桑木文庫
洋書

物理
08
P
61

桑木文庫
洋書
0788

九州帝國大學理學部
8514
物理學教室

理学部 洋 遡及
022232002014343
九州大学蔵書

贵重書

物
C
P

㊞ 801082

ŒUVRES

DE

HENRI POINCARÉ

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
50998 Quai des Grands-Augustins, 55.

ŒUVRES
DE
HENRI POINCARÉ

PUBLIÉES
SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE
PAR
G. DARBOUX
SECRÉTAIRE PERPÉTUEL DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

TOME II

PUBLIÉ AVEC LA COLLABORATION
DE
N. E. NÖRLUND,
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LUND (SUÈDE)
ET DE
ERNEST LEBON,
PROFESSEUR HONORAIRE DU LYCÉE CHARLEMAGNE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.
1916

貴重書

大阪帝國帝國圖書館
昭和19. 4. 25
130096

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

PRÉFACE

Au lendemain de la mort prématurée d'Henri Poincaré, ses confrères, ses amis, ses admirateurs ont été unanimes à penser que notre pays devait rendre au géomètre qu'il venait de perdre le même hommage qu'il avait rendu aux plus grands : à Lagrange, à Laplace, à Fourier, à Cauchy. Le Ministère de l'Instruction publique a décidé de publier sans tarder les *Œuvres mathématiques* d'Henri Poincaré. Un traité a été conclu à cet effet avec l'éditeur M. Gauthier-Villars, que tant de travaux analogues, exécutés avec un désintéressement et une habileté universellement reconnus, désignaient pour cette tâche nouvelle. Le soin de surveiller et de diriger la publication m'a été confié. Je n'en verrai pas l'achèvement; mais ce sera l'honneur de ma carrière d'en avoir provoqué et commencé l'exécution.

Le plan et le contenu des divers Volumes ont été complètement arrêtés. Dans le désir de provoquer des recherches, j'ai cru devoir commencer par le Tome II, parce qu'il contient les travaux les plus importants de la jeunesse de Poincaré, ceux qui concernent les fonctions fuchsiennes. L'hommage ainsi rendu à un savant illustre se doublera, je l'espère, d'un service rendu aux géomètres.

Dans la revision et la correction du texte, j'ai eu l'heureuse fortune d'être aidé et secondé par un jeune géomètre des plus distingués, M. Nörlund, professeur à l'Université de Lund. Il avait fait, depuis longtemps, l'étude la plus approfondie des travaux que Poincaré a publiés sur ce beau sujet. Les notes nombreuses qu'il a ajoutées en différents

endroits et à la fin du Volume mettront en évidence toute la valeur de sa collaboration. M. Nörlund unit à son beau talent mathématique une parfaite connaissance de la langue française.

Aux remerciements bien vifs et bien mérités que j'ai le plaisir et le devoir de lui offrir, je désire associer M. Ernest Lebon, professeur honoraire de l'Université, lauréat de deux de nos Académies, qui a revu avec le plus grand soin les épreuves et qui m'a déjà donné son concours si précieux pour la publication du *Bulletin des Sciences mathématiques* et pour celle de mes *Leçons*.

GASTON DARBOUX.

ÉLOGE HISTORIQUE

D'HENRI POINCARÉ

MEMBRE DE L'ACADÉMIE

LU DANS LA SÉANCE PUBLIQUE ANNUELLE DU 15 DÉCEMBRE 1913

PAR

M. GASTON DARBOUX,

SECRÉTAIRE PERPÉTUEL.

MESSIEURS,

Il y a un an à peine, le 17 juillet 1912, Henri Poincaré nous était brusquement enlevé. Sa mort si rapide, si inattendue, excita dans le monde entier une émotion universelle. En France, en Europe, en Amérique, des voix s'élevèrent aussitôt pour célébrer les mérites de celui dont le cerveau puissant avait manifesté tant d'aptitudes diverses; qui s'était montré à la fois mathématicien hors de pair, physicien pénétrant et profond philosophe. C'est un devoir pour nous, qui avons vécu à ses côtés, qui avons été ses contemporains ou ses anciens, d'apporter à notre tour notre témoignage, de rappeler les enseignements et les appréciations que, seuls, nous avons pu recueillir sur la belle et noble carrière qui s'est déroulée, presque toute entière, devant nos yeux.

I.

Henri Poincaré naquit à Nancy le 29 avril 1854. Ses parents étaient lorrains tous les deux. La famille Poincaré est originaire de Neufchâteau, dans les Vosges. Elle peut remonter jusqu'à Jean-Joseph Poincaré, conseiller au bailliage de Neufchâteau, qui mourut en 1750; l'un de ses petits-fils, Joseph-Gaspard Poincaré, fut maître de mathématiques au collège de Bourmont, près Neufchâteau.

C'est également de Jean-Joseph qu'est descendu le grand-père de notre confrère, Jules-Nicolas Poincaré, qui naquit à Neufchâteau en 1794. A peine âgé de 20 ans, il fut attaché à l'hôpital militaire de Saint-Quentin pendant la campagne de France, en 1814. En 1817, il vint s'établir à Nancy avec ses vieux parents et ses sœurs, et se fixa en 1820 dans une maison caractéristique du vieux Nancy, entre le palais ducal et la porte de la Craffe. Dans le discours qu'il prononça en recevant Henri Poincaré à l'Académie française, M. Frédéric Masson nous a dépeint de la manière la plus expressive cette maison « solide, massive et sans ornements, accostée d'un portail presque monumental dont les montants à bossages vermiculés supportent un fronton entrecoupé où brûle un pot de feu ». C'est là que sont nés les trois enfants de Jules-Nicolas, dont deux fils : en 1828, Léon Poincaré, qui devait embrasser la carrière médicale et fut le père de notre confrère; en 1829, Antoine Poincaré, qui devint inspecteur général des Ponts et Chaussées et eut deux fils : M. Raymond Poincaré, président de la République, et M. Lucien Poincaré, directeur de l'Enseignement secondaire au Ministère de l'Instruction publique et des Beaux-Arts. C'est également dans la vieille maison de la rue de Guise qu'est né notre confrère Henri Poincaré, et la ville de Nancy y a fait poser récemment une plaque commémorative, offerte par l'Association des anciens élèves des lycées de Nancy, Metz, Strasbourg et Colmar.

Dans le discours que je viens de rappeler, M. Frédéric Masson nous fait connaître encore les noms de deux autres membres de la famille Poincaré : un grand-oncle d'abord, le commandant Nicolas-Sigisbert

Poincaré, né à Nancy en 1751, qui se faisait appeler Pontcarré (1); il fit la guerre d'Espagne et disparut dans la retraite de Russie; et un autre soldat, Poincaré Amé-François, dont M. Henry Poulet nous parle longuement dans son Ouvrage sur les *Volontaires de la Meurthe;* il avait appartenu à l'armée régulière et rendit de grands services pendant les guerres de la Révolution. On l'appelait « le vieux Poincaré ».

Telle était, du côté paternel, la famille d'Henri Poincaré. Du côté maternel, il ne fut pas moins bien partagé. Sa mère, originaire d'une famille meusienne et dont les parents habitaient Arrancy, était une personne très bonne, très active et très intelligente. Elle consacrait tous ses soins à l'éducation de ses deux enfants, son fils et une fille, un peu plus jeune, qui devait devenir M^me^ Boutroux (2).

(1) Le nom de Poincaré n'agréait pas, semble-t-il, à notre Confrère. Il aurait préféré Pontcarré. On comprend à la grande rigueur qu'un pont soit carré, tandis que ces deux idées de point et de carré jurent de se voir ensemble accouplées. Je crois bien que c'est à M. Antoine Thomas que revient le mérite d'avoir indiqué la véritable étymologie d'un nom aujourd'hui illustre à tant de titres. Notre confrère de l'Académie des Inscriptions a découvert un « Petrus *Pugniquadrati* », étudiant à l'Université de Paris en 1403, et l'on a signalé depuis un Jehan Poingquarré, secrétaire de la reine Isabeau de Bavière et du duc de Bourgogne Jean sans Peur. « Le mot *poing*, ajoute M. Antoine Thomas, entre encore dans quelques locutions pittoresques où il se combine avec des participes passés; on dit : frapper à poings fermés, dormir à poings fermés, livrer pieds et poings liés. Mais on ne parle plus de poings carrés. Il en était jadis autrement, et c'est ce qui explique le nom de famille. »

Dans la chanson de geste de Gaydon, par exemple, le vieux trouvère nous montre un de ses héros qui

« Hausse le *poing* qu'il ot gros et *quarré*. »

Et ailleurs il nous décrit ainsi le duc Thibaud :

« Grant ot le cors, percreü et membré,
Larges espaules et le pis encharné,
La jambe droite et le pié bien torné;
Les bras ot lons et les *poins* bien *quarrez*. »

(2) C'est à M^me^ Boutroux et à un camarade d'Henri Poincaré, M. le général

Le milieu dans lequel le jeune Henri allait se développer était de ceux qui se rencontrent bien rarement. Le père, Léon Poincaré, qui exerça toute sa vie la médecine dans sa ville natale et y devint professeur à la Faculté de Médecine, était un esprit très original, dont notre Académie appréciait beaucoup et accueillait volontiers les travaux; on se souvient à Nancy, avec reconnaissance, du dévouement et du désintéressement avec lequel il exerçait sa profession. L'oncle, Antoni Poincaré, sorti dans un rang brillant de l'École Polytechnique, ne se contentait pas de remplir avec distinction sa tâche quotidienne; il a, lui aussi, adressé à notre Compagnie plusieurs Communications fort intéressantes, relatives aux problèmes les plus essentiels de la Météorologie. C'est dans cet entourage d'une élite de savants, d'universitaires, de polytechniciens, qu'allait s'écouler l'enfance d'Henri Poincaré.

Cette enfance fut exceptionnellement heureuse, grâce aux qualités naturelles dont il était doué, mais grâce aussi aux soins dont il fut entouré. Sa mère veillait sur lui avec une sollicitude pleine d'intelligence, qui a certainement favorisé son développement. Il fut extrêmement précoce et parla très tôt, mais d'abord assez mal, parce qu'il pensait plus vite qu'il ne pouvait parler. Il fut retardé à l'âge de 5 ans par une diphtérie, à la suite de laquelle il eut pendant neuf mois une paralysie du larynx. Cette maladie le tint longtemps faible et timide. Il n'osait pas descendre un escalier tout seul, et il fuyait les camarades de son âge dont il redoutait les brutalités. Dès qu'il sut lire, il devint un lecteur acharné, il ne lisait pas deux fois le même livre; mais il lisait de telle sorte que le livre était comme gravé dans sa mémoire. Il était toujours en mesure de dire à quelle page et à quelle ligne il avait vu telle ou telle chose. Il a conservé cette faculté toute sa vie, et même il replaçait dans le temps, avec une précision extraordinaire, les événements les plus insignifiants dont il avait été témoin.

Il se passionna d'abord pour l'histoire naturelle. *La Terre avant le*

Xardel, que je dois, sur l'enfance de notre Confrère, les renseignements dont je fais usage ici. J'ai fait aussi quelques emprunts à un article publié dans le journal *L'Enfant* par Mme Henri Beau, née de Loménie.

déluge, de Louis Figuier, qu'il avait lue à 6 ou 7 ans, avait été pour lui une révélation. On lui donna d'autres Ouvrages du même auteur. On le faisait travailler alors avec un inspecteur primaire ami de sa famille, M. Hinzelin, qui a publié des livres élémentaires estimés; M. Hinzelin ne lui donnait pas beaucoup de devoirs écrits, mais se laissait poser des questions et satisfaisait à toutes les curiosités de son élève. C'est ainsi que le jeune Henri apprit beaucoup de choses, sans que personne se rendît un compte précis de ce qu'il savait. Lorsqu'il entra au lycée en neuvième, au mois d'octobre 1862, sa mère se demandait s'il pourrait suivre les cours; mais elle fut vite rassurée, car son fils fut classé premier à la première composition et continua assez généralement à occuper ce rang dans toutes les branches.

J'ai eu sous les yeux un carnet qu'elle avait précieusement conservé et où se trouvent consignées toutes les notes et toutes les places que son fils avait eues pendant cette année de neuvième. Un simple coup d'œil, jeté sur ces notes, nous montre déjà en lui un enfant au-dessus de la moyenne; mais elles ne font pressentir en rien ses futures aptitudes mathématiques; tout au contraire. C'est surtout en histoire et géographie qu'il se distinguait alors. Le carnet se termine par une composition française où l'on reconnaît déjà, bien qu'elle soit encore mal formée, l'écriture anguleuse si caractéristique de notre Confrère. Cette composition, qui se recommande par des qualités de sentiment et de style bien rares chez un enfant de 9 ans, mérite le nom de « petit chef-d'œuvre » que lui avait appliqué le professeur.

Notre futur Confrère avait le travail si facile qu'on ne le voyait jamais faire de devoirs (1). Il s'amusait franchement, riait, plaisantait, se don-

(1) « Il n'était pas, nous dit le général Xardel, l'écolier modèle qui reste pendant des heures assis devant sa table, le nez sur ses livres et sur ses cahiers. Combien de fois, en allant après la classe, vers 5 ou 6 heures, lui demander quelques éclaircissements sur ses devoirs, obscurs pour moi, lumineux pour lui, combien de fois l'ai-je trouvé dans la chambre de sa mère, allant et venant, prenant part aux conversations et, en apparence, occupé de toute autre chose que de faire ses devoirs. Et puis, tout à coup, il s'approchait de la table, et, sans s'asseoir, posant

nait au jeu de tout son corps. Il ne réussissait guère dans les jeux de force et d'adresse, ni dans ceux qui exigent quelque patience; il préférait ceux où son esprit avait une part, ceux auxquels il pouvait se livrer en compagnie des sœurs des petits camarades dont sa mère l'entourait volontiers.

Au moment des vacances, il allait chez ses grands-parents, M. et Mme Lannois, à Arrancy, en pleine campagne, où on lui laissait une entière liberté dans les limites d'un grand jardin. C'est dans les allées de ce jardin qu'il se promenait, en marchant très vite, un bâton à la main. De temps en temps, du bout de ce bâton, il écrivait ou dessinait sur le sable; et l'on s'apercevait alors que, tandis qu'il était censé se reposer, sa tête travaillait malgré lui.

Il aimait les bêtes; la seule fois qu'il ait tenu un fusil, il a tiré au hasard dans un arbre et il en est tombé un oiseau blessé. Depuis ce temps, il n'a jamais voulu tirer un seul coup de fusil.

La tendresse qu'il avait pour les animaux ne l'empêchait pas d'aimer ses semblables. Il n'y a pas eu de fils ni de frère plus affectueux que lui. Il était, de même, doux et gentil avec ses camarades, toujours modeste et conciliant, sans chercher à faire valoir sa supériorité. Mais, quand il s'agissait de choses auxquelles il tenait pour de bonnes raisons, il opposait aux autres une résistance passive, qui était inébranlable.

Pendant les vacances de 1865, au sortir de la septième, nous dit le général Xardel, nos familles se réunirent pour aller passer quelques semaines à Gérardmer. Henri voulait tout voir, tout comprendre, et nous expliquait tout. Il y a à Gérardmer un écho célèbre, l'Écho de Ramberchamp, que nous faisions causer. Henri nous exposait la théorie de l'écho, il connaissait la vitesse du son et la distance exacte à laquelle il fallait se placer. Nous cherchions ensemble, au bord de la Jamagne, près du pont des Fées, la pierre de Charlemagne, où Henri retrouvait et montrait

un genou sur la chaise, il prenait sa plume de la main droite ou de la main gauche, au hasard, écrivait quelques mots ou quelques lignes, puis reprenait ses allées et venues, et la conversation interrompue. Après quelques pauses semblables, le devoir se trouvait fait tout de même, et bien fait. Il écrivait alors indifféremment de l'une ou de l'autre main, et également assez mal. »

l'empreinte laissée dans le granit par le cheval, qui, d'un bond, avait franchi le torrent. On venait de terminer et d'inaugurer la belle route du Col de la Schlucht que suivait une ligne télégraphique. Jusqu'alors, nous n'avions vu de télégraphe que le long du chemin de fer. Télégraphe et chemin de fer nous paraissaient inséparables. Un télégraphe sur une route, c'était extraordinaire. Henri trouvait cela très simple, il nous expliquait le télégraphe Bréguet, l'électricité et la transmission des dépêches.... Il avait la gaîté et l'expansion d'un enfant, mais il raisonnait comme un homme.

En 1867, ayant visité l'Exposition universelle et acquis quelques notions sur la politique, il eut l'idée de fonder, dans le grand jardin d'Arrancy, où il passait ses vacances en compagnie de sa sœur et d'un cousin de son âge, un triple gouvernement, une sorte de fédération qu'il appela la *Trinasie*. Cela devait durer plusieurs années. C'est lui qui élabora la constitution de la *Trinasie*, qui distribua les ministères, qui inventa des langues particulières pour les trois royaumes et aussi leur langue commune, le *Trinasien*. Il se trouva que, sans en avoir l'air, il s'était attribué tout le pouvoir; mais il n'en abusa pas.

L'existence de la Trinasie fut le prétexte d'une foule d'entreprises et de réjouissances des plus variées. Quand il y avait des représentations de gala, c'était toujours notre futur Confrère qui avait composé les drames et les comédies. C'est ainsi qu'il fit à 13 ou 14 ans un drame en vers sur Jeanne d'Arc.

En dehors de ces semaines de liberté, où il jouissait de la solitude à deux ou trois, il y avait la grande semaine, celle où se réunissaient, tantôt ici et tantôt là, tous les parents de la région. Il s'amusait franchement à ces fêtes où il ne dirigeait plus. Il jouait un rôle actif dans les comédies et les charades (1). Il aima aussi beaucoup la danse; il y était infatigable. Comme il avait le travail facile, il était toujours prêt à sortir, à se promener, à s'amuser, et ses études n'en souffraient pas.

(1) « Le répertoire, nous dit le général Xardel, c'était d'abord Labiche; plus tard, nous ne craignîmes pas d'aborder celui de la Comédie-Française avec *Mademoiselle de la Seiglière*. Henri faisait le Marquis, dont on disait : Il vivra cent ans et il mourra jeune. Hélas ! il n'a réalisé que la fin de la prophétie. »

On a déjà remarqué plus d'une fois qu'il était distrait; il l'était sans doute, comme tous ceux qui se laissent absorber par leurs pensées; cela ne l'empêchait pas, lorsqu'il le voulait, de fixer son attention sur un sujet donné, aussi longtemps qu'il était nécessaire. Une de ses distractions habituelles consistait à ne pas savoir si, oui ou non, il avait déjeuné. Un jour, à l'âge de 7 à 8 ans, en marchant dans la rue du Ruisseau, qui longeait un ruisseau à découvert, coupé çà et là par de petits ponts, il oublia de traverser en même temps que sa mère et sa sœur; il continua son chemin sur l'autre rive; mais, dès qu'il s'en aperçut, il les rejoignit en ligne droite, en plongeant dans l'eau jusqu'à la ceinture.

C'est lorsqu'il était en quatrième que se dessina sa vocation pour les Mathématiques. A partir de ce moment, cette vocation ne fit que grandir et devint de plus en plus impérieuse et absorbante. Pourtant il poursuivit jusqu'au bout, avec le même succès, ses études classiques. Nous avons là-dessus le témoignage d'un de ses professeurs d'alors, M. de Roche du Teilloy, Secrétaire général de l'Association amicale des anciens élèves des lycées de Nancy, Metz, Strasbourg et Colmar.

Qu'il m'est doux, écrivait-il dans l'*Annuaire* de cette Association pour 1912, de louer Henri Poincaré, que j'ai si bien connu et tant aimé, qui devenait mon ami quand il était encore mon élève. Comme je comprenais l'admiration qu'inspirait à Voltaire finissant le jeune sage Vauvenargues.

Pendant la guerre de 1870, alors que, le professeur étant enfermé dans Paris, je fus, jusqu'à Pâques, chargé d'une partie de la Rhétorique aux élèves du lycée de Nancy, je fis enfin connaissance de Henri Poincaré. Quel élève supérieur et original! Un jour que je lui avais proposé comme sujet de composition préparatoire au baccalauréat ès lettres les différences entre l'homme et l'animal, après m'avoir lu son travail, jeté sur de petits morceaux de papier de tous formats, il me demanda quelle note probable il obtiendrait à l'examen; je lui répondis que je ne saurais le dire, très bonne ou médiocre, que c'était trop personnel, trop original, trop osé, trop fort même, pour un candidat au baccalauréat. Désirant conserver cette étude si curieuse, je lui fis promettre de me la copier; sa modestie ne lui permit pas de me tenir parole. D'ailleurs, au baccalauréat, il fit une dissertation très distinguée sur cette question : « Comment une nation peut se relever », dont M. de Margerie fut vivement frappé.

Poincaré fut en effet reçu, le 5 août 1871, avec la mention *bien*. Sa composition latine fut, si nous en croyons les notes, supérieure même à sa dissertation française; il fut bon, ou très bon, dans toutes les parties de l'examen.

Et pourtant, il avait eu, lui aussi, sa part des épreuves de l'année terrible.

Quand la guerre éclata, Henri Poincaré avait 16 ans, il était trop jeune et trop délicat pour s'engager; mais il était à Nancy, en plein cœur de l'invasion, il en vit toute l'horreur, d'abord dans les ambulances où il accompagnait son père, mais surtout pendant un voyage qu'il fit avec sa mère et sa sœur, à travers des difficultés inouïes, jusqu'à Arrancy, où la santé de ses grands-parents, ébranlée par les émotions de la guerre, appelait Mme Poincaré. Arrancy était près du champ de bataille de Saint-Privat; il fallut, pour y arriver, traverser, par un froid glacial, des villages incendiés, vides d'habitants. Quand on eut atteint le but du voyage, on trouva la maison familiale dévastée. Les Prussiens avaient tout emporté, les objets de valeur comme les objets sans valeur, l'argenterie, le linge, les provisions de toutes sortes. La cave, le fruitier, la basse-cour, tout avait été saccagé; et, le jour du départ des ennemis, M. et Mme Launois se seraient couchés sans dîner si une pauvre femme du village, que sa misère avait préservée du pillage, n'était venue, une soupière pleine à la main, leur offrir de partager son pauvre repas, heureuse de leur témoigner sa gratitude pour les bienfaits qu'elle avait reçus d'eux. Jamais Henri Poincaré ne devait oublier ce voyage, et c'est l'impression qu'il en garda, comme la douleur qu'il ressentit en voyant sa ville natale occupée si longtemps par les ennemis, qui firent de lui l'ardent patriote qu'il est resté toute sa vie. C'est pendant la guerre qu'il s'apprit à lui-même l'allemand, qu'il ne savait pas, pour pouvoir lire, dans les seuls journaux qu'il eût à sa disposition, les nouvelles qu'il avait le vif désir de connaître [1].

Voici ce que nous dit à ce sujet M. de Roche du Teilloy :

Quand je n'avais pas eu le temps de lire les journaux, je priais Poincaré de me tenir au courant des nouvelles, d'apprécier les événements. Quelle netteté! Quelles impressions justes! C'étaient de bons premiers-Paris improvisés. Le sens des affaires politiques, du patriotisme, est inné dans la famille Poincaré.

Après avoir passé en août, comme nous l'avons vu, le baccalauréat

[1] Mme Henri-Beau dans le journal *L'Enfant*, décembre 1912.

ès lettres, Poincaré se présenta, trois mois après, en novembre 1871, au baccalauréat ès sciences. Il faillit, chose étrange, être refusé, et refusé pour la composition de Mathématiques. Il paraît qu'il était arrivé en retard et avait mal compris le sujet. Heureusement, il avait déjà sa petite réputation. « Tout autre élève que lui, dit le Président du Jury en proclamant le nom des admissibles, aurait été refusé pour sa composition de Mathématiques. » Il est inutile de dire qu'il se releva brillamment à l'examen oral; il fut reçu avec la mention *assez bien*.

Cette composition de Mathématiques, qui faillit jouer un mauvais tour à notre Confrère, avait pour principal objet la démonstration de la formule qui fait connaître la somme des termes de la série la plus simple, une progression géométrique convergente. Il semble que les séries, dans le domaine desquelles il a fait plus tard de si brillantes incursions, voulaient se venger par avance des violations de domicile qu'il devait leur infliger.

II.

Muni de ses deux baccalauréats, Poincaré entra dans la classe de Mathématiques élémentaires, où il commença à donner des preuves de ses aptitudes extraordinaires. A la fin de cette année scolaire 1871-1872, il obtint le premier prix de Mathématiques élémentaires au Concours général, où il avait à se mesurer avec les élèves de tous les lycées de France, et se présenta, pour faire plaisir à son professeur, à l'École Forestière, où il fut reçu deuxième.

L'année suivante, il entra en Mathématiques spéciales, où il rencontra deux jeunes camarades qui devaient se faire un nom dans la Science, Paul Appell, qui siège aujourd'hui à notre Bureau, et Colson, qui professe à l'École Polytechnique et a été plusieurs fois notre lauréat.

Dès la première leçon, nous dit M. Colson, le nouvel élève, un peu voûté déjà, perché sur les gradins supérieurs comme il convient à un nouveau, sortit de sa poche un faire part d'enterrement en guise de cahier de notes. Nous crûmes à un oubli; mais, les jours suivants, nous le vîmes avec stupéfaction griffonner quelques lignes sur la même feuille, facilement reconnaissable à sa bordure de deuil. Évidemment, le nouvel élève n'était pas sérieux. Il fallait s'en assurer. Car enfin, il avait eu le premier prix au Concours général, même sur les lycées de Paris. A la sortie d'un cours, on lui délégua un vieil élève de quatrième année pour lui demander une explication sur un point qui avait paru particulièrement obscur. Poincaré la donna immédiatement, sans réfléchir une minute, et partit en laissant son interlocuteur et les témoins dans un tel ébahissement que l'un d'eux se demanda : Comment fait-il?

De son côté, M. Appell nous fournit l'appréciation suivante :

Dès la rentrée, son intelligence se révéla immédiatement à son professeur Elliot, comme à nous ses condisciples; il avait le don génial d'apercevoir immédiatement, avec le détail particulier à chaque question, l'idée générale dont elle procède et la place qu'elle occupe dans l'ensemble. Il avait aussi cette simplicité, cette horreur de l'effet, ce bon sens lorrain, cette amitié sûre qu'il a conservés toute sa vie.

A la fin de cette année, Poincaré eut encore le premier prix au Concours général de Paris et des départements (1). Il fut reçu premier à l'École Polytechnique. Nous avons recueilli de diverses sources des renseignements sur la manière dont il passa ses examens.

Par pure curiosité, nous dit M. de Roche du Teilloy, j'assistai à son examen oral de Mathématiques; la salle, ordinairement presque vide, était comble, spectacle curieux. Il parlait lentement, s'arrêtant, fermant parfois les yeux, demandant la permission d'interrompre sa démonstration pour en essayer une autre dans un petit coin du tableau, puis s'écriant : « Non, décidément, j'en reviens à ma première démonstration, plus courte et plus élégante. » Venait-il de l'inventer? L'examinateur était émerveillé.

(1) Ce succès surprit agréablement ses parents, car notre Confrère leur avait annoncé que, n'ayant écrit qu'une page, il n'aurait aucune nomination. C'est sans doute à cette composition que se rapporte le propos suivant tenu par M. Rollier :

« Un jour, nous dit M. de Roche du Teilloy, je dînais à Paris chez un commun ami avec M. Rollier, inspecteur général des sciences pour l'Enseignement secondaire. « Vous avez à Nancy, me dit-il, un élève de Mathématiques spéciales extra» ordinaire. C'est moi qui ai corrigé les compositions du Concours général de » Mathématiques; eh bien! lors même que Poincaré eût fait des fautes de calcul, » qu'il n'eût point achevé sa copie, je l'aurais encore placé premier hors ligne, au» dessus des élèves de Paris, rien que pour la façon dont il avait posé la question. » Cet élève ira loin. »

De son côté, M. Colson nous a conservé le souvenir de l'examen que Poincaré passa avec M. Tissot, chargé d'interroger les candidats sur les Mathématiques élémentaires.

Avant d'interroger Poincaré, M. Tissot suspendit l'examen pendant trois quarts d'heure : le temps de préparer une question raffinée, pensions-nous. M. Tissot revint avec une question du deuxième Livre de Géométrie. Poincaré dessina un cercle informe, il marqua les lignes et les points indiqués par l'examinateur; puis, après s'être promené devant le tableau les yeux fixés à terre pendant assez longtemps, conclut à haute voix : Tout revient à démontrer l'égalité AB = CD. Elle est la conséquence de la théorie des polaires réciproques, appliquée aux deux droites.

« Fort bien, Monsieur, interrompit M. Tissot; mais je voudrais une solution plus élémentaire. » Poincaré se mit à repasser, non plus devant le tableau, mais devant la table de l'examinateur, face à lui, presque inconscient de ses actes, puis tout à coup développa une solution trigonométrique.

« Je désire que vous ne sortiez pas de la Géométrie élémentaire », objecta M. Tissot, et presque aussitôt satisfaction fut donnée à l'examinateur d'élémentaires, qui félicita chaleureusement l'examiné et lui annonça qu'il avait mérité la note maxima.

Il y a dans ces deux récits des détails dont la vérité sautera aux yeux de tous ceux qui ont connu Poincaré.

Comme son camarade Appell, il s'était présenté au concours de l'École Normale. C'est là que je fis sa connaissance, je venais d'être nommé maître de Conférences et j'étais pour la première fois membre du jury. Poincaré fut reçu cinquième seulement et Appell second. J'ai le souvenir bien précis de leurs examens et de l'impression que l'un et l'autre produisirent sur moi; mais comme tous mes collègues du jury, Briot, Bertin, Debray ne sont plus là, on comprendra très bien que je m'abstienne de tout détail.

Notre confrère Appell entra à l'École Normale; Poincaré, suivant sans doute l'exemple et les conseils de son oncle, choisit l'École Polytechnique, dont il devait devenir une des gloires les plus éclatantes.

Quelques-uns de ses camarades nous ont transmis des indications relatives à son séjour à cette École. Il continuait à ne pas prendre de notes aux Cours et, suivant une habitude que nous avons déjà remarquée, il travaillait fréquemment en se promenant dans les couloirs de l'École. Pendant la récréation, il se joignait volontiers à la bande compacte de ses camarades de Nancy, s'accrochant au bras droit de l'un, au bras gauche de l'autre, poursuivant ses pensées sans presque parler, ni sans s'émouvoir des discussions qui, à cette époque de crise, devenaient quelquefois fort vives.

Son inaptitude pour les exercices physiques, maniement d'armes, gymnastique, était grande. Elle était particulièrement marquée pour le dessin et avait failli empêcher son entrée à l'École (1). A la fin de l'année, ses camarades, qui l'aimaient beaucoup et connaissaient son heureux caractère, eurent l'idée d'organiser une exposition de ses œuvres. Les jeunes gens sont sans pitié comme les enfants. Sous une étude de cheval, ils avaient mis τουτο ιππος et sous une Académie τουτο ανηρ. J'aime à croire que ces indications étaient inutiles (2).

Cette faiblesse en dessin détermina son échec à l'examen final de Géométrie et de Stéréotomie. L'impossibilité de construire par points des droites à peu près convergentes, peut-être aussi des démonstrations de voyant qui l'amenaient au but sans considération intermédiaire, indisposèrent l'examinateur, M. de la Gournerie, et valurent à l'élève une note franchement mauvaise, qui lui fit perdre le premier rang. Le premier sorti de l'École fut Bonnefoi, qui devait être tué quelques années plus tard dans un accident de mine.

Poincaré entra à l'École des Mines en 1875. D'après ce que nous

(1) Le général Xardel nous rapporte, à ce sujet, ce propos que l'examinateur Abel Transon, ami de sa famille, avait tenu après l'examen de Poincaré à Nancy :

« Nancy, disait M. Transon, présente un candidat bien remarquable : c'est Poincaré. Mais nous sommes bien embarrassés. Il a un zéro pour le dessin et le zéro est éliminatoire. Pour le reste il est absolument hors de pair. S'il est reçu, il sera premier; mais sera-t-il reçu ? »

(2) Toutefois, il finit par se perfectionner. J'ai vu des dessins de lui qui ne sont pas mal. Poincaré, qui devait être pour ses enfants l'éducateur le plus assidu, le plus éclairé, quittant tous ses travaux pour s'occuper de leur instruction, leur distribuait ces dessins à titre de récompense.

savons de lui, on peut assurer qu'il s'acquitta avec conscience de ses devoirs professionnels. Son camarade Lallemand, aujourd'hui notre Confrère, nous apprend que, lui ayant un jour demandé des détails à propos d'un voyage d'études qu'il devait faire en Hongrie, où Poincaré était allé l'année précédente, celui-ci lui dicta, séance tenante, le programme le plus détaillé de tous les points où il devait s'arrêter, des établissements qu'il devait visiter et même des trains qu'il aurait à prendre, des hôtels qu'il devait choisir, de ceux qu'il fallait éviter.

III.

Tout en se préparant à être un bon ingénieur, Poincaré se tournait vers la Science, pour laquelle il était si bien doué. Ce qu'il faut admirer surtout dans ses débuts, c'est la décision, je ne crains pas de dire l'audace, avec laquelle il s'adresse aux questions les plus élevées, les plus difficiles et les plus générales. Négligeant de faire l'essai de ses forces sur des problèmes particuliers, il est de ceux qui, pour leurs coups d'essai, veulent des coups de maître; il va droit aux problèmes les plus importants, les plus essentiels; il ne craint pas de s'attaquer à ceux même dont la solution paraîtrait réservée à un lointain avenir.

Après avoir enlevé haut la main, en 1876, la licence ès sciences mathématiques, il débuta par un *Mémoire sur les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles*, qui fut inséré en 1878 au *Journal de l'École Polytechnique*.

Notre grand géomètre Cauchy avait renouvelé les bases de l'Analyse infinitésimale par son immortelle théorie des fonctions d'une variable imaginaire; mais, entraîné par ses recherches, il avait laissé à d'autres le soin d'appliquer et de développer ses idées. Victor Puiseux montra le premier, dans un Mémoire classique, comment les principes de Cauchy pouvaient conduire aux propriétés essentielles des fonctions algébriques et de leurs intégrales. Briot et Bouquet abordèrent ensuite l'application de ces mêmes principes à l'étude des différentes solutions des équations différentielles du premier ordre. Joseph Bertrand disait volontiers que

le Mémoire dans lequel les deux savants collaborateurs avaient exposé leurs résultats constituait le plus grand progrès qui eût été réalisé, depuis Euler, dans cette branche de l'Analyse. C'est par l'étude et le perfectionnement de ce travail magistral que débutait Henri Poincaré.

Dans la thèse qu'il présenta en 1878 à la Faculté de Paris pour obtenir le grade de docteur ès sciences mathématiques, il s'attaquait à une question encore plus difficile, celle de l'intégration des équations aux dérivées partielles à un nombre quelconque de variables indépendantes. Le jury comprenait Ossian Bonnet, Bouquet et l'auteur de cette Notice. On me fit l'honneur de me confier l'examen du travail.

Dès le premier coup d'œil, il me parut clair qu'il sortait de l'ordinaire et méritait amplement d'être reçu. Il contenait certainement assez de résultats pour fournir matière à plusieurs bonnes thèses. Mais, il ne faut pas craindre de le dire, si l'on veut donner une idée précise de la manière dont travaillait Poincaré, bien des points demandaient des corrections ou des explications. Poincaré était un intuitif. Une fois au sommet, il ne revenait jamais sur ses pas. Il se contentait d'avoir brisé les difficultés, et laissait aux autres le soin de tracer les routes royales qui devaient conduire plus facilement au but (1). Il fit bien volontiers le travail de correction et de déblaiement qui me paraissait nécessaire. Mais il m'a expliqué depuis qu'au moment où je le lui demandais, il avait en tête bien d'autres idées; il s'occupait déjà des grands problèmes dont il allait nous présenter la solution.

Quoi qu'il en soit, sa thèse se recommande par plusieurs notions nouvelles et importantes. J'en citerai deux seulement : celle des fonctions à espaces lacunaires, qui avait beaucoup frappé Hermite, et celle des fonctions algébroïdes, qui est appelée à jouer en Analyse un rôle des plus essentiels.

---

(1) Dans le bel éloge qu'il a consacré à Halphen, nous relevons à l'appui de ce que nous venons de dire la phrase suivante :

« Je n'ai jamais terminé un travail sans regretter la façon dont je l'avais rédigé ou le plan que j'avais adopté. »

Voir le Volume intitulé : *Savants et Écrivains*, p. 139.

Les deux Mémoires que je viens de rappeler décelaient un esprit original et profond et étaient le présage certain d'un bel avenir scientifique. Poincaré était tout désigné pour l'Enseignement supérieur. Aussi, quelques mois à peine après sa soutenance, le 1er décembre 1879, il était chargé du Cours d'Analyse à la Faculté des Sciences de Caen. Dans la période de six mois où il exerça les fonctions d'ingénieur des mines, et où il fut chargé en cette qualité du sous-arrondissement minéralogique de Vesoul, il se fit remarquer par son sang-froid et son amour du devoir. En dépit du danger qui le menaçait, il descendit dans un puits de mine, où une explosion de grisou avait fait 16 victimes et allumé l'incendie.

