurs divers côtés, et ainsi de suite, nous obtenons évidemment tous les transformés de $\Pi_0 + \Pi'_0$ et par conséquent tout le domaine D. Mais la figure ainsi formée par ces polygones que l'on construit successivement à côté les uns des autres est d'une seule pièce. Il en est donc de même de D.

Ce domaine D est d'ailleurs limité par les circonférences H, H_1, H_2, ..., J, J_1, J_2, ...; *il n'est donc pas simplement connexe*. Cette circonstance aurait

rendu presque impossible la démonstration directe de la discontinuité du groupe et nécessitait l'emploi de l'artifice dont nous avons fait usage.

L'existence de ces domaines limités par un nombre infini de cercles a été signalée pour la première fois par M. Klein.

X. — Première famille.

Dans le paragraphe XI du Mémoire sur les groupes fuchsiens, nous avons envisagé (p. 162) un hexagone ABCDEF, dont les côtés AB et CB, CD et ED, EF et AF sont conjugués et dont les angles B, D, F et $A + C + E$ sont des parties aliquotes de 2π. Déformons cet hexagone de façon que ses angles continuent à satisfaire à cette condition, mais que ses côtés ne soient plus orthogonaux à un même cercle fondamental et cherchons à quelles conditions il restera le polygone générateur d'un groupe kleinéen.

Considérons donc le groupe engendré par notre hexagone déformé ABCDEF. Il sera évidemment dérivé de trois substitutions elliptiques S_1, S_2 et S_3 qui ont respectivement pour points doubles B et B′, D et D′, F et F′ et pour multiplicateurs $e^{i\beta}$, $e^{i\delta}$, $e^{i\varphi}$, β, δ et φ désignant les angles B, D et F;

S_1 change BA en BC,
S_2 » DC en DE,
S_3 » FE en FA.

La combinaison

$$S_1S_2S_3 = S_4$$

est aussi une substitution elliptique qui a pour points doubles A et A′ et pour multiplicateur $e^{-i\alpha}$, α désignant l'angle $A + C + E$.

Les combinaisons

$$S_2S_3S_1 = S_5 \quad \text{et} \quad S_3S_1S_2 = S_6$$

ont aussi pour multiplicateurs $e^{-i\alpha}$ et elles ont respectivement pour points doubles C et C′, E et E′.

Voyons maintenant quelles relations doivent avoir lieu entre ces points doubles et ces multiplicateurs.

Soient z_1 le transformé de z par S_1, z_2 celui de z_1 par S_2, z_3 celui de z_2 par S_3; z_3 sera par conséquent le transformé de z par S_4 et nous aurons les

relations

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{z_1-B}{z_1-B'}=e^{i\beta}\,\dfrac{z-B}{z-B'},\\ \dfrac{z_2-D}{z_2-D'}=e^{i\delta}\,\dfrac{z_1-D}{z_1-D'},\\ \dfrac{z_3-F}{z_3-F'}=e^{i\varphi}\,\dfrac{z_2-F}{z_2-F'},\\ \dfrac{z_3-A}{z_3-A'}=e^{-i\alpha}\,\dfrac{z-A}{z-A'}. \end{cases}$$

En différentiant les relations (1), on trouve

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dz_1}{(z_1-B')^2}=e^{i\beta}\,\dfrac{dz}{(z-B')^2}, & \dfrac{dz_1}{(z_1-B)^2}=e^{-i\beta}\,\dfrac{dz}{(z-B)^2},\\ \dfrac{dz_2}{(z_2-D')^2}=e^{i\delta}\,\dfrac{dz_1}{(z_1-D')^2}, & \dfrac{dz_2}{(z_2-D)^2}=e^{-i\delta}\,\dfrac{dz_1}{(z_1-D)^2},\\ \dfrac{dz_3}{(z_3-F')^2}=e^{i\varphi}\,\dfrac{dz_2}{(z_3-F')^2}, & \dfrac{dz_3}{(z_3-F)^2}=e^{-i\varphi}\,\dfrac{dz_2}{(z_2-F)^2},\\ \dfrac{dz_3}{(z_3-A')^2}=e^{-i\alpha}\,\dfrac{dz}{(z-A')^2}, & \dfrac{dz_3}{(z_3-A)^2}=e^{i\alpha}\,\dfrac{dz}{(z-A)^2}. \end{cases}$$

Parmi les relations (2) envisageons les trois premières de la seconde colonne et la dernière de la première colonne et faisons-y $z=A$, d'où $z_1=C$, $z_2=E$, $z_3=A$; il viendra, en combinant les relations ainsi obtenues de manière à éliminer dz, dz_1, dz_2, dz_3 :

$$\frac{(A-B)^2(C-D)^2(E-F)^2}{(C-B)^2(E-D)^2(A-F)^2}=e^{i(\alpha+\beta+\delta+\varphi)}$$

ou

$$(3)\qquad \frac{(A-B)(C-D)(E-F)}{(B-C)(D-E)(F-A)}=\pm e^{i\frac{\alpha+\beta+\delta+\varphi}{2}}.$$

Une discussion facile montre que c'est le signe — qui convient.