Quand je me reporte à cette année 1879, je songe aux espérances qu'elle nous donnait pour le développement des hautes études mathématiques dans notre pays. Deux géomètres, un peu plus jeunes que Poincaré, faisaient comme lui, et contre leur gré peut-être, l'ornement de nos Facultés de province. Pendant que Poincaré était à Caen, Paul Appell professait la Mécanique rationnelle à Dijon, Émile Picard enseignait l'Analyse infinitésimale à Toulouse. Berthelot, à qui ses fonctions d'inspecteur général donnaient autorité dans l'Enseignement supérieur, n'avait pas voulu que l'on pût reprocher à la Faculté de Paris de se recruter exclusivement en dehors des Facultés de province, et on lui avait donné satisfaction. Nos deux Confrères durent quitter Paris. Mais les règlements ne peuvent rien, le plus souvent, contre le mérite supérieur et la force des choses. Deux ans après, les trois jeunes gens nous revenaient pour rester définitivement attachés à la Faculté de Paris. Poincaré, en particulier, était nommé maître de Conférences d'Analyse au commencement de l'année scolaire 1881-1882. Quatre ans après, il était chargé du Cours de *Mécanique physique et expérimentale*; et enfin, en août 1886, il succédait à notre confrère Lippmann dans la Chaire de *Physique mathématique et Calcul des Probabilités*. Il devenait titulaire en même temps que nos deux confrères Boussinesq et Émile Picard.

IV.

Les travaux qu'il avait accomplis durant cette période justifiaient un avancement si rapide. Ils avaient pour objet la théorie des équations différentielles et aux différences partielles, la théorie générale des fonctions analytiques d'une ou de plusieurs variables, la Mécanique analytique et la Mécanique céleste, l'Algèbre et la Théorie des nombres. Tous contenaient des résultats entièrement neufs, des découvertes analytiques qui faisaient dire à un de nos maîtres : « Poincaré commence comme Cauchy. »

Nous citerons, en premier lieu, un travail tout à fait original sur les équations différentielles, présenté à l'Académie en 1880 et publié dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*.

Poincaré s'y place à un point de vue tout différent de celui qu'il a adopté dans son premier Mémoire; il admet que les coefficients de l'équation différentielle sont réels, et il se propose de construire et de discuter la forme générale des courbes réelles qui représentent les diverses solutions de l'équation différentielle. Le problème ainsi étudié est analogue à celui qui se présente en Géométrie analytique lorsqu'on veut reconnaître la forme générale d'une courbe d'après son équation, mais il est incomparablement plus difficile. Poincaré l'a abordé en commençant par examiner le cas où l'équation différentielle est du premier degré, c'est-à-dire où le coefficient différentiel est le quotient de deux polynomes.

Il a reconnu tout d'abord que les courbes représentées par l'équation différentielle sont, soit des courbes fermées, soit des spirales. Elles peuvent contenir trois sortes de points singuliers :

1° Les *cols*, par lesquels passent deux courbes définies par l'équation, et deux seulement;

2° Les *nœuds*, où viennent se croiser une infinité de courbes définies par l'équation;

3° Les *foyers*, autour desquels tournent ces courbes, en s'en rapprochant sans cesse comme le ferait une spirale logarithmique;

4° Exceptionnellement enfin, et seulement dans des cas très particu-

liers, se présentent en outre des *centres*, qu'entourent les courbes en s'enveloppant mutuellement.

Nous devons renoncer à dire ici comment l'Auteur étudie la distribution de ces différents points; comment il démontre, entre le nombre des cols, des foyers et des centres, une relation analogue à celle qui a été établie par Euler entre le nombre des faces, des sommets et des arêtes d'un polyèdre, comment enfin il étend tous ces résultats à des systèmes plus généraux d'équations différentielles; nous devons au contraire insister sur une proposition énoncée en 1882 dans une Note des *Comptes rendus* et qui nous paraît un des plus beaux résultats obtenus en Analyse depuis Cauchy.

De toutes les découvertes que les Mathématiciens ont faites au cours du XIX^e^ siècle, la plus féconde sans doute est celle que l'on doit à Cauchy relativement à la série de Taylor et aux conditions de sa convergence. On peut dire qu'elle a renouvelé toutes les branches de l'Analyse. En l'appliquant à un système quelconque d'équations différentielles, le grand géomètre avait établi que les solutions d'un tel système peuvent se développer en séries convergentes, ordonnées, par exemple, suivant les puissances de la différence entre la variable indépendante et sa valeur initiale; mais ces séries de Cauchy n'étaient convergentes, en général, que si le module de cette différence ne dépasse pas une certaine limite. Poincaré ne considère, il est vrai, que les solutions réelles d'un système quelconque d'équations différentielles algébriques à coefficients réels; mais il démontre que, dans ce cas, les solutions réelles peuvent se définir de la manière la plus complète par des séries *toujours* convergentes, ordonnées suivant les puissances d'une variable auxiliaire, que l'on peut même choisir d'une infinité de manières. Cette proposition, qu'il a appliquée lui-même au problème des trois corps, me paraît dominer toutes les recherches que l'on a entreprises depuis sur ce célèbre problème (1).

(1) Je ne sais si l'on a remarqué que, par une généralisation facile, on peut obtenir le théorème suivant :

Étant donné un système quelconque d'équations différentielles algébriques, à coefficients réels ou imaginaires, il est toujours possible d'obtenir pour toutes les inconnues des séries toujours convergentes ordonnées suivant les puissances d'une variable auxiliaire réelle si l'on suppose que l'une des variables est représentée par un point qui décrit une courbe algébrique, plus généralement si l'on établit une relation algébrique quelconque entre les parties réelles et les parties imaginaires de toutes les variables.

V.

Nous sommes obligé de passer sous silence bien d'autres recherches publiées pendant cette période de jeunesse, pour aborder la partie la plus brillante des travaux d'Henri Poincaré, celle qui concerne les *fonctions fuchsiennes* et *kleinéennes*.

L'Académie avait mis au concours, pour le grand prix des Sciences mathématiques à décerner en 1880, la question suivante :

Perfectionner en quelque point important la théorie des équations différentielles linéaires à une seule variable indépendante.

Le prix échut à Georges Halphen qui allait devenir, pour bien peu de temps, hélas! notre confrère. Mais Poincaré avait présenté au concours un travail où il avait adopté la fière devise de sa ville natale : *Non inultus premor*.

Dans ce Mémoire, qui fut retenu par la Commission et obtint la mention la plus honorable, il faisait connaître le résultat de ses premières études sur un problème qu'il n'avait pas craint de se poser, malgré son extrême généralité :

Intégrer toutes les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques.

Il serait trop long d'indiquer par quelle suite de déductions il fut conduit, pour le résoudre, à introduire de nouvelles transcendantes, *les fonctions fuchsiennes et kleinéennes*, dont la découverte constitue, aujourd'hui encore, son titre de gloire le plus éclatant. Je me bornerai à donner une idée de ces nouvelles fonctions, autant qu'on peut le faire, sans recourir à aucun signe mathématique.

La théorie des fonctions elliptiques nous avait fait déjà connaître les propriétés de la plus simple des fonctions fuchsiennes, le module de la fonction elliptique envisagé comme fonction du rapport des périodes. Cette *fonction modulaire* avait été complètement étudiée par Hermite qui avait fait connaître, en particulier, la remarquable propriété qu'elle possède, de se reproduire par des substitutions fractionnaires à coefficients entiers et au déterminant *un*. C'est cette propriété de la fonction modulaire (1) que généralise Poincaré en considérant des substitutions de même forme, mais à coefficients quelconques. La question se dédouble alors : il faut d'abord trouver tous les groupes discontinus formés de telles substitutions; il faut ensuite former les fonctions qui demeurent invariables quand on applique ces substitutions à la variable indépendante. C'est ce double problème que Poincaré résout avec une simplicité inespérée, créant ainsi une théorie qui embrasse comme cas très particulier les fonctions trigonométriques et les fonctions elliptiques. Son analyse lui permet d'énoncer les mémorables propositions suivantes qui, comme l'a dit notre confrère G. Humbert, lui donnent les clefs du monde algébrique :

Deux fonctions fuchsiennes qui se reproduisent lorsqu'on effectue sur la variable indépendante les substitutions d'un même groupe sont liées par une équation algébrique.

Inversement, les coordonnées d'un point d'une courbe algébrique quelconque s'expriment par des fonctions fuchsiennes et, par conséquent, par des fonctions uniformes d'un même paramètre.

Voici enfin les deux théorèmes qui le conduisent au but qu'il s'était proposé : l'intégration de toutes les équations linéaires à coefficients algébriques.

Toute fonction fuchsienne provient de l'inversion du quotient de deux solutions d'une équation linéaire du second ordre à coefficients algébriques.

L'intégrale générale de l'équation linéaire à coefficients algébriques d'un ordre quelconque peut être obtenue par les fonctions *zétafuchsiennes*.

(1) Il convient de ne pas oublier ici les recherches de M. H.-A. Schwarz sur la série hypergéométrique.

Cette dernière proposition attend aujourd'hui encore ceux qui en montreront toute la fécondité.

VI.

Les recherches précédentes suffiraient à la gloire de plusieurs géomètres, et pourtant elles ne représentent qu'une faible partie de celles que Poincaré avait produites avant d'arriver à l'Institut. Si je voulais les rappeler ici avec quelque développement, cette séance et plusieurs autres ne sauraient y suffire. Je reviendrai plus loin sur les découvertes relatives à la Physique mathématique et à la Mécanique céleste. En Analyse, je me bornerai à signaler les travaux de Poincaré sur la théorie des nombres, qui lui valurent l'honneur d'être placé sur les listes de la Section de Géométrie, alors qu'il n'avait que 27 ans; ses recherches d'Algèbre pure sur les fonctions homogènes et la règle des signes de Descartes; la démonstration, faite en collaboration avec M. Émile Picard, du célèbre théorème de Riemann sur les fonctions uniformes de n variables à $2n$ périodes; ses études sur les déterminants d'ordre infini, où il s'est rencontré avec M. Appell, sur les fonctions Θ à plusieurs variables, sur les fonctions hyperfuchsiennes introduites par M. Émile Picard, sur la réduction des intégrales abéliennes, sur les intégrales irrégulières des équations linéaires, etc.; je réserverai toutefois une mention spéciale à un Mémoire qu'Hermite préférait à tous les autres, celui où Poincaré démontre que toute fonction méromorphe de deux variables s'exprime par le quotient de deux fonctions entières. Même dans ce court résumé, il faut citer le travail où il démontre ce mémorable résultat :

Si l'on a une fonction analytique quelconque d'une variable, on peut toujours exprimer la fonction et la variable indépendante par des fonctions uniformes d'une troisième variable.

et aussi le célèbre Mémoire où il étend aux intégrales multiples la théorie des intégrales d'une fonction d'une variable imaginaire telle que Cauchy l'avait créée. La généralisation de cette théorie, qui est

le fondement de l'Analyse moderne, présentait de graves difficultés devant lesquelles tous les efforts des géomètres avaient jusque-là échoué. Poincaré fut le premier à les surmonter.

Toutes ces découvertes justifiaient l'appréciation qu'en fit M. Camille Jordan, lors de la dernière candidature du jeune géomètre.

Telle est, disait notre Confrère, dans ses traits essentiels l'œuvre accomplie par M. Poincaré. Elle est au-dessus des éloges ordinaires et nous rappelle invinciblement ce que Jacobi écrivait d'Abel, qu'il avait résolu des questions qu'avant lui personne n'aurait osé imaginer. Il faut en effet le reconnaître : nous assistons en ce moment à une révolution dans les Mathématiques de tous points comparable à celle qui s'est manifestée, il y a un demi-siècle, par l'avènement des fonctions elliptiques.

VII.

Poincaré ne pouvait pas ne pas avoir conscience de la haute valeur de ses écrits; d'autres auraient réclamé des récompenses, lui ne demandait rien. Nous le regardions tous comme le plus fort d'entre nous. Il n'a jamais cherché à nous devancer. Nul ne pouvait prévoir les vides nombreux que la mort allait faire dans la Section de Géométrie. Pour le faire arriver plus vite, pour lui ménager une place dans la Section d'Astronomie, on lui signalait les applications que les théories par lui découvertes pouvaient avoir en Mécanique céleste. Il suivait docilement ces indications, s'occupait du problème des trois corps, des figures des corps célestes, et trouvait tout naturel de laisser passer devant lui tous ses anciens.

Dès 1881, au moment du décès de Michel Chasles, la Section de Géométrie l'avait fait figurer sur ses listes de présentation. Il y avait été maintenu après le décès de Victor Puiseux, d'Alfred Serret, de Bouquet. La mort prématurée de Laguerre lui ménagea une place, et il fut élu, le 24 janvier 1887, par 31 suffrages sur 55 votants. Il entrait donc à l'Institut à l'âge de 32 ans.

Ce premier succès allait être suivi d'un autre non moins éclatant.

En 1885, le roi de Suède, S. M. Oscar II, préludant à la création de ces prix internationaux dont le nombre s'accroît chaque jour, avait

résolu de décerner le 21 janvier 1889, soixantième anniversaire de sa naissance, un prix à une découverte importante dans le domaine de l'Analyse mathématique. Ce prix devait consister en une médaille d'or portant l'effigie du roi et en une somme de 2500 couronnes. Une Commission, composée de notre illustre Associé étranger K. Weierstrass, membre de l'Académie de Berlin, de notre maître Charles Hermite et du rédacteur en chef des *Acta mathematica*, M. Mittag-Leffler, professeur à l'Université de Stockholm, était chargée du soin de réaliser les intentions de Sa Majesté et de dresser un programme du prix proposé. Elle indiqua quatre sujets différents entre lesquels pourraient choisir les concurrents.

Le premier de ces sujets était ainsi conçu :

Étant donné un système d'un nombre quelconque de points matériels qui s'attirent mutuellement suivant la loi de Newton, on propose, sous la supposition qu'un choc de deux points n'ait jamais lieu, de représenter les coordonnées de chaque point sous forme de séries procédant suivant quelque fonction connue du temps et qui convergent uniformément pour toute valeur réelle de la variable.

Ce problème, dont la solution étendra considérablement nos connaissances par rapport au système du monde, paraît pouvoir être résolu à l'aide des moyens analytiques que nous avons à notre disposition; on peut le supposer du moins, car Lejeune-Dirichlet a communiqué, peu de temps avant sa mort, à un géomètre de ses amis, qu'il avait découvert une méthode pour l'intégration des équations différentielles de la Mécanique, et qu'en appliquant cette méthode, il était parvenu à démontrer d'une manière absolument rigoureuse la stabilité de notre système planétaire. Malheureusement, nous ne connaissons rien sur cette méthode, si ce n'est que la théorie des oscillations infiniment petites paraît avoir servi de point de départ pour sa découverte (1). On peut pourtant supposer, presque avec certitude, que cette méthode était basée, non point sur des calculs longs et compliqués, mais sur le développement d'une idée fondamentale et simple, qu'on peut, avec raison, espérer de retrouver par un travail persévérant et approfondi (2).

(1) KUMMER, *Gedächtnissrede auf Lejeune-Dirichlet* (*Abhandlungen der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1860, p. 35).

(2) Nous devons dire, au sujet de la seconde partie de cet énoncé, que, dans une Note communiquée le 5 avril 1888 à l'Académie de Berlin, Kronecker a présenté quelques critiques au sujet de l'appréciation qui y est donnée sur les découvertes

Dans le cas pourtant où le problème proposé ne parviendrait pas à être résolu pour l'époque du concours, on pourrait décerner le prix pour un travail dans lequel quelque autre problème de Mécanique serait traité de la manière indiquée et résolu complètement.

Les trois autres sujets proposés par la Commission étaient tous de nature à intéresser Poincaré. Le troisième, par exemple, réclamait un développement des résultats fondamentaux que nous avons rappelés plus haut et que la théorie des équations différentielles devait à Briot et Bouquet, et nous avons déjà signalé tout ce que Poincaré avait déjà fait dans cette voie; quant au quatrième, c'était l'étude d'un point particulier de cette belle théorie des fonctions fuchsiennes qu'il avait lui-même introduite dans la Science. Ces deux derniers sujets avaient donc de quoi le tenter; il choisit le premier, le plus difficile sans doute, mais aussi, mais surtout, le plus séduisant. Usant toutefois de la latitude qui lui était donnée, il élargit et restreignit à la fois le problème proposé en introduisant dans son Mémoire une étude générale des équations de la Dynamique et se bornant à approfondir le plus souvent des cas particuliers du problème des trois corps : ceux, il est vrai, qui sont les plus importants pour la pratique astronomique.

Nous reviendrons plus loin sur le contenu de son Mémoire, pour le rapprocher des autres travaux qu'on lui doit sur la Mécanique céleste; mais, dès à présent, nous devons faire connaître l'appréciation que le juge le plus difficile et le plus compétent en cette matière portait sur la pièce envoyée au Concours, dans une lettre adressée à M. Mittag-Leffler, secrétaire de la Commission (1).

Le Mémoire *sur le problème des trois corps et les équations de la Dynamique*

---

inédites de Dirichlet. Cette Note de Kronecker a été publiée dans les *Sitzungsberichte* de l'Académie de Berlin pour 1888. On pourra consulter aussi, dans le Tome XXXV des *Acta mathematica*, l'Article de M. Mittag-Leffler intitulé : *Zur Biographie von Weierstrass*. Nous n'avons pas la prétention de trancher le débat; mais il nous semble que Weierstrass, à qui l'on doit évidemment la rédaction donnée dans le texte, avait été un peu trop précis.

(1) *Voir* l'Article cité plus haut : *Zur Biographie von Weierstrass*.

avec la devise : *Nunquam praescriptos transibunt sidera fines*, écrivait Weierstrass, est sans contredit un travail de haute portée, bien qu'il ne contienne pas la solution du problème général auquel a trait la première des questions posées, mais qu'il traite seulement un cas particulier de ce problème.

Et plus loin :

D'après cela, je ne fais aucune difficulté de déclarer que le Mémoire en question est digne du prix. Vous pouvez dire à votre souverain que ce travail ne peut, à la vérité, être considéré comme fournissant la solution complète de la question proposée, mais qu'il est cependant d'une telle importance que *sa publication ouvrira une ère nouvelle dans l'histoire de la Mécanique céleste*. Le but que se proposait Sa Majesté en ouvrant le Concours peut donc être considéré comme atteint.

En communiquant ces résultats à notre secrétaire perpétuel, Joseph Bertrand, dans une lettre datée du 18 février 1889 et insérée au Tome 108 des *Comptes rendus*, M. Mittag-Leffler ajoutait :

Le Mémoire couronné comptera parmi les plus importantes productions mathématiques du siècle et sera un nouveau titre à l'estime de tous les géomètres que M. Poincaré s'est acquise par d'éclatantes découvertes.

Nous ne saurions clore l'histoire de ce mémorable Concours sans rappeler qu'une seconde récompense, consistant en une médaille d'or avec l'inscription : *In sui memoriam*, était accordée par le Roi au Mémoire de M. Appell, intitulé : *Sur les intégrales de fonctions à multiplicateurs et leur application au développement des fonctions abéliennes en séries trigonométriques*.

Ce beau et savant travail, ajoutait M. Mittag-Leffler, est l'œuvre d'un géomètre de premier ordre et fera pareillement un grand honneur à la Science française.

Sur la proposition de l'Académie, le Gouvernement soulignait le succès de notre Patrie en nommant les deux lauréats chevaliers de la Légion d'honneur.

VIII.

A partir de ce moment, le nom d'Henri Poincaré pénétra dans le grand public, qui s'accoutuma à regarder notre Confrère, non plus

comme un géomètre de haute espérance, mais comme un grand savant dont la France avait le droit d'être fière. Toujours modeste cependant, Poincaré ne cessait de travailler, abordant dans sa chaire de Physique mathématique des sujets sans cesse renouvelés. Les étudiants de nos Facultés s'attachent de préférence aux professeurs dont les travaux font autorité. Non contents d'écouter les leçons de Poincaré, ses élèves voulurent qu'elles fussent utiles à d'autres et résolurent de les imprimer. C'est ainsi que parurent successivement les Ouvrages suivants :

Potentiel et mécanique des fluides, Cours professé pendant l'année 1885-1886; la deuxième édition de cet Ouvrage a été rédigée par M. *A. Guillet*.

Théorie mathématique de la lumière, Tome I, comprenant les leçons professées à la Sorbonne pendant le premier semestre 1887-1888 et rédigées par M. *J. Blondin*.

Thermodynamique, leçons professées pendant le premier semestre 1888-1889, rédigées par M. *J. Blondin*.

Électricité et Optique, Tome I : *Les théories de Maxwell et la théorie électromagnétique de la lumière*, leçons professées pendant le second semestre 1888-1889, rédigées par M. *J. Blondin*.

Tome II : *Les théories de Helmholtz et les expériences de Hertz*, leçons professées pendant le second semestre 1889-1890 et rédigées par M. *B. Brunhes*.

Capillarité, leçons professées pendant le second semestre 1888-1889, et rédigées par M. *J. Blondin*.

Leçons sur la théorie de l'élasticité, professées pendant le premier semestre 1890-1891, et rédigées par MM. *E. Borel* et *Jules Drach*.

Théorie mathématique de la lumière, Tome II : *Nouvelles études sur la diffraction. Théorie de la dispersion de Helmholtz*, leçons professées pendant le premier semestre 1891-1892, rédigées par MM. *Lamotte* et D. *Hurmuzescu*.

Théorie des tourbillons, leçons professées pendant le second semestre 1891-1892 et rédigées par M. *Lamotte*.

Les Oscillations électriques, leçons professées pendant le premier semestre 1892-1893, rédigées par M. *Ch. Maurain*.

Théorie analytique de la propagation de la chaleur, leçons professées pendant le premier semestre 1893-1894, rédigées par MM. *Rouyer* et *Baire*.

Calcul des Probabilités, leçons professées à la Sorbonne pendant le second semestre 1893-1894 et rédigées par M. *A. Quiquet*.

Théorie du potentiel newtonien, leçons professées pendant le premier semestre 1894-1895, rédigées par MM. *Édouard Le Roy* et *Georges Vincent*.

Électricité et Optique. *La lumière et les théories électrodynamiques*, leçons professées en 1899 et rédigées par MM. *J. Blondin* et *E. Néculcéa*.

Il n'était pas dans la nature de l'esprit de Poincaré de faire comme beaucoup de ses collègues de la Sorbonne, et de publier lui-même ses cours en les amenant au plus haut degré de perfection. On doit donc savoir beaucoup de gré à l'*Association amicale des élèves et des anciens élèves de la Faculté des Sciences* du soin qu'elle a pris de recueillir et de publier presque toutes les leçons de notre Confrère. Elle a ainsi rendu un service inappréciable aux hautes études scientifiques. Poincaré corrigeait, sans doute, les épreuves de ces publications. En tout cas, il ajoutait fréquemment des préfaces pleines de sens et d'esprit, qui mériteront d'être toujours lues.

L'une d'elles pourtant, celle qu'il plaça en tête des deux Volumes intitulés *Électricité et Optique*, lui valut de bien vives critiques de la part de notre maître commun, Joseph Bertrand. Poincaré, en parlant de l'œuvre géniale de Maxwell, y avait émis quelques appréciations qui se trouvaient en contradiction complète avec les idées les plus enracinées, si j'ose dire, de Bertrand. Abordant la grande question des explications mécaniques de l'Univers, il affirmait, en s'appuyant sur des considéra-

tions qui, je l'avoue, me paraissent bien fragiles, que, si un phénomène comporte une explication mécanique, il en admettra une infinité d'autres, rendant également bien compte de toutes les particularités relevées par l'expérience.

Entre toutes ces explications possibles, disait-il, comment faire un choix pour lequel le secours de l'expérience nous fait défaut? Un jour viendra peut-être où les physiciens se désintéresseront de ces questions, inaccessibles aux méthodes positives, et les abandonneront aux métaphysiciens. Ce jour n'est pas venu; l'homme ne se résigne pas si aisément à ignorer éternellement le fond des choses.

Bertrand était de ceux qui ne se résignent pas.

Puisque je viens de parler de Bertrand, je dois signaler un volume de Poincaré, qui a dû, par contre, lui faire grand plaisir. Ce sont les *Leçons sur le Calcul des probabilités*, dont une seconde édition a paru, il y a deux ans, revue et augmentée par l'Auteur. Ce Traité de Poincaré ne me paraît pas avoir été estimé à toute sa valeur. J'en suis assuré, il figurera dignement à côté des chefs-d'œuvre de Laplace et de Bertrand. J'y signalerai particulièrement une introduction très fine sur les lois et la définition du hasard, des Chapitres sur la probabilité du continu, où Poincaré éclaircit un paradoxe célèbre proposé par Bertrand; ceux aussi qu'il a consacrés à la théorie des erreurs et à la loi célèbre de Gauss. Bertrand s'était borné à critiquer et à démolir. Poincaré a commencé à reconstruire.

IX.

On se ferait une idée bien incomplète de l'activité de notre Confrère pendant cette période de sa vie si on la limitait aux cours précédents, auxquels il faut joindre ceux qu'il a professés à l'École Polytechnique, de 1904 à 1908, et ceux qu'il a donnés à l'École professionnelle des Postes et Télégraphes, de 1904 à 1910. Nous entendons fréquemment, avec quelque impatience, émettre des appréciations inexactes sur nos cours de la Sorbonne, et en général sur ceux de nos Universités. Dans les Universités, nous dit-on, on enseigne la science toute faite; c'est ailleurs, au Collège de France, au Muséum, que l'on enseigne la science

qui se fait. En admettant que cette démarcation entre la science qui se fait et celle qui est faite n'ait pas quelque chose de puéril, rien n'est moins juste que cette opinion, surtout si on la prend dans son sens le plus littéral. Les cours de nos Universités embrassent toute la science, celle qui est faite et celle qui se fait. Poincaré, comme d'autres professeurs que je pourrais citer, ne négligeait certes pas les travaux déjà publiés qui se rapportaient au sujet de ses leçons. Mais ses cours étaient originaux et contenaient toujours une bonne part de ses découvertes personnelles. Et celles de ces découvertes qui ne pouvaient entrer dans son enseignement de Physique mathématique, il les a exposées dans des Mémoires originaux qui ne le cèdent en rien à ses plus beaux écrits de Mathématiques pures.

Pourquoi d'ailleurs insister sur cette distinction entre la Physique mathématique et les Mathématiques pures? Les plus grands succès des mathématiciens dans leur domaine propre ne sont-ils pas dus à leur étude des problèmes que leur propose l'expérience? Il convient de rappeler ici les paroles de l'un de mes illustres prédécesseurs :

L'étude approfondie de la nature, a dit Joseph Fourier, est la source la plus féconde des découvertes mathématiques. Non seulement, cette étude, en offrant aux recherches un but déterminé, a l'avantage d'exclure les questions vagues et les calculs sans issue; elle est encore un moyen assuré de former l'Analyse elle-même et d'en découvrir les éléments qu'il importe le plus de connaître et que cette science doit toujours conserver. Ces éléments fondamentaux sont ceux qui se reproduisent dans tous les effets naturels.

Le développement de l'Analyse moderne a confirmé et mis dans tout leur jour ces idées pénétrantes de Fourier. Le plus illustre émule de Cauchy, Bernhard Riemann, lorsqu'il a voulu pénétrer la nature et les propriétés des fonctions algébriques, a emprunté à la Physique mathématique un postulat auquel on peut donner la forme suivante : *Étant donnée une plaque plane homogène, il est toujours possible de trouver pour elle un équilibre de température dans lequel chaque point du contour de la plaque prend une température donnée* a priori.

Pour établir cette proposition, qu'un physicien pourrait être tenté de vérifier par l'expérience, Riemann s'était contenté d'un raisonnement

que Gauss avait employé autrefois, que Dirichlet avait admis; c'est pour cela que Riemann donne à son postulat le nom de *principe de Dirichlet*. Mais l'exactitude de sa démonstration, qui devait être complétée plus tard par M. Hilbert, fut contestée par plusieurs géomètres, au nombre desquels il faut compter Weierstrass. Les résultats obtenus par Riemann étaient d'une telle importance que l'on dut s'empresser de chercher une démonstration irréprochable du principe sur lequel il s'appuyait. Les recherches des géomètres n'ont pas été infructueuses, et l'on peut, aujourd'hui, faire le cours le plus intéressant en exposant seulement les diverses démonstrations qui ont été données du principe de Dirichlet. Dans le développement de cette belle question, les travaux de Poincaré tiendront une place des plus importantes. Non seulement, en inventant sa méthode *du balayage*, il a donné une démonstration tout à fait originale du principe de Dirichlet; mais encore il a fait une application des plus intéressantes de ce principe, convenablement élargi, en démontrant, comme nous l'avons rappelé plus haut, que si l'on a une fonction analytique quelconque, la fonction et la variable dont elle dépend peuvent être exprimées par des fonctions uniformes d'une variable auxiliaire.

Je viens de parler du principe de Dirichlet; dans ses études d'intérêt fondamental, notre confrère Émile Picard a su l'étendre à des classes entières d'équations, qui apparaissent dans quelques-uns des problèmes les plus essentiels de l'Analyse et de la Physique mathématique. Ici encore, comme dans bien d'autres circonstances, ses travaux se sont trouvés en contact avec ceux d'Henri Poincaré. L'importance du sujet m'engage à entrer dans quelques détails.

Lorsque Lagrange, à l'âge de 18 ans, inventait le Calcul des Variations, il préparait aux géomètres une série de problèmes qui devaient, comme ceux de la Physique mathématique, contribuer puissamment au développement de l'Analyse elle-même. Les deux plus simples de ces problèmes, ceux qui se présentaient immédiatement à l'esprit, étaient la détermination du plus court chemin reliant deux points sur une surface et celle de la surface d'aire minima passant par un contour donné. Ces deux belles questions, je n'ai pas besoin de le rappeler, ont donné naissance à des recherches de la plus haute signification. Bornons-nous à la

seconde, qui seule nous intéresse ici. On sait déterminer en bloc toutes les surfaces d'aire minima; mais, si l'on veut obtenir en particulier celle d'entre elles qui passe par un contour donné, on se heurte à des difficultés qui n'ont pu être levées jusqu'ici que dans des cas très spéciaux. Supposons pourtant que ces difficultés aient été surmontées et que l'on connaisse la surface minima passant par le contour donné. Pour résoudre le problème posé par Lagrange, il faudra rechercher si la surface obtenue a une aire réellement plus petite que toute autre surface infiniment voisine passant par le même contour. Pour les lignes géodésiques, le problème correspondant avait été résolu par Jacobi; mais, pour les surfaces minima, c'est M. H.-A. Schwarz qui, en 1885, dans un admirable Mémoire, digne hommage offert à Weierstrass à l'occasion de son 70e anniversaire, l'a, le premier, abordé et résolu.

Quand elles sont posées par la nature des choses, les questions les plus diverses en apparence se trouvent liées souvent par des rapports étroits. En même temps que le problème qu'il s'était proposé, M. Schwarz avait implicitement résolu le suivant : Une membrane, tendue sur une courbe plane, se met à vibrer : déterminer le son fondamental, c'est-à-dire celui qui se produit lorsque la membrane vibrante ne présente ni nœud, ni ligne nodale. M. Émile Picard, qui s'occupait depuis longtemps, nous l'avons déjà dit, de toutes les équations de la Physique mathématique, montra comment on pouvait déterminer le premier harmonique de la membrane, celui qui suit le son fondamental. Poincaré, dans des travaux qui eurent pour couronnement un grand Mémoire *Sur les équations de la Physique mathématique*, inséré en 1894 aux *Rendiconti* de Palerme, entra à son tour dans la lice et détermina, par une analyse de grande portée, tous les sons que peut rendre la membrane. Son Mémoire est, au jugement de tous, un des plus beaux qu'il ait écrits. Si on le rapproche de celui qu'il publia l'année suivante dans les *Acta mathematica* (*La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet*), on doit reconnaître que ces beaux travaux ont préparé la mémorable découverte de M. Fredholm, relative aux équations intégrales, en démontrant l'avantage qu'il y a à introduire un paramètre λ par rapport auquel la solution peut s'exprimer par une fonction méromorphe, en mettant en évidence le

rôle des fonctions dites *fondamentales*, en permettant pour la première fois le calcul complet de la hauteur des différents sons émis par une membrane. Notre Confrère a fait connaître aussi plusieurs solutions nouvelles du problème de Dirichlet; il a, le premier, montré la généralité et la véritable signification de la méthode de Neumann. J'ajoute que, dans une Note insérée aux *Comptes rendus*, il a appliqué cette méthode de Neumann au problème de l'équilibre d'un corps élastique et indiqué comment on pourrait obtenir ainsi une solution complète de ce problème.

X.

Les travaux précédents, d'autres encore que je laisse de côté, appartiennent à cette partie de la Physique mathématique où le géomètre emprunte au physicien proprement dit des principes, considérés comme rigoureusement vrais, pour en faire les applications que lui suggère son imagination. Cette branche de la Physique mathématique n'est pas très en honneur auprès de certains physiciens de laboratoire.

Je me souviens qu'il y a bien longtemps, l'un d'eux m'interrogeant sur mes travaux, je lui répondis que j'étudiais la belle solution donnée par Lamé pour le problème de la distribution de la chaleur à l'intérieur d'un ellipsoïde. « Eh quoi! me dit-il, vous vous imaginez que, nous autres physiciens, s'il nous prend envie de vérifier les lois de la propagation de la chaleur, nous allons nous amuser à prendre un corps aussi compliqué que votre ellipsoïde. Nous nous en garderons bien. Une bonne plaque parallélépipédique fera bien mieux notre affaire, et nous permettra de nous passer de tous vos calculs. » Je gardai le silence; j'aurais pu toutefois lui répondre qu'il serait peut-être, à l'avenir, conduit à construire un appareil délicat de Physique dans lequel figurerait un ellipsoïde dont les diverses parties seraient à des températures différentes. J'aurais pu lui rappeler aussi l'argument classique tiré de la théorie des sections coniques, qui ont été étudiées pendant tant de siècles pour l'amour de l'art, avant d'intervenir dans les lois de Képler.

Le physicien, dont je viens de parler, était pourtant un excellent esprit qui, dans tous ses travaux, a fait l'usage le plus habile des

méthodes géométriques. Il comprenait mieux que personne l'utilité qu'il y a pour l'expérimentateur à avoir auprès de lui un mathématicien, un conseiller discret, pour l'aider à interpréter ses expériences et à démêler les résultats, souvent très complexes, qu'elles fournissent.

Jamais ce rôle de conseiller et de critique n'a pu être plus utile qu'en ce moment où la Physique expérimentale traverse une crise profonde dans laquelle viennent sombrer les principes qui paraissaient le mieux établis. Nous sommes loin des atomes insécables d'Épicure et de Lucrèce; et nos théories modernes n'ont rien trouvé de mieux que de faire de l'atome un univers semblable à celui qui a été décrit par Newton (1). Dans cette période de transition, gardons-nous d'être trop exigeants. Sans aller peut-être aussi loin que Poincaré, qui considérait les hypothèses comme des outils et admettait volontiers des théories contradictoires, ne renouvelons pas l'erreur qu'ont commise quelques-uns de nos grands chimistes, en rejetant, sous prétexte qu'elle contenait des lacunes,

(1) Ces théories nous rappellent invinciblement le célèbre passage des *Pensées* de Pascal : Qu'est-ce qu'un homme dans l'infini? Mais, pour lui présenter un autre prodige aussi étonnant, qu'il recherche dans ce qu'il connaît les choses les plus délicates. Qu'un ciron lui offre, dans la petitesse de son corps, des parties incomparablement plus petites, des jambes avec des jointures, des veines dans ces jambes, du sang dans ces veines, des humeurs dans ce sang, des gouttes dans ces humeurs, des vapeurs dans ces gouttes; que, divisant encore ces dernières choses, il épuise ses forces en ces conceptions, et que le dernier objet où il peut arriver soit maintenant celui de notre discours; il pensera peut-être que c'est là l'extrême petitesse de la nature. Je veux lui faire voir là-dedans un abîme nouveau. Je lui veux peindre, non seulement l'univers visible, mais l'immensité qu'on peut concevoir de la nature, dans l'enceinte de ce raccourci d'atome. Qu'il y voie une infinité d'univers, dont chacun a son firmament, ses planètes, sa terre, en la même proportion que le monde visible; dans cette terre, des animaux, et enfin des cirons, dans lesquels il retrouvera ce que les premiers ont donné; et trouvant encore dans les autres la même chose, sans fin et sans repos; qu'il se perde dans ces merveilles, aussi étonnantes dans leur petitesse que les autres par leur étendue; car qui n'admirera que notre corps, qui tantôt n'était pas perceptible dans l'univers, imperceptible lui-même dans le sein du tout, soit à présent un colosse, un monde, ou plutôt un tout, à l'égard du néant où l'on ne peut arriver.

cette théorie atomique qui a transformé la Chimie moderne. Voilà une faute que Poincaré n'aurait jamais commise; car nul, à ma connaissance, n'a eu plus d'ouverture d'esprit, plus de propension à accueillir et à discuter les idées nouvelles, plus de désir de mettre en évidence la part qu'elles contiennent de vérité, le rôle utile qu'elles peuvent jouer dans le développement de nos connaissances. C'est ce que va montrer d'ailleurs une revision rapide de ses principaux travaux.

Ses cours d'abord : *Électricité et Optique*, les *Oscillations électriques* et les autres Volumes, contiennent la discussion et la mise au point des théories de Maxwell, de Hertz, de Larmor, de Lorentz. Dans la *Thermodynamique*, il donne deux démonstrations différentes du théorème de Clausius, relatif aux cycles non réversibles, dont la généralité était alors contestée par Joseph Bertrand. On doit signaler aussi, dans la *Théorie de la propagation de la Chaleur*, plusieurs méthodes nouvelles pour les développements en séries de fonctions fondamentales.

Dans un de ses plus beaux Mémoires, inséré aux *Acta mathematica*, sur la polarisation par diffraction, Poincaré interprète certaines expériences de notre Confrère, M. Gouy. La théorie de Fresnel est, comme on sait, purement géométrique : je veux dire que, si elle était rigoureuse, la nature des parois et même l'épaisseur des écrans ne devraient exercer aucune influence sur les phénomènes. Les expériences de notre Confrère avaient montré qu'il n'en était pas toujours ainsi. Poincaré donne l'explication des faits observés par M. Gouy et montre combien, dans certains cas, la théorie de Fresnel devient insuffisante. M. Sommerfeld a repris depuis la méthode d'Henri Poincaré pour étudier tous les cas intermédiaires entre les deux extrêmes : celui de Fresnel, qui est le plus ordinaire, et celui de M. Gouy.

Il y a lieu de rappeler aussi les travaux sur les *Ondes hertziennes* que Poincaré a publiés dans les *Archives de Genève*. On avait d'abord comparé les ondes hertziennes aux ondes sonores ou lumineuses qui ne sont pas amorties. Les prévisions auxquelles on a été ainsi conduit n'ont pas été confirmées par l'expérience, et ces contradictions ont paru un moment fort embarrassantes. Signalons, par exemple, le phénomène de la résonance multiple, découvert par MM. Sarazin et de la Rive. Poincaré, le

premier, a montré que ces contradictions s'expliquaient par l'amortissement des ondes. Le rôle de cet amortissement est d'ailleurs capital dans la théorie de la télégraphie sans fil.

Citons encore, à propos des ondes hertziennes, une Note des *Comptes rendus* où, l'un des premiers tout au moins, notre Confrère a introduit la notion du *potentiel retardé*.

Les Conférences qu'il a données à l'École de Télégraphie nous montrent également combien il se tenait près de l'expérience, et quels services il a rendus aux praticiens.

L'équation, dite *des télégraphistes*, nous fait connaître, comme on sait, les lois de la propagation d'une perturbation électrique dans un fil. Poincaré intègre cette équation par une méthode générale qui peut s'appliquer à un grand nombre de questions analogues. Le résultat varie suivant la nature du récepteur placé sur la ligne, ce qui se traduit mathématiquement par un changement dans les équations aux limites, mais la même méthode permet de traiter tous les cas.

Dans une seconde série de Conférences, Poincaré a étudié le récepteur téléphonique; un point qu'il a mis particulièrement en évidence, c'est le rôle des courants de Foucault dans la masse de l'aimant.

Enfin, dans une troisième série de Conférences, il a traité les diverses questions mathématiques relatives à la télégraphie sans fil : émission, champ en un point éloigné ou rapproché, diffraction, réception, résonance, ondes dirigées, ondes entretenues (¹).

Le cours que notre Confrère avait fait en 1893 sur la théorie cinétique des gaz n'a pas été publié; mais il a écrit, dans la *Revue générale des Sciences* du regretté Louis Olivier et dans le *Journal de Physique*, plusieurs Articles de haut intérêt sur ce sujet. Il y examine et y réfute certaines objections que Lord Kelvin avait faites au théorème de Boltzmann-Maxwell et cherche à concilier cette théorie avec l'irréversibilité des phénomènes, ce qui est la grande difficulté. Pour éclaircir la question, il examine ce qui se passe dans différentes hypothèses plus ou moins

(¹) Ces Conférences ont été publiées dans la collection des cours de l'École et dans la revue *L'Éclairage électrique*.

éloignées du cas de la nature, telles que le serait un gaz à une dimension, ou un gaz très raréfié.

Dans un Mémoire *Sur la théorie de Lorentz et le principe de réaction* (1), Poincaré eut à examiner diverses conséquences de cette théorie; il a montré qu'elle est incompatible avec le principe de l'égalité de l'action et de la réaction, et comment il conviendrait de modifier ce principe pour le mettre d'accord avec cette théorie. Ce résultat a servi de point de départ à M. Abraham pour le calcul par lequel il a démontré que la masse des électrons est d'origine électrodynamique et que leur masse transversale diffère de leur masse longitudinale.

Il a également publié, dans les *Rendiconti* de Palerme, un Mémoire *Sur la dynamique de l'électron*, où il a réussi à donner à la théorie de Lorentz une parfaite cohérence, en écartant les dernières difficultés.

Dans quelques Articles insérés à l'*Éclairage électrique*, notre Confrère a abordé diverses questions d'Électrotechnique; il a mis en évidence le rôle des contacts glissants dans les phénomènes dits « d'induction unipolaire », sur lesquels les techniciens discutaient à perte de vue; il a montré que la théorie ordinaire de la Commutation était inexacte; d'un autre côté, il a établi rigoureusement, et d'une manière générale, l'impossibilité d'une machine auto-excitatrice sans collecteur et sans condensateur.

J'arrête là cette énumération, quelque incomplète qu'elle puisse être; mais je ne saurais oublier que Poincaré, en même temps qu'il publiait les Mémoires originaux dont je viens de signaler les plus importants, les accompagnait de Conférences, d'Articles de vulgarisation destinés à faire connaître les conclusions de ses études. Je reviendrai plus loin sur les Conférences; mais je me reprocherais d'oublier un résultat auquel notre Confrère ajoutait quelque prix. Notre regretté Secrétaire perpétuel, Henri Becquerel, qui nous a été si prématurément enlevé, se plaisait à répéter que, s'il avait entrepris les travaux qui lui ont valu l'honneur d'être lauréat du prix Nobel, et qui ont ouvert aux physiciens tout un

(1) Ce Mémoire fait partie du *Recueil de Travaux offert à M. Lorentz à l'occasion du 25e anniversaire de son doctorat.*

ordre de recherches appelé à transformer complètement notre connaissance de la Nature, c'est à la suite de la lecture d'un Article de la *Revue générale des Sciences*, où Poincaré se demandait s'il n'y aurait pas un lien entre la phosphorescence et les rayons X et s'il ne conviendrait pas de faire des expériences sur les corps fluorescents (1).

XI.

Jusqu'à la fin de sa vie, notre Confrère a poursuivi, sans se lasser, ce rôle de directeur et de conseiller qu'il avait assumé en Physique théorique. Un de ses derniers Articles, daté de janvier 1912, est consacré à la théorie des *Quanta*, cette originale conception de M. Planck, qui nous éloigne si profondément de toutes celles auxquelles nous étions habitués. Et cependant, malgré leur nombre et leur étendue, ces recherches de Physique ne suffisaient pas à l'occuper tout entier. Elles lui laissaient des loisirs, paraît-il; car, entre temps, il publiait les travaux les plus variés sur les diverses branches de l'Analyse : par exemple, sur l'intégration algébrique des équations différentielles, sur les nombres complexes, sur la distribution des nombres premiers. Il n'a pas consacré moins de six Mémoires à ce qu'il appelait l'*Analysis situs* ou *Géométrie de situation*. C'est une branche très difficile de la science mathématique, où l'on étudie les relations qui subsistent dans une figure lorsqu'on la déforme d'une manière quelconque sans lui imposer ni déchirure ni duplicature. On sait le magnifique usage que Riemann a fait de l'*Analysis situs* dans ses travaux sur les fonctions algébriques. Poincaré, qui y avait été conduit par ses études sur l'intégration qualitative des équations différentielles,

(1) Cet Article est du 30 janvier 1896. Voici le passage auquel on fait allusion :

« Ainsi c'est le verre qui émet les rayons Röntgen et il les émet en devenant fluorescent. Ne peut-on alors se demander si tous les corps dont la fluorescence est suffisamment intense n'émettent pas, outre les rayons lumineux, des rayons X de Röntgen, *quelle que soit la cause de leur fluorescence?* Les phénomènes ne seraient plus liés à une cause électrique. Cela n'est pas probable, mais cela est possible, et sans doute assez facile à vérifier. »

lui portait, si j'ose dire, une affection particulière; elle joue d'ailleurs un grand rôle dans ses études philosophiques, comme dans un grand nombre de ses travaux mathématiques.

A ces recherches déjà si nombreuses, notre Confrère trouvait moyen d'en ajouter d'autres encore; à partir de 1890, il s'attacha aussi à reprendre et à développer les découvertes de Mécanique céleste qui lui avaient valu de si éclatants succès. C'est ainsi qu'il publia, en 1892 et 1893, les deux premiers Volumes de son grand Ouvrage : *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*. Lorsque la mort prématurée de notre ami commun, Félix Tisserand, laissa vacante en 1896 la Chaire d'*Astronomie mathématique* à la Sorbonne, j'avais l'honneur d'être doyen de la Faculté des Sciences. Au nom de tous mes collègues, je demandai à Poincaré de laisser sa Chaire de Physique mathématique à notre Confrère Boussinesq, qui devait l'occuper avec éclat, et de prendre celle de Tisserand, pour laquelle nous n'avions personne qui pût lui être comparé. Il consentit sans se faire prier. Je l'ai dit ailleurs, et je suis heureux de le redire ici, avec lui, on n'avait jamais de difficulté. Je n'ai jamais reçu de lui ni plainte, ni réclamation d'aucune sorte; s'il s'agissait de rendre service à un collègue, il était toujours prêt. Dans sa nouvelle Chaire, il acheva son grand Ouvrage sur les *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, dont il publia le troisième Volume en 1899. Mais il en avait déjà commencé un autre, plus pratique : les *Leçons de Mécanique céleste*, en trois Volumes, qui parurent de 1905 à 1910. Enfin, il laissa publier par ses élèves deux Cours de haut intérêt : l'un, *Sur les figures d'équilibre d'une masse fluide;* l'autre, *Sur les hypothèses cosmogoniques*. Il faut que nous disions quelques mots de chacun de ces Volumes.

Les *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* sont le développement du Mémoire couronné de 1889. Suivant le jugement que nous avons déjà rapporté de Weierstrass, cet Ouvrage ouvre une ère nouvelle dans la Mécanique céleste. Il mérite d'être placé à côté de la *Précession des Équinoxes* de d'Alembert, de la *Mécanique céleste* de Laplace. On ne pourrait en faire l'analyse détaillée que devant des hommes du métier. Je vais pourtant essayer d'indiquer quelles armes nouvelles Poincaré a forgées pour les géomètres.

Jacobi, suivant la voie ouverte en Mécanique analytique par Lagrange, dont on ne louera jamais assez les immortels travaux, avait constitué une théorie qui paraissait un des Chapitres les plus achevés de la Dynamique. Pendant 50 ans, nous avons vécu sur les théorèmes de l'illustre géomètre allemand, en les appliquant et les étudiant sous toutes leurs faces, mais sans rien leur ajouter d'essentiel. C'est Poincaré qui, le premier, a brisé ces cadres rigides dans lesquels la théorie paraissait enfermée et lui a ménagé des échappées de vue, de nouvelles fenêtres sur le monde extérieur. Il introduit ou utilise, dans l'étude des problèmes de Dynamique, différentes notions : l'une, qui avait été donnée antérieurement et qui, d'ailleurs, ne s'applique pas seulement à la Mécanique, celle des *équations aux variations*, c'est-à-dire des équations différentielles linéaires qui déterminent les solutions du problème infiniment voisines d'une solution donnée; l'autre, celle des *invariants intégraux*, qui lui appartient entièrement et joue dans ces recherches un rôle capital (1). A ces notions fondamentales viennent s'en ajouter d'autres, notamment celles qui concernent les solutions, dites « périodiques », pour lesquelles les corps dont on étudie le mouvement reprennent, au bout d'un certain temps, leurs positions et leurs vitesses relatives.

Ce qui nous rend ces solutions si précieuses, nous dit Poincaré, c'est qu'elles sont, pour ainsi dire, la seule brèche par où nous puissions pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable.

Lagrange nous avait déjà fait connaître, pour le problème des trois corps, une solution de ce genre, dans laquelle le triangle formé par les trois corps demeure toujours semblable à lui-même, et cette solution avait été étudiée par Laplace au Livre X de la *Mécanique céleste*. Un astronome américain de grande valeur, M. Hill, en avait signalé une autre qui a une plus grande importance pratique, puisqu'elle s'applique au système formé par le Soleil, la Terre et la Lune (2). Poincaré démontre

(1) Liouville et Boltzmann avaient déjà reconnu l'existence d'un invariant intégral particulier, mais sans s'élever à aucune théorie générale.

(2) *American Journal of Mathematics*, t. I.

l'existence de trois sortes différentes de solutions périodiques qui lui servent, en quelque sorte, de levier pour l'étude approfondie du problème. Il y a là quelque chose d'analogue à la célèbre méthode de variation des constantes. Seulement ici, au lieu d'opérer sur des constantes, ce sont des solutions particulières que l'on prend comme point de départ.

Parmi les propositions obtenues par Poincaré, il convient d'en signaler une qui mettra fin à des tentatives sans cesse répétées : *il n'existe pour le problème des trois corps aucune autre intégrale analytique que celles, au nombre de* 10, *qui, dès le début, ont été obtenues par les géomètres.*

XII.

Dans l'Introduction de l'Ouvrage que nous venons d'analyser, Poincaré avait admirablement défini le but qu'il voulait atteindre :

> Le véritable but de la Mécanique céleste, nous dit-il, n'est pas de calculer les éphémérides, car on pourrait alors se contenter d'une prévision à brève échéance, mais de reconnaître si la loi de Newton est suffisante pour expliquer tous les phénomènes.

Dans son second Ouvrage, les *Leçons de Mécanique céleste*, il se rapproche du point de vue qui convient à l'astronome praticien. Ces *Leçons* ne sont autre chose que le développement, rédigé par lui-même pour les deux premiers Volumes, de ses cours de la Sorbonne. On y remarquera surtout un exposé magistral de la théorie des perturbations et des recherches les plus modernes relatives au mouvement, si difficile à discipliner, de notre satellite. J'insisterai plus particulièrement sur le Tome III, qui a été rédigé par M. E. Fichot, ingénieur hydrographe de la Marine, et qui est consacré tout entier à la théorie si difficile des marées. Poincaré la reprend par des méthodes nouvelles; il compare ses résultats aux observations et termine par un Chapitre très original où il étudie, après G. Darwin, l'influence des marées sur le sens et la durée de rotation des corps célestes. Cette discussion est de grande conséquence, notamment dans l'examen de certaines parties de la célèbre hypothèse cosmogonique de Laplace. On a aussi à tenir compte des indications qu'elle fournit, si

l'on veut étudier l'importante question de la stabilité du système solaire. Lagrange, Laplace, Poisson avaient envisagé ce problème en purs mathématiciens : ils supposaient que les astres fussent réduits à des points, se déplaçant dans un milieu vide de toute matière. Poincaré, qui comprenait mieux que personne l'intérêt philosophique de cette belle recherche, s'en est occupé toute sa vie; mais il a reconnu que, pour résoudre le problème de la stabilité, tel que l'Univers nous le présente, il faut se placer au point de vue du physicien et tenir compte de bien des éléments qu'avaient négligés les géomètres. Dans cette discussion, Delaunay l'a montré le premier, l'influence des marées produites par les actions mutuelles des corps célestes joue un rôle prépondérant. On pourra lire là-dessus une Notice des plus intéressantes, insérée en 1898 par notre Confrère dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*.

Ce travail sur les marées me suggère une remarque singulière, qui mettra toutefois en évidence l'universalité des aptitudes de notre Confrère. Notre division mathématique comprend, comme vous le savez, cinq sections : Géométrie, Mécanique, Astronomie, Physique, Géographie et Navigation. Il avait auparavant tous les titres pour figurer dans les quatre premières. Son travail sur les marées venait lui donner des droits à entrer dans la cinquième.

XIII.

Les leçons sur *les figures d'équilibre d'une masse fluide*, que Poincaré a professées en 1900 et qui ont été rédigées par M. L. Dreyfus, contiennent l'exposé des recherches qu'il avait commencées quinze ans auparavant sur l'équilibre d'une masse fluide, animée d'un mouvement uniforme de rotation autour d'un axe, et dont les molécules s'attirent mutuellement suivant la loi de Newton. Parmi toutes les découvertes de Poincaré, celles qui se rapportent à cette belle question sont peut-être les plus populaires. Elles l'ont conduit, en effet, à des résultats précis, définitifs, bien propres à exciter l'admiration de tous ceux, et ils sont nombreux, qui s'intéressent à l'Astronomie.

Le problème était posé depuis Newton. On est conduit à en chercher

la solution lorsqu'on veut déterminer la forme des planètes, en admettant, comme on peut le supposer, qu'elles aient été fluides primitivement. Maclaurin avait montré, comme on sait, qu'une masse fluide homogène peut rester en équilibre si sa forme est celle d'un ellipsoïde de révolution; et ce résultat avait été complété par Clairaut, puis par d'Alembert et Laplace, qui montrèrent qu'à toute vitesse de rotation, pourvu qu'elle ne dépasse pas une certaine limite, correspondent deux ellipsoïdes de cette nature, et deux seulement. Lagrange, dans sa *Mécanique analytique*, commence cette recherche en supposant que la forme d'équilibre soit celle d'un ellipsoïde à trois axes inégaux; mais au cours de son analyse, un raisonnement, dont il a dû lui-même reconnaître l'insuffisance, le conduit à se restreindre au cas où l'ellipsoïde est de révolution.

Un de ses continuateurs, M. de Pontécoulant, en reprenant, dans son *Exposition du Système du monde*, l'analyse de Lagrange, avait précisé beaucoup trop et déclaré nettement que l'ellipsoïde doit être *nécessairement* de révolution. Cette affirmation trop tranchante éveilla l'attention de l'illustre Jacobi. Celui-ci, qui était animé de l'esprit de contradiction si utile aux chercheurs, voulut étudier l'hypothèse écartée et constata, à son grand étonnement, que l'ellipsoïde à trois axes inégaux pouvait donner une solution du problème étudié.

Pendant longtemps, nos connaissances sur ce sujet se bornèrent à celle des deux figures ellipsoïdales dont nous venons de parler, sans qu'on sût rien d'ailleurs sur les conditions de stabilité de ces ellipsoïdes. On ignorait s'il y avait d'autres formes possibles, lorsque M. Mathiessen en 1859 et, plus tard, MM. Thomson et Tait, dans la deuxième édition de leur *Traité de Philosophie naturelle*, indiquèrent qu'aux figures déjà connues on pouvait en ajouter de nouvelles, d'une forme analogue à celle d'un tore.

Tel était l'état de la question lorsque Poincaré s'en occupa en 1885 pour lui faire faire un progrès décisif. Sa méthode et ses résultats sont d'une extrême élégance. Voici comment il les a résumés lui-même (1) :

(1) La citation qui suit est empruntée à l'Ouvrage posthume qui a été publié cette année même par les soins de notre savant Correspondant, M. Mittag-Leffler, et qui est intitulé : Henri Poincaré, *Analyse de ses travaux scientifiques*. Voici quelques renseignements sur la genèse de cet Ouvrage.

La Notice que Poincaré a consacrée à Halphen, une des plus belles et des plus touchantes qu'il ait écrites, se termine par les lignes suivantes :

« Les Notices scientifiques que publient les candidats à l'Académie ne sont d'ordinaire que de sèches nomenclatures, et les Académiciens ne les lisent que par devoir. Celle d'Halphen, je ne crains pas de le dire, est écrite avec autant d'esprit que de logique, et sa lecture a été un plaisir, même pour les savants adonnés à des études très différentes. »

Ces éloges que Poincaré donne ici à Halphen sont certes bien mérités. Mais c'est à lui-même qu'il aurait dû aussi les adresser. Car c'est lui, mes souvenirs sur ce point sont bien précis, qui a pris, dès 1884, l'initiative de faire précéder la liste de ses travaux d'aperçus généraux sur leur classification et sur le but même qu'il avait voulu atteindre. L'exemple qu'il avait donné a été suivi par Halphen, et par d'autres encore.

Il y a une dizaine d'années, M. Mittag-Leffler avait eu l'idée de demander à quelques savants des Notices écrites par eux-mêmes sur leurs travaux et sur les idées générales qui les avaient guidés dans leurs recherches. Poincaré répondit à l'appel qui lui était ainsi adressé en remaniant son ancienne Notice de candidature, et c'est son manuscrit qu'a publié M. Mittag-Leffler. Ce sera un précieux document pour l'Histoire des Sciences.

H. P. — II.

On reconnaît d'abord que les diverses figures d'équilibre d'une masse fluide forment des séries linéaires; dans une même série, ces figures dépendent d'un paramètre variable. Telles sont la série des ellipsoïdes de révolution et celle des ellipsoïdes de Jacobi. Mais il peut arriver qu'une même figure appartienne à la fois à deux séries différentes. C'est alors une *figure d'équilibre de bifurcation*.

A chaque figure est attachée une suite infinie de coefficients que j'appelle *coefficients de stabilité*, parce que la condition de la stabilité, c'est qu'ils soient tous positifs. Quand un de ces coefficients s'annule, c'est que la figure correspondante est de bifurcation.

Ainsi, si, en suivant une série de figures d'équilibre, on voit s'annuler un des coefficients de stabilité, on saura qu'il existe une autre série de formes d'équilibre à laquelle appartient la figure de bifurcation.

Un autre résultat, c'est que les deux séries linéaires, dont cette figure fait partie, échangent leur stabilité. Si, en suivant l'une des séries, on ne rencontre que des équilibres stables jusqu'à la figure de bifurcation, on n'y trouvera plus ensuite que des

figures instables. Les figures stables appartiendront à l'autre série. Ces principes, appliqués à divers problèmes traités par Laplace, m'ont permis d'en compléter la solution.

. . . . . .

Je ne puis mieux résumer tous ces résultats qu'en faisant l'hypothèse suivante :

Imaginons une masse fluide se contractant par refroidissement, mais assez lentement pour rester homogène et pour que la rotation soit la même dans toutes ses parties.

D'abord très voisine d'une sphère, la figure de cette masse deviendra un ellipsoïde de révolution qui s'aplatira de plus en plus, puis, à un certain moment, se transformera en un ellipsoïde à trois axes inégaux. Plus tard, la figure cessera d'être ellipsoïdale et deviendra piriforme jusqu'à ce qu'enfin la masse, se creusant de plus en plus dans sa partie médiane, se scinde en deux corps distincts et inégaux (1).

L'hypothèse précédente ne peut certainement s'appliquer au système solaire. Quelques astronomes ont pensé qu'elle pourrait être vraie pour certaines étoiles doubles et que des étoiles doubles du type de β de la Lyre présenteraient des formes de transition analogues à celles dont nous venons de parler.

Dans un de mes Mémoires, j'ai montré qu'aucune forme d'équilibre stable n'est possible si la vitesse de rotation dépasse une certaine limite.

On peut faire de ce principe une application aux anneaux de Saturne. Clerk Maxwell a démontré que ces anneaux ne peuvent être solides, et que, s'ils sont fluides, leur densité ne peut dépasser $\frac{3}{1000}$ de celle de la planète. D'autre part, je démontre que, si les anneaux sont fluides, ils ne peuvent être stables que si leur densité est supérieure au $\frac{1}{12}$ de celle de Saturne. L'analyse semble donc confirmer l'hypothèse de M. Trouvelot, qui considère les anneaux comme formés d'une multitude de satellites extrêmement petits et ne croit pas pouvoir expliquer autrement certaines apparences observées.

XIV.

Pour terminer cette analyse des travaux astronomiques de Poincaré, je dois encore parler de ses *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques* faites à la Sorbonne en 1910, recueillies par M. H. Vergne et parvenues déjà à leur seconde édition. De tout temps, l'homme s'est préoccupé de ses origines et de celles du monde où il est placé. Son besoin de savoir

(1) L'un d'eux se rapproche de plus en plus d'une sphère, l'autre s'allonge en forme de pointe.

est impérieux, et lorsqu'il ne peut parvenir à une connaissance certaine par la méthode scientifique, il s'élance en quelque sorte vers la vérité, il essaye de la deviner, il imagine des hypothèses plus ou moins plausibles pour pénétrer dans le domaine qu'il ne peut conquérir par des procédés réguliers. C'est ce qui explique le succès qu'ont toujours obtenu auprès de la foule les conjectures sur la manière dont l'Univers a été formé. Le rôle du savant, quand il aborde ce genre de considérations, consiste à examiner les théories, proposées souvent par des rêveurs ; à rechercher jusqu'à quel point elles sont d'accord avec les lois de la Mécanique générale ; à essayer, s'il se peut, de les modifier de manière à établir cet accord. Tel est le point de vue auquel se place Poincaré.

Parmi les hypothèses sans nombre qui ont été successivement présentées, il faut placer au premier rang celle que Laplace a fait connaître, dès 1796, dans l'*Exposition du Système du Monde*. Poincaré en discute tous les points avec une pénétration et une précision admirables, en s'aidant des résultats qu'il a obtenus dans la théorie des figures d'équilibre et dans celle des marées. Malgré quelques difficultés, l'hypothèse de Laplace demeure victorieuse ; elle s'imposerait même, dans ses grandes lignes tout au moins, si notre système solaire constituait à lui seul tout l'Univers. Mais depuis Laplace, nos connaissances astronomiques se sont prodigieusement agrandies. De son temps, une étoile dans le ciel n'était qu'un point sur la sphère céleste ; ses deux coordonnées, et sa parallaxe quand on pouvait la déterminer, c'est-à-dire trois constantes au plus pour chaque astre, voilà tout ce que nous donnait l'observation. C'était l'époque de l'Astronomie mathématique, qui a permis tout de même de belles découvertes et qui a pu nous renseigner notamment sur le déplacement propre de notre système solaire. Mais aujourd'hui, grâce à l'Analyse spectrale, ce ne sont plus deux ou trois constantes, c'est toute une fonction définissant le spectre de l'étoile, que nous permet d'atteindre l'observation. A côté de l'Astronomie de position est venue se placer l'Astronomie physique, qui nous donne les renseignements les plus précieux sur la constitution chimique, la composition minéralogique des étoiles et des nébuleuses ; sur les étoiles multiples, colorées et variables ; sur leur déplacement dans le ciel, sur leurs mouvements en profondeur.

Nous sommes au début seulement de ces études si attrayantes, et déjà les résultats obtenus ont suscité des hypothèses cosmogoniques, présentées par une foule de savants : Helmholtz, Lord Kelvin, Sir Norman Lockyer, Schuster, Arrhenius, Kapteyn, Sée, Schiaparelli. Toute conclusion serait prématurée, et Poincaré n'en donne aucune; mais il fallait un savant tel que lui pour suivre, avec autant de pénétration, ces discussions qui exigent la réunion des connaissances du géomètre, du physicien et même du géologue.

XV.

J'arrêterai là, mes chers Confrères, l'analyse bien sommaire que j'ai pu vous faire des travaux que Poincaré a publiés en Mathématiques pures, en Physique, en Astronomie. Ces travaux présentent une telle variété que, lorsque l'on consulte les tables de nos *Comptes rendus* pendant les trente dernières années, on est tenté de lui attribuer ceux même que son père, son oncle et son cousin présentaient en même temps que lui. Si je voulais être complet, il me resterait, après avoir essayé de vous faire connaître le savant, à vous présenter le philosophe. Mais je ne dois pas oublier que notre Confrère appartenait aussi à la première de nos Académies, que l'étendue de son œuvre mérite plus d'un commentateur, et je me suis promis de me limiter à ce qui ne peut être dit que devant notre Compagnie. Sans manquer à ce dessein, je vais vous indiquer comment il fut conduit à sa Métaphysique par les études qu'il entreprit sur la Géométrie non euclidienne, lorsqu'il eut à créer sa magistrale théorie des fonctions fuchsiennes.

Ce monument qu'on appelle les « Éléments d'Euclide », et qui a résisté au travail de tant de siècles, ne ressemblait pas à ces édifices où une simple couche de stuc recouvre et dissimule des matériaux inférieurs. Il était si bien, et je dirai si loyalement construit, que chacun pouvait l'étudier dans toutes ses parties et formuler toutes les critiques que suggérait son examen. D'Alembert se plaisait à dire que la définition de la ligne droite donnée par Euclide était l'écueil et le scandale de la Géométrie. Les plus grands géomètres se sont attaqués surtout au célèbre

postulatum d'Euclide relatif à la théorie des parallèles, pour essayer de le démontrer. On n'ignore pas les tentatives infructueuses de Legendre; on connaît moins celles de Lagrange, mais Biot nous donne à leur égard le renseignement suivant (1) :

> Lagrange, dit-il, tira un jour de sa poche un papier qu'il lut à l'Académie et qui contenait une démonstration du fameux postulatum d'Euclide relatif à la théorie des parallèles. Cette démonstration reposait sur un paralogisme évident, qui parut tel à tout le monde, et probablement Lagrange le reconnut pendant sa lecture; car, lorsqu'il eut fini, il mit le papier dans sa poche et n'en parla plus. Un instant de silence universel suivit, et l'on passa à d'autres sujets.

Ce passage de Biot, un autre de Laplace dans l'*Exposition du Système du Monde*, nous montrent qu'au commencement du siècle dernier les géomètres français croyaient à la possibilité d'une démonstration du fameux postulatum d'Euclide. Il n'y avait à cette époque en Europe que l'illustre Gauss, qui fût en possession de la vérité. Ses méditations l'avaient conduit à cette conclusion qu'en supprimant le postulatum d'Euclide et conservant les autres axiomes, on est conduit à une géométrie qui peut se développer indéfiniment sans présenter de contradiction. Gauss n'a rien publié de ses idées; mais elles devaient être retrouvées d'une manière indépendante, et presque simultanément, vers 1830, par deux géomètres d'origine bien différente, le Russe Lobatschefsky et le Hongrois Bolyai. Riemann devait venir plus tard créer une géométrie nouvelle, à côté de celle d'Euclide et de Gauss. Il a eu de nombreux imitateurs, et nous comptons aujourd'hui une foule de géométries différentes, tout aussi cohérentes les unes que les autres. Ces découvertes des géomètres ont beaucoup contribué à former, je n'ose dire, à rectifier les théories des philosophes relatives à l'origine et à la formation de nos connaissances. Mais au temps de ma jeunesse, elles étaient encore combattues et contestées. Un savant modeste, Jules Houël, dont l'amitié m'honora et dont je conserve précieusement le souvenir, a beaucoup contribué à les faire connaître et à les répandre dans notre

(1) Biot, *Mélanges scientifiques et littéraires*, t. II, p. 263.

pays. D'autre part, Beltrami, qui les introduisit en Italie, où elles avaient trouvé un précurseur dans la personne de Saccheri qui vivait au XVIII[e] siècle, mais où elles rencontraient beaucoup de contradicteurs, essaya de répondre aux objections en montrant une surface, la *pseudo-sphère*, où la Géométrie non euclidienne se trouve en quelque sorte réalisée par les propriétés des géodésiques. La réponse n'était pas topique; car la surface de Beltrami a des limites et, en Géométrie non euclidienne, le plan et la ligne droite n'en ont pas.

C'est M. Félix Klein qui fit disparaître ces objections en montrant, dans un beau Mémoire, qu'une géométrie inventée par l'illustre Cayley, et dans laquelle c'est une conique, appelée *l'absolu*, qui fournit les éléments de toutes les mesures et permet, en particulier, de définir la distance de deux points, donne la représentation la plus parfaite, la plus adéquate, de la Géométrie non euclidienne.

D'autre part, une transformation des plus simples, connue depuis 1864, permet de transformer la Géométrie de Cayley en une autre dans laquelle les lignes droites sont remplacées par des cercles normaux à une sphère fixe (1). C'est cette Géométrie qu'adopta Poincaré dans ses études philosophiques et dans ses travaux sur les fonctions fuchsiennes. Il sut lui donner la forme la plus saisissante, qu'on nous saura gré de reproduire.

Supposons, dit-il, un monde renfermé dans une grande sphère et soumis aux lois suivantes :

La température n'y est pas uniforme; elle est maxima au centre et elle diminue à mesure qu'on s'en éloigne, pour se réduire au zéro absolu quand on atteint la sphère où ce monde est renfermé.

Je précise davantage la loi suivant laquelle varie cette température. Soit R le rayon de la sphère limite; soit r la distance du point considéré au centre de cette sphère. La température absolue sera proportionnelle à $R^2 - r^2$.

(1) *Voir* la traduction allemande du premier Ouvrage philosophique de Poincaré : Wissenschaft und Hypothese. *Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von* F. *und* L. Lindemann. Zweite Auflage. Leipzig, Teubner, 1906, p. 258 et suiv.

Je supposerai de plus que, dans ce monde, tous les corps aient le même coefficient de dilatation, de telle façon que la longueur d'une règle quelconque soit proportionnelle à sa température absolue.

Je supposerai enfin qu'un objet transporté d'un point à un autre dont la température est différente se met immédiatement en équilibre calorifique avec son nouveau milieu.

Rien, dans ces hypothèses, n'est contradictoire ou inimaginable. Un objet mobile deviendra alors de plus en plus petit à mesure qu'on se rapprochera de la sphère limite.

Observons d'abord que, si ce monde est limité au point de vue de notre géométrie habituelle, il paraîtra infini à ses habitants.

Quand ceux-ci, en effet, veulent se rapprocher de la sphère limite, ils se refroidissent et deviennent de plus en plus petits. Les pas qu'ils font sont donc aussi de plus en plus petits; de sorte qu'ils ne peuvent jamais atteindre la sphère limite.

Je ferai encore une autre hypothèse, je supposerai que la lumière traverse des milieux diversement réfringents, et de telle sorte que l'indice de réfraction soit inversement proportionnel à $R^2 - r^2$. Il est aisé de voir que, dans ces conditions, les rayons lumineux ne seraient pas rectilignes, mais circulaires.

Dans le milieu ainsi imaginé par Poincaré, les êtres fictifs dont il nous parle, s'ils faisaient de la géométrie, adopteraient la Géométrie non euclidienne. Les lignes droites, les rayons lumineux de la Géométrie ordinaire, seraient remplacés par des cercles orthogonaux à la sphère limite, les plans par des sphères orthogonales à cette même sphère.

Ces constatations conduisirent Poincaré à réfléchir sur les bases de la Géométrie et sur les axiomes qu'elle emploie. Pour lui, les axiomes ne sont pas autre chose que des conventions, je préférerais dire des définitions plus ou moins complètes, des éléments idéaux que notre imagination construit en s'appuyant sur l'expérience.

Les démonstrations que nous venons de rappeler montraient avec la dernière évidence qu'on peut ramener, l'une à l'autre, les deux Géométries euclidienne et non euclidienne, et qu'il ne peut se révéler dans le développement de l'une d'elles aucune contradiction qui n'existe aussi dans l'autre. Mais alors surgissait nécessairement une autre question. Puisque nous employons en géométrie des éléments qui, bien que sug-

gérés par l'expérience, sont des créations de notre esprit, qui pourra nous assurer que nous ne sommes pas égarés et que le développement logique de nos conceptions ne finira pas par nous conduire à des résultats contradictoires. Toute difficulté à cet égard me paraît levée par le mémorable travail que M. Hilbert a consacré à l'ensemble de nos axiomes géométriques (1).

XVI.

Mes chers Confrères, l'analyse précédente, à la fois si longue et si incomplète, vous aura pourtant, je l'espère, donné une idée de l'étendue et de l'importance des travaux d'Henri Poincaré.

On peut se demander comment, dans une vie relativement si courte, il a pu écrire plus de 30 Volumes et près de 500 Mémoires, répandus dans les Recueils du monde entier. Je ne connais que Berthelot dont la production soit comparable à la sienne. J'ai vécu à côté et dans l'intimité de ces deux grands hommes. Ce qui m'a le plus frappé, c'est la prodigieuse activité de leur esprit, la rapidité de leurs conceptions. J'ai vu Poincaré à la Sorbonne, au Bureau des Longitudes, à l'Académie. Partout, quand on lui demandait de résoudre une difficulté, sa réponse partait avec la rapidité de la flèche. Lorsqu'il écrivait un Mémoire, il le rédigeait tout d'un trait, se bornant à quelques ratures, sans revenir sur ce qu'il avait écrit. Au reste, il nous a donné des renseignements, d'une valeur inappréciable pour le philosophe et le biologiste, sur la manière dont il travaillait (2). Vous avez dû remarquer que j'ai pris plaisir à m'effacer devant lui et à multiplier les citations. Permettez-m'en une

(1) Poincaré fut amené en 1904 à faire un rapport sur les études de M. Hilbert, qui ont valu à ce géomètre pénétrant la médaille Lobatschefsky, décernée par la Société physico-mathématique de Kazan.

(2) M. le Dr Toulouse, qui a examiné par les méthodes de la Psychologie physiologique plusieurs hommes célèbres, Zola, Berthelot, Dalou, Rodin, Puvis de Chavannes, Saint-Saëns, Alphonse Daudet, Jules Lemaître, Pierre Loti, etc., a consacré tout un Volume en 1910 à Poincaré. *Voir* Henri Poincaré, par le Dr Toulouse, Paris, E. Flammarion.

nouvelle; elle aura l'avantage de vous éclairer sur la genèse de sa plus belle découverte.