Dans le cas où les quatre angles α, β, δ et φ sont nuls, c'est-à-dire dans le cas où le groupe se réduit à la deuxième famille, la relation (3) devient

$$(A-B)(C-D)(E-F)=-(B-C)(D-E)(F-A).$$

Supposons donc qu'on se donne, outre les angles α, β, δ, φ, six points doubles A, B, C, D, E, F de façon à satisfaire à la relation (3). Les trois points doubles B', D' et F' sont alors déterminés par les équations

$$\frac{C-B}{C-B'}=e^{i\beta}\frac{A-B}{A-B'},\qquad \frac{E-D}{E-D'}=e^{i\delta}\frac{C-D}{C-D'},\qquad \frac{A-F}{A-F'}=e^{i\varphi}\frac{E-F}{E-F'}$$

et les trois points doubles A', C' et E' par les relations

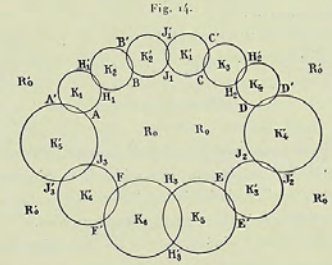
$$\frac{C'-B}{C'-B'}=e^{i\beta}\frac{A'-B}{A'-B'},\qquad \frac{E'-D}{E'-D'}=e^{i\delta}\frac{C'-D}{C'-D'},\qquad \frac{A'-F}{A'-F'}=e^{i\varphi}\frac{E'-F}{E'-F'}.$$

Il n'arrivera pas en général que les quatre points A, B, A', B' seront sur un même cercle. Il en sera de même des points B, B', C et C'; C, C', D et D', etc. Il résulte de là que, si nous construisons le polyèdre P_0 générateur du groupe, la face de la deuxième sorte de ce polyèdre ne sera pas en général l'hexagone ABCDEF, mais un dodécagone, ainsi qu'on va le voir.

Voici, en effet, comment on peut construire le polyèdre P_0 :

Considérons six cercles $K_1, K_2, \ldots, K_6$ passant respectivement par A et A', par B et B', par C et C', par D et D', par E et E', par F et F'. Les deux premiers se couperont en H_1 et H_1', les deux suivants en H_2 et H_2', les deux derniers

Fig. 14.



en H_3 et H_3'. Soient maintenant K_1' et K_2' les transformés de K_1 et K_2 par S_1; ils passeront, le premier par C et C', le second par B et B' et ils se couperont en J_1 et J_1'.

Soient de même K_3' et K_4' les transformés de K_3 et de K_1 par S_2; K_5' et K_6' les transformés de K_5 et de K_4 par S_3. Ces quatre cercles passeront respectivement par E et E', par D et D', par A et A', par F et F' et ils se couperont, les deux premiers en J_2 et J_2', les deux derniers en J_3 et J_3'.

Je suppose que ces différents cercles n'aient pas d'autre point d'intersection que ceux que je viens d'énumérer et que la position relative de ces divers cercles et points soit celle qui est indiquée par la figure 14. Dans ce cas, cons-

truisons les sphères Σ_i et Σ'_i qui ont même centre et même rayon que les cercles K_i et K'_i. Puis envisageons le polyèdre P_0 formé par la portion du plan extérieure à ces douze sphères. Ce polyèdre aura deux faces de la deuxième sorte, R_0 et R'_0, qui seront respectivement les portions du plan intérieure et extérieure à l'anneau formé par les douze cercles K_i et K'_i; il aura douze faces de la première sorte formées par des portions des sphères Σ_i et Σ'_i; ces douze faces seront conjuguées deux à deux de telle façon que la face Σ'_i soit conjuguée de Σ_i. Le polyèdre P_0 admettra douze arêtes de la première sorte formées par les intersections deux à deux des sphères Σ_i et Σ'_i; ces arêtes se répartiront en sept cycles ainsi que l'indique le Tableau suivant :

Numéro du cycle.	Arêtes faisant partie du cycle.	Somme des dièdres du cycle.
1.....	AA', CC' et EE'	α
2.....	BB'	β
3.....	DD'	δ
4.....	FF'	φ
5.....	$H_1H'_1$ et $J_1J'_1$	2π
6.....	$H_2H'_2$ et $J_2J'_2$	2π
7.....	$H_3H'_3$ et $J_3J'_3$	2π

Aux quatre premiers cycles correspondent les substitutions elliptiques S_4, S_1, S_2 et S_3; aux trois derniers, la substitution identique. Si donc les cercles K_i et K'_i sont dans la situation relative indiquée par la figure 14, le groupe considéré, dont le polyèdre générateur sera P_0, sera discontinu.

Notre groupe sera donc kleinéen, pourvu que les points doubles A, B, C, D, E, F satisfassent non seulement à la relation (3), mais à des inégalités exprimant que les douze cercles K_i et K'_i sont dans la situation relative indiquée par la figure 14.

Le plan se trouve partagé en deux domaines limités par une ligne L. Voici comment on peut trouver la génération de la ligne L : on considère l'ensemble des points doubles de toutes les substitutions hyperboliques ou loxodromiques du groupe. Ces points doubles forment une *Punktmenge* P; si l'on y adjoint son *erste Ableitung* P', on aura la ligne L.

XI. — Fonctions kleinéennes.

Soit G un groupe kleinéen quelconque et soient

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$$

les diverses substitutions de ce groupe. Formons, comme dans la théorie des fonctions fuchsiennes, la série suivante :

$$\Theta(z) = \Sigma H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}, \tag{1}$$

l'algorithme $H(z)$ représentant une fonction rationnelle de z dont aucun infini ne se confond avec un point singulier du groupe, et m désignant un entier plus grand que 1.

Cette série est convergente. Dans le paragraphe I du Mémoire sur les fonctions fuchsiennes, nous avons donné deux démonstrations de la convergence de cette série. La première de ces démonstrations subsiste dans le cas qui nous occupe; il n'en serait pas de même de la seconde.

A tout groupe kleinéen correspondent donc une infinité de fonctions théta-kleinéennes $\Theta(z)$ et de fonctions kleinéennes $F(z)$ jouissant des propriétés

$$\Theta\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) = \Theta(z)(\gamma_i z + \delta_i)^{2m},$$
$$F\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) = F(z).$$

Ces fonctions jouissent des mêmes propriétés que les fonctions fuchsiennes et thétafuchsiennes. Par conséquent, toutes les fonctions kleinéennes s'expriment rationnellement à l'aide de deux d'entre elles, x et y, entre lesquelles il y a une relation algébrique

$$f(x, y) = 0 \tag{2}$$

dont le genre est égal à celui du groupe G. Quand ce genre est nul, toutes les fonctions kleinéennes s'expriment rationnellement à l'aide de l'une d'entre elles que j'appelle x.

Si je pose

$$v_1 = \sqrt{\frac{dz}{dx}}, \qquad v_2 = z\sqrt{\frac{dz}{dx}},$$

v_1 et v_2 sont deux intégrales de l'équation linéaire

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v, \tag{3}$$

qui se réduit à

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x)v, \tag{3'}$$

dans le cas où le genre est nul (*cf.* paragraphe IV du *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes*); dans ces équations, φ désigne une fonction rationnelle.

Examinons quelques cas particuliers, et d'abord reprenons l'équation (3') des paragraphes V et VII du Mémoire sur les fonctions fuchsiennes :

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{P(x)}{Q^2(x)}v,$$

où

$$Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n).$$

Le polynome $P(x)$ est de degré $2n-2$ et je suppose qu'il satisfait aux $n+1$ conditions suivantes :

$$\begin{cases} P(a_i) = -Q'^2(a_i)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4\beta_i^2}\right), \\ \text{coefficient de } x^{2n-2} \text{ dans } P(x) = -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4\beta_{n+1}^2}\right). \end{cases} \tag{4}$$

Les nombres $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+1}$ sont des entiers positifs qui peuvent devenir infinis.

Nous avons vu que, si le polynome $P(x)$ [outre les $n+1$ conditions (4) qui sont *complexes* et qui, par conséquent, équivalent à $2n+2$ conditions réelles], satisfait à $2n-4$ autres conditions réelles et transcendantes, la variable x est une fonction fuchsienne du rapport des intégrales.

Il résulte de la théorie précédente que, si le polynome $P(x)$ satisfait non seulement aux conditions (4), mais à certaines *inégalités*, la variable x sera une fonction kleinéenne du rapport des intégrales. Supposons, en effet, les conditions (4) remplies; appelons z le rapport des intégrales de l'équation (3); quand x reviendra à sa valeur initiale, après avoir décrit un contour fermé C_i, z se changera en $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$ et les substitutions

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$$

formeront un groupe G.