Depuis quinze jours, nous dit-il, je m'efforçais de démontrer qu'il ne pouvait exister aucune fonction analogue à ce que j'ai appelé depuis les *fonctions fuchsiennes*; j'étais alors fort ignorant. Tous les jours, je m'asseyais à ma table de travail, j'y passais une heure ou deux : j'essayais un grand nombre de combinaisons et je n'arrivais à aucun résultat. Un soir, je pris du café noir, contrairement à mon habitude; je ne pus m'endormir, les idées surgissaient en foule; je les sentais comme se heurter, jusqu'à ce que deux d'entre elles s'accrochassent, pour ainsi dire, pour former une combinaison stable. Le matin, j'avais établi l'existence d'une classe de fonctions fuchsiennes, celles qui dérivent de la série hypergéométrique. Je n'eus plus qu'à rédiger les résultats, ce qui me prit quelques heures.

Je voulus ensuite représenter ces fonctions par le quotient des deux séries; cette idée fut parfaitement consciente et réfléchie; l'analogie avec les fonctions elliptiques me guidait. Je me demandai quelles devaient être les propriétés de ces séries si elles existaient, et j'arrivai sans difficulté à former les séries que j'ai appelées *thétafuchsiennes*.

A ce moment, je quittai Caen, que j'habitais alors, pour prendre part à une course géologique entreprise par l'École des Mines. Les péripéties du voyage me firent oublier mes travaux mathématiques; arrivés à Coutances, nous montâmes dans un omnibus pour je ne sais quelle promenade. Au moment où je mettais le pied sur le marchepied, l'idée me vint, sans que rien dans mes pensées antérieures parût m'y avoir préparé, que les transformations dont j'avais fait usage pour définir les fonctions fuchsiennes étaient identiques à celles de la Géométrie non euclidienne. Je ne fis pas la vérification, je n'en aurais pas eu le temps, puisque à peine dans l'omnibus je repris la conversation commencée; mais j'eus tout de suite une entière certitude. De retour à Caen, je vérifiai le résultat à tête reposée pour l'acquit de ma conscience.

Je me mis alors à étudier des questions d'arithmétique sans grand résultat apparent et sans soupçonner que cela pût avoir le moindre rapport avec mes études antérieures. Dégoûté de mon insuccès, j'allai passer quelques jours au bord de la mer et je pensai à autre chose. Un jour, en me promenant sur la falaise, l'idée me vint, toujours avec le même caractère de brièveté, de soudaineté et de certitude immédiate, que les transformations arithmétiques des formes quadratiques ternaires indéfinies étaient identiques à celles de la Géométrie non euclidienne.

Étant revenu à Caen, je réfléchis sur ce résultat et j'en tirai les conséquences;

l'exemple des formes quadratiques me montrait qu'il y avait des groupes fuchsiens autres que ceux qui correspondent à la série hypergéométrique, je vis que je pourrais leur appliquer la théorie des fonctions thétafuchsiennes, et que, par conséquent, il existait des fonctions thétafuchsiennes autres que celles qui dérivent de la série hypergéométrique, les seules que je connusse jusqu'alors. Je me proposai naturellement de former toutes ces fonctions. J'en fis un siège systématique et j'enlevai, l'un après l'autre, tous les ouvrages avancés; il y en avait un cependant qui tenait encore et dont la chute devait entraîner celle du corps de place. Mais tous mes efforts ne servirent qu'à me mieux faire connaître la difficulté, ce qui était déjà quelque chose. Tout ce travail fut parfaitement conscient.

Là-dessus, je partis pour le Mont-Valérien, où je devais faire mon service militaire. J'eus donc des préoccupations très différentes. Un jour, en traversant le boulevard, la solution de la difficulté qui m'avait arrêté m'apparut tout à coup. Je ne cherchai pas à l'approfondir immédiatement, et ce fut seulement après mon service que je repris la question. J'avais tous les éléments, je n'avais qu'à les rassembler et à les ordonner. Je rédigeai donc mon Mémoire définitif d'un trait et sans aucune peine [1].

XVII.

Comme il est naturel, tant de publications éclatantes sur tant de sujets divers avaient répandu dans le monde entier la renommée de notre Confrère. Il appartenait à divers titres à une quarantaine d'Académies ou de Sociétés savantes, françaises ou étrangères. A l'occasion de divers anniversaires, il avait reçu des diplômes de docteur des Universités de Cambridge, Christiania, Kolozsvar, Oxford, Glascow, Bruxelles, Stockholm, Berlin. La Société royale astronomique lui décerna en 1900 sa médaille d'or, qui lui fut remise en séance solennelle par le regretté Sir George Darwin, à qui ses recherches personnelles permettaient

[1] Les savants directeurs de l'*Enseignement mathématique*, MM. Laisant et Fehr, avaient eu l'idée d'ouvrir une enquête sur les habitudes d'esprit et les méthodes de travail des Mathématiciens. Poincaré répondit à leur demande en faisant, sous les auspices de l'*Institut général psychologique*, une Conférence sur l'*invention en mathématiques*. Cette Conférence, riche d'idées fines et ingénieuses, forme le Chapitre III de l'Ouvrage qu'il a publié sous le titre : *Science et Méthode*. C'est à elle que nous avons emprunté la citation qui figure dans le texte.

d'admirer avec le plus de compétence les découvertes astronomiques de notre compatriote. Un an après, la Société royale de Londres lui décernait la médaille Sylvester. En 1904, il recevait la médaille d'or Lobatschefsky de la Société physico-mathématique de Kazan. En 1905, sur la proposition d'une Commission internationale où j'avais l'honneur de représenter notre pays, l'Académie hongroise des Sciences lui décernait le grand prix Bolyai, qu'elle avait fondé en l'honneur des deux illustres savants de ce nom, le père et le fils, et qu'elle avait à attribuer pour la première fois. La France ne restait pas en arrière. Si le peu de temps qui s'écoula entre ses débuts et son élection ne permit pas à notre Académie de lui faire parcourir toute la gamme des prix dont elle dispose, elle lui décerna cependant en 1885 le prix Poncelet et en 1896, alors qu'il nous appartenait, le prix Jean Reynaud, sur le désir exprimé par la fondatrice de ce dernier prix. Il fut nommé en 1893 membre du Bureau des Longitudes, au titre de l'Académie des Sciences. Enfin en 1908, peu après la mort de Berthelot, l'Académie française lui décerna le suprême honneur, en l'appelant à occuper le fauteuil du grand poète Sully Prudhomme. Vous vous souvenez encore des mémorables Discours qui furent prononcés ici même, le 28 janvier 1909, dans la séance où il fut reçu par M. Frédéric Masson.

XVIII.

Tous ces succès étaient des témoignages de l'admiration et de l'estime que ses confrères et ses pairs avaient pour lui; mais les Ouvrages de Philosophie qu'il publia à partir de 1902, *La Science et l'Hypothèse*, *Science et Méthode*, la *Valeur de la Science*, lui valurent une popularité que n'avaient connue ni Cauchy, ni Hermite, ni Joseph Bertrand. Tirés à un nombre prodigieux d'exemplaires, ils ont été traduits en allemand, en anglais, en espagnol, en hongrois, en suédois, en japonais. Je n'oserais affirmer qu'ils ont été pleinement compris de tous; pour saisir la pensée de leur Auteur, une forte culture scientifique est nécessaire, qui manque à plus d'un; mais l'autorité joue encore quelque rôle dans ce monde, et c'est

avec un sentiment de déférence bien naturel qu'on discutait les idées et qu'on accueillait les théories d'un si grand savant.

Devenu populaire, il connut les avantages et quelques-uns des inconvénients de la popularité. La *Revue bleue*, ayant ouvert en 1904 une enquête sur la participation des savants à la politique, lui demanda son opinion sur cette question. Poincaré lui répondit par une lettre très spirituelle dont je vous demande la permission de citer la fin :

> Vous me demandez si les savants politiques doivent combattre ou appuyer le bloc ministériel ? Ah ! pour le coup, je me récuse; chacun devra voter suivant sa conscience; je suppose que tous ne penseront pas sur ce point de la même manière, et vraiment je ne saurais m'en plaindre. S'il y a des savants dans la politique, il faut qu'il y en ait dans tous les partis; et, en effet, il est indispensable qu'il y en ait du côté du manche. La Science a besoin d'argent, et il ne faut pas que les gens au pouvoir puissent se dire : la Science, c'est l'ennemi (1).

En 1911, ce fut le journal *l'Opinion* qui sollicita son avis *sur la prépondérance politique du Midi*. Un de ses rédacteurs avait conclu que « la France est gouvernée par le Midi et qu'elle l'est de plus en plus ». Poincaré donna son opinion, le 25 mars 1911. Elle n'était pas précisément favorable aux hommes du Midi. Mais ceux-ci peuvent s'en consoler. Le Midi est si grand que chacun peut bien supposer qu'il est d'une région à laquelle ne s'appliquent pas les appréciations de notre Confrère.

Il a été appelé aussi à publier son opinion sur la *Représentation proportionnelle;* il a même écrit la préface de l'Ouvrage de M. G. Lachapelle intitulé : *La Représentation proportionnelle en France et en Belgique*. Les auteurs des Traités sur le calcul des probabilités, Bertrand entre autres, se sont beaucoup préoccupés de la question électorale, et les résultats auxquels ils sont parvenus mériteraient d'être pris en considération. Mais ce n'est pas ici qu'il convient de les discuter.

Cette popularité, cette autorité qu'il s'était si légitimement acquises, le faisaient rechercher de tous côtés. En 1903, appelé à présider le XIX^e^ banquet de l'Association générale des Étudiants, il prononça une

(1) *Revue bleue*, 1904, p. 708.

belle Allocution sur la vérité scientifique et la vérité morale, engageant ses auditeurs à les unir dans un même culte. L'œuvre de *Foi et Vie* ne fit pas en vain appel à son concours; Poincaré lui donna en 1910 une Conférence sur les bases de la morale, intitulée : *La Morale et la Science* et, en mars 1912, une autre sur un sujet moins troublant : *Les conceptions nouvelles de la matière*.

En 1911, notre confrère Richepin eut l'idée de fonder une *Ligue pour la Culture française*. Parmi les adhésions qu'il reçut dans notre Académie, il faut signaler celle de Poincaré; notre Confrère ne se contenta pas de faire partie de la Ligue, il écrivit aussi un petit Traité populaire pour défendre la culture littéraire et l'éducation classique (1).

XIX.

Tous ces concours auxquels il ne se refusait pas ne l'empêchaient pas de poursuivre ce qu'il considérait comme sa tâche essentielle et de répandre ses idées et ses découvertes relatives à ses études de prédilection. En 1900, à l'Exposition universelle, il fit trois Conférences dans l'espace d'une quinzaine : l'une, le 11 août 1900, *Sur le rôle de l'intuition et de la logique en Mathématiques*, devant le Congrès international des Mathématiciens, dont il avait été élu président; l'autre, *Sur les principes de la Mécanique*, au Congrès international de Philosophie; la troisième enfin, *Sur les rapports de la Physique expérimentale et de la Physique mathématique*, au Congrès international de Physique, qui se tenait à la même époque.

Mais, de tous les appels que recevait Poincaré, les plus agréables sans aucun doute étaient ceux qui lui venaient de l'étranger. En 1903, Newcomb, notre illustre Associé étranger, se rendit à Paris pour inviter, au nom du Gouvernement américain, les Savants français à participer au Congrès international d'Art et de Science, organisé sur le modèle de l'Institut de France; ce Congrès devait se tenir à Saint-Louis, l'année

(1) H. Poincaré, *Les Sciences et les Humanités*. Paris, A. Fayard, 1911.

suivante, pendant la durée de l'Exposition universelle destinée à célébrer le centenaire de la réunion de la Louisiane aux États-Unis. Plusieurs d'entre nous acceptèrent l'invitation qui leur était faite d'une manière si gracieuse. Poincaré fut du nombre et profita de l'occasion qui lui était offerte pour visiter les différentes régions des États-Unis. La Conférence qu'il lut, le 24 septembre 1904, devant le Congrès, avait pour titre : *L'état actuel et l'avenir de la Physique mathématique*.

En 1909, sur l'invitation de la Commission qui régit la fondation Wolfskehl de la Société royale des Sciences de Gœttingue, il allait donner six Conférences devant les professeurs et les étudiants de la glorieuse Université de cette ville. Les cinq premières ont été faites en allemand sur des sujets techniques. Quant à la sixième, elle avait pour objet : *La nouvelle Mécanique*, je veux dire celle de Lorentz, et non celle des *Quanta*. Pour mieux exprimer sa pensée, il préféra la faire en français.

Dans cette même année 1909, il fut délégué par l'Université de Paris aux fêtes organisées par l'Université libre de Bruxelles pour le 75e anniversaire de sa fondation. L'accueil qu'il y reçut fut particulièrement chaleureux. On lui demanda de faire une Conférence; il choisit comme sujet : *Le libre Examen en matière scientifique* (1).

Il fut de même, en octobre 1910, le délégué de l'Université de Paris aux fêtes du Centenaire de l'Université de Berlin, qui saisit cette occasion de le nommer docteur *honoris causâ* en Médecine et Chirurgie. Il y lut, à la *Réunion mathématique* de l'Université, une Conférence sur *la théorie des ondes hertziennes*.

La dernière année de sa vie fut particulièrement chargée sous ce rapport. En mai 1912, il allait faire à la jeune Université de Londres plusieurs Conférences sur *la théorie du rayonnement*, qui l'a intéressé jusqu'à son dernier jour, sur *la logique de l'infini*, sur *l'espace et le temps*. Quelques jours après, il se rendait à Vienne, en Autriche, pour y défendre la cause des Humanités devant la réunion des *Amis du*

(1) Cette Conférence, lue le 21 novembre 1909, a été publiée dans le numéro de décembre 1910 de la *Revue de l'Université de Bruxelles*.

Gymnase. La même année aussi, il était allé à Bruxelles pour prendre part à un Congrès d'un genre tout particulier. Un grand industriel, M. E. Solvay, doublé d'un Mécène, auquel notre Académie décerne aujourd'hui même la médaille Lavoisier, avait réuni les physiciens les plus qualifiés du monde entier, en leur demandant de discuter à fond les idées nouvelles sur la Mécanique. Poincaré a pris part à ces discussions qui viennent d'être publiées (1).

XX.

Ces excursions que notre Confrère devait faire ainsi à l'étranger étaient fort loin de lui déplaire. Dès son enfance, il avait pris le goût des voyages, et l'on peut dire qu'il était de ceux qui connaissent le mieux notre planète. Pour ma part, je l'ai rencontré en bien des endroits différents : à Londres, à Rome, à Vienne, à Budapest, à Copenhague, à Saint-Louis d'Amérique, à Philadelphie, à New-York, à Boston. Sa valise n'était pas toujours dans un ordre parfait, et l'on rappelait quelquefois dans sa famille qu'un jour, par mégarde, en Autriche, il avait emporté un drap de lit de l'hôtel; mais il savait voyager, et j'ai pu constater plus d'une fois, par moi-même, qu'on pouvait s'en rapporter à lui. D'ailleurs, dans les conversations que nous avions ensemble, je ne me lassais pas d'admirer son grand bon sens, sa perspicacité, le merveilleux équilibre de son esprit. S'il a été hors de pair en Mathématiques, on peut affirmer qu'il aurait admirablement réussi dans toutes les carrières qu'il aurait pu choisir. J'ai parlé plus haut de son insuffisance en dessin. Cela ne l'empêchait pas d'apprécier la peinture et la sculpture, de juger avec beaucoup de pénétration et de goût les œuvres d'art de toute nature. Il aimait beaucoup la musique, surtout la musique symphonique qui puise ses inspirations aux sources les plus pures et les plus cachées.

Ces qualités trouvèrent leur application dans les tâches diverses qui

(1) *La théorie du rayonnement et des quanta*. Rapports et discussions de la réunion tenue à Bruxelles sous les auspices de M. Solvay. Publiés par MM. P. Langevin et M. de Broglie. Paris, Gauthier-Villars, 1913.

lui furent confiées. Quand l'Académie des Sciences obtint du Gouvernement qu'une mission composée d'officiers du Service géographique de l'Armée irait reprendre à l'Équateur l'œuvre géodésique qui avait fait la gloire de notre Compagnie au XVIII^e^ siècle, en procédant à une mesure nouvelle, réclamée par les progrès de la Science, de l'arc méridien de Quito, Poincaré fut l'âme, il n'y a pas d'autre expression, de la Commission de contrôle des opérations nommée par l'Académie. Ce fut à lui que le Gouvernement confia la présidence de la Commission interministérielle chargée de coordonner les applications de la Télégraphie sans fil. Enfin, quand une initiative heureuse détermina la création d'un Conseil des Observatoires des départements, ce fut encore Poincaré qui fut appelé à diriger ses travaux. Il ne refusait pas son concours, mais il le donnait sans enthousiasme, et il avait le talent, qui peut être des plus précieux à l'occasion, de savoir écourter les séances des Commissions.

Il n'était pas né pour être administrateur. Il préférait, et il avait bien raison, poursuivre les travaux de haute envergure qui ne cessaient de le préoccuper.

La recherche de la vérité, a-t-il écrit au début de l'introduction de son Ouvrage : *La valeur de la Science*, doit être le but de notre activité; c'est la seule fin qui soit digne d'elle.

Sa vie entière est une réponse à ceux qui pensent que la Science a été créée uniquement en vue de l'action.

De temps en temps, les devoirs des présidences qui lui étaient confiées lui donnaient l'occasion de rappeler les mérites des Confrères que nous perdions. Avec quel talent d'écrivain, avec quelle finesse, quelle bienveillance pour les personnes il s'acquittait de ce soin, seuls le savent ceux qui l'ont entendu, ceux qui ont lu le beau Volume : *Savants et Écrivains*, où il a réuni tous les Éloges qu'il avait prononcés.

Il nous parle successivement de Sully Prudhomme, de Gréard, de Curie, de Brouardel, de Laguerre, de Cornu, d'Hermite, d'Halphen, de Tisserand, de Joseph Bertrand, de Berthelot, de Faye, de Potier, de

Weierstrass, de Lord Kelvin, de Lœwy, des Polytechniciens du XIX^e^ siècle. Son style laisse transparaître les idées avec une netteté parfaite, rien n'y sent l'emphase, ni la littérature d'imitation. C'est à la réflexion seulement qu'on reconnaît la parfaite concordance de la forme avec le fond, qui seul préoccupe l'écrivain. On y rencontre pourtant, presque à chaque page, de ces phrases lapidaires que leur forme grave pour toujours dans l'esprit. Souvent, il arrive aussi que quelque boutade spirituelle, quelque vérité énoncée sous une forme paradoxale, vient surprendre le lecteur et fait d'autant plus d'effet qu'elle était moins attendue.

Poincaré, d'ailleurs, se dépeint souvent lui-même, et nous apprend à le mieux connaître, dans les appréciations qu'il mêle à son récit.

Le savant digne de ce nom, le géomètre surtout, nous dit-il, éprouve en face de son œuvre la même impression que l'artiste; sa jouissance est aussi grande et de même nature. Si je n'écrivais pas pour un public amoureux de la Science, je n'oserais pas m'exprimer ainsi; je redouterais l'incrédulité des profanes. Mais ici, je puis dire toute ma pensée. Si nous travaillons, c'est moins pour obtenir ces résultats positifs auxquels le vulgaire nous croit uniquement attachés, que pour ressentir cette émotion esthétique et la communiquer à ceux qui sont capables de l'éprouver (1).

XXI.

Ainsi s'écoulait la vie d'Henri Poincaré, au milieu de ses amis, au sein d'une charmante famille qui s'ingéniait à lui épargner toute préoccupation et tout souci.

M^me^ Poincaré appartient, par ses origines du côté maternel, à notre monde scientifique. Elle est la petite-fille d'Isidore Geoffroy-Saint-Hilaire, l'arrière-petite-fille d'Étienne Geoffroy-Saint-Hilaire qui fut l'antagoniste de Cuvier. Sa mère, M^me^ Poulain d'Andecy, qui a longtemps vécu au Muséum, y a laissé, comme d'ailleurs toute la famille Geoffroy-Saint-Hilaire, des souvenirs de haute tenue morale, de bienfaisance et de charité, qui sont encore vivants aujourd'hui. Alors même qu'elle ne

(1) *Notice sur Halphen* (*Journal de l'École Polytechnique*, 60^e^ cahier).

l'aurait pas trouvée dans son affection et sa haute intelligence, Mme Poincaré avait donc reçu de sa famille la notion de la vie qu'il convenait de faire à un savant tel que son mari. Ses trois filles et son fils se joignaient à elle pour entourer leur père de toute leur affection, et lui donnaient toutes les satisfactions qu'il pouvait désirer; son beau-frère et sa sœur, M. et Mme Émile Boutroux, son neveu Pierre Boutroux, ses cousins germains, M. Raymond Poincaré, M. Lucien Poincaré, entretenaient avec lui les plus affectueuses et les plus étroites relations. Ses Confrères, heureux de posséder un homme de son génie, lui témoignaient une confiance et une déférence auxquelles il était très sensible. Bien qu'il ne fît rien pour les imposer, ses avis, ses opinions avaient à nos yeux une haute autorité. Partout, dans le monde entier, il trouvait les égards bien dus à celui dont la vie, exempte de toute préoccupation étroite, avait été uniquement consacrée aux recherches les plus hautes et les plus désintéressées. La puissance de son esprit était intacte; il semblait que la vieillesse allait venir pour lui, heureuse, accompagnée de tous les honneurs; qu'il contribuerait, longtemps encore, à accroître le patrimoine moral de notre patrie par l'exemple d'une vie consacrée sans relâche aux plus nobles travaux. La destinée jalouse en a ordonné autrement.

XXII.

Au Congrès international des Mathématiciens, qui se tint à Rome en 1908, un premier accident inquiéta ses amis et l'empêcha de lire lui-même la belle Conférence qu'il avait préparée sur l'*Avenir des Mathématiques*. Cet accident, qui décelait une hypertrophie de la prostate, fut heureusement conjuré grâce à l'habileté et aux soins des chirurgiens italiens. Mme Poincaré accourut nous retrouver à Rome et ramena son cher malade en France, à petites journées. De retour ici, notre Confrère reprit ses habitudes et ses travaux; l'activité qu'il ne cessait de montrer nous permit d'espérer que tout danger était, pour longtemps, écarté. Il s'occupait toujours du problème des trois corps. Le 9 décembre 1911, il écrivait la lettre suivante à M. Guccia, directeur fondateur du *Circolo*

matematico de Palerme, qui avait publié dans son Recueil, nous l'avons vu, quelques-uns de ses plus beaux Mémoires :

MON CHER AMI,

Je vous ai parlé lors de votre dernière visite d'un travail qui me retient depuis deux ans. Je ne suis pas plus avancé, et je me décide à l'abandonner provisoirement pour lui donner le temps de mûrir. Cela irait bien si j'étais sûr de pouvoir le reprendre; à mon âge, je ne puis en répondre, et les résultats obtenus, susceptibles de mettre les chercheurs sur une voie nouvelle et inexplorée, me paraissent trop pleins de promesses, malgré les déceptions qu'ils m'ont causées, pour que je me résigne à les sacrifier. Dans ces conditions, trouveriez-vous convenable de publier un Mémoire inachevé, où j'exposerais le but que j'ai poursuivi, le problème que je me suis proposé, et le résultat des efforts que j'ai faits pour le résoudre? Cela serait un peu insolite; mais cela serait peut-être utile. Ce qui m'embarrasse, c'est que je serai obligé de mettre beaucoup de figures, justement parce que je n'ai pu arriver à une règle générale, mais que j'ai seulement accumulé les solutions particulières. Dites-moi, je vous prie, ce que vous pensez de cette question et ce que vous me conseillez.

Votre ami dévoué,

POINCARÉ.

Il y a, dans cette lettre, une phrase sur laquelle on s'est appuyé pour dire que, depuis quelque temps, il avait les plus tristes pressentiments. Je ne saurais partager cette opinion ou, du moins, je la crois fort exagérée. Il est naturel que tout homme, atteint d'une maladie chronique, songe plus souvent qu'un autre à la fin inévitable. Mais aucun de nous n'a remarqué que notre Confrère fût réellement affecté.

Quoi qu'il en soit, et comme on peut bien le penser, M. Guccia s'empressa de réclamer le Mémoire qui lui était proposé. Un travail qui avait paru, à un géomètre tel que Poincaré, mériter des efforts prolongés pendant plus de deux ans! C'était une bonne fortune qu'on devait se garder de refuser. Le Mémoire a donc paru peu de temps avant la mort de son illustre Auteur (1).

Il a pour titre : *Sur un théorème de Géométrie*. La démonstration

(1) *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXXIII, séance du 10 mars 1912.

complète de ce théorème, si Poincaré avait pu l'obtenir, lui aurait permis notamment d'établir l'existence d'un nombre illimité de solutions périodiques dans un cas du problème des trois corps plus général que tous ceux qu'il avait envisagés jusque-là (¹).

L'année 1912, qui vit la publication de ce Mémoire, est celle peut-être où notre Confrère déploya le plus d'activité. Nous avons déjà signalé les voyages qu'il fit à Londres, à Vienne, à Bruxelles. A Paris même, il accepta de faire partie de la *Ligue française d'éducation morale* et prononça à la première assemblée de cette Ligue un éloquent Discours sur la nécessité de l'union morale. C'était le 26 juin 1912; trois semaines à peine le séparaient de la mort. Les accidents qui avaient inquiété ses amis s'étaient malheureusement reproduits et aggravés. Les médecins estimèrent qu'il y avait lieu d'envisager une opération.

Cette opération devait se faire un mardi; je vis notre Confrère le jeudi qui la précéda. Il présida d'une manière un peu nerveuse le Conseil des Observatoires. Après la séance, il vint me mettre au courant. Il était rempli de confiance et me parlait de son intention de se rendre à Hambourg, pour le cinquantenaire de l'Association géodésique internationale, auprès de laquelle il était délégué par le Gouvernement français. Le samedi suivant, il vint à une séance de la Faculté où, à propos d'une

(¹) Chose étrange! Ce théorème de Géométrie, qui avait défié pendant si longtemps les efforts de Poincaré, a été démontré en très peu de temps par un géomètre américain, M. Birkhoff, et aussi, si je suis bien informé, par un géomètre suédois, M. Phragmén, qui avait assisté autrefois Poincaré dans la publication de son Mémoire couronné.

A cette occasion, je ne puis m'empêcher de remarquer que, dans cette séance même, l'Académie couronne un beau travail de M. Sundman sur le problème des trois corps. L'Auteur y développe une solution de ce problème plus générale que celle qui était réclamée par Weierstrass, lors du concours institué par le roi de Suède, puisque M. Sundman n'exclut pas le cas, explicitement écarté par le programme reproduit plus haut (p. XXIX), où les corps pourraient se choquer.

Ces recherches de M. Sundman ont leur point de départ dans un théorème relatif au problème des trois corps énoncé par notre Confrère M. Painlevé dans les Leçons qu'il a été appelé à faire à Stockholm, en 1895.

candidature, il nous exposa les idées qui lui étaient chères sur la théorie des groupes de substitutions.

L'opération, faite le mardi 9 juillet, parut avoir réussi. J'étais alors au Conseil supérieur de l'Instruction publique, où le cousin germain de notre Confrère, M. Lucien Poincaré, alors directeur de l'Enseignement secondaire, me donnait chaque jour les nouvelles les plus satisfaisantes. Notre Confrère ne se levait pas encore, mais il s'alimentait quelque peu. Sans négliger aucune précaution, la famille commençait à perdre toute inquiétude. Un accident imprévu, une embolie sans doute, est venu, le 17 juillet, tromper toutes nos espérances. En un quart d'heure à peine, la mort a enlevé celui que nous regardions comme définitivement sauvé. Quand la funeste nouvelle nous fut annoncée, nous demeurâmes longtemps sans vouloir y ajouter foi. Vous vous rappelez, mes chers Confrères, l'émotion qu'excita partout cette mort prématurée. On peut répéter ici ce qu'il a dit lui-même, lors de la mort de Curie. Il n'était pas un Français, si ignorant qu'il fût, qui ne sentît plus ou moins confusément quelle force la Patrie et l'Humanité venaient de perdre.

Henri Poincaré, disait notre Confrère Paul Painlevé, était vraiment le cerveau vivant des Sciences rationnelles. Mathématiques, Astronomie, Physique, Cosmogonie, Géodésie, il a tout embrassé, tout pénétré, tout approfondi. Inventeur incomparable, il ne s'est pas borné à suivre ses aspirations, à ouvrir des voies inattendues, à découvrir dans l'univers abstrait des mathématiques mainte terre inconnue. Partout où la raison d'un homme a su se glisser, si subtils, si hérissés qu'aient été ses chemins, qu'il s'agît de télégraphie sans fil, de phénomènes radiologiques ou de la naissance de la Terre, Henri Poincaré s'est glissé près de lui pour aider et prolonger ses recherches, pour suivre le précieux filon.

Avec le grand mathématicien français disparaît donc le seul homme dont la pensée fût capable de faire tenir en elle toutes les autres pensées, de comprendre jusqu'au fond, et par une sorte de découverte renouvelée, tout ce que la pensée humaine peut aujourd'hui comprendre. Et c'est pourquoi cette disparition prématurée, en pleine force intellectuelle, est un désastre. Des découvertes seront retardées, des tâtonnements se prolongeront parce que le cerveau puissant et lumineux ne sera plus là pour rapprocher des recherches qui s'ignorent, ou pour jeter, dans un monde de faits obscurs brusquement révélés par l'expérience, le coup de sonde hardi d'une théorie nouvelle.

Aux obsèques, qui eurent lieu le 19 juillet, le Ministre de l'Instruction publique, M. Guist'hau, exprima en ces termes le sentiment commun :

La mort d'Henri Poincaré, si elle réunit dans une même pensée de regret l'élite intellectuelle de tous les pays, est pour nous un deuil public. En s'y associant, le Gouvernement est l'interprète de la nation tout entière, douloureusement atteinte. Car si les travaux du mathématicien ne sont accessibles qu'à un petit nombre, tous savaient qu'Henri Poincaré représentait ce que le génie de la France a de plus pur, de plus désintéressé, de meilleur.

M. Jules Claretie, au nom de l'Académie française, MM. Lippmann et Painlevé, au nom de l'Académie des Sciences, M. Paul Appell, au nom de la Faculté des Sciences, M. Bigourdan, au nom du Bureau des Longitudes et du Conseil des Observatoires, le général Cornille, au nom de l'École Polytechnique, apportèrent successivement au grand penseur l'hommage de leurs regrets et de leur admiration.

La Société Royale de Londres, qui avait reçu la funeste nouvelle au moment où elle célébrait le deux cent cinquantième anniversaire de sa fondation, s'était fait représenter par deux de ses membres les plus distingués, MM. Larmor et Dyson.

Quelques jours plus tard, M. Vito Volterra, notre éminent Correspondant, qui avait été invité, comme Poincaré lui-même, à assister à l'inauguration du nouvel Institut Rice, en Amérique, à Houston dans le Texas, consacra toute la Conférence qu'il fit à cette occasion, devant nos Confrères Américains, à une exposition magistrale de l'ŒEuvre mathématique d'Henri Poincaré.

Comme l'a dit M. Claretie, la postérité avait commencé pour notre Confrère bien longtemps avant sa mort. Sa ville natale, qu'il a tant honorée et tant aimée, saura, de bien des manières, lui témoigner sa reconnaissance et perpétuer son souvenir (1). Pour nous, qui le regretterons toujours, qui le cherchons encore involontairement à la place où

(1) Déjà l'Association des anciens Élèves des lycées de Nancy, Metz, Strasbourg et Colmar a fait ériger un buste en bronze de notre Confrère dans le square du lycée de Nancy qui borde la rue Gambetta. Ce buste, exécuté par un statuaire distingué, M. Carlier, repose sur un socle de granit des Vosges qui porte cette simple inscription :

A Henri Poincaré, *l'Association des anciens Élèves*, 1913.

D'autre part, M. le général Goetschy, qui présidait cette année la distribution des prix aux élèves du lycée de Nancy, a donné lecture à l'Assemblée d'un décret du 10 juillet 1913, en vertu duquel le lycée dont notre Confrère a été l'illustre élève, et auquel il témoignait tant d'affection, portera à l'avenir le nom de *Lycée Henri Poincaré*. Cette décision a été exécutée sans retard, et l'inscription du nouveau nom figure sur les portes principales du lycée.

Nous avons parlé plus haut de la plaque commémorative qui a été apposée, par les soins de l'Association des anciens Élèves, sur la maison natale de notre Confrère. Cette plaque porte l'inscription suivante :

Dans cette maison
est né le 29 avril 1854
Henri Poincaré,
Membre de l'Académie française
et de l'Académie des Sciences,
mort à Paris le 17 juillet 1912.

il avait coutume de s'asseoir, nous lui rendrons l'hommage auquel il aurait été le plus sensible, en veillant, avec le concours et l'assentiment de ses proches, à la publication de ses *Œuvres mathématiques*. Le monument que nous lui élèverons ainsi sera celui qu'il aurait le plus volontiers agréé; il prolongera son action et lui suscitera des élèves qu'il n'aura pas connus. Ceux de nos jeunes géomètres qui pourront ainsi y étudier ses immortels travaux y recueilleront une foule de suggestions fécondes; puissent-ils, en même temps, s'inspirer des vertus de leur auteur et, comme lui, concilier le culte de la Science avec celui de la Famille et de la Patrie.

Ire SECTION

ANALYSE PURE

Cornell University Library

SUR

LES FONCTIONS FUCHSIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 92, p. 333-335 (14 février 1881).

Le but que je me propose, dans le travail que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie, est de rechercher s'il n'existe pas des fonctions analytiques analogues aux fonctions elliptiques et permettant d'intégrer diverses équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. Je suis arrivé à démontrer qu'il existe une classe très étendue de fonctions qui satisfont à ces conditions et auxquelles j'ai donné le nom de *fonctions fuchsiennes*, en l'honneur de M. Fuchs, dont les travaux m'ont servi très utilement dans ces recherches.

Voici les notations dont je ferai usage. Soit z une variable imaginaire représentée par un point dans un plan. Si j'appelle K_1 l'opération qui consiste à changer z en $f_1(z)$, K_2 celle qui consiste à changer z en $f_2(z)$, j'écrirai habituellement

$$zK_1 = f_1(z), \qquad zK_2 = f_2(z), \qquad zK_1K_2 = f_2[f_1(z)].$$

Quand z restera intérieur à une certaine région R, zK_1 restera intérieur à une certaine région S; j'écrirai

$$S = RK_1.$$

J'appelle *cercle fondamental* le cercle qui a pour centre l'origine et pour rayon l'unité; *groupe hyperbolique*, le groupe des opérations qui consistent à changer z en $\frac{az+b}{cz+d}$ (a, b, c, d étant des constantes), et qui n'altèrent pas le cercle fondamental; *groupe discontinu*, tout groupe qui ne contient pas d'opération infinitésimale, c'est-à-dire d'opération changeant z en une quantité

infiniment voisine de z; *groupe fuchsien*, tout groupe discontinu contenu dans le groupe hyperbolique.

J'appelle *fonction fuchsienne* toute fonction uniforme de z qui n'est pas altérée par les opérations d'un groupe fuchsien.

Il fallait d'abord former tous les groupes fuchsiens; j'y suis arrivé à l'aide de la Géométrie non euclidienne, dont je ne parlerai pas ici. J'ai fait voir que la surface du cercle fondamental peut se décomposer (et cela d'une infinité de manières) en une infinité de régions R_0, R_1, R_2, ..., R_i, ... satisfaisant aux conditions suivantes :

I. Ces régions sont des polygones curvilignes dont les côtés sont des arcs de cercle appartenant à des circonférences qui coupent orthogonalement le cercle fondamental.

II. On a, quel que soit l'indice i,

$$R_i = R_0 K_i,$$

K_i étant une opération du groupe hyperbolique.

Il est clair que les différentes opérations K_i forment un groupe discontinu contenu dans le groupe hyperbolique, c'est-à-dire un groupe fuchsien.

Problème I. — *Est-il possible d'effectuer cette décomposition de telle façon que la première de ces régions* R_0 *soit un polygone curviligne donné?*

Prenons un exemple particulier; envisageons deux triangles curvilignes ABC, BCD dont les côtés soient des arcs appartenant à des circonférences qui coupent orthogonalement le cercle fondamental. Supposons que les angles curvilignes de ces triangles soient égaux respectivement :

$$\text{BAC et BDC à } \frac{\pi}{\alpha},$$

$$\text{CBA et CBD à } \frac{\pi}{\beta},$$

$$\text{BCA et BCD à } \frac{\pi}{\gamma},$$

α, β, γ étant des nombres entiers positifs (finis ou infinis), et tels que

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} < 1.$$

On pourra décomposer la surface du cercle fondamental en une infinité de régions R_0, R_1, ..., R_i, ... satisfaisant aux conditions I et II et de telle sorte que R_0 soit précisément le quadrilatère ABCD. A ce mode de décomposition correspond un groupe fuchsien que j'appelle le groupe (α, β, γ).

Je résous ensuite le problème I dans le cas général et je montre comment on peut former tous les groupes fuchsiens et en donner une classification rationnelle à deux points de vue différents.

Parmi les groupes fuchsiens, il en est qui méritent d'attirer particulièrement notre attention :

1° Le groupe $(2, 3, \infty)$, qui est isomorphe au groupe des opérations qui changent z en $\frac{az+b}{cz+d}$, a, b, c, d étant des entiers tels que $ad - bc = 1$.

2° Certains groupes qui sont isomorphes aux groupes des substitutions linéaires à coefficients entiers, qui reproduisent une forme quadratique ternaire indéfinie à coefficients entiers.

L'existence de ces groupes fait ressortir les liens intimes qui unissent la théorie des nombres à la question analytique qui nous occupe.

J'appelle *fonction thétafuchsienne* toute fonction $\Theta(z)$ uniforme en z, et telle que (K_i étant une opération quelconque d'un groupe fuchsien) on ait identiquement

$$\Theta(zK_i) = \Theta(z)\left(\frac{dzK_i}{dz}\right)^{-m},$$

m étant un nombre entier positif.

En d'autres termes, pour une infinité de valeurs de a, b, c, d, telles que

$$ad - bc = 1,$$

on aura identiquement

$$\Theta\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \Theta(z)(cz+d)^{2m}.$$

Je démontre qu'il existe une infinité de fonctions thétafuchsiennes définies par la série convergente

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} H(zK_i)\left(\frac{dzK_i}{dz}\right)^m;$$

m est un nombre entier plus grand que 1; K_i est une opération quelconque d'un groupe fuchsien quelconque G; $H(z)$ est une fonction rationnelle de z.

Il peut se présenter deux cas : 1° Tous les points du cercle fondamental sont des points singuliers essentiels de $\Theta(z)$; il y a alors en réalité deux fonctions distinctes : la première n'existe qu'à l'intérieur du cercle fondamental, la seconde à l'extérieur seulement, car on ne peut passer de l'une à l'autre par continuité; 2° $\Theta(z)$ a une infinité de points singuliers essentiels sur le cercle fondamental, mais ces points singuliers sont isolés, de sorte que la fonction existe dans tout le plan.

Cette fonction est toujours méromorphe, sauf sur le cercle fondamental; j'indique le moyen de calculer le nombre de ses zéros distincts et de ses infinis distincts.

SUR

LES FONCTIONS FUCHSIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 92, p. 395-398 (21 février 1881).

Le quotient de deux fonctions thétafuchsiennes correspondant à un même groupe fuchsien et à une même valeur du nombre entier m est une fonction $F(z)$ uniforme en z, et telle que

$$F(zK_i) = F(z).$$

C'est donc une fonction fuchsienne, d'après la définition donnée dans la Note précédente. En d'autres termes, on a identiquement, pour une infinité de valeurs des constantes a, b, c, d,

$$F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = F(z).$$

Je démontre deux théorèmes :

1° *Entre deux fonctions fuchsiennes ayant même groupe et n'ayant d'autre point singulier essentiel que ceux qui sont une conséquence de leur définition, il y a une relation algébrique.*

2° *Toute fonction fuchsienne* $F(z)$ *permet d'intégrer une équation linéaire à coefficients algébriques de la manière suivante. Si l'on pose*

$$x = F(z), \qquad y_1 = \sqrt{\frac{dF}{dz}}, \qquad y_2 = z\sqrt{\frac{dF}{dz}},$$

y_1 *et* y_2 *satisfont à l'équation différentielle*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\,\varphi(x),$$

$\varphi(x)$ *étant algébrique en* x.

Soit, en particulier, l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\left[\frac{\frac{1}{\alpha^2}-1}{4x^2} + \frac{\frac{1}{\beta^2}-1}{4(x-1)^2} + \frac{1+\frac{1}{\gamma^2}-\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}}{4x(x-1)}\right], \tag{1}$$

où α, β, γ sont des nombres entiers positifs finis ou infinis, et tels que

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}<1.$$

Si z est le rapport des intégrales, on a

$$x = f(z),$$

$f(z)$ étant une fonction fuchsienne relative au groupe (α, β, γ).

Elle n'existe qu'à l'intérieur du cercle fondamental, et peut être regardée comme le quotient des deux fonctions thétafuchsiennes

$$\frac{\left(\frac{df}{dz}\right)^m}{[f(z)]^p[f(z)-1]^q}, \qquad \frac{\left(\frac{df}{dz}\right)^m f(z)}{[f(z)]^p[f(z)-1]^q};$$

m, p et q sont des nombres entiers qui satisfont aux inégalités, toujours compatibles,

$$1-\frac{p}{m}\geq\frac{1}{\alpha}, \qquad 1-\frac{q}{m}\geq\frac{1}{\beta}, \qquad \frac{p+q-1}{m}-1\geq\frac{1}{\gamma}.$$

Ces deux fonctions, qui n'existent qu'à l'intérieur du cercle fondamental, sont holomorphes à l'intérieur de ce cercle.

Si $\alpha=\beta=\gamma=\infty$, l'équation (1) se ramène à l'équation qui détermine les périodes de $\sin\operatorname{am} x$ en fonction du carré du module.

Je ramène ensuite aux fonctions thétafuchsiennes ces invariants arithmétiques que j'ai définis dans une Note que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie en novembre 1879.

Soit $F(z)$ une fonction fuchsienne quelconque; posons $x=F(z)$.

J'appelle *système de fonctions zétafuchsiennes* tout système de fonctions $\theta_1(z), \theta_2(z), \ldots, \theta_n(z)$ uniformes en z, et telles que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{d^{\alpha_1}\theta_1}{dx^{\alpha_1}} & \frac{d^{\alpha_2}\theta_1}{dx^{\alpha_2}} & \cdots & \frac{d^{\alpha_n}\theta_1}{dx^{\alpha_n}} \\ \frac{d^{\alpha_1}\theta_2}{dx^{\alpha_1}} & \frac{d^{\alpha_2}\theta_2}{dx^{\alpha_2}} & \cdots & \frac{d^{\alpha_n}\theta_2}{dx^{\alpha_n}} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{d^{\alpha_1}\theta_n}{dx^{\alpha_1}} & \frac{d^{\alpha_2}\theta_n}{dx^{\alpha_2}} & \cdots & \frac{d^{\alpha_n}\theta_n}{dx^{\alpha_n}} \end{vmatrix}$$

soit une fonction fuchsienne de z, quels que soient les entiers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Il est clair que $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ satisferont à une équation différentielle linéaire dont les coefficients seront algébriques en x.

Je démontre que l'on peut former une infinité de fonctions zétafuchsiennes dont je donne diverses expressions par des séries, et qui permettent d'intégrer une infinité d'équations différentielles, entre autres *toutes les équations différentielles linéaires à coefficients rationnels qui ne présentent que deux points singuliers à distance finie et un à l'infini.*

Donnons une application particulière.

Soient K et K′ les périodes d'une fonction elliptique, ω le carré de son module.

Soit φ un algorithme tel que

$$\omega = \varphi\left(\frac{K+\sqrt{-1}K'}{K-\sqrt{-1}K'}\right).$$

Soit une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels ayant pour points singuliers

$$x=0, \qquad x=1, \qquad x=\infty.$$

Posons $x=\varphi(z)$, et soient $\theta_1(z), \theta_2(z), \ldots, \theta_n(z)$ les intégrales de l'équation proposée :

$\varphi(z)$ sera une fonction fuchsienne, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ des fonctions zétafuchsiennes.

Ces fonctions n'existeront qu'à l'intérieur du cercle fondamental.

Elles seront holomorphes à l'intérieur de ce cercle et, par conséquent, pourront toujours être représentées par des séries entières dont les coefficients sont aisés à calculer.

En résumé, il existe une classe très étendue de fonctions dont les fonctions elliptiques ne sont qu'un cas particulier. Elles permettent d'intégrer un grand nombre d'équations différentielles. Différentes propriétés font ressortir leur analogie avec les transcendantes elliptiques et celle des fonctions thétafuchsiennes et zétafuchsiennes avec les fonctions Θ et Z.

SUR UNE NOUVELLE APPLICATION

ET

QUELQUES PROPRIÉTÉS IMPORTANTES

DES

FONCTIONS FUCHSIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 92, p. 859-861 (4 avril 1881).

Considérons un groupe fuchsien G quelconque et les différentes fonctions fuchsiennes qui correspondent à ce groupe. Je suppose que G soit tel que toutes ces fonctions fuchsiennes n'existent qu'à l'intérieur du cercle fondamental. Toutes ces fonctions fuchsiennes seront liées par des équations algébriques et seront fonctions rationnelles de deux d'entre elles, que j'appellerai x et y, et entre lesquelles il y aura une relation algébrique

$$f(x, y) = 0. \tag{1}$$

Si l'on pose

$$t_1 = \sqrt{\frac{dx}{dz}}, \qquad t_2 = z\sqrt{\frac{dx}{dz}}$$

(z étant l'argument des fonctions fuchsiennes), t_1 et t_2 seront les intégrales d'une équation linéaire

$$\frac{d^2t}{dx^2} = \varphi(x, y)t, \tag{2}$$

φ étant rationnel en x et y.

Envisageons une intégrale abélienne de première espèce

$$u(x, y).$$

Remplaçons-y x et y par leurs valeurs en fonction de z; u deviendra holomorphe en z et pourra, par conséquent, être représenté à l'intérieur du cercle fondamental par une série ordonnée suivant les puissances de z. L'emploi des fonctions fuchsiennes nous donne donc l'intégrale u sous la forme suivante :

$$u = \theta_1(z), \qquad x = \frac{\theta_2(z)}{\theta_3(z)},$$

θ_1, θ_2, θ_3 étant des séries ordonnées suivant les puissances de z et toujours convergentes.

Quand z subit une opération quelconque du groupe G, le point (x, y) décrit un cycle, et, par conséquent, u augmente d'une période. Considérons le groupe des opérations qui consistent à augmenter u d'une période. Ce groupe, d'après ce qui précède, *devra être isomorphe au groupe* G.

Si, par conséquent, le groupe G *est dérivé de moins de* $2p + 2$ *opérations, l'intégrale* u *ne pourra avoir* $2p + 2$ *périodes distinctes, et, par conséquent, la relation* (1) *sera au plus du genre* p.

Cette limite peut, le plus souvent, être abaissée, car, pour que l'isomorphisme dont j'ai parlé plus haut puisse avoir lieu, il faut, dans certains cas, qu'il y ait entre les périodes de u certaines relations linéaires, de sorte que ces périodes cessent d'être distinctes.

C'est ainsi que la relation (1) peut être du genre zéro, bien que le groupe G soit dérivé d'un nombre quelconque d'opérations.

Par conséquent, les fonctions fuchsiennes permettent d'intégrer une infinité d'équations telles que (2), où φ est rationnel en x, et non plus seulement en x et en y, bien que ces équations présentent un nombre quelconque de points singuliers.

Ainsi, si a, b, c et les coefficients sont convenablement choisis, si la différence des racines des équations déterminantes relatives à chacun des points singuliers

$$a, \quad b, \quad c, \quad \infty$$

est une partie aliquote de l'unité, l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\left[\frac{A}{(x-a)^2} + \frac{A'}{x-a} + \frac{B}{(x-b)^2} + \frac{B'}{x-b} + \frac{C}{(x-c)^2} + \frac{C'}{x-c}\right]$$

est intégrable à l'aide des fonctions fuchsiennes.

Je citerai aussi, parmi les équations intégrables à l'aide des fonctions fuchsiennes, certaines équations à coefficients doublement périodiques.

M. Picard a démontré que ces équations s'intégraient par les fonctions elliptiques toutes les fois qu'il n'y a d'autre point singulier que des pôles. Elles s'intégreront par les fonctions fuchsiennes et zétafuchsiennes s'il n'y a que des pôles et un point critique algébrique. Elles s'intégreront aussi à certaines conditions quand même il y aurait plus d'un point critique algébrique.

Nous avons trouvé plus haut une limite supérieure du genre de la relation (1). D'autres considérations fournissent une limite inférieure. Dans tous les exemples que j'ai eu l'occasion d'étudier jusqu'ici, ces deux limites coïncident, de sorte que l'on connaît exactement le genre de la relation (1). Tout ce qui précède, je le répète, ne s'applique qu'à celles des fonctions fuchsiennes qui n'existent qu'à l'intérieur du cercle fondamental.

SUR

LES FONCTIONS FUCHSIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 92, p. 957 (18 avril 1881).

J'ai étudié en particulier les fonctions fuchsiennes $f(z)$ telles que, si l'on pose

$$x = f(z), \qquad y_1 = \sqrt{\frac{df}{dz}}, \qquad y_2 = z\sqrt{\frac{df}{dz}},$$

y_1 et y_2 satisfassent à une équation de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\,\varphi(x), \tag{1}$$

φ étant rationnel en x.

J'ai reconnu : 1° que les points singuliers de l'équation (1) qui sont les infinis de $\varphi(x)$ sont tous réels; 2° que l'on peut choisir $f(z)$ de telle façon que ces infinis de $\varphi(x)$ soient aussi nombreux que l'on veut, et aient telles valeurs réelles que l'on veut.

En introduisant les fonctions zétafuchsiennes qui correspondent à ces fonctions $f(z)$, on intègre *toutes les équations linéaires à coefficients rationnels dont tous les points singuliers sont réels.*

SUR

LES FONCTIONS FUCHSIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 92, p. 1198-1200 (23 mai 1881).

Parmi les fonctions fuchsiennes, il en est qui jouissent de certaines propriétés spéciales sur lesquelles je désire attirer l'attention.

Soit un plan dont les différents points représentent la variable imaginaire z, et, dans ce plan, le *cercle fondamental* dont le centre est l'origine et le rayon l'unité.

On pourra tracer dans ce plan l'axe des quantités réelles Ox et une série de cercles C_1, C_2, ..., C_n, définis de la manière suivante :

1° Ils coupent tous le cercle fondamental orthogonalement.

2° Le cercle C_1 coupe Ox en α_1 et β_1 sous un angle $\frac{\lambda_1}{2}$.

3° Le cercle C_i coupe le cercle C_{i-1} en α_i et β_i sous un angle λ_i.

4° Le cercle C_n coupe Ox en α_{n+1} et β_{n+1} sous un angle $\frac{\lambda_{n+1}}{2}$.

Je suppose que chacun des angles λ_1, λ_2, ..., λ_{n+1} est une partie aliquote de 2π et que

$$\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3+\ldots+2\lambda_n+\lambda_{n+1}<2\pi(n-1). \tag{1}$$

Grâce à l'inégalité (1), il est toujours possible de tracer la figure que nous venons de définir.

Cela posé, définissons $n+1$ fonctions de z, z_1, z_2, ..., z_{n+1} par les équations suivantes :

$$\frac{z_1-\alpha_1}{z_1-\beta_1}=e^{i\lambda_1}\left(\frac{z-\alpha_1}{z-\beta_1}\right),$$

$$\frac{z_2-\alpha_2}{z_2-\beta_2}=e^{i\lambda_2}\left(\frac{z-\alpha_2}{z-\beta_2}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$\frac{z_{n+1}-\alpha_{n+1}}{z_{n+1}-\beta_{n+1}}=e^{i\lambda_{n+1}}\left(\frac{z-\alpha_{n+1}}{z-\beta_{n+1}}\right).$$

D'après la théorie générale des fonctions fuchsiennes, exposée dans un Mémoire que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie dans la séance du 14 février 1881, il existera une infinité de fonctions $F(z)$, uniformes en z, n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental, méromorphes à l'intérieur de ce cercle et jouissant de la propriété suivante :

$$F(z)=F(z_1)=F(z_2)=\ldots=F(z_n)=F(z_{n+1}).$$

Entre deux quelconques de ces fonctions, dites *fonctions fuchsiennes*, il y a une relation algébrique. Si, de plus, on pose

$$x=F(z), \qquad y=\sqrt{\frac{dF}{dz}},$$

on aura

$$\frac{d^2y}{dx^2}=y\,\varphi(x), \tag{2}$$

φ étant algébrique en x, de sorte que la fonction $F(z)$ permettra d'intégrer l'équation (2).

Quel sera le genre de la relation algébrique qui existe entre deux fonctions fuchsiennes quelconques ?

Soient u et v deux de ces fonctions et

$$f(u,v)=0 \tag{3}$$

la relation qui les unit ; soit enfin

$$\int\theta(u,v)\,du=G(z)$$

une intégrale abélienne de première espèce dérivée de la relation (3). $G(z)$ n'existera qu'à l'intérieur du cercle fondamental et sera holomorphe à l'intérieur de ce cercle. On démontre que toutes les périodes doivent être nulles ; la relation (3) est donc du genre 0 et toutes les fonctions fuchsiennes peuvent

s'exprimer rationnellement par l'une d'entre elles. Nous achèverons de définir $F(z)$ par les conditions suivantes :

1° $F(z)$ sera l'une des fonctions fuchsiennes à l'aide desquelles toutes les autres s'expriment rationnellement.

2° On aura

$$F(\alpha_1) = 0, \qquad F(\alpha_2) = 1, \qquad F(\alpha_3) = \infty.$$

Il en résultera que, dans l'équation (2), φ sera rationnel en x et que les points singuliers de l'équation (2) seront

$$F(\alpha_1), \quad F(\alpha_2), \quad \ldots, \quad F(\alpha_n), \quad F(\alpha_{n+1}).$$

De plus, la fonction $F(z)$ reste réelle tout le long des cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n$, et, par conséquent, les points singuliers de l'équation (2) sont tous réels. Enfin on peut profiter des éléments qui restent indéterminés de telle sorte que $F(\alpha_1), F(\alpha_2), \ldots, F(\alpha_{n+1})$ deviennent respectivement égaux à $n+1$ nombres réels quelconques donnés.

Dans le cas particulier où $n = 2$, l'équation (2) se réduit à l'équation hypergéométrique de Gauss et $F(z)$ se réduit à cette fonction particulière sur laquelle j'ai appelé spécialement l'attention dans ma Note du 14 février et dont M. Halphen a fait ressortir les propriétés les plus importantes dans une Note insérée aux *Comptes rendus* le 4 avril 1881.

Si, de plus, on suppose

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,$$

la fonction

$$F\left(\frac{z+\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}}\right)$$

se réduit à la fonction modulaire.

Ne supposons plus $n = 2$, mais supposons

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = 0;$$

les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ seront rejetés sur le cercle fondamental. La fonction $F(z)$ ne pourra prendre, à l'intérieur de ce cercle, aucune des valeurs

$$F(\alpha_1), \quad F(\alpha_2), \quad \ldots, \quad F(\alpha_{n+1}).$$

Supposons donc une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels en x et dont les points singuliers soient

$$x = F(\alpha_1), \qquad x = F(\alpha_2). \qquad \ldots, \qquad x = F(\alpha_{n+1}),$$

on y fera

$$x = F(z).$$

Les intégrales de l'équation proposée seront des fonctions zétafuchsiennes de z, qui n'existeront qu'à l'intérieur du cercle fondamental et seront holomorphes à l'intérieur de ce cercle.

Cette méthode permet d'intégrer toutes les équations différentielles linéaires à coefficients rationnels toutes les fois que tous les points singuliers sont réels.

SUR

LES FONCTIONS FUCHSIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 92, p. 1274-1276 (30 mai 1881).

Dans la dernière Note que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie, j'ai montré comment certaines classes de fonctions fuchsiennes et zétafuchsiennes permettent d'intégrer une équation linéaire à coefficients rationnels, si tous les points singuliers sont réels. Je veux, aujourd'hui, définir une classe plus étendue de fonctions fuchsiennes qui permet l'intégration dans des cas beaucoup plus généraux.

Supposons un polygone curviligne dont les côtés soient successivement A_1, B_1, A_2, B_2, ..., A_n, B_n; je suppose que ces côtés sont des cercles coupant orthogonalement le cercle fondamental; j'appelle α_i et β_i les deux intersections des cercles A_i et B_i, λ_i l'angle correspondant du polygone curviligne et σ la somme de tous les angles de ce polygone; je suppose que λ_i et $\sigma-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)$ sont des parties aliquotes de 2π.

Je définis n fonctions de z par les équations

$$\frac{z_i-\alpha_i}{z_i-\beta_i}=e^{\lambda_i\sqrt{-1}}\frac{z-\alpha_i}{z-\beta_i}\qquad(i=1,2,\ldots,n).$$

On verrait, comme dans la Note précédente, qu'il y a une infinité de fonctions uniformes de z satisfaisant aux conditions

$$F(z)=F(z_1)=F(z_2)=\ldots=F(z_n)$$

et que toutes s'expriment rationnellement en fonction de l'une d'entre elles.

En faisant tendre les λ et σ vers zéro, on obtient à la limite des fonctions remarquables sur lesquelles je veux attirer l'attention. Sur le cercle fondamental je marque $2n$ points $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_n, \beta_n$, et je suppose qu'on les rencontre dans l'ordre que je viens d'indiquer, en suivant le cercle dans le sens positif; ces points devront satisfaire à la condition suivante. Je joins le point β_1 à β_2, β_3, ..., β_n par des cercles $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_n$ normaux au cercle fondamental; je joins de même β_2 à β_3, β_3 à β_4, ..., β_{n-1} à β_n par des cercles $\delta_3, \delta_4, \ldots, \delta_n$ normaux au cercle fondamental; par les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ je mène des cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n$, coupant orthogonalement les cercles fondamental et normaux respectivement à $\gamma_2, \delta_3, \delta_4, \ldots, \delta_n, \gamma_n$; par l'intersection de C_1 et C_2 je mène un cercle D_3, normal au cercle fondamental et à γ_3; par l'intersection de C_3 et de D_3 je mène D_4, normal au cercle fondamental et à γ_4, etc. : D_n *devra passer par* α_n *et se réduire, par conséquent, à* C_n. Je définis n fonctions de z par les équations

$$\frac{1}{z_i-\alpha_i}=\frac{1}{z-\alpha_i}+\frac{1}{\beta_i-\alpha_i}-\frac{1}{\beta_{i-1}-\alpha_i}\qquad(i=1,2,\ldots,n).$$

Il existera une infinité de fonctions uniformes de z telles que

$$F(z)=F(z_1)=F(z_2)=\ldots=F(z_n),$$

d'où

$$F(\beta_1)=F(\beta_2)=\ldots=F(\beta_n).$$

Toutes s'expriment rationnellement par une d'entre elles que j'appelle $F(z)$ et que j'achève de définir par les conditions

$$F(\alpha_1)=0,\qquad F(\alpha_2)=1,\qquad F(\alpha_3)=\infty.$$

Cette fonction sera holomorphe à l'intérieur du cercle fondamental; elle ne pourra, à l'intérieur de ce cercle, devenir égale à aucun des nombres

$$(1)\qquad F(\alpha_1),\ F(\alpha_2),\ \ldots,\ F(\alpha_n),\ F(\beta_1).$$

Si donc, dans une équation linéaire à coefficients rationnels en x n'ayant d'autres points singuliers que les nombres (1), on substitue $F(z)$ à la place de x, l'intégrale sera une fonction zétafuchsienne de z.

$F(z)$ dépend de $2n-3$ paramètres, à savoir les rapports anharmoniques de $\alpha_4, \alpha_5, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ par rapport à $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; à cause de la condition énoncée plus haut, il reste $2n-4$ paramètres indépendants. En exprimant que les parties réelles et imaginaires de

$$F(\alpha_4),\ F(\alpha_5),\ \ldots,\ F(\alpha_n),\ F(\beta_1)$$

ont des valeurs données, on a $2n-4$ équations qui déterminent ces $2n-4$ paramètres.

Si j'arrive à démontrer que ces équations ont toujours une solution réelle, j'aurai montré que toutes les équations linéaires à coefficients algébriques s'intègrent par les transcendantes fuchsiennes et zétafuchsiennes.

Je voudrais donner quelques éclaircissements sur ma précédente Communication. J'y parle de la fonction $F(z)$ quand tous les λ sont nuls : j'entends la limite de $F(z)$ quand tous les λ tendent vers zéro. J'ai dit que les quantités $F(\alpha_1)$, $F(\alpha_2)$, ..., $F(\alpha_{n+1})$ peuvent prendre des valeurs réelles quelconques : cela n'est vrai que quand tous les λ sont nuls.

Une dernière remarque : j'ai fait voir que les coordonnées d'un point d'une infinité de courbes algébriques s'expriment par des fonctions fuchsiennes d'un même paramètre (de même que les coordonnées d'un point d'une courbe de genre 0 s'expriment par des fonctions rationnelles et celles d'un point d'une courbe de genre 1 par des fonctions elliptiques) : parmi les courbes qui jouissent de cette propriété, il y en a de tous les genres possibles ; mais je ne sais pas encore si cette propriété appartient à une courbe algébrique quelconque.

SUR

LES FONCTIONS FUCHSIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 92, p. 1484-1487 (27 juin 1881).

I. Dans le Mémoire que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie, je commence par donner une forme nouvelle à la règle que j'avais exposée dans mon premier travail pour la formation des groupes fuchsiens.

J'appelle X l'axe des quantités réelles.

Soient a, b deux quantités imaginaires, a', b' leurs conjuguées ; je pose

$$(a, b) = \frac{a - a'}{a - b'} \frac{b - b'}{b - a'}.$$

Envisageons deux arcs de cercles ab et cd ayant leurs centres sur X ; si l'on a

$$(a, b) = (c, d),$$

il y aura une substitution linéaire à coefficients réels qui changera ab en cd. Je l'appellerai la substitution

$$(a, b; c, d).$$

J'envisage maintenant un polygone curviligne situé tout entier au-dessus de X et dont les côtés sont de deux sortes : ceux de la première sorte sont des arcs de cercles ayant leurs centres sur X ; ceux de la seconde sont des segments de l'axe X lui-même.

Les côtés de la première sorte sont au nombre de $2n$; deux côtés consécutifs de la première sorte sont séparés :

1° Soit par un sommet situé au-dessus de X et que j'appellerai *sommet de la première catégorie ;*

2° Soit par un sommet situé sur X et que j'appellerai *sommet de la seconde catégorie;*

3° Soit par un côté de la seconde sorte que j'appellerai, pour uniformiser le langage, *sommet de la troisième catégorie.*

Grâce à cette convention, il est clair que l'on rencontrera, en suivant le périmètre du polygone, alternativement un côté de la première sorte et un sommet de l'une des trois catégories. Le côté qu'on rencontrera après un sommet donné sera le côté suivant; le sommet qu'on rencontrera ensuite sera le sommet suivant, et ainsi de suite.

Je suppose qu'on répartisse d'une façon *quelconque* les côtés de la première sorte en paires et qu'un côté soit dit conjugué de celui qui appartient à la même paire. Je suppose maintenant qu'on répartisse les sommets en cycles de la manière suivante. On partira d'un sommet quelconque; on envisagera le côté suivant, puis son conjugué, puis le sommet suivant, puis le côté suivant, puis son conjugué, puis le sommet suivant, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on revienne au sommet primitif. Tous les sommets rencontrés de la sorte appartiendront à un même cycle.

Je suppose :

1° Que tous les sommets d'un même cycle sont de la même catégorie;

2° Que, si tous les sommets d'un cycle sont de la première catégorie, la somme des angles correspondants du polygone curviligne est une partie aliquote de 2π;

3° Que, si $a_i b_i$ et $a'_i b'_i$ sont deux côtés d'une même paire, on a

$$(a_i, b_i) = (a'_i, b'_i).$$

A ces conditions, le groupe dérivé des substitutions

$$(a_i\, b_i;\ a'_i, b'_i)$$

sera un groupe fuchsien, et l'on obtiendra de la sorte tous les groupes fuchsiens.

II. Je discute ensuite les $2n - 4$ équations dont j'ai parlé dans ma Note du 30 mai. Supposant $n = 3$, je montre qu'elles ont toujours une solution réelle. Je montre que les fonctions fuchsiennes et zétafuchsiennes peuvent servir à intégrer une équation linéaire à coefficients rationnels, pourvu que tous les points singuliers soient sur un certain nombre de cercles se coupant en deux points a et b sous des angles commensurables avec 2π.

III. Dans une Lettre que M. Klein, de Leipzig, m'a fait l'honneur de m'adresser, je remarque le passage suivant :

Nehmen Sie ein beliebiges Polygon, begränzt von irgend welchen sich berührenden (deux à deux) *Kreisen; so wird die Vervielfältigung durch Symmetrie zu einer* groupe discontinu *führen.*

J'ajoute une condition que M. Klein n'a pas énoncée, mais qui ne lui a sans doute pas échappé : si l'on prolonge deux quelconques des arcs de cercles qui limitent le polygone, ils ne doivent pas se rencontrer. La remarque de M. Klein est aisée à vérifier, et l'on en déduit immédiatement le théorème suivant :

Soit une équation

$$(1)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = y\left[\frac{A_1}{(x-a_1)^2} + \frac{A_2}{(x-a_2)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a_n)^2} + \frac{B_1}{x-a_1} + \ldots + \frac{B_n}{x-a_n}\right].$$

Je suppose :

1° *Que*

$$\Sigma B_i = \Sigma A_i + \Sigma B_i a_i = 2\Sigma A_i a_i + \Sigma B_i a_i = 0,$$

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_n = -\frac{1}{4};$$

2° *Que les* B *et les a sont réels;*

3° *Qu'ils satisfont à certaines inégalités;*

x sera alors fonction uniforme du rapport des intégrales.

J'ai cherché à généraliser le résultat de M. Klein, et voici à quoi je suis arrivé :

Soient $2n$ cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n, C'_1, C'_2, \ldots, C'_n$ qui sont extérieurs l'un à l'autre ou se touchent extérieurement; tout groupe dérivé de n substitutions linéaires dont la $i^{\text{ième}}$ change la partie du plan extérieure à C_i en la partie intérieure à C'_i sera discontinu. Cela arrivera en particulier si les $2n$ cercles se touchent deux à deux de manière à circonscrire un polygone curviligne limité par des arcs de cercles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n$, appartenant respectivement aux cercles $C_1, C_2, \ldots, C_n, C'_1, C'_2, \ldots, C'_n$ et si la $i^{\text{ième}}$ substitution change α_i en α'_i.

Il existe des fonctions qui ne sont pas altérées par les substitutions de ce groupe et que je propose d'appeler *fonctions kleinéennes,* puisque c'est à M. Klein qu'on en doit la découverte. Il y aura aussi des fonctions théta-

kleinéennes et zétakleinéennes analogues aux fonctions thétafuchsiennes et zétafuchsiennes.

Grâce à cette généralisation, je montre que *le théorème relatif à l'équation* (1), déduit de la remarque de M. Klein, *est encore vrai quand même la seconde condition n'est pas remplie*. Je montre aussi que les fonctions kleinéennes intègrent un grand nombre d'autres équations linéaires à coefficients algébriques, et entre autres des équations à intégrales irrégulières.

SUR

LES GROUPES KLEINÉENS

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 93, p. 44-46 (11 juillet 1881).

Dans mes précédentes Communications, j'ai montré comment on pouvait former tous les groupes fuchsiens, c'est-à-dire tous les groupes discontinus formés de substitutions de la forme

$$(1) \qquad \left(t, \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right)$$

(*ces substitutions étant assujetties à ne pas altérer un cercle fixe appelé* cercle fondamental). Une remarque de M. Klein, que j'ai citée dans ma dernière Note, m'a amené à rechercher tous les groupes discontinus formés par des substitutions de la forme (1) (sans condition relative à un cercle fondamental), groupes que je propose d'appeler *kleinéens*. Je vais montrer comment la pseudogéométrie de Lobatschewsky, qui m'a servi à trouver les groupes fuchsiens, peut me donner la solution du problème plus général que j'aborde aujourd'hui.

1. J'écrirai, pour abréger, *ps* et *pst* pour pseudogéométrique et pseudogéométriquement. J'appelle *plan ps* toute sphère ayant son centre dans le plan des xy, *droite ps* l'intersection de deux plans *ps*; l'angle *ps* de deux courbes est égal à leur angle géométrique. Si l'on considère deux points quelconques a et b, on pourra par ces deux points mener une droite *ps* qui coupera le plan des xy en deux points c et d; le demi-logarithme du rapport anharmonique de a et b par rapport à c et d sera alors leur distance *ps*. J'appelle *polygone ps* une portion de plan *ps* limitée par des droites *ps*, *polyèdre ps* une portion de

l'espace située tout entière au-dessus du plan des xy et limitée par des plans ps ou par le plan des xy. Deux figures sont pst égales quand on peut établir entre elles une correspondance point par point et de telle sorte que les distances ps soient conservées. Grâce à ces définitions, les théorèmes de Lobatschewsky trouvent leur application concrète (voir les travaux de M. Klein sur ce sujet dans les *Mathematische Annalen*).

2. Considérons une substitution de la forme (1). Soit

$$t = x + y\sqrt{-1},$$

et considérons x et y comme les coordonnées d'un point dans un plan. La substitution (1) transformera tous les cercles en cercles. Prenons maintenant dans l'espace un point A; par ce point, je puis faire passer une infinité de plans ps qui viendront couper le plan des xy suivant différents cercles C. Ces cercles seront changés par la substitution (1) en d'autres cercles C'. Toutes les sphères qui ont même centre et même rayon que ces cercles C' viendront se couper en un même point B. A la substitution (1) correspondra dans l'espace une transformation (A, B) qui changera toute figure de l'espace en une figure pst égale. A un groupe discontinu de substitutions (1) va donc correspondre un groupe discontinu de transformations (A, B).

3. Pour construire tous les groupes discontinus de transformations (A, B), il faut diviser l'espace en polyèdres ps, pst égaux entre eux. Envisageons un de ces polyèdres ps; je distinguerai parmi ses faces celles de la première sorte, qui sont formées de plans ps, et celles de la seconde sorte, formées de portions du plan xy; les faces de la première sorte pourront être distribuées en paires, comme cela a lieu pour les polygones curvilignes envisagés dans la théorie des groupes fuchsiens; deux faces appartenant à la même paire seront dites *conjuguées* et devront être pst égales entre elles. Les arêtes pourront être distribuées en cycles de la façon suivante. Partant d'une arête quelconque, on considère l'une des faces passant par cette arête, puis la face conjuguée, et dans cette face conjuguée l'arête homologue de celle qui a servi de point de départ, puis une autre face passant par cette arête, puis la face conjuguée, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on retombe sur l'arête qui a servi de point de départ. Cela posé, on trouve une condition nécessaire et suffisante pour que le polyèdre ps considéré donne naissance à un groupe discontinu. Il faut que la somme des dièdres correspondant aux diverses arêtes d'un même cycle soit une partie aliquote de 2π.

4. Les considérations qui précèdent permettent d'obtenir tous les groupes discontinus de transformations (A, B). Pour que le polyèdre ps que nous venons d'envisager donne naissance à un groupe discontinu de substitutions (1), il faut, en outre, que l'une au moins des faces de ce polyèdre soit une portion du plan des xy.

5. Appliquons ces principes à un exemple simple. Je suppose un polygone curviligne dont les côtés sont des arcs de cercles, et je me demande à quelle condition ce polygone engendrera un groupe discontinu par l'opération que M. Klein appelle la *Vervielfältigung durch Symmetrie*. Je prolonge les arcs de cercles de façon à former des cercles complets, puis j'envisage les sphères qui ont mêmes centres et mêmes rayons que ces cercles. Ces sphères limiteront un certain polyèdre ps dont tous les dièdres devront être des parties aliquotes de π. Les principes qui ont permis de déduire de l'existence des groupes fuchsiens celle des fonctions fuchsiennes, thétafuchsiennes et zétafuchsiennes sont applicables aux nouveaux groupes kleinéens.

SUR UNE FONCTION ANALOGUE
AUX
FONCTIONS MODULAIRES

Comptes rendus de l'Academie des Sciences, t. 93, p. 138-140 (18 juillet 1881).

Soit l'équation linéaire

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\left[\sum_{i=0}^{n}\frac{B_i}{x-a_i} - \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(x-a_i)^2}\right], \tag{1}$$

où je suppose

$$\Sigma B_i = \Sigma a_i B_i - \frac{n+1}{4} = \Sigma a_i^2 B_i - \frac{1}{2}\Sigma a_i = 0,$$

de telle façon que $x=\infty$ ne soit pas un point singulier. Je puis toujours supposer

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 1, \qquad a_2 = 2,$$

car, si cela n'était pas, un changement linéaire de variable amènerait a_0, a_1 et a_2 à être égaux à 0, 1 et 2.

Joignons maintenant le point $a_0 = 0$ aux points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ par des arcs de courbe $C_1, C_2, \ldots, C_n$, de telle façon que ces arcs ne se coupent pas et se succèdent autour de a_0 dans l'ordre circulaire $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Faisons maintenant décrire à x le contour suivant : partant de a_0, cette variable suivra l'arc C_1 et reviendra à a_0 par ce même arc après avoir décrit un petit contour autour de a_1 ; elle décrira ensuite l'arc C_2, tournera autour de a_2 et reviendra à a_0 en suivant le même arc C_2; puis de même de chacun des arcs $C_3, C_4, \ldots, C_n$.

Elle occupera ainsi successivement les positions suivantes :

$$a_0 \ (1^{re}\text{ fois}), \quad a_1, \quad a_0 \ (2^{e}\text{ fois}), \quad a_2, \quad a_0 \ (3^{e}\text{ fois}), \quad a_3, \quad \ldots,$$
$$a_0 \ (n^{ième}\text{ fois}), \quad a_n, \quad a_0 \ [(n+1)^{ième}\text{ fois}].$$

Soient

$$\beta_1, \ \alpha_1, \ \beta_2, \ \alpha_2, \ \beta_3, \ \alpha_3, \ \ldots, \ \beta_n, \ \alpha_n, \ \beta_1$$

les valeurs correspondantes d'une fonction z que je définis comme le rapport de deux intégrales de l'équation (1).