Si ce groupe est kleinéen, x sera une fonction kleinéenne de z. Or ce groupe G, comme on le voit aisément, est dérivé de n substitutions elliptiques ou paraboliques $S_1, S_2, \dots, S_n$, ayant respectivement pour multiplicateurs

$$e^{\frac{2i\pi}{\beta_1}}, \quad e^{\frac{2i\pi}{\beta_2}}, \quad e^{\frac{2i\pi}{\beta_3}}, \quad \dots, \quad e^{\frac{2i\pi}{\beta_n}}.$$

La combinaison

$$S_1 S_2 \dots S_n$$

sera aussi une substitution elliptique ou parabolique qui aura pour multiplicateur

$$e^{\frac{2i\pi}{\beta_{n+1}}}.$$

Or nous avons vu au paragraphe précédent qu'il suffit de certaines inégalités imposées aux coefficients d'un pareil groupe G pour qu'il soit discontinu. Il suffira donc aussi d'imposer certaines inégalités aux coefficients de $P(x)$ pour que x soit fonction uniforme de z.

Reprenons de même l'équation (3) du paragraphe VI du Mémoire sur les fonctions fuchsiennes

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v, \qquad \psi(x, y) = 0. \tag{3}$$

J'appelle c_i, d_i les points analytiques pour lesquels on a à la fois

$$\frac{d\psi}{dy} = 0, \qquad \frac{d\psi}{dx} \gtrless 0.$$

J'appelle a_i, b_i les points analytiques différents de c_i, d_i et pour lesquels la fonction φ devient infinie. Je suppose que la fonction φ satisfasse aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \lim(y-d_i)^2\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\varphi(x, y) = -\frac{3}{4} & (\text{pour } x = c_i, y = d_i), \\ \lim(x-a_i)\varphi(x, y) = \frac{1-\beta_i^2}{4\beta_i^2} & (\text{pour } x = a_i, y = b_i). \end{cases} \tag{5}$$

Les nombres β_i sont encore ici des entiers positifs qui peuvent devenir infinis.

Nous avons vu que, si la fonction φ satisfait en outre à certaines conditions transcendantes, x est fonction fuchsienne du rapport z des variables. De même, si cette fonction φ satisfait non seulement aux équations (5), mais à certaines

inégalités, x sera fonction kleinéenne de z. La démonstration serait tout à fait analogue à celle qui précède.

Ainsi pour que dans l'équation (3) x exprimé en fonction de z soit une fonction kleinéenne de la première, de la deuxième ou de la sixième famille, il suffit de certaines *égalités algébriques* et de certaines *inégalités*. Nous n'avons pas à nous imposer *d'égalité transcendante*. Il n'en est pas de même pour les fonctions des autres familles. Si nous voulons, par exemple, que, dans l'équation (3), x soit fonction kleinéenne de la troisième famille du rapport z des intégrales, il faudra nous imposer certaines égalités transcendantes.

Reprenons, en effet, l'équation (3) du paragraphe VIII du Mémoire sur les fonctions fuchsiennes

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v, \qquad \psi(x, y) = 0,$$

en supposant que la fonction φ satisfait aux conditions énoncées à la page 244 de ce paragraphe (lignes 3 et suivantes). Soit n le genre de la relation $\psi = 0$; le groupe kleinéen de notre équation (3) devra être de genre n et dépendra par conséquent de $3n - 3$ paramètres complexes; c'est-à-dire précisément d'autant de paramètres qu'il y a de modules dans la relation $\psi = 0$. Quand on se donnera cette relation $\psi = 0$, le groupe kleinéen sera donc entièrement déterminé; il en sera donc de même de la fonction φ. Il résulte de là que cette fonction est assujettie, indépendamment des conditions algébriques de la page 244 du *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes*, à n conditions transcendantes, puisque ces conditions algébriques ne suffiraient pas pour la déterminer.

XII. — Historique.

C'est M. Schottky qui a le premier remarqué la discontinuité de certains groupes kleinéens (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. **83**, p. 346), à savoir des groupes symétriques de la troisième famille. Depuis, M. Klein a approfondi la théorie de ces groupes dans diverses Notes insérées aux *Mathematische Annalen* (t. **19**, **20** et **21**) et dans un Mémoire plus étendu inséré dans le 21e volume de ces mêmes Annales et intitulé *Ueber Riemannsche Functionentheorie*.

J'avais moi-même, dans deux Notes que j'eus l'honneur de présenter à l'Académie des Sciences de Paris le 27 juin et le 11 juillet 1881 (1) (voir *Comptes rendus*, t. **92** et **93**), énoncé succinctement la plupart des résultats exposés dans le présent Mémoire.

---

(1) Ce Tome, p. 19-25. N. E. N.