1° Si l'on regarde les a comme des constantes, de telle sorte que les α et les β soient fonctions des B seulement, les α et les β seront des fonctions holomorphes des B pour toutes les valeurs finies de ces quantités.

2° Ne considérons plus maintenant les a comme des constantes ; mais, au lieu de regarder les α et les β comme fonctions des a et des B, considérons au contraire les a et les B comme fonctions des α et des β :

$$a_i = \varphi_i(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n), \qquad B_i = \psi_i(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_n).$$

Remarquons d'abord que les variables α et β ne sont pas indépendantes, mais qu'il y a entre elles la relation

$$(2) \quad (\beta_1-\alpha_1)(\beta_1-\alpha_2)\ldots(\beta_n-\alpha_n) = (\alpha_1-\beta_2)(\alpha_2-\beta_2)\ldots(\alpha_{n-1}-\beta_n)(\alpha_n-\beta_1).$$

Les φ et les ψ seront des fonctions *toujours uniformes et méromorphes* des variables α et β liées par la relation (2). Ce système de fonctions uniformes me paraît jouer, par rapport aux intégrales de l'équation (1), le même rôle que les fonctions modulaires par rapport aux intégrales elliptiques.

3° Les fonctions φ et ψ ne changent pas quand on change les α et les β de telle façon que le rapport anharmonique de quatre de ces quantités demeure invariable.

4° Les fonctions φ et ψ ne changeront pas non plus quand on fera subir aux α et aux β des opérations convenables, et il résulte de là, pour ces fonctions, de remarquables propriétés d'invariance. Dans le cas général, l'énoncé de ces propriétés m'entraînerait trop loin. Supposons donc $n=3$ pour fixer les idées.

Soient α_1', β_1', α_2', β_2', α_3', β_3' des quantités définies par les équations

$$\alpha_1' = \alpha_1, \qquad \alpha_3' = \alpha_3, \qquad \beta_2' = \beta_3,$$
$$\frac{1}{\beta_1'-\alpha_1} = \frac{1}{\beta_3-\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1-\alpha_1} - \frac{1}{\beta_2-\alpha_1},$$
$$\frac{1}{\alpha_2'-\alpha_1} = \frac{1}{\alpha_3-\alpha_1} + \frac{1}{\beta_1-\alpha_1} - \frac{1}{\beta_2-\alpha_1},$$
$$\frac{1}{\alpha_2'-\alpha_3} = \frac{1}{\alpha_2-\alpha_3} + \frac{1}{\beta_3-\alpha_3} - \frac{1}{\beta_1-\alpha_3},$$
$$\frac{1}{\beta_3'-\alpha_3} = \frac{1}{\beta_1-\alpha_3} + \frac{1}{\beta_3-\alpha_2} - \frac{1}{\beta_1-\alpha_2};$$

on aura

$$\varphi(\alpha'_1, \beta'_1, \alpha'_2, \beta'_2, \alpha'_3, \beta'_3) = \varphi(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3),$$
$$\psi(\alpha'_1, \beta'_1, \alpha'_2, \beta'_2, \alpha'_3, \beta'_3) = \psi(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3).$$

De cette relation d'invariance on peut en déduire deux autres par des permutations circulaires d'indices. En combinant ensuite ces trois équations d'invariance, on en obtiendra une infinité d'autres.

5° Si les α et les β sont réels et de telle sorte que

$$\beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < \beta_3 < \alpha_3 < \ldots < \beta_n < \alpha_n, \tag{3}$$

x sera fonction fuchsienne de z.

Si les α et les β sont imaginaires, mais suffisamment voisins de quantités réelles satisfaisant aux inégalités (3), x sera encore fonction uniforme (kleinéenne) de z; si, au contraire, les α et les β s'éloignaient trop de valeurs réelles satisfaisant aux inégalités (3), x cesserait d'être fonction uniforme de z.

SUR

LES FONCTIONS FUCHSIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 93, p. 301-303 (8 août 1881).

Dans ma Communication du 30 mai dernier, j'ai montré que le problème de l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels se ramène au suivant :

Construire une fonction fuchsienne F (z) *ne pouvant prendre aucune des n valeurs données*

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n. \tag{1}$$

Si l'on assujettit, de plus, F (z) à pouvoir prendre toutes les valeurs possibles à l'exception des valeurs (1), le nombre des paramètres dont on dispose est égal à celui des conditions que l'on s'impose. Si l'on ne s'assujettit pas à cette condition, le nombre des paramètres dont on dispose est infini.

Grâce à cette circonstance, il était extrêmement probable que le problème était toujours susceptible d'une infinité de solutions; mais je ne l'avais encore démontré rigoureusement que dans des cas particuliers. Je vais faire voir que cela est encore vrai dans le cas général.

En effet, je répartis les valeurs (1) en deux classes :

1° Les valeurs réelles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$;

2° Les valeurs imaginaires $\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \alpha_n$, que j'écris

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_p \qquad (p = n - m).$$

Soient $\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_p$ les valeurs conjuguées de $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$.

Je me propose de construire une fonction F (z) ne pouvant prendre aucune des m valeurs réelles données $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, ni aucune des $2p$ valeurs imaginaires données (conjuguées deux à deux) $\beta_1, \ldots, \beta_p, \beta'_1, \ldots, \beta'_p$. Je vais faire voir que ce problème se ramène au suivant : *Construire une fonction* $F_1(z)$ *ne pouvant devenir égale ni à* $m + 2q$ *valeurs réelles données, ni à* $2p - 2q$ *valeurs imaginaires données conjuguées deux à deux.*

Soit, en effet,

$$\varphi(x) = (x - \beta_1)(x - \beta_2)\ldots(x - \beta_p)(x - \beta'_1)\ldots(x - \beta'_p);$$

$\varphi(x)$ sera un polynome de degré $2p$, à coefficients réels.

L'équation

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0$$

aura $2p - 1$ racines

$$\gamma_1, \quad \gamma_2, \quad \ldots, \quad \gamma_{2p-1},$$

dont $2r - 1$ seront réelles, r étant au moins égal à 1 ; il restera $p - r$ couples de racines imaginaires.

Soient

$$\varphi(\alpha_1) = a_1, \quad \varphi(\alpha_2) = a_2, \quad \ldots, \quad \varphi(\alpha_m) = a_m,$$
$$\varphi(\gamma_1) = C_1, \quad \varphi(\gamma_2) = C_2, \quad \ldots, \quad \varphi(\gamma_{2p-1}) = C_{2p-1}$$

Les a seront réels ; parmi les C, $2q - 1$ seront réels, q étant au moins égal à r et, par conséquent, au moins égal à 1 ; les $2p - 2q$ autres C seront imaginaires et conjugués deux à deux.

Supposons que l'on ait construit une fonction $F_1(z)$ ne pouvant prendre aucune des $m + 2p$ valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_m, 0, C_1, C_2, \ldots, C_{2p-1}$, dont $2p - 2q$ seulement sont imaginaires et sont d'ailleurs conjuguées deux à deux. Définissons une fonction F (z) par l'équation

$$\varphi[F(z)] = F_1(z).$$

$F_1(z)$ ne pouvant prendre aucune des valeurs $C_1, C_2, \ldots, C_{2p-1}$, F (z) sera fonction uniforme de z. $F_1(z)$ ne pouvant devenir nul, F (z) ne pourra devenir égal à aucune des valeurs β. Enfin $F_1(z)$ ne pouvant être égalé à aucun des a, F (z) ne pourra être égalé à aucun des α, c'est-à-dire que F (z) satisfera aux conditions imposées.

En employant un nombre suffisant de fois le même artifice, on ramènera la construction de F (z) à celle d'une fonction $F_h(z)$ ne pouvant prendre $m + 2p$

valeurs réelles données. Or ce problème est toujours possible, ainsi que je l'ai montré dans ma Communication du 23 mai.

On en conclut :

1° Que toute équation différentielle linéaire à coefficients algébriques s'intègre par les fonctions zétafuchsiennes ;

2° Que les coordonnées des points d'une courbe algébrique quelconque s'expriment par des fonctions fuchsiennes d'une variable auxiliaire.

SUR

LES FONCTIONS FUCHSIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 93, p. 581-582 (17 octobre 1881).

1. J'ai retrouvé par une autre voie un certain moyen d'exprimer les fonctions fuchsiennes par des séries, moyen dont j'avais déjà parlé dans un Mémoire antérieur, mais non dans les résumés insérés aux *Comptes rendus*.

J'envisage un groupe fuchsien G formé des substitutions

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right),$$

i variant de 0 à l'infini, et je considère la série

$$\varphi(z, a) = \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{1}{z - \dfrac{\alpha_i a + \beta_i}{\gamma_i a + \delta_i}} (\gamma_i a + \delta_i)^{-2m}.$$

Si z était une constante et a la variable indépendante, cette série serait une fonction thétafuchsienne de a; mais je regarde au contraire z comme la variable et a comme une constante.

Soit

$$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$$

une des substitutions fondamentales du groupe G. On trouve aisément

$$(\gamma z + \delta)^{2m-2} \varphi\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) - \varphi(z) = \sum_{\mu=0}^{\mu=2m-2} (\gamma z + \delta)^{\mu} \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{1}{\left[\gamma\left(\dfrac{\alpha_i a + \beta_i}{\gamma_i a + \delta_i}\right) + \delta\right]^{\mu+1}} (\gamma_i a + \delta_i)^{-2m}.$$

Le second membre est un polynome en z de degré $2m-2$ et dont les coefficients sont des constantes, fonctions thétafuchsiennes de a.

Cela posé, soit n le nombre des substitutions fondamentales de G, multiplié par $2m-1$. On pourra toujours, dans l'expression

$$\Phi(z) = A_0 \varphi(z, a_0) + A_1 \varphi(z, a_1) + \ldots + A_n \varphi(z, a_n),$$

choisir les constantes A et a de telle sorte que

$$(\gamma z + \delta)^{2m-2} \Phi\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = \Phi(z).$$

Le quotient de deux fonctions telles que $\Phi(z)$ sera alors une fonction fuchsienne.

2. Parmi les équations linéaires de la forme

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = v\varphi(x), \tag{1}$$

où $\varphi(x)$ est une fonction rationnelle de x, dont les intégrales sont régulières et dont les points singuliers sont donnés, ainsi que les racines des équations déterminantes correspondantes, il ne peut y en avoir qu'une telle que x soit fonction fuchsienne (de la première, deuxième ou sixième famille) du rapport des intégrales.

Il existe un théorème analogue pour le cas où $\varphi(x)$ est algébrique.

3. Dans une Note que j'ai eu précédemment l'honneur de présenter à l'Académie, j'ai parlé d'équations de la forme (1) dont les intégrales étaient irrégulières et où cependant x était fonction fuchsienne du rapport des intégrales. De pareilles fonctions fuchsiennes n'existent pas dans tout l'intérieur du cercle fondamental, mais seulement dans un espace limité par une infinité de cercles, tangents entre eux et orthogonaux au cercle fondamental.

4. Il existe une expression très simple du genre de la relation algébrique qui a lieu entre deux fonctions fuchsiennes de même groupe. Reprenons le polygone générateur du groupe, et soient $2n$ le nombre des côtés de la première sorte et p le nombre des cycles formés de sommets de la première ou de la

deuxième catégorie ; le genre sera

$$\frac{n+1-p}{2}$$

pour les fonctions de la première, de la deuxième ou de la sixième famille et

$$n-p$$

pour les fonctions des autres familles.

SUR

LES FONCTIONS FUCHSIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 94, p. 163-166 (23 janvier 1882).

Dans la Note que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie, je me propose d'exposer une méthode nouvelle et rapide pour exprimer une fonction fuchsienne donnée à l'aide de séries thétafuchsiennes. Je suppose, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'une fonction du genre 0 et de la première famille. J'envisage une équation du second ordre :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\,\frac{\varphi(x)}{(x-a_1)^2(x-a_2)^2\dots(x-a_n)^2}; \tag{1}$$

je suppose que $\varphi(x)$ est un polynome de degré $2n-2$, et que, pour les différents points singuliers $a_1, a_2, \dots, a_n, \infty$, les intégrales soient régulières, et que les différences des racines des équations déterminantes soient respectivement

$$\frac{1}{\mu_1},\quad \frac{1}{\mu_2},\quad \dots,\quad \frac{1}{\mu_n},\quad \frac{1}{\mu_{n+1}}.$$

Je suppose que l'on sache que x est fonction fuchsienne du rapport z des intégrales. On peut choisir z d'une infinité de manières. On pourra toujours le choisir de telle façon que, pour z très voisin de 0, x soit très voisin de a_1, et se développe de la façon suivante :

$$x = a_1 + z^{\mu_1} + b_2 z^{2\mu_1} + b_3 z^{3\mu_1} + b_4 z^{4\mu_1} + \dots \tag{2}$$

En posant alors

$$x = f(z),$$

$f(z)$ est une fonction fuchsienne parfaitement déterminée ; il est aisé de calculer les coefficients $b_2, b_3, b_4, \ldots$ et ceux des substitutions du groupe fuchsien correspondant

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right).$$

Cela posé, envisageons la fonction suivante :

$$\Lambda(z) = \frac{[f(z)-a_1]^{\lambda_1}[f(z)-a_2]^{\lambda_2}\ldots[f(z)-a_n]^{\lambda_n}}{[f'(z)]^m[f(z)-f(z_1)][f(z)-f(z_2)]\ldots[f(z)-f(z_p)]}.$$

Les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, m sont entiers positifs. Ils sont assujettis, ainsi que le nombre p des facteurs du dénominateur, aux inégalités suivantes :

$$\lambda_i > m\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right),$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n < m\left(1 + \frac{1}{\mu_{n+1}}\right) + p.$$

Les quantités $z_1, z_2, \ldots, z_p$ sont regardées provisoirement comme des constantes. Les infinis de la fonction $\Lambda(z)$ sont tous simples ; ils sont compris dans la formule

$$\frac{\alpha_i z_1 + \beta_i}{\gamma_i z_1 + \delta_i}, \quad \frac{\alpha_i z_2 + \beta_i}{\gamma_i z_2 + \delta_i}, \quad \ldots, \quad \frac{\alpha_i z_p + \beta_i}{\gamma_i z_p + \delta_i}.$$

Quels sont les résidus correspondants ? Soit

$$\frac{1}{[f(z)-f(z_1)][f(z)-f(z_2)]\ldots[f(z)-f(z_p)]} = \frac{A_1}{f(z)-f(z_1)} + \frac{A_2}{f(z)-f(z_2)} + \ldots + \frac{A_p}{f(z)-f(z_p)}.$$

On aura

$$(3)\qquad \begin{cases} A_1 + A_2 + \ldots + A_p = 0, \\ A_1 f(z_1) + A_2 f(z_2) + \ldots + A_p f(z_p) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_1 f(z_1)^{p-2} + A_2 f(z_2)^{p-2} + \ldots + A_p f(z_p)^{p-2} = 0. \end{cases}$$

Le résidu correspondant à l'infini

$$\frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}$$

sera

$$\frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{m+1}(\gamma_i z_k + \delta_i)^{2(m+1)}},$$

en posant, pour abréger,

$$F(z) = [f(z)-a_1]^{\lambda_1}[f(z)-a_2]^{\lambda_2}\ldots[f(z)-a_n]^{\lambda_n}.$$

Soit $\varphi(z)$ une fonction rationnelle quelconque ne devenant pas infinie à l'intérieur du cercle fondamental. La fonction $\varphi(z)\Lambda(z)$ jouira de la propriété suivante : elle sera égale à une somme de termes de la forme $\sum \frac{A}{z-a}$, comme on le démontre par des considérations très simples, mais qui cependant ne peuvent trouver place ici. On aura donc

$$\varphi(z)\Lambda(z) = \sum_i \sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{m+1}} \frac{\varphi\left(\frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}\right)}{(\gamma_i z_k + \delta_i)^{2(m+1)}} \frac{1}{z - \frac{\alpha_i z_k + \beta_i}{\gamma_i z_k + \delta_i}}.$$

Cette identité a lieu quel que soit $\varphi(z)$. Nous pouvons donc écrire

$$(4)\qquad \sum_k \frac{A_k F(z_k)}{[f'(z_k)]^{m+1}} \theta(z_k) = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$\theta(t) = \sum \frac{\varphi\left(\frac{\alpha_i t + \beta_i}{\gamma_i t + \delta_i}\right) - \varphi(z)}{z - \frac{\alpha_i t + \beta_i}{\gamma_i t + \delta_i}} (\gamma_i t + \delta_i)^{-2(m+1)}.$$

Cette fonction, si l'on y regarde z comme une constante, est une fonction thétafuchsienne de t. Si l'on rapproche l'identité (4) des équations (3), et si l'on remarque que, dans ces équations, $z_1, z_2, \ldots, z_p$ ont des valeurs quelconques, on en déduira l'existence d'une relation de la forme

$$(5)\qquad \theta(t) = \frac{[f'(t)]^{m+1}}{F(t)}[M_0 + M_1 f(t) + M_2 f^2(t) + \ldots + M_{p-2} f^{p-2}(t)],$$

où $M_0, M_1, \ldots, M_{p-2}$ sont des constantes indépendantes de t. Les valeurs numériques de ces constantes peuvent être calculées aisément à l'aide de séries de même forme que Θ et des $p-2$ premiers coefficients $b_1, b_2, \ldots, b_{p-2}$ de la série (2). Cette méthode nous donne donc l'expression d'une fonction rationnelle de $f'(z)$ et de $f(z)$ sous la forme d'une série thétafuchsienne. Connaissant trois pareilles expressions, nous pourrons exprimer rationnellement $f(z)$ par des séries thétafuchsiennes.

On peut, par ce procédé, écrire effectivement certaines relations linéaires entre les séries thétafuchsiennes, relations dont j'ai démontré *a priori* l'existence.

Les mêmes méthodes sont applicables, avec quelques changements, aux fonctions des autres genres et des autres familles.

SUR

LES GROUPES DISCONTINUS

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 94, p. 840-843 (27 mars 1882).

Le fondement de mes recherches sur les fonctions fuchsiennes est l'étude des groupes discontinus contenus dans le groupe linéaire à une variable, c'est-à-dire dans le groupe des substitutions

$$\left(x, \frac{ax+b}{cx+d}\right).$$

Les uns, les groupes fuchsiens, sont tels que a, b, c, d sont réels ou, plus généralement, que leurs substitutions conservent un certain cercle, appelé *cercle fondamental*; les autres, que j'ai appelés *kleinéens*, ne jouissent pas de cette propriété. On peut généraliser cette notion et se demander s'il n'existe pas de groupes discontinus contenus dans le groupe linéaire à deux variables, c'est-dire dans le groupe des substitutions

$$(1) \qquad \left(x, y, \frac{ax+by+c}{a''x+b''y+c''}, \frac{a'x+b'y+c'}{a''x+b''y+c''}\right).$$

Dans une Note extrêmement intéressante, M. Picard a récemment donné un exemple d'un pareil groupe. Mon but est de montrer que d'autres considérations, arithmétiques, algébriques ou géométriques, permettent d'obtenir une infinité d'autres groupes discontinus.

1. Je supposerai d'abord que les coefficients des substitutions (1) sont réels et que leur déterminant est égal à 1. J'aurai ainsi des groupes analogues aux

groupes fuchsiens à coefficients réels. Mais, parmi ceux-ci, il faut faire une distinction : les uns, comme ceux de la première famille, sont discontinus pour toutes les valeurs imaginaires de la variable, mais cessent de l'être pour les valeurs situées sur l'axe des quantités réelles, qui est une ligne singulière essentielle; les autres, comme ceux de la troisième famille, sont discontinus pour les valeurs réelles comme pour les valeurs imaginaires de x. Ce sont des groupes analogues à ces derniers que je vais d'abord chercher à former. Je vais chercher s'il existe des groupes de substitutions de la forme (1), à coefficients réels, qui soient discontinus pour les valeurs réelles de x et de y, ce qui entraînera également la discontinuité pour les valeurs imaginaires de ces variables, au moins dans une certaine étendue.

Pour former un pareil groupe, il y a d'abord un moyen qui s'offre de lui-même à l'esprit. Considérons une forme quadratique

$$(2) \qquad F(x, y, z)$$

à coefficients entiers; elle admettra une infinité de substitutions semblables à coefficients entiers

$$(3) \qquad (x, y, z, ax+by+cz, a'x+b'y+c'z, a''x+b''y+c''z).$$

Les substitutions correspondantes

$$\left(x, y, \frac{ax+by+c}{a''x+b''y+c''}, \frac{a'x+b'y+c'}{a''x+b''y+c''}\right)$$

formeront un groupe discontinu. Si l'on suppose que les coefficients de la forme (2) et ceux des substitutions semblables (3), au lieu d'être des entiers ordinaires, sont des entiers complexes, on obtient encore de la sorte un groupe discontinu pour les valeurs complexes de x et de y.

2. Je veux maintenant montrer comment, de chaque groupe fuchsien, on peut déduire un groupe formé de substitutions de la forme (1), à coefficients réels, et qui est discontinu pour les valeurs réelles et, par conséquent aussi, pour les valeurs imaginaires de x et de y. Soit

$$(4) \qquad (x, y, z, ax+by+cz, a'x+b'y+c'z, a''x+b''y+c''z)$$

une substitution dont les coefficients sont réels, sans être nécessairement

entiers, et qui reproduit la forme quadratique

$$z^2 - xy.$$

Considérons trois quantités réelles x, y, z, telles que $z^2 - xy$ soit négatif, et adjoignons-leur la quantité complexe t définie par l'équation

$$xt^2 + 2zt + y = 0.$$

A toute substitution linéaire

$$\left(t, \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right), \tag{5}$$

dont les coefficients sont réels, correspondra une substitution de la forme (4), et, par conséquent aussi, une substitution

$$\left(x, y, \frac{ax + by + c}{a''x + b''y + c''}, \quad \frac{a'x + b'y + c'}{a''x + b''y + c''}\right). \tag{6}$$

Si les substitutions (5) forment un groupe discontinu, c'est-à-dire un groupe fuchsien G, les substitutions (6) correspondantes formeront un groupe discontinu G′, même pour les valeurs réelles de x et de y. Du reste, au lieu de la forme $z^2 - xy$, on pourrait en considérer une infinité d'autres. Au groupe G correspondait une subdivision de l'intérieur du cercle fondamental en une infinité de polynomes curvilignes R dont les côtés étaient des circonférences coupant orthogonalement ce cercle. De même, au groupe G′ correspondra une subdivision d'une certaine conique (que l'on pourra toujours réduire à un cercle) en une infinité de polygones *rectilignes* R′. Voici comment on pourra passer de la première subdivision à la seconde : on construira la sphère qui admet le cercle fondamental comme grand cercle, et l'on projettera *stéréographiquement* sur cette sphère les polygones R. On les projettera ensuite de nouveau, mais *orthogonalement*, sur le plan de la subdivision primitive, et l'on aura les polygones R′.

La considération des groupes kleinéens m'aurait donné, par un procédé analogue, des groupes discontinus contenus dans le groupe linéaire à trois variables.

Enfin, les notions qui précèdent sont susceptibles d'une généralisation très étendue. Mais, pour l'exposer ici, j'ai besoin de faire appel à certaines considérations algébriques et arithmétiques, qui feront, si l'Académie veut bien le permettre, l'objet d'une prochaine Note.

SUR

LES FONCTIONS FUCHSIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 94, p. 1038-1040 (10 avril 1882).

Je voudrais exposer ici quelques résultats nouveaux et les réunir à des théorèmes anciens, de façon à en faire un ensemble comprenant, comme cas particuliers, les résultats obtenus par M. Klein par d'autres considérations, et exposés par lui dans deux Notes récentes (*Math. Ann.*, Bd. XIX et XX).

Soit une équation différentielle linéaire quelconque

$$\frac{d^n v}{dx^n} + P_{n-1}\frac{d^{n-1} v}{dx^{n-1}} + P_{n-2}\frac{d^{n-2} v}{dx^{n-2}} + \ldots + P_1 \frac{dv}{dx} + P_0 v = 0. \tag{1}$$

Dans cette équation, $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ sont des fonctions rationnelles en x et en y, et y est lié à x par une relation algébrique

$$f(x, y) = 0. \tag{2}$$

D'ailleurs, une ou plusieurs des fonctions P deviendront infinies pour certaines positions du point analytique (x, y) : ce seront les points singuliers de notre équation différentielle ; à chacun d'eux correspondra une équation déterminante dont les racines pourront être imaginaires ou incommensurables, ou bien être toutes des multiples de $\frac{1}{n}$, n étant un entier positif. Dans ce dernier cas, nous dirons que le point singulier est de la première catégorie ; dans le cas contraire, qu'il est de la seconde catégorie. Je laisse de côté le cas où plusieurs des racines sont égales et qui correspond soit à un point de la seconde catégorie, soit à un point à apparence singulière.

Il existera, en général, deux fonctions fuchsiennes $F(z)$ et $F_1(z)$, jouissant des propriétés suivantes :

1° Elles n'existent qu'à l'intérieur du cercle fondamental.

2° Si l'on fait $x = F(z)$, $y = F_1(z)$, la relation (2) est satisfaite.

3° Quand z reste inférieur au cercle fondamental, le point analytique (x, y) ne peut passer par aucun point singulier de la seconde catégorie.

4° Si (x, y) passe par un point singulier de la première catégorie, $F(z)$ et $F_1(z)$ ont leur $n-1$ premières dérivées nulles.

Alors les intégrales de l'équation (1) sont des fonctions zétafuchsiennes de z.

Supposons, en particulier, qu'il n'y ait pas de points singuliers de la première ni de la seconde catégorie, et que la relation (2) soit de genre p ; le polygone R_0 correspondant à nos fonctions fuchsiennes pourra être amené à l'une des deux formes suivantes :

1° Ou bien un polygone de $4p$ côtés dont les côtés opposés sont conjugués, et dont tous les sommets forment un seul cycle, de telle façon que la somme des angles soit égale à 2π ;

2° Ou bien un polygone de $4p$ côtés dont les côtés de rang $4q+1$ et $4q+3$ sont conjugués, ainsi que les côtés de rang $4q+2$ et $4q+4$ (q étant un entier). Ici encore tous les sommets ne forment qu'un cycle, et la somme des angles est égale à 2π. Cette forme de R_0 présente cet avantage que les différents côtés correspondent alors aux périodes *normales* des intégrales abéliennes de première espèce, et que la considération de ces fonctions fuchsiennes permet alors de présenter d'une façon simple la démonstration des relations entre ces périodes.

Le polygone R_0 peut encore prendre une infinité d'autres formes se ramenant les unes aux autres. Je citerai, entre autres, dans le cas $p=3$, le polygone de 14 côtés considéré par M. Klein.

Si $p=1$, nos fonctions F et F_1 se réduisent à des fonctions doublement périodiques, de sorte que l'on retrouve les résultats connus sur l'intégration des équations linéaires par ces sortes de fonctions, et en particulier ceux de M. Picard.

On peut retrouver de même les résultats connus relativement à l'intégration algébrique de ces équations. Si ces équations admettent, en effet, des intégrales algébriques, les séries thétazétas, par lesquelles s'expriment nos fonctions zétafuchsiennes, se réduisent d'elles-mêmes à des séries thétafuchsiennes ; par conséquent, les intégrales v se ramènent à des fonctions fuchsiennes de z liées à x par des relations algébriques, puisque nous savons qu'il y a toujours une telle relation entre deux fonctions fuchsiennes de même groupe.

Supposons maintenant que notre équation (1) admette des points singuliers; les sommets de R_0 se répartiront alors non plus en un, mais en plusieurs cycles, qui sont de la première ou de la seconde catégorie, selon que les points singuliers correspondants sont de la première ou de la seconde catégorie.

Est-ce là la seule manière d'exprimer x, y et v par des fonctions uniformes de z ? Non.

1° On peut remplacer $F(z)$ et $F_1(z)$ par deux fonctions $F'(z)$ et $F'_1(z)$, jouissant des mêmes propriétés, mais qui sont des fonctions kleinéennes, ou de ces fonctions fuchsiennes qui n'existent que dans une partie du cercle fondamental. Le passage de $F(z)$ à $F'(z)$ se fera par l'*Abbildung* du cercle fondamental sur un certain domaine.

2° On peut égaler z à une fonction uniforme de t, et alors x, y et v sont également uniformes en t; de plus, on pourra choisir d'une infinité de manières z en fonction de t, de telle sorte que

$$x = \mathfrak{F}(t), \qquad y = \mathfrak{F}_1(t), \qquad v = Z(t),$$

$\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}_1$ étant des fonctions fuchsiennes et Z une fonction zétafuchsienne. Il est quelquefois plus facile de trouver la fonction $\mathfrak{F}(t)$ que $F(z)$, comme j'en ai donné l'exemple dans ma Communication du 8 août 1881.

On peut enfin exprimer x et y par des fonctions fuchsiennes $F(z)$ et $F_1(z)$ existant dans toute l'étendue du plan ; mais je ne puis entrer ici dans tous les détails que ce sujet comporte.

SUR

LES FONCTIONS FUCHSIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 94, p. 1166-1167 (24 avril 1882).

Parmi les fonctions fuchsiennes existant dans toute l'étendue du plan, et dont j'ai parlé à la fin de ma dernière Communication, il en est un certain nombre sur lesquelles je voudrais attirer particulièrement l'attention. Considérons dans le plan des z l'axe des quantités réelles et $2n+1$ points A_1, A_2, ..., A_n, C, B_1, B_2, ..., B_n. Les points A_1 et B_1 sont situés sur l'axe des quantités réelles, les autres sont au-dessus de cet axe. Joignons les points

$$A_1A_2,\ A_2A_3,\ A_3A_4,\ \ldots,\ A_{n-1}A_n,\ A_nC,\ CB_n,\ B_nB_{n-1},\ \ldots,\ B_3B_2,\ B_2B_1$$

par des arcs de cercle ayant leurs centres sur l'axe des quantités réelles. On obtiendra ainsi un certain polygone curviligne

$$A_1A_2A_3A_4\ldots A_nCB_nB_{n-1}\ldots B_2B_1,$$

dont tous les côtés seront des arcs de cercle ayant leurs centres sur l'axe des quantités réelles, excepté le côté A_1B_1, qui sera un segment de cet axe. Quant au sommet C, on peut, pour plus de symétrie dans les énoncés, le considérer comme appartenant soit à la série des points A avec la notation A_{n+1}, soit à la série des points B avec la notation B_{n+1}.

J'appelle D_i et D_i' les intersections de l'arc A_iA_{i+1} prolongé avec l'axe des quantités réelles; E_i, E_i' les intersections de cet axe avec l'arc B_iB_{i+1}.

Je suppose :

1° Que le rapport anharmonique des quatre points D_i, D_i', A_i, A_{i+1} sur le cercle $D_iD_i'A_iA_{i+1}$ est égal à celui des quatre points E_i, E_i', B_i, B_{i+1} sur le cercle $E_iE_i'B_iB_{i+1}$;

2° Que les angles curvilignes A_i+B_i sont des parties aliquotes de 2π, ainsi que l'angle curviligne C.

Dans ce cas, il existe une substitution linéaire

$$\left(z,\ \frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}\right),$$

dont les coefficients sont réels, et qui change A_iA_{i+1} en B_iB_{i+1}.

En combinant ces n substitutions, on obtient un groupe discontinu, et ce groupe donne naissance à une infinité de fonctions fuchsiennes qui jouissent des propriétés suivantes :

1° Elles sont toutes fonctions rationnelles de l'une d'entre elles, que j'appelle $F(z)$;

2° Elles existent dans toute l'étendue du plan; leurs points singuliers essentiels sont isolés et en nombre infini, et ils sont tous situés sur l'axe des quantités réelles.

Ces points singuliers sont infiniment rapprochés dans le voisinage de certains points singuliers du deuxième ordre; ceux-ci sont infiniment rapprochés dans le voisinage de certains points singuliers du troisième ordre, et ainsi de suite. D'ailleurs, les points singuliers de tous les ordres sont en nombre infini. Nous avons donc là un exemple de ces *fonctions du deuxième genre*, dont M. Mittag-Leffler a parlé dans sa Communication si intéressante du 3 avril.

Si nous posons

$$x=F(z),\qquad y=\sqrt{\frac{dF}{dx}},$$

on a

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\Phi(x)y, \tag{1}$$

$\Phi(x)$ étant rationnel en x. La fonction rationnelle $\Phi(x)$ a ses coefficients *réels;* et les points singuliers de l'équation (1) sont au nombre de $2n$ et sont imaginaires conjugués deux à deux. Pour chacun d'eux, les intégrales sont *régulières*, et la différence des racines de l'équation déterminante est une partie aliquote de l'unité.

Dans le cas particulier où l'un ou plusieurs des sommets du polygone

envisagé viennent sur l'axe des quantités réelles, les intégrales de l'équation (1) deviennent *logarithmiques* dans le voisinage des points singuliers correspondants.

On peut former des fonctions kleinéennes ayant la même génération que les fonctions fuchsiennes dont je viens de parler. Les propriétés sont les mêmes. Seulement, les points singuliers essentiels ne sont plus situés sur l'axe des quantités réelles; la fonction $\Phi(x)$ n'a plus ses coefficients réels, et les points singuliers de l'équation (1) ne sont plus imaginaires conjugués deux à deux.

SUR

UNE CLASSE D'INVARIANTS

RELATIFS AUX ÉQUATIONS LINÉAIRES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 94, p. 1402-1405 (22 mai 1882).

Considérons deux équations différentielles linéaires

$$\frac{d^m y}{dx^m} + P_{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \ldots + P_1\frac{dy}{dx} + P_0 y = 0,$$

$$\frac{d^m y}{dx^m} + P'_{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \ldots + P'_1\frac{dy}{dx} + P'_0 y = 0.$$

Je suppose que les fonctions P et P′ sont rationnelles en x et en z; z étant défini en fonction de x par une relation algébrique

$$f(x, z) = 0.$$

Je dirai que ces deux équations sont de même *famille*, si l'intégrale générale de la seconde peut se mettre sous la forme

$$A\left(Q_{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + Q_{m-2}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \ldots + Q_1\frac{dy}{dx} + Q_0 y\right),$$

y étant l'intégrale générale de la première, les Q étant des fonctions rationnelles de x et de z, et A une fonction quelconque de ces variables. Supposons que les fonctions P et P′ soient de degré déterminé, de façon que leurs coefficients soient en nombre limité. Il y aura certaines fonctions de ces coefficients qui auront la même valeur pour toutes les équations d'une même famille. Je les appellerai *invariants de famille*.

Pour montrer comment on peut déterminer et étudier les invariants de famille, je vais prendre l'exemple simple de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \theta y = 0, \tag{1}$$

θ étant une fonction rationnelle de x seulement. Je suppose que les intégrales de cette équation soient partout régulières et sans logarithmes. Parmi les infinis de θ, je distingue ceux pour lesquels la différence des racines de l'équation déterminante n'est pas un entier et qui sont les *points singuliers* proprement dits, et ceux pour lesquels cette différence est un entier et que j'appellerai points singuliers *apparents*. Je supposerai que le point ∞ est un point singulier, et qu'il y a, en outre, k points singuliers à distance finie. Je dirai que deux équations de la forme (1) appartiennent à la même classe si les points singuliers sont les mêmes et si, pour chacun d'eux, la différence des racines de l'équation déterminante est la même à un entier près. Je supposerai, pour éviter une discussion qui ne présente, d'ailleurs, aucune difficulté, que cette différence est la même dans nos deux équations pour chaque point singulier, et qu'elle est égale à 2 pour chaque point apparent. Cela posé, toute classe se divisera en deux sous-classes, selon que le nombre des points apparents sera pair ou impair.

Étant données deux équations de la même sous-classe, combien faudra-t-il de conditions pour qu'elles soient de la même famille? En d'autres termes, combien y aura-t-il d'invariants de famille en dehors de ceux qui déterminent la classe? Il y en aura $2k-4$.

Soit h le nombre des points apparents; si, outre les k points singuliers, les h points apparents sont donnés, il restera, dans θ, des paramètres arbitraires au nombre de $k-2$. Il résulte de là que, si $h \equiv k \pmod 2$, il y aura, dans chaque famille, une équation canonique qui n'aura que $k-2$ points apparents, et si $h \equiv k+1 \pmod 2$, il y en aura une infinité qui auront $k-1$ points apparents.

Soit, par exemple, $k=3$, $h \equiv 1 \pmod 2$; voyons comment on pourra passer de l'équation (1) à une équation de même famille n'ayant qu'un point apparent. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_k$ les points singuliers, $b_1, b_2, \ldots, b_h$ les points apparents. Posons

$$\psi = \frac{\alpha(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_h)(x-d)}{(x-a_1)^2(x-a_2)^2(x-a_3)^2(x-c_1)^2(x-c_2)^2\ldots(x-c_m)^2}.$$

Je suppose $2m = h-3$. On voit que ψ contient $m+2$ paramètres arbitraires, c'est-à-dire α, d, c_1, c_2, ..., c_m. Considérons la fonction rationnelle $-\theta+\psi$. Elle sera de degré -2, et elle aura $3+m+h$ infinis doubles. Combien faut-il de conditions pour qu'une fonction R de degré -2 et ayant n infinis doubles puisse se mettre sous la forme $\varphi^2 - \frac{d\varphi}{dx}$, φ étant rationnel? Il en faut $n-1$, et ces conditions, ainsi que les coefficients de φ, s'expriment très simplement en fonction des coefficients de R. Ici nous aurons donc $2+h+m$ conditions, et, comme h d'entre elles sont satisfaites d'elles-mêmes, nous satisferons aux autres à l'aide des $m+2$ paramètres arbitraires qui restent dans ψ. On résoudra donc l'équation

$$\varphi^2 - \frac{d\varphi}{dx} = -\theta + \psi,$$

ce qui se ramène à un problème purement algébrique. Puis on formera l'équation dont l'intégrale générale s'écrit

$$\frac{1}{\sqrt{\psi}}\left(\varphi y + \frac{dy}{dx}\right),$$

y étant l'intégrale générale de (1). Cette équation sera de même forme que (1), elle sera de même famille que (1), et elle n'admettra qu'un point apparent qui sera d. Les coefficients de cette équation seront les invariants de famille cherchés.

La question peut se traiter par la même analyse dans le cas le plus général. Un problème se présente maintenant: je suppose que les k points singuliers de (1) soient donnés; peut-on disposer des $2k-4$ invariants, de telle façon que le groupe de l'équation (1) soit quelconque? Cela n'est pas évident *a priori*, mais la considération des fonctions zétafuchsiennes permet de le démontrer.

SUR

LES FONCTIONS FUCHSIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 95, p. 626-628 (9 octobre 1882).

Dans l'étude des fonctions fuchsiennes, j'ai envisagé des séries de la forme suivante :

$$\sum \mathrm{H}\left(\frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}\right)(\gamma_i z+\delta_i)^{-2m}=\Theta(z), \tag{1}$$

où $\mathrm{H}(z)$ est l'algorithme d'une fonction rationnelle, où $\left(z, \frac{\alpha_i z+\beta_i}{\gamma_i z+\delta_i}\right)$ sont les différentes substitutions du groupe fuchsien envisagé, et où m est un entier plus grand que 1.

J'ai démontré que (pour une même valeur de m) le quotient de deux de ces séries est une fonction fuchsienne. Réciproquement, on peut se demander si toute fonction fuchsienne peut s'exprimer par un pareil quotient. Cette question se ramène à la suivante. J'ai dit déjà que toutes les fonctions fuchsiennes ayant même groupe peuvent s'exprimer rationnellement à l'aide de deux d'entre elles, que j'appelle x et y, et entre lesquelles il y a une relation algébrique, de sorte que toute série de la forme (1) peut être égalée à une expression telle que

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m \mathrm{F}(x, y), \tag{2}$$

où $\mathrm{F}(x, y)$ est l'algorithme d'une fonction rationnelle.

Réciproquement, toute fonction telle que (2) peut-elle être mise sous la forme (1)? Pour fixer les idées, je supposerai qu'il s'agit d'une de ces familles de fonctions fuchsiennes qui n'existent qu'à l'intérieur du cercle fondamental.

Nous trouvons d'abord aisément que, pour pouvoir être mise sous la forme (1), l'expression (2) doit s'annuler quand z vient en un des sommets de la deuxième catégorie du polygone R_0.

Supposons une fois pour toutes cette condition remplie.

Les fonctions telles que (2) peuvent ou bien admettre des infinis (nous dirons alors qu'elles sont de la première espèce), ou bien n'en pas admettre, auquel cas elles seront de la deuxième espèce. De même, les séries telles que (1) seront (sauf des cas exceptionnels que nous laisserons de côté) de la première espèce et auront des infinis si $\mathrm{H}(z)$ a des pôles à l'intérieur du cercle fondamental. Dans le cas contraire, elle sera de la deuxième espèce et n'aura pas d'infini.

Je dis d'abord que toute expression de la forme (2) et de la deuxième espèce peut être égalée à une série de la forme (1) et de la deuxième espèce. En effet, on démontre que toutes les expressions de la forme (2) de la deuxième espèce peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de p d'entre elles, p étant un nombre entier facile à déterminer. Le théorème énoncé sera donc démontré si j'établis qu'il est possible de mettre sous la forme (1) p expressions telles que (2) *linéairement indépendantes entre elles*. Or, dire que cela est impossible, ce serait dire que toutes les séries (1) de la deuxième espèce peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de $p-1$ d'entre elles. Mais je dis qu'il n'en est pas ainsi.

En effet, supposons que toutes les séries (1) de la deuxième espèce puissent s'exprimer linéairement à l'aide de $p-1$ d'entre elles, que j'appellerai Θ_1, $\Theta_2, \ldots, \Theta_{p-1}$. Soient $z_1, z_2, \ldots, z_p$ p points choisis *au hasard* à l'intérieur du cercle fondamental. On pourra toujours trouver p nombres $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_p$ tels qu'on ait

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}_1\Theta_1(z_1) + \mathrm{A}_2\Theta_1(z_2) + \ldots + \mathrm{A}_p\Theta_1(z_p) = 0,\\
&\mathrm{A}_1\Theta_2(z_1) + \mathrm{A}_2\Theta_2(z_2) + \ldots + \mathrm{A}_p\Theta_2(z_p) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\mathrm{A}_1\Theta_{p-1}(z_1) + \mathrm{A}_2\Theta_{p-1}(z_2) + \ldots + \mathrm{A}_p\Theta_{p-1}(z_p) = 0.
\end{aligned}$$

On aura alors

$$\mathrm{A}_1\Theta(z_1) + \mathrm{A}_2\Theta(z_2) + \ldots + \mathrm{A}_p\Theta(z_p) = 0,$$

$\Theta(z)$ désignant une série quelconque de la forme (1) et de la deuxième espèce.

Cela posé, considérons la fonction suivante :

$$\Phi(z, a) = \sum_i \frac{(\gamma_i a+\delta_i)^{-2m}}{z-\frac{\alpha_i a+\beta_i}{\gamma_i a+\delta_i}},$$

Soit $\left(z, \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)$ une quelconque des substitutions de notre groupe fuchsien, et posons

$$H(a)=\frac{(\gamma z+\delta)^{2m-1}-(\gamma a+\delta)^{2m-1}}{(z-a)(\gamma z+\delta)^{2m-2}(\gamma a+\delta)^{2m-1}}.$$

On aura identiquement

$$\Phi\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, a\right)-(\gamma z+\delta)^{2-2m}\Phi(z,a)=\sum_i H\left(\frac{\alpha_i a+\beta_i}{\gamma_i a+\delta_i}\right)(\gamma_i a+\delta_i)^{-2m}=\Theta(a),$$

$\Theta(a)$ désignant une série (1) de la deuxième espèce, où a est regardée comme la variable indépendante. Si donc on pose

$$\Lambda(z)\equiv A_1\Phi(z,z_1)+A_2\Phi(z,z_2)+\ldots+A_p\Phi(z,z_p),$$

on aura

$$\Lambda\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)=(\gamma z+\delta)^{2-2m}\Lambda(z);$$

on en conclut que $\Lambda(z)$ est de la forme

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^{1-m}F(x,y). \tag{3}$$

F étant rationnel. D'ailleurs l'expression (3) s'annule comme l'expression (2) quand z vient en un des sommets de la deuxième catégorie. Il serait donc possible de construire une fonction telle que (3), admettant p infinis, $z_1, z_2, \ldots, z_p$ *choisis arbitrairement* et n'en admettant pas d'autre. Or on démontre que cela ne se peut pas. Donc l'hypothèse faite au début est absurde. Donc toute expression (2) de la deuxième espèce peut se mettre sous la forme (1).

Je dis maintenant que toute expression (2) de la première espèce peut se mettre sous la forme (1) (en supposant toujours qu'elle s'annule quand z vient en un sommet de la deuxième catégorie). En effet, on pourra toujours construire une série (1) ayant les mêmes infinis que l'expression (2), donnée avec les mêmes résidus. La différence de l'expression (2) donnée et de la série (1) ainsi formée sera une expression (2) de la deuxième espèce qui pourra se mettre sous la forme (1). Il en sera donc de même de l'expression (2) donnée.

Il résulte de ce qui précède que toute fonction fuchsienne, n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental, peut s'exprimer d'une infinité de manières par le quotient de deux séries de la forme (1). Des principes analogues sont applicables aux fonctions fuchsiennes qui existent dans tout le plan.

SUR

LES GROUPES DES ÉQUATIONS LINÉAIRES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 96, p. 691-694 (12 mars 1883).

La détermination complète du groupe d'une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels est l'un des problèmes les plus importants que l'on rencontre dans la théorie de ces équations. M. Fuchs a donné, dans le Tome 75 du *Journal de Crelle*, un moyen de calculer les coefficients de ce groupe avec une approximation indéfinie ; mais il y a beaucoup d'autres moyens d'arriver au même résultat.

1. Je considère en particulier l'équation suivante :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=y\left[\sum_{i=1}^{i=n}\frac{A_i}{(x-a_i)^2}+\sum_{i=1}^{i=n}\frac{B_i}{x-a_i}\right], \tag{1}$$

en supposant

$$\Sigma B_i=0.$$

Ce que je vais dire s'appliquerait d'ailleurs à une équation linéaire quelconque, et je n'ai envisagé l'équation (1) que pour fixer les idées.

Soient y_1 et y_2 deux intégrales de l'équation (1) définies par les conditions suivantes : pour $x=0$, $y_1, y_2, \frac{dy_1}{dx}$ et $\frac{dy_2}{dx}$ se réduisent respectivement à

$$1,\quad 0,\quad 0 \text{ et } 1.$$

Si l'on considère un instant x et les a_i comme des constantes, les A_i et les B_i comme variables, il est aisé de voir que $y_1, y_2, \frac{dy_1}{dx}$ et $\frac{dy_2}{dx}$ sont des fonctions

entières des A_i et des B_i, et peuvent être développées suivant les puissances croissantes de ces quantités en séries *toujours* convergentes.

Supposons maintenant que l'on fasse décrire à x un contour fermé quelconque C en partant du point o et y revenant ; soient z_1, z_2, t_1 et t_2 les valeurs finales de y_1, y_2, $\frac{dy_1}{dx}$ et $\frac{dy_2}{dx}$, elles seront des fonctions entières des A et des B. Quand on fera décrire à x le contour envisagé, y_1 et y_2 se changeront respectivement en

$$z_1 y_1 + t_1 y_2,$$
$$z_2 y_1 + t_2 y_2.$$

Soient S_1 et S_2 les racines de l'équation en S,

$$(z_1 - S)(t_2 - S) - z_2 t_1 = 0.$$

Si l'on connaissait, pour tous les contours possibles, les valeurs de S_1 et de S_2, le groupe cherché sera entièrement déterminé. Or on a constamment

$$S_1 S_2 = z_1 t_2 - z_2 t_1 = 1.$$

Il reste à déterminer

$$S_1 + S_2 = z_1 + t_2.$$

La valeur de $z_1 + t_2$ s'obtient immédiatement quand le contour C n'enveloppe qu'un point singulier ou les enveloppe tous. Il reste à étudier le cas où ce contour enveloppe plusieurs points singuliers sans les envelopper tous. Dans ce cas, $z_1 + t_2$ s'exprime par une série ordonnée suivant les puissances des A_i et des B_i, et les coefficients sont des sommes de termes que l'on peut former comme il suit :

Posons

$$\Lambda(x, a_1) = \log\left(1 - \frac{x}{a_i}\right),$$
$$\Lambda(x, a_1, a_2) = \int_0^x \frac{\Lambda(x, a_1)}{x - a_2}\, dx,$$
$$\Lambda(x, a_1, a_2, a_3) = \int_0^x \frac{\Lambda(x, a_1, a_2)}{x - a_3}\, dx,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Soit enfin $\Lambda(C, a_1, a_2, \ldots, a_p)$ l'intégrale

$$\int \frac{\Lambda(x, a_1, a_2, \ldots, a_{p-1})}{x - a_p}\, dx,$$

prise le long du contour C. Les coefficients de notre série seront des sommes de termes de la forme $\Lambda(C, a_1, a_2, \ldots, a_p)$, les $a_1, a_2, \ldots, a_p$ étant, dans un certain ordre, les points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n$, chacun de ces derniers pouvant être répété un certain nombre de fois dans la série des a. Ces coefficients peuvent donc être calculés par quadratures.

2. Voici un autre moyen de former le groupe de l'équation (1). Soient a_1 et a_2 deux points singuliers, C_1 et C_2 deux cercles ayant pour centres a_1 et a_2 ne contenant aucun autre point singulier et ayant une partie commune P. Soient λ_1 et μ_1, λ_2 et μ_2 les racines des équations déterminantes relatives à a_1 et à a_2. L'équation admettra quatre intégrales :

$$(2)\qquad \begin{cases} y_1 = (x - a_1)^{\lambda_1} \varphi_1(x - a_1), & y_2 = (x - a_1)^{\mu_1} \psi_1(x - a_1), \\ y_3 = (x - a_2)^{\lambda_2} \varphi_2(x - a_2), & y_4 = (x - a_2)^{\mu_2} \psi_2(x - a_2), \end{cases}$$

où les φ et les ψ sont des séries ordonnées suivant les puissances de $x - a_1$ et de $x - a_2$, et convergentes toutes quatre à l'intérieur de P. On aura d'ailleurs

$$(3)\qquad \begin{cases} y_1 = \alpha y_3 + \beta y_4, & \frac{dy_1}{dx} = \alpha \frac{dy_3}{dx} + \beta \frac{dy_4}{dx}, \\ y_2 = \gamma y_3 + \delta y_4, & \frac{dy_2}{dx} = \gamma \frac{dy_3}{dx} + \delta \frac{dy_4}{dx}. \end{cases}$$

Si l'on pouvait déterminer les valeurs de α, β, γ, δ pour toutes les combinaisons deux à deux des points singuliers, le groupe cherché serait complètement déterminé ; mais, avec les suppositions que nous avons faites sur les cercles C_1 et C_2, on peut substituer, dans les équations (3), les valeurs des y données par les équations (2), en donnant à x une valeur fixe x_0 située à l'intérieur de P. On a ainsi α, β, γ, δ sous forme de séries ordonnées suivant les puissances des A, des B, de $x_0 - a_1$ et de $x_0 - a_2$.

Dans une prochaine Note, je montrerai, si l'Académie veut bien le permettre, comment on peut toujours ramener le problème au cas où l'on peut tracer deux cercles C_1 et C_2 satisfaisant aux conditions énoncées plus haut. Je montrerai également comment les résultats précédents peuvent s'étendre au cas des intégrales irrégulières et le lien intime qu'il y a entre ce dernier cas et divers problèmes de Mécanique céleste.

SUR

LES GROUPES DES ÉQUATIONS LINÉAIRES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 96, p. 1302-1304 (30 avril 1883).

3. Dans une Note que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie le 12 mars dernier, j'ai montré que, pour former le groupe d'une équation linéaire, il suffisait de connaître, pour toutes les combinaisons deux à deux des points singuliers, quatre coefficients α, β, γ, δ, et que ces quatre coefficients s'exprimaient aisément par des séries lorsque, envisageant deux points singuliers a_1 et a_2, on pouvait construire deux cercles C_1 et C_2, ayant pour centres a_1 et a_2, ne contenant aucun autre point singulier et ayant une partie commune.

Supposons maintenant que l'on trace deux figures F_1 et F_2, satisfaisant aux conditions suivantes : 1° elles auront une partie commune ; 2° la figure F_1 contiendra le seul point singulier a_1 et la figure F_2 le seul point singulier a_2 ; 3° la figure F_1 se composera de la partie commune à deux cercles qui se couperont aux points α_1 et β_1 sous un angle $\pi\gamma_1$; la figure F_2 sera de même limitée par deux circonférences se coupant en α_2 et β_2 sous un angle $\pi\gamma_2$; il est évidemment toujours possible de construire deux pareilles figures.

Les équations des quatre circonférences qui limitent les deux figures F_1 et F_2 seront

$$\arg\frac{x-\alpha_1}{x-\beta_1}=\delta_1, \qquad \arg\frac{x-\alpha_1}{x-\beta_1}=\delta_1+\pi\gamma_1,$$

$$\arg\frac{x-\alpha_2}{x-\beta_2}=\delta_2, \qquad \arg\frac{x-\alpha_2}{x-\beta_2}=\delta_2+\pi\gamma_2.$$

Posons

$$\zeta_1=\left(e^{-i\delta_1}\frac{x-\alpha_1}{x-\beta_1}\right)^{\frac{1}{\gamma_1}}, \qquad \zeta_2=\left(e^{-i\delta_2}\frac{x-\alpha_1}{x-\beta_2}\right)^{\frac{1}{\gamma_2}},$$

$$h_1=\left(e^{-i\delta_1}\frac{a_1-\alpha_1}{a_1-\beta_1}\right)^{\frac{1}{\gamma_1}}, \qquad h_2=\left(e^{-i\delta_2}\frac{a_2-\alpha_2}{a_2-\beta_2}\right)^{\frac{1}{\gamma_2}},$$

Soient h'_1 et h'_2 les quantités imaginaires conjuguées de h_1 et de h_2. Posons encore

$$z_1=\frac{\zeta_1-h_1}{\zeta_1-h'_1}, \qquad z_2=\frac{\zeta_2-h_2}{\zeta_2-h'_2}.$$

Si nous reprenons les notations de la Note citée, nous aurons

$$y_1=z_1^{\lambda_1}\varphi_1(z_1), \qquad y_2=z_1^{\mu_1}\psi_1(z_1) \qquad \text{à l'intérieur de } F_1$$

et

$$y_3=z_2^{\lambda_2}\varphi_2(z_2), \qquad y_4=z_2^{\mu_2}\psi_2(z_2) \qquad \text{à l'intérieur de } F_2.$$

Soient alors x_0 un point de la partie commune à F_1 et à F_2, z_1^0 et z_2^0 les valeurs correspondantes de z_1 et de z_2 ; il est clair que les coefficients α, β, γ, δ s'exprimeront en séries ordonnées suivant les puissances des A, des B, de z_1^0 et de z_2^0.

4. Supposons maintenant que l'on envisage une équation de la forme suivante :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\alpha y\,\varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant une fonction uniforme de x devenant infinie pour $x=0$, de telle sorte que le point $x=0$ soit un point singulier dans le voisinage duquel les intégrales soient irrégulières. On peut chercher les racines de l'équation déterminante qui correspond à une rotation du point x autour du point singulier $x=0$. On voit alors, en appliquant les principes exposés plus haut, que ces racines sont des fonctions entières de α.

5. De même envisageons des équations de la forme suivante :

$$\frac{dx_k}{dt}=\alpha\sum_i^n\varphi_{ik}x_i \qquad (k=1,2,\ldots,n),$$

où les φ_{ik} sont des fonctions périodiques de t développables suivant les sinus et les cosinus des multiples de λt. Cherchons l'équation déterminante D de la substitution que subissent les intégrales quand t s'accroît d'une période. Nous verrions aisément que les racines de cette équation sont des fonctions entières de α.

6. Un problème analogue se présente en Mécanique céleste lorsqu'on étudie les variations séculaires des excentricités ; seulement les fonctions φ_{ik} sont

développées suivant les cosinus et les sinus des arcs $(m\lambda + n\mu)\,t$, m et n étant des entiers et λ et μ des constantes données. On peut traiter directement ce problème comme le précédent, ou plutôt le ramener au précédent en supposant les moyens mouvements commensurables, ce qu'on peut faire avec une erreur aussi petite qu'on le veut. Les périodes des variations séculaires dépendent alors des racines de l'équation déterminante D définie plus haut, et sont développables suivant les puissances croissantes de α, quel que soit le module de α. Lorsqu'on calcule ces périodes comme on le fait d'ordinaire, c'est-à-dire en supprimant dans les fonctions φ_{is} tous les termes non séculaires, on ne trouve que le premier terme de ces séries, le terme qui contient α à la première puissance. Le terme suivant, qui est de l'ordre de α^2, est d'ailleurs très petit, à cause de la petitesse de α.

SUR

LES FONCTIONS FUCHSIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 96, p. 1485-1487 (21 mai 1883).

1. Dans une Note que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie, le 18 avril 1881, j'ai fait voir qu'on peut toujours construire une fonction fuchsienne $F(z)$ qui peut prendre toutes les valeurs possibles, excepté n valeurs données $a_1, a_2, \ldots, a_n$ qui sont toutes situées sur un même cercle (je supposerai, par exemple, que le module de ces n quantités soit égal à 1). Il est très important de déterminer effectivement cette fonction et de savoir calculer, avec une approximation indéfinie, les coefficients de son groupe G, puisque c'est là la première opération qu'on doit faire quand on veut intégrer une équation linéaire. Voici un moyen d'arriver à ce résultat. Supposons le problème résolu.

La fonction $F(z)$ donne la représentation conforme sur un cercle d'un certain polygone curviligne R_0, et l'intérieur du cercle fondamental se trouve divisé en une infinité de polygones $R_0, R_1, \ldots$, tous congruents ou symétriques à R_0. Réunissons un certain nombre de polygones $R_0, R_1, \ldots, R_p$ pour former un polygone total S. Il y aura une fonction fuchsienne $\varphi(z)$ qui donnera la représentation conforme de S sur un cercle ; son groupe sera contenu dans G, et nous aurons identiquement

$$F = H(\varphi),$$

H étant l'algorithme d'une fonction rationnelle. Il est d'ailleurs aisé de calculer les coefficients de H quand on connaît les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et la

disposition relative des polygones $R_0, R_1, \ldots, R_p$. On peut donc calculer φ en fonction de F.

On peut prendre S assez grand pour que le cercle concentrique au cercle fondamental, et qui a pour rayon $1-\alpha$, soit tout entier à l'intérieur de S. On a alors

$$\operatorname{mod}\frac{z}{1-\alpha} > \operatorname{mod}\varphi > \operatorname{mod} z,$$

d'où

$$\lim \operatorname{mod}\varphi = \operatorname{mod} z \qquad (\text{pour } \alpha = 0).$$

Soient $z_1, z_2, \ldots, z_q$ les transformées de o par diverses substitutions de G; nous pourrons calculer par ce procédé $\operatorname{mod} z_1$, $\operatorname{mod} z_2$, ..., $\operatorname{mod} z_q$, ce qui suffit pour déterminer G.

2. Soit y une intégrale d'une équation linéaire à coefficients rationnels en x. Dans une Note que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie, le 8 août 1881, j'ai fait voir que l'on peut trouver une fonction fuchsienne $F(z)$ telle qu'en substituant $F(z)$ à la place de x, y devienne fonction uniforme de z. Mais il y a une infinité de manières d'obtenir le même résultat, ainsi que le prouvent les travaux ultérieurs de M. Klein et les miens. Ainsi l'on peut trouver une fonction fuchsienne $\varphi(t)$ plus simple que $F(z)$, et telle qu'en substituant $\varphi(t)$ à la place de x, y devienne une fonction uniforme de t. On aura d'ailleurs

$$t = \psi(z),$$

$\psi(z)$ étant une fonction uniforme de z, qui demeure inaltérée par un groupe g formé d'une infinité de substitutions linéaires

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right).$$

Voici un moyen de former t en fonction de z et de démontrer, en même temps, au moins dans la grande majorité des cas, l'existence de la fonction $\varphi(t)$. Nous aurons

$$\log \operatorname{mod} t = \sum_i \log \operatorname{mod}\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i} \tag{1}$$

et

$$\log \operatorname{mod} t = \lim u_n = \sum_{n=0}^{n=\infty} (u_n - u_{n-1}). \tag{2}$$

Voici ce que c'est que u_n. Supposons que $C_1, C_2, \ldots, C_n$ soient des contours s'enveloppant mutuellement et intérieurs au cercle fondamental, u_n sera la partie réelle d'une fonction φ_n dont la partie réelle est nulle le long de C_n, et qui reste finie à l'intérieur de ce contour, excepté aux points où $\alpha_i z + \beta_i = 0$, et où la différence $\varphi_n - \log\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$ reste finie.

Sauf dans certains cas exceptionnels, on peut démontrer la convergence des séries (1) et (2).

3. Les mêmes principes et le beau théorème de M. Schwarz (*Monatsberichte*, octobre 1870) permettent de démontrer la proposition suivante, qui peut présenter quelque intérêt à cause de sa généralité :

Soit $y = f(x)$ une fonction non uniforme de x, d'ailleurs quelconque. On peut toujours trouver une variable z, telle que l'on ait

$$y = \varphi(z), \qquad x = \psi(z),$$

φ et ψ étant deux fonctions uniformes de z, n'existant qu'à l'intérieur d'un cercle.

SUR

LES GROUPES HYPERFUCHSIENS

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 98, p. 503-504 (25 février 1884).

Les substitutions hyperfuchsiennes se subdivisent en substitutions elliptiques et hyperboliques, si on laisse de côté certains cas particuliers. Appelons *polaire* du point (α, β) la droite

$$x_0 x + \beta_0 y = 1.$$

Dans les substitutions elliptiques, la polaire de chacun des trois points doubles passe par les deux autres. Dans les substitutions hyperboliques, deux des points doubles sont sur l'hypersphère

$$x x_0 + y y_0 = 1, \tag{1}$$

et le troisième est le pôle de la droite qui joint les deux autres. Soient (α, β) et (γ, δ) les deux premiers points doubles situés sur l'hypersphère.

Considérons l'hypersphère

$$(x-\alpha)(x_0-\alpha_0)+(y-\beta)(y_0-\beta_0)=\varepsilon^2, \tag{2}$$

où je supposerai que ε est très petit. On peut toujours supposer que le multiplicateur de la substitution hyperbolique est assez grand pour que les transformés de tous les points de l'hypersphère (2) qui sont intérieurs à l'hypersphère (1) soient aussi près qu'on veut du point (γ, δ). Cela ne serait plus vrai des points extérieurs à (1).

Cela posé, imaginons n substitutions hyperboliques $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

Soient (α_i, β_i) et (γ_i, δ_i) les points doubles de S_i. Soient Σ_i une hypersphère

$$(x-\alpha_i)(x_0-\alpha_{i0})+(y-\beta_i)(y_0-\beta_{i0})=\varepsilon_i^2$$

et Σ_i' la transformée de cette sphère par S_i. On peut toujours supposer les ε assez petits et les multiplicateurs des substitutions assez grands pour que les Σ_i et les Σ_i' n'aient aucun point commun *à l'intérieur de l'hypersphère* (1).

Envisageons un domaine D limité par l'hypersphère (1) et par les surfaces Σ_i et Σ_i'. D pourra être regardé comme le domaine générateur du groupe des substitutions S. La considération de ce domaine montre que ce groupe est discontinu à l'intérieur de l'hypersphère (1). La discontinuité peut même s'étendre à un domaine plus vaste, mais non pas à toutes les valeurs des variables.

On est donc ainsi conduit à une classe de groupes hyperfuchsiens, tout à fait différente de la classe découverte par M. Picard et analogue à la troisième famille de groupes fuchsiens.

Pour pouvoir appliquer à la théorie des groupes hyperfuchsiens les méthodes qui m'ont réussi dans l'étude des groupes fuchsiens, il est nécessaire de généraliser la notion des invariants analogues à la longueur, à l'angle et à la surface. Posons

$$\begin{aligned} &x x_0 + y y_0 = \rho^2, \\ &x_0\,dx + y_0\,dy = \rho\,dt, \qquad x\,dx_0 + y\,dy_0 = \rho\,dt_0, \\ &y\,dx - x\,dy = \rho\,du, \qquad y_0\,dx_0 - x_0\,dy_0 = \rho\,du_0. \end{aligned}$$

L'intégrale

$$\int \sqrt{\frac{dt\,dt_0}{(1-\rho^2)^2} + \frac{du\,du_0}{1-\rho^2}}$$

est un invariant analogue à la longueur.

Il existe aussi un invariant qui doit être assimilé à l'angle. Soient M, N, P trois points dont les coordonnées soient (x, y), $(x+dx, y+dy)$, $(x+\delta x, y+\delta y)$; l'invariant φ, analogue à l'angle NMP, sera défini par l'équation

$$\cos^2\varphi = \frac{\left[\dfrac{du\,\delta u_0 + du_0\,\delta u}{(1-\rho^2)^2} + \dfrac{dt\,\delta t_0 + dt_0\,\delta t}{1-\rho^2}\right]^2}{4\left[\dfrac{du\,du_0}{(1-\rho^2)^2} + \dfrac{dt\,dt_0}{1-\rho^2}\right]\left[\dfrac{\delta u\,\delta u_0}{(1-\rho^2)^2} + \dfrac{\delta t\,\delta t_0}{1-\rho^2}\right]}.$$

Il existe également des invariants analogues à la surface ou au volume à trois ou à quatre dimensions.

Celui de ces invariants qui est analogue au volume à quatre dimensions a déjà été signalé par M. Picard.

SUR

LES FONCTIONS FUCHSIENNES

ET

LES FORMES QUADRATIQUES TERNAIRES INDÉFINIES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 102, p. 735-737 (29 mars 1886).

Une forme quadratique ternaire indéfinie peut toujours s'écrire (en changeant au besoin tous les signes) de la façon suivante :

$$F(x, y, z) = Y^2 - XZ,$$

où

$$X = ax + by + cz, \qquad Y = a'x + b'y + c'z, \qquad Z = a''x + b''y + c''z,$$

les a, les b et les c étant des nombres réels quelconques.

Soient maintenant α, β, γ, δ quatre nombres réels tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Posons

$$\begin{aligned} X' &= \alpha^2 X + 2\alpha\gamma Y + \gamma^2 Z, \\ Y' &= \alpha\beta X + (\alpha\delta + \beta\gamma) Y + \gamma\delta Z, \\ Z' &= \beta^2 X + 2\beta\delta Y + \delta^2 Z, \end{aligned}$$

$$X' = ax' + by' + cz', \qquad Y' = a'x' + b'y' + c'z', \qquad Z' = a''x' + b''y' + c''z'.$$

J'appelle S la substitution qui change x, y, z en x', y', z'. C'est une substitution linéaire et, comme on vérifie aisément l'identité

$$Y'^2 - X'Z' = Y^2 - XZ,$$

on voit que S n'altère pas la forme $F(x, y, z)$.

Si les coefficients de S sont entiers, on dit que S est une substitution

semblable de la forme F; si ces coefficients, sans être entiers, sont rationnels, nous pourrons dire que S est une substitution semblable fractionnaire de F.

Si les coefficients de F sont entiers, les substitutions semblables forment un groupe discontinu G. A la substitution S faisons correspondre la substitution $\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$. Au groupe G correspondra ainsi un groupe g qui sera un groupe fuchsien.

Nous sommes ainsi conduits à nous servir de ce que nous savons des groupes fuchsiens pour l'appliquer à l'étude du groupe G. Si nous envisageons, par exemple, les cycles formés par les sommets du polygone générateur, nous verrons d'abord que la somme des angles d'un cycle ne peut être égale qu'à 2π (s'il n'y en a qu'un), à π, à $\frac{2\pi}{3}$, à $\frac{\pi}{2}$, à $\frac{\pi}{3}$ ou à 0.

Il y aura un cycle où cette somme sera π, si F peut être transformée par une substitution de déterminant 1 ou 2 en une forme telle que

$$a''z^2 + ax^2 + 2b''xy + a'y^2.$$

Il y en aura un où cette somme sera $\frac{\pi}{2}$ si F peut être transformée par une substitution de déterminant 1 ou 2 en une forme telle que

$$a''z^2 + ax^2 + ay^2.$$

Il y en aura un où cette somme sera $\frac{\pi}{3}$ $\left(\text{ou bien } \frac{2\pi}{3}\right)$ si F peut être transformée par une substitution de déterminant 1 (ou bien 3) en une forme telle que

$$a''z^2 + 2b''(xy - x^2 - y^2).$$

Il y en aura un où cette somme sera 0 si F peut représenter 0, c'est-à-dire si F satisfait aux conditions du paragraphe 299 des *Disq. arithm.* Dans ce cas, le groupe fuchsien sera de la deuxième ou de la sixième famille. Dans tous les autres cas, il sera de la première.

Il est un autre point sur lequel je désirerais attirer l'attention. On peut se demander s'il existe pour une fonction fuchsienne $f(z)$ un théorème analogue à ce qu'est le théorème d'addition pour les fonctions elliptiques, c'est-à-dire si l'on peut trouver une relation algébrique entre $f(z)$ et $f(zT)$, T désignant une substitution linéaire n'appartenant pas au groupe g de la fonction $f(z)$. Pour cela, il faut et il suffit que les substitutions communes aux deux groupes fuchsiens g et $T^{-1}gT$ forment encore un groupe fuchsien.

Il ne semble pas qu'il en soit ainsi en général; on sait pourtant que cela a lieu pour la fonction modulaire; car si $f(z)$ désigne cette fonction, et n un entier quelconque, il y a une relation algébrique entre $f(z)$ et $f\left(\frac{z}{n}\right)$.

La même propriété appartient aux fonctions fuchsiennes $f(z)$ engendrées par un groupe g, lorsque ce groupe g correspond, comme il a été dit plus haut, au groupe G des substitutions semblables d'une forme F.

Considérons maintenant le groupe des substitutions semblables *fractionnaires* de la forme F; ce groupe ne sera plus discontinu. Soit alors Σ une quelconque de ces substitutions semblables fractionnaires, et soit σ la substitution de la forme $\left(z, \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)$ qui correspond à Σ de la même manière que g correspond à G. Il y aura une relation algébrique entre $f(z)$ et $f(z\sigma)$.

Pour obtenir ce résultat, il faut s'appuyer sur le principe suivant :

Soit Γ le groupe des substitutions linéaires à coefficients entiers et de déterminant 1.

Soit Γ' un sous-groupe d'indice fini contenu dans Γ. On peut convenir de ne considérer deux formes comme équivalentes que si l'on peut passer de l'une à l'autre par une substitution de Γ'. On peut faire ensuite, à ce nouveau point de vue, la théorie de la réduction des formes quadratiques : elle ne différera pas de la théorie ordinaire.

LES FONCTIONS FUCHSIENNES

ET

L'ÉQUATION

$$\Delta u = e^u$$

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 126, p. 627-630 (28 février 1898).

Parmi les équations de la forme

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v, \tag{1}$$

où φ est une fonction rationnelle de deux variables x et y liées par une relation algébrique *donnée*

$$f(x, y) = 0, \tag{2}$$

parmi toutes ces équations, dis-je, qui admettent des points singuliers donnés et de telle façon que la différence des racines de chaque équation déterminante soit un entier donné, il y a toujours une équation fuchsienne, c'est-à-dire engendrant des fonctions fuchsiennes.

Nous avons donné de ce fait, M. Klein et moi, une première démonstration fondée sur le principe de continuité. Plus tard, M. Picard a ramené la question à l'intégration de l'équation

$$\Delta u = e^u \tag{3}$$

et il a démontré l'intégrabilité de cette équation par une méthode qu'il a imaginée et qui consiste à l'établir d'abord pour un domaine assez petit pour l'étendre ensuite au plan entier.

Voulant éviter ce détour, j'ai cherché une méthode nouvelle dont je vais exposer maintenant le principe.

J'introduis la *surface de Klein* : c'est une surface fermée; à tout point *réel* de cette surface correspond un point imaginaire de la courbe (2) et inversement. Je pose d'ailleurs

$$Du = \Delta u \frac{d\Omega}{d\omega},$$

où $d\omega$ est un élément de la surface de Klein et $d\Omega$ l'élément correspondant du plan des x. L'équation (3) se ramène alors à la forme

$$DU = \Theta e^U - \Phi, \tag{4}$$

où Θ et Φ sont deux fonctions données, la première toujours positive.

Le problème de la formation de l'équation fuchsienne se ramène à la détermination de la fonction U qui doit être partout finie.

L'analyse repose sur certaines inégalités très simples qui se déduisent d'une remarque unique : si U est maximum, DU est négatif; si U est minimum, DU est positif.

Je commence par intégrer l'équation

$$Du = \varphi, \tag{5}$$

où φ est donnée; cette intégration n'est possible que si

$$\int \varphi \, d\omega = 0,$$

l'intégrale étant étendue à tous les éléments $d\omega$ de la surface de Klein. L'équation (5) est de même forme que l'équation bien connue de la théorie du potentiel

$$\Delta u = \varphi,$$

qu'on intègre par la fonction de Green. L'équation (5) s'intègre par un procédé analogue; la fonction qui joue le rôle de la fonction de Green est la partie réelle d'une intégrale abélienne de troisième espèce facile à former.

J'étudie ensuite l'équation

$$Du = \lambda \eta u - \varphi - \lambda \psi, \tag{6}$$

où η, φ, ψ sont trois fonctions données, la première toujours positive et où λ est un paramètre positif.

Je montre d'abord que l'équation est intégrable pour les petites valeurs de λ et que l'intégrale peut se développer suivant les puissances de λ. Je montre ensuite que, si elle est intégrable pour $\lambda = \lambda_0$, elle le sera encore pour les

petites valeurs de $\lambda - \lambda_0$ et que l'intégrale peut se développer suivant les puissances de $\lambda - \lambda_0$. Je conclus que l'équation est intégrable pour toutes les valeurs positives de λ.

Il y a un cas où cette méthode est en défaut. C'est quand le polygone fuchsien a des sommets sur le cercle fondamental; dans ce cas il y a des points où les fonctions η et ϑ deviennent infinies comme

$$\frac{1}{x^2 \log^2 x}.$$

Dans ce cas, d'ailleurs, la méthode de M. Picard est également en défaut. Je ne puis entrer dans le détail des artifices que j'ai dû employer pour triompher de cette difficulté. Cela a été la partie la plus longue de mon travail.

Je me bornerai à dire que l'intégrale est toujours finie, qu'elle peut se développer suivant les puissances de λ, mais que les termes du développement peuvent devenir infinis.

C'est ainsi que la fonction x^λ reste finie pour $x = 0$, si λ est positif; qu'elle peut se développer suivant les puissances de λ

$$x^\lambda = 1 + \lambda \log x + \frac{\lambda^2}{2} (\log x)^2 + \dots,$$

mais que les termes du développement deviennent infinis pour $x = 0$.

Cette difficulté vaincue, j'aborde l'équation

$$Du = \vartheta e^u - \varphi - \lambda \psi, \tag{7}$$

où ϑ, φ et ψ sont connus et positifs, et où λ est un paramètre positif.

Je suppose qu'on sache intégrer l'équation (7) pour $\lambda = 0$; je puis alors former une série procédant suivant les puissances de λ et satisfaisant à (7). J'obtiens chaque terme par l'intégration d'une équation de la forme (6); et, grâce aux inégalités établies au début, je montre facilement que la série converge, si λ est assez petit.

On peut démontrer alors de proche en proche, comme pour l'équation (6), que l'équation est intégrable pour toutes les valeurs positives de λ.

En résumé, l'équation (4) est intégrable si Φ est toujours positif, et il est aisé de conclure qu'elle l'est encore pourvu que

$$\int \Phi \, d\omega > 0. \tag{8}$$

Cette condition est nécessaire et suffisante. Il reste à vérifier que cette

condition (8) est remplie dans les applications que l'on a à faire aux fonctions fuchsiennes. Cette vérification est facile.

On peut entrevoir la possibilité d'une démonstration rigoureuse fondée sur le calcul des variations. Il est aisé de former une intégrale double qui doit être minimum si l'équation (4) est satisfaite. Mais ce genre de raisonnement n'est pas satisfaisant, parce que, cette intégrale dépendant d'une fonction arbitraire, il n'est pas certain qu'elle ait un minimum proprement dit.

Heureusement, dans le problème qui nous occupe, la fonction inconnue $\varphi(x, y)$ doit satisfaire à certaines conditions; elle dépend seulement d'un nombre *fini* de *constantes* inconnues. La fonction u dépendra donc elle-même d'un nombre fini de constantes inconnues. Notre intégrale double, ne dépendant plus d'une fonction arbitraire, mais d'un certain nombre de paramètres arbitraires, aura certainement un minimum et la démonstration pourra devenir rigoureuse.

ACADÉMIE DES SCIENCES

GÉOMÉTRIE

GRAND PRIX DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

(PRIX DU BUDGET)

Commissaires : MM. Bertrand, Bonnet, Puiseux, Bouquet; Hermite, rapporteur.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 92, p. 551-554 (14 mars 1881).

L'Académie avait proposé pour sujet d'un grand prix des Sciences mathématiques à décerner en 1880 la question suivante :

Perfectionner en quelque point important la théorie des équations différentielles linéaires à une seule variable indépendante.

Six Mémoires ont été envoyés au Concours. Quatre d'entre eux, inscrits sous les nos 1, 2, 3, 5, témoignent chez leurs auteurs d'une science étendue et d'un esprit ingénieux. Nous allons en rendre compte succinctement.

Dans les travaux dont la théorie générale des équations différentielles linéaires a été récemment l'objet, on a eu principalement en vue d'obtenir l'intégrale dans les cas où elle peut s'exprimer par des fonctions uniformes de la variable. Les belles découvertes de M. Fuchs, qui ont joué le principal rôle dans ces recherches, servent également de base pour l'étude plus profonde et plus difficile entreprise par l'auteur du Mémoire n° 1, portant pour épigraphe : « *C'est ici un livre de bonne foi, lecteur.* » Il part de ce fait que la transformée d'une équation différentielle linéaire obtenue en substituant à la

variable indépendante une fonction quelconque d'une nouvelle variable est une équation linéaire de même ordre, et qu'il en est de même si l'on multiplie l'inconnue par une seconde fonction arbitraire de cette nouvelle variable. Cela étant, l'auteur se propose de déterminer ces deux fonctions, de manière que l'équation transformée soit à coefficients constants, ou bien soit intégrable au moyen de fonctions uniformes, simplement rationnelles ou doublement périodiques. Ces questions sont, comme on voit, aussi importantes que difficiles; la solution complète et générale qui est exposée dans le Mémoire montre un talent mathématique de l'ordre le plus élevé. Rien n'est plus intéressant que de voir s'introduire dans cette recherche de Calcul intégral les notions algébriques d'invariants qui ont pris naissance dans la théorie des formes, et ces nouvelles combinaisons faire apparaître les éléments cachés dont dépend, sous ses diverses formes analytiques, l'intégration d'une équation donnée. C'est à M. Laguerre qu'est due l'idée ingénieuse et profonde des invariants et covariants des équations différentielles linéaires; il en a tiré pour les équations du troisième et du quatrième ordre plusieurs beaux théorèmes, et M. Brioschi s'est aussi occupé avec succès du même sujet; mais l'auteur du Mémoire que nous analysons en a encore mieux fait ressortir toute l'importance. Il y joint une considération qui joue également, dans ses recherches, un rôle essentiel : c'est celle du genre d'une équation algébrique entre deux variables, introduite en Analyse par Riemann et qui est si souvent employée dans les travaux de notre époque. Des applications exposées avec tous les détails nécessaires offrent un grand nombre de résultats entièrement nouveaux et du plus haut intérêt. Nous nous bornons à citer comme particulièrement remarquables des équations du troisième et du quatrième ordre contenant un paramètre arbitraire, puis d'autres d'ordre impair se rattachant à la division de l'argument dans les fonctions elliptiques, dont la solution, qui n'est pas une fonction uniforme, est obtenue par ces transcendantes. Nous jugeons que ce Mémoire a ajouté à la théorie des équations différentielles linéaires des méthodes générales et des résultats d'une haute importance, et qu'il est digne du grand prix des Sciences mathématiques.

Le Mémoire n° 2 porte l'épigraphe suivante : « *Per faciliora ad difficiliora deveniendum.* » Il renferme des recherches intéressantes sur les intégrales algébriques que peut admettre l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0,$$

où p et q sont des fonctions rationnelles de x. L'auteur démontre diverses propriétés de ces intégrales et donne un procédé pour les trouver, quand elles existent. C'est un bon travail qui mérite d'être signalé dans ce Rapport.

Le Mémoire n° 3 a pour épigraphe : « *Nous sommes si malheureux, que nous ne pouvons prendre plaisir à une chose qu'à condition de nous fâcher si elle réussit mal.* »

L'auteur s'y occupe principalement des propriétés des intégrales dans le voisinage de leurs points singuliers. Ces points, connus *a priori*, sont les points singuliers des coefficients. On considère d'abord un point singulier x_0 tel que les coefficients restent monotropes dans une couronne ayant ce point pour centre. Soit y une fonction quelconque de la variable arbitraire x; l'auteur représente par le symbole $\theta(y)$ la nouvelle valeur acquise par cette fonction lorsque le point dont x est l'affixe fait une révolution autour du point x_0. Un changement de variable indépendante permet d'établir, entre la théorie des équations différentielles linéaires et celle des équations aux différences à coefficients constants, un rapprochement qui donne immédiatement les principales propriétés de l'intégrale étudiée.

Dans le Mémoire n° 5, qui porte l'épigraphe suivante : « *Non inultus premor* », l'auteur traite successivement deux questions entièrement différentes, dont il fait l'étude approfondie avec un talent dont la Commission a été extrêmement frappée. La seconde question, qui reçoit les développements les plus étendus, concerne de belles et importantes recherches de M. Fuchs, dont nous indiquerons en quelques mots l'objet. M. Fuchs s'est proposé de déterminer sous quelles conditions on définit une fonction uniforme en égalant à une indéterminée le quotient des intégrales d'une équation différentielle linéaire du second ordre. Les résultats si remarquables du savant géomètre présentaient dans certains cas des lacunes que l'auteur a reconnues et signalées en complétant ainsi une théorie analytique extrêmement intéressante. Cette théorie lui a suggéré l'origine de transcendantes comprenant en particulier les fonctions elliptiques et qui permettent d'obtenir, dans des cas très généraux, la solution des équations linéaires du second ordre. C'est là une voie féconde que l'auteur n'a point parcourue en entier, mais qui témoigne d'un esprit inventif et profond. La Commission ne peut que l'engager à poursuivre ses recherches, en signalant à l'Académie le beau talent dont il a fait preuve.

En résumé, la Commission, à l'unanimité, en renouvelant l'expression de la satisfaction avec laquelle elle a étudié les excellents Mémoires soumis à son

jugement, décerne le prix à l'auteur du Mémoire inscrit sous le n° 1, et exprime le désir que ce travail puisse être inséré au *Recueil des Savants étrangers;* elle propose en outre d'accorder des mentions très honorables aux auteurs des Mémoires inscrits sous le n° 5 et sous le n° 3.

Les conclusions de ce Rapport étant adoptées, M. le Président procède à l'ouverture du pli cacheté qui accompagne le Mémoire n° 1, et proclame le nom de M. G.-H. Halphen.

L'auteur du Mémoire inscrit sous le n° 5 s'est fait connaître et a demandé qu'il fût procédé à l'ouverture de son pli cacheté. M. le Président a proclamé le nom de M. H. Poincaré.

SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS FUCHSIENNES

Mémoires de l'Académie nationale des Sciences, Arts et Belles-Lettres de Caen, pour 1882, p. 3-29. Caen, 1881.

Dans une série de Mémoires présentés à l'Académie des Sciences [1er juin 1880 (1), 14 et 21 février, 4 et 18 avril, 23 et 30 mai, 27 juin 1881], j'ai étudié une classe de fonctions dont les transcendantes elliptiques et modulaires ne sont que des cas particuliers et que j'ai appelées *fonctions fuchsiennes*. Mon intention est de résumer ici quelques-uns de mes résultats et de donner une idée générale des méthodes qui m'y ont fait arriver.

1. J'envisage une infinité de substitutions linéaires,

$$z_k = \frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}, \tag{1}$$

où

$$\alpha_k \delta_k - \beta_k \gamma_k = 1.$$

L'indice k varie de zéro à l'infini de telle sorte que $z = z_0$; mais les substitutions sont rangées dans un ordre d'ailleurs arbitraire. Je recherche s'il existe une fonction $F(z)$ uniforme et telle que

$$F(z_k) = F(z).$$

Il est clair que les substitutions linéaires (1) doivent former un groupe et que ce groupe doit être discontinu, c'est-à-dire que la partie du plan où la

(1) Il s'agit ici du Mémoire présenté au Concours et mentionné dans l'article précédent. Ce Mémoire est arrivé à l'Académie le 28 mai 1880. Ses trois suppléments sont parvenus respectivement aux dates suivantes, 28 juin, 6 septembre et 20 décembre 1880. G. D.

fonction F existe peut être divisée en régions R_0, R_1, ..., R_k telles que, lorsque z est intérieur à R_0, z_k soit intérieur à R_k.

A chacune des substitutions (1) correspond de la sorte une des régions R. A l'intérieur de chacune de ces régions se trouve l'un des points z_k. Ces divers points z_k s'appellent *points correspondants* de z. Ils seront aussi correspondants entre eux. Deux régions R seront dites *limitrophes*, lorsqu'elles seront contiguës tout le long d'un arc de leur périmètre. Si deux points correspondants sont dans deux régions limitrophes, je dirai qu'ils sont *limitrophes*. Les substitutions qui correspondront aux régions limitrophes de R_0 seront les *substitutions fondamentales*. Il est clair, d'ailleurs, que toutes les substitutions du groupe seront des combinaisons des substitutions fondamentales. Par conséquent, le groupe sera entièrement déterminé quand on connaîtra ces substitutions fondamentales.

2. J'appelle X l'axe des quantités réelles.

Je suis donc amené à chercher tous les groupes discontinus qui sont formés de substitutions linéaires; et tout d'abord, ceux dont toutes les substitutions ont des coefficients réels et que j'appelle *groupes fuchsiens*. De pareilles substitutions conservent les angles, elles changent les cercles en cercles et les cercles ayant leur centre sur X en cercles ayant leur centre sur X. Soient α, β deux quantités imaginaires; α', β' leurs conjuguées; je pose

$$(\alpha, \beta) = \frac{\alpha - \alpha'}{\alpha - \beta'} \frac{\beta - \beta'}{\beta - \alpha'}.$$

Envisageons deux arcs de cercle $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ ayant leurs centres sur X. Si l'on a

$$(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta),$$

il existera une substitution à coefficients réels qui changera $\alpha\beta$ en $\gamma\delta$; je l'appelle la substitution $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

Le groupe fuchsien étant discontinu, une portion du plan qui est la partie située au-dessus de X sera partagée en régions R_0, ..., R_k, ainsi que je l'ai dit plus haut. Mais par un raisonnement très simple, je montre qu'on peut toujours supposer que ces régions sont des polygones curvilignes situés tout entiers au-dessus de X et dont les côtés sont de deux sortes; ceux de la première sorte sont des arcs de cercle ayant leur centre sur X, ceux de la deuxième sorte sont des segments de l'axe X lui-même.

Deux côtés consécutifs de la première sorte seront ainsi séparés par un sommet situé au-dessus de X et que j'appelle sommet de la première catégorie,

ou par un sommet situé sur X et que j'appelle sommet de la deuxième catégorie, ou par un côté de la deuxième sorte que j'appelle par extension sommet de la troisième catégorie.

Grâce à cette convention, il est clair que l'on rencontre, en suivant le périmètre du polygone, alternativement un côté de la première sorte et un sommet de l'une des trois catégories. Le côté qu'on rencontrera après un sommet donné sera le côté suivant, le sommet qu'on rencontrera ensuite sera le sommet suivant, etc.

Chacune des substitutions fondamentales du groupe changera le polygone curviligne R_0 en un polygone limitrophe, et par conséquent l'un des côtés de la première sorte ab de R_0 en un autre côté cd de ce même polygone. Cela montre que les côtés de la première sorte de R_0 sont en nombre pair et se répartissent en paires. Si deux côtés ab, cd appartiennent à la même paire, ils sont dits *conjugués* et l'on doit avoir

$$(a, b) = (c, d).$$

Je vais maintenant répartir les sommets en cycles de la manière suivante : on partira d'un sommet quelconque, on envisagera le côté suivant, puis son conjugué, puis le sommet suivant, puis le côté suivant, puis son conjugué, puis le sommet suivant, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on revienne au sommet qui a servi de point de départ. Tous les sommets rencontrés de la sorte appartiendront à un même cycle. Il est clair que tous les sommets d'un même cycle devront appartenir à la même catégorie.

Un polygone R_0 (et le groupe fuchsien G correspondant) sera de la première famille si tous ses sommets sont de la première catégorie; de la deuxième famille, s'ils sont tous de la deuxième catégorie; de la troisième, s'ils sont tous de la troisième catégorie; le polygone R_0 sera de la quatrième famille, s'il a des sommets de la deuxième et de la troisième catégorie; de la cinquième, s'il a des sommets de la première et de la troisième catégorie; de la sixième, s'il en a de la première et de la deuxième catégorie; et enfin de la septième, s'il en a de toutes les catégories.

Quand on connaît le polygone R_0 et la distribution de ses côtés en paires, le groupe fuchsien est entièrement déterminé, car on connaît ses substitutions fondamentales. Si par exemple ab, cd sont deux côtés conjugués, l'une des substitutions fondamentales sera la substitution (a, b, c, d). On saura construire le polygone curviligne R qui sera contigu à R_0 le long de cd, car ce sera

le transformé de R_0 par la substitution (a, b, c, d). On saura construire de même tous les polygones limitrophes de R_0 le long d'un quelconque de ses côtés; et tous les polygones limitrophes de ceux-ci, et ainsi de suite. Pour que le groupe soit discontinu, il faut que les polygones ainsi obtenus recouvrent toute la portion du plan située au-dessus de X et ne la recouvrent qu'une fois.

Soient A un point quelconque intérieur à R_0, B un point extérieur à R_0, mais situé au-dessus de X; je joins A et B par une courbe quelconque, AMB ne coupant pas X. Cette courbe sortira de R_0 par un des côtés C_0 de ce polygone et l'on pourra construire, comme on l'a vu plus haut, le polygone R_1 limitrophe de R_0 le long de C_0; si la courbe sort encore de R_1 par un des côtés C_1 de ce polygone, on construira de même le polygone R_2 limitrophe de R_1 le long de C_1; je dis que, après un nombre fini d'opérations, on arrivera à un polygone R_n contenant à son intérieur le point B. Car si cela n'était pas, il y aurait un point de AMB dans le voisinage duquel les polygones R seraient infiniment petits. Or, on démontre qu'un polygone transformé de R_0 par une substitution linéaire à coefficients réels ne peut être infiniment petit que s'il est infiniment voisin de X.

Il reste à examiner si le polygone R_n obtenu est le même quel que soit AMB, ou (ce qui revient au même) s'il se réduit à R_0 quand AMB se réduit à un contour fermé AMA. Soit donc AMA un contour fermé quelconque; décomposons-le en une infinité de contours infiniment petits. Pour qu'en suivant AMA on retombe sur R_0, il suffit qu'en parcourant un quelconque des contours infinitésimaux, on retombe sur le polygone d'où l'on est parti. Or, cela arrivera évidemment pour tout contour qui n'enveloppera aucun sommet de la première catégorie, et il suffit d'ailleurs d'étudier les contours H qui enveloppent les sommets de R_0, car le contour qui enveloppe un sommet de R_k se comportera comme celui qui enveloppe le sommet correspondant de R_0. Pour qu'en décrivant l'un quelconque des contours H, on retombe sur R_0, il faut et il suffit que *la somme des angles du polygone de* R_0, *correspondant à des sommets de la première catégorie appartenant à un même cycle, soit une partie aliquote de* 2π.

3. Telle est la condition nécessaire et suffisante pour que R_0 donne naissance à un groupe fuchsien.

Citons quelques exemples de polygones R_0 conduisant à des groupes fuchsiens.

Premier cas. — Je suppose que R_0 soit un polygone de $2n$ côtés dont les sommets se succèdent dans l'ordre suivant : $A_1 A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}, B_n, B_{n-1}, \ldots, B_2, A_1$; les côtés $A_1A_2, A_1B_2; A_2A_3, B_2B_3, \ldots; A_kA_{k+1}, B_kB_{k+1}; \ldots; A_nA_{n+1}, B_nA_{n+1}$ seront conjugués; il y aura alors $n+1$ cycles formés respectivement des sommets

$$A_1;\quad A_2, B_2;\quad A_3, B_3;\quad A_4, B_4;\quad \ldots;\quad A_n, B_n;\quad A_{n+1}.$$

On devra avoir

$$(A_1, A_2) = (A_1, B_2), \qquad (A_k, A_{k+1}) = (B_k, B_{k+1}), \qquad (A_n, A_{n+1}) = (B_n, A_{n+1}),$$

et les angles A_1, $A_2 + B_2$, $A_3 + B_3$, $\ldots$, $A_n + B_n$, A_{n+1} devront être parties aliquotes de 2π.

Deuxième cas. — Je fais les mêmes hypothèses que dans le premier cas, mais je suppose de plus que tous les sommets $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}, B_n, B_{n-1}, \ldots, B_2, A_1$ sont sur X et que tous les angles sont nuls.

Troisième cas. — Je fais les mêmes hypothèses que dans le premier cas, je suppose de plus que le polygone est symétrique par rapport à A_1A_{n+1} et que cette droite est perpendiculaire à X. M. Klein m'a fait l'honneur de m'écrire que ce cas particulier lui était connu depuis quelque temps, et que, sans avoir rien fait imprimer sur ce sujet, il y a fait une fois une allusion dans son cours.

Quatrième cas. — Je fais les mêmes hypothèses que dans le troisième cas et je suppose de plus $n = 2$. Je retombe ainsi sur le cas étudié par M. Schwarz dans le Tome 75 du *Journal de Crelle*.

Cinquième cas. — Je suppose que les sommets du polygone R_0 sont successivement $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$, et que les côtés opposés soient conjugués. On devra avoir alors

$$(A_k, A_{k+1}) = (A_{n+k+1}, A_{n+k}).$$

Si n est pair, tous les sommets appartiennent au même cycle et la somme de tous les angles doit être partie aliquote de 2π.

Si n est impair, il y a deux cycles, formés, l'un de tous les sommets de rang pair, l'autre de tous les sommets de rang impair. La somme de tous les angles de rang pair comme celle de tous les angles de rang impair devra être partie aliquote de 2π.

Sixième cas. — L'un des cas particuliers les plus remarquables des groupes fuchsiens, c'est celui où les coefficients des substitutions (1) sont entiers; c'est

ce cas qui a fait l'objet des intéressantes recherches de M. Klein sur les fonctions modulaires.

4. J'appelle *points singuliers* d'un groupe fuchsien les points dans le voisinage desquels les polygones R sont infiniment petits; pour les groupes des première, deuxième et sixième familles, tout l'axe X est une ligne singulière; pour ceux des autres familles, les points singuliers sont isolés sur X, quoique en nombre infini.

Si G est de la première, de la troisième ou de la cinquième famille, je dirai qu'une fonction uniforme ne présente d'autres singularités que celles de G, si tous ses points singuliers sont ceux de ce groupe.

Supposons maintenant que G est de la deuxième, de la quatrième, de la sixième ou de la septième famille, de la deuxième par exemple pour fixer les idées. Il pourra toujours être regardé comme un cas particulier d'un groupe variable G′ satisfaisant aux conditions suivantes : tous les groupes G′ seront isomorphes entre eux et dérivés d'un même nombre de substitutions fondamentales; les coefficients de ces substitutions seront des fonctions rationnelles d'un paramètre u. Pour $u > 0$, le groupe G′ sera de la troisième famille; pour $u = 0$, il se réduira à G et sera de la deuxième famille. Je dirai alors qu'une fonction $F(z)$ n'a d'autres singularités que celles de G quand elle pourra être regardée comme la limite d'une fonction $F'(z)$ n'ayant d'autre singularité que celle de G′.

5. Outre les groupes fuchsiens, j'ai étudié dans mes communications des 27 juin et 11 juillet 1881 les groupes discontinus formés de substitutions telles que (1), mais où α_k, β_k, γ_k, δ_k sont imaginaires. M. Klein ayant le premier donné un exemple remarquable de pareils groupes, je les ai appelés *groupes kleinéens*. Ne pouvant donner ici, faute d'espace, la manière de les former, je renverrai aux communications citées.

6. Envisageons le groupe fuchsien G et la décomposition correspondante de la portion du plan située au-dessus de X en polygones curvilignes R_0, R_1, ... Décomposons de même la partie du plan située au-dessous de X en polygones curvilignes $R'_0 R'_1$, ..., symétriques de R_0, R_1, ...

Soit

$$t_k = \frac{z_k - \sqrt{-1}}{z_k + \sqrt{-1}}, \qquad t = \frac{z - \sqrt{-1}}{z + \sqrt{-1}}$$

J'appelle respectivement *fonction fuchsienne* et *fonction thétafuchsienne* deux fonctions $F(z)$ et $\Theta(z)$ uniformes, telles que

$$F(z_k) = F(z), \qquad \Theta(z_k) = \Theta(z)(\gamma_k z + \delta_k)^{2m}$$

(m étant un entier), et ne présentant d'autres singularités que celles de G.

Je dis d'abord qu'il existe de pareilles fonctions. Envisageons, en effet, la série

$$(2) \qquad \Sigma_k H\left(\frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}\right)(\gamma_k z + \delta_k)^{-2m}\left(z_k + \sqrt{-1}\right)^{-2m} = \Theta(z),$$

où m est un entier plus grand que 1 et où $H(z)$ est une fonction rationnelle de z n'ayant pas d'infini réel.

Je dis que cette série est convergente. Considérons d'abord la série

$$(3) \qquad \Sigma \bmod \left(\frac{dt_k}{dt}\right)^m.$$

Envisageons une aire C_0 intérieure à R_0; quand z reste intérieur à C_0, z_k reste intérieur à une aire C_k, intérieure elle-même à R_k. Si z reste intérieur à C_0, t restera intérieur à une aire C'_0, et t_k à une certaine aire C'_k; et il est clair que les aires C' seront intérieures au cercle qui a pour centre l'origine et pour rayon l'unité, et n'empiéteront pas les unes sur les autres. La somme des aires C' est donc finie, c'est-à-dire que la série

$$(4) \qquad \Sigma C'_k$$

est convergente. Si C'_0 était infiniment petite, on aurait

$$\frac{C'_k}{C'_0} = \bmod\left(\frac{dt_k}{dt}\right)^2,$$

C'_0 étant fini, $\frac{C'_k}{C'_0}$ sera compris entre la plus grande et la plus petite valeur que puisse prendre $\bmod\left(\frac{dt_k}{dt}\right)^2$, quand t reste intérieur à C'_0. Mais on démontre que le rapport de cette plus grande et de cette plus petite valeur reste fini, quel que soit k. La série

$$\sum \text{la plus grande valeur de } \bmod\left(\frac{dt_k}{dt}\right)^2$$

est donc convergente, et par conséquent il en est de même de $\Sigma \bmod\left(\frac{dt_k}{dt}\right)^2$ et de la série (3).

Mais on a identiquement

$$\left(z_k + \sqrt{-1}\right)^{-2m} H(z_k)(\gamma_k z + \delta_k)^{-2m} = H(z_k)\left(\frac{dt_k}{dt}\right)^m (z + \sqrt{-1})^{-2m},$$

et le module de $(z+\sqrt{-1})^{-2m}\mathrm{H}(z_k)$ n'augmente pas indéfiniment avec k. La série (2) est donc convergente et sa somme est indépendante de l'ordre de ses termes. J'ai supposé que z était intérieur à R_0, mais le même raisonnement s'appliquerait dans tous les cas possibles, pourvu que z ne soit ni un infini de H, ni un point singulier de G.

La fonction définie par la série (2) est donc uniforme et n'a d'autres points singuliers essentiels que ceux de G. Si G est de la première, de la deuxième ou de la sixième famille, elle n'existe qu'au-dessus de X, et toute cette droite est pour elle une ligne singulière essentielle. Si G est d'une autre famille, elle existe dans tout le plan et ses points singuliers sont isolés, quoique en nombre infini.

Si G est de la première, de la troisième ou de la cinquième famille, $\Theta(z)$ n'aura, d'après la définition du paragraphe 4, d'autres singularités que celles de G. Si G est d'une autre famille, de la deuxième par exemple, on l'envisagera comme un cas particulier d'un groupe variable G', ainsi qu'il est dit au paragraphe 4; la fonction $\Theta(z)$ sera alors un cas particulier d'une fonction $\Theta'(z)$ formée avec G', comme elle l'est avec G; on démontre que $\Theta'(z)$ est une fonction continue de u pour $u=0$ et pour $u>0$; d'où

$$\Theta(z)=\lim\Theta'(z).$$

Mais $\Theta'(z)$ n'a d'autres singularités que celles de G'; donc $\Theta(z)$ n'a, d'après la définition du paragraphe 4, d'autres singularités que celles de G.

Elle jouit d'ailleurs de la propriété

$$\Theta(z_k)=\Theta(z)(\gamma_k z+\delta_k)^{2m}.$$

C'est une fonction thétafuchsienne.

7. Il est facile de trouver le nombre des zéros et des infinis de $\Theta(z)$ intérieurs à R_0. Les infinis de $\Theta(z)$ sont en effet ceux des fonctions rationnelles $\mathrm{H}(z_k)$. Considérons un quelconque des infinis de $\mathrm{H}(z)$ situé au-dessus de X, et par conséquent dans l'un des polygones de R. A cet infini correspondra un infini de chacune des fonctions $\mathrm{H}(z_k)$, et chacun de ces infinis sera dans un polygone R différent; l'un d'eux sera intérieur à R_0; il résulte de là que le nombre des infinis de $\Theta(z)$ intérieurs à R_0 est égal à celui des infinis de $\mathrm{H}(z)$ supérieurs à X. Ce nombre est donc fini.

Pour avoir celui des zéros, on prendra l'intégrale

$$\int\frac{\Theta'(z)\,dz}{\Theta(z)}$$

le long du périmètre de R_0. Si G est de la première, de la troisième ou de la cinquième famille, ce calcul ne présente aucune difficulté, car la somme des intégrales prises le long de deux côtés conjugués de R_0 a une valeur très simple.

Si G est d'une autre famille, on considérera $\Theta(z)$ de même qu'au paragraphe 4 comme un cas particulier de $\Theta'(z)$; la fonction Θ' étant continue pour $u\geq 0$, le nombre des zéros de Θ sera égal au nombre constant des zéros de Θ'. Dans tous les cas, on trouve que le nombre des zéros est fini.

8. Comme le quotient de deux fonctions thétafuchsiennes correspondant à un même groupe G et à une même valeur de m est une fonction fuchsienne, l'existence des fonctions fuchsiennes se trouve démontrée. Ces fonctions ne pourront prendre à l'intérieur de chacune des régions R un nombre infini de fois la même valeur.

Soient deux fonctions fuchsiennes F et F_1 correspondant à un même groupe G; à chacune des valeurs de F correspondra un nombre fini de valeurs de F_1 et réciproquement, de telle sorte que F et F_1 seront liées par une relation algébrique. Toutes les fonctions fuchsiennes correspondant à un même groupe seront donc fonctions algébriques les unes des autres. Elles s'exprimeront rationnellement en fonctions de deux d'entre elles que j'appelle x et y et entre lesquelles il y a une relation

$$f(x,y)=0. \tag{5}$$

Le genre de cette relation est le genre du groupe G et des fonctions correspondantes.

Soit

$$v=\sqrt{\frac{dx}{dz}},$$

la fonction $\frac{1}{v}\frac{d^2v}{dx^2}$ sera une fonction fuchsienne et par conséquent une fonction rationnelle $\varphi(x,y)$ de x et de y. La fonction v est donc l'intégrale de l'équation linéaire

$$\frac{d^2v}{dx^2}=v\,\varphi(x,y). \tag{6}$$

9. Si G est de la première, de la deuxième ou de la sixième famille, et si $H(z)$ n'a pas d'infini supérieur à X, la fonction $\Theta(z)$ n'a pas d'infini et est holomorphe dans toute la région située au-dessus de X, c'est-à-dire dans toute la région où elle existe. Elle peut donc toujours être représentée par une série ordonnée suivant les puissances de t.

Lorsque G est de la première famille, et si le nombre entier m reste constant, toutes les fonctions $\Theta(z)$ sans infini s'expriment linéairement par un nombre fini d'entre elles.

10. La première question qui se présente est la détermination du genre p de la relation (5). On l'obtiendra en cherchant le nombre des cycles distincts que l'on peut faire décrire au point analytique (x, y) dans son plan multiple. Ce nombre est égal à $2p$. Je remarque d'abord que, quand x, y décrit un cycle dans son plan, z décrit dans le sien un arc de courbe dont les extrémités sont des points correspondants α, α_1. On obtiendra donc tous les cycles en joignant un point α à chacun des points correspondants par tous les arcs de courbe possibles.

J'appellerai un pareil arc, *arc cyclique*. Un cycle évanouissant est un cycle qui n'enveloppe aucun point singulier; l'arc cyclique correspondant sera dit aussi *évanouissant*.

Je suppose, pour fixer les idées, que G soit de la première, de la deuxième ou de la sixième famille. Il est clair qu'il faut rejeter d'abord tous les arcs de courbe dont les extrémités se confondent et qui se réduisent à un contour fermé, car on peut décomposer un pareil contour en contours infinitésimaux, et, si z décrit un contour infinitésimal, (x, y) ne peut décrire qu'un cycle évanouissant. De même deux arcs de courbe $\alpha m \alpha_1$, $\alpha n \alpha_1$ ayant mêmes extrémités ne donneront pas naissance à deux cycles distincts, car le premier est équivalent au second, plus le contour fermé $\alpha_1 n \alpha m \alpha_1$. J'obtiendrai donc tous les cycles distincts en joignant le point α à chacun des points correspondants par un seul arc de courbe.

Je dis de plus qu'il suffira de le joindre aux points correspondants limitrophes. En effet, soit α_i un point correspondant de α non limitrophe de α; on pourra trouver une série de points correspondants

$$\alpha, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots \quad \alpha_{i-1}, \quad \alpha_i,$$

de telle façon que deux points consécutifs soient limitrophes. L'arc cyclique $\alpha\alpha_i$ sera alors la réunion des arcs cycliques $\alpha\alpha_1, \alpha_1\alpha_2, \ldots, \alpha_k\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_{i-1}\alpha_i$. Or les points α_k, α_{k+1} étant limitrophes, l'arc cyclique $\alpha_k\alpha_{k+1}$ sera équivalent à un arc $\alpha\alpha_r$, α_r étant limitrophe de α. Un cycle quelconque peut donc s'obtenir par une combinaison d'arcs cycliques tels que $\alpha\alpha_r$.

Soient maintenant R_1 le polygone dans lequel se trouve α_r; ab le côté de R_0 qui le sépare de R_1; $a'b'$ son conjugué. Il est évident que les arcs cycliques aa', $\alpha\alpha_r$, bb' sont équivalents.

D'où la règle suivante pour former tous les cycles distincts :

On considère un sommet quelconque a, le côté suivant, son conjugué, le sommet suivant a' et l'on joint aa'.

Mais ce nombre de cycles distincts peut encore être réduit si l'on remarque :

1° Que, si ab, $a'b'$ sont deux côtés conjugués, les arcs cycliques aa' et bb' sont équivalents;

2° Que tout contour fermé est un arc cyclique *évanouissant;*

3° Que, si les points a et a' se confondent, l'arc aa' est évanouissant.

11. Appliquons ces principes à quelques exemples :

1° Supposons-nous placés dans le premier cas du paragraphe 3 qui comprend le deuxième, le troisième et le quatrième. En appliquant la règle précédente, on trouve les arcs cycliques

$$A_1A_1, \quad A_2B_2, \quad A_3B_3, \quad \ldots, \quad A_nB_n, \quad A_{n+1}A_{n+1}.$$

Tous ces arcs sont équivalents, car A_kA_{k+1}, B_kB_{k+1} étant conjugués, les cycles A_kB_k et $A_{k+1}B_{k+1}$ sont équivalents. Mais l'arc A_1A_1 est évanouissant. Le nombre des cycles distincts est donc nul; la relation (5) est de genre 0.

Dans ce cas, toutes les fonctions fuchsiennes s'expriment rationnellement au moyen de l'une d'entre elles que j'appelle x, et dans l'équation (6) $\frac{y}{v}$ devient une fonction rationnelle de x devenant infinie pour $n+1$ valeurs de x :

$$a_1 = F(A_1), \quad a_2 = F(A_2) = F(B_2), \quad a_3 = F(A_3) = F(B_3), \quad \ldots, \quad a_{n+1} = F(A_{n+1})$$

Les points singuliers de l'équation (6) sont $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$. Si l'on n'est pas placé dans le deuxième cas, les intégrales sont régulières dans le voisinage de chacun de ces points singuliers, et la différence des racines de l'équation déterminante est une partie aliquote de l'unité.

Dans le deuxième cas, il peut arriver, ou bien que les intégrales soient irrégulières, ou bien qu'elles soient régulières et que les racines de l'équation

déterminante soient égales. De plus, il est évident que, dans ce deuxième cas, la fonction fuchsienne x ne peut prendre aucune des valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$.

Le nombre des paramètres arbitraires dont on dispose est égal au nombre des conditions qu'on s'imposerait en assujettissant $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ à avoir des valeurs déterminées. Mais une discussion spéciale est nécessaire pour savoir si l'on peut effectivement disposer de ces paramètres pour satisfaire à ces conditions. J'ai fait cette discussion dans quelques cas particuliers, et j'ai reconnu qu'on peut toujours obtenir pour $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ des valeurs réelles données quelconques et que si $n=3$, on peut obtenir pour a_1, a_2, a_3, a_4 des valeurs réelles ou imaginaires quelconques.

On peut donc toujours construire une fonction fuchsienne $F(z)$ ne pouvant devenir égale à aucune des quantités

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{n+1},$$

quelles que soient les valeurs réelles de ces quantités, ou bien encore ne pouvant devenir égale à aucune des quantités

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4,$$

quelles que soient les valeurs réelles ou imaginaires de ces quantités.

2° Supposons-nous placés dans le cinquième cas.

Je dis que le genre de (5) sera $\frac{n}{2}$ si n est pair et $\frac{n-1}{2}$ si n est impair.

En effet, supposons d'abord, pour fixer les idées, $n=4$. En appliquant la règle, on trouve les arcs cycliques

$$\begin{array}{llll} A_1A_6, & A_3A_8, & A_2A_7, & A_1A_4, \\ A_2A_5, & A_4A_7, & A_3A_6, & A_5A_8. \end{array}$$

Comme chaque arc de la première ligne est équivalent à celui qui est au-dessous de lui dans la deuxième ligne, on peut s'en tenir aux quatre arcs de la deuxième ligne, qui sont tous distincts. Le genre est donc égal à 2.

C. Q. F. D.

Soit maintenant $n=3$; en appliquant la règle, on trouve les arcs cycliques

$$\begin{array}{lll} A_1A_5, & A_2A_1, & A_5A_3, \\ A_2A_4, & A_1A_6, & A_6A_3, \end{array}$$

les arcs de la deuxième ligne ne sont pas distincts de ceux de la première. Ceux de la première, eux-mêmes, ne sont pas distincts entre eux, car, placés bout à bout dans l'ordre suivant

$$A_1A_5, \quad A_5A_2, \quad A_2A_1,$$

ils forment un contour fermé.

Il reste donc deux cycles distincts et le genre est égal à 1. C. Q. F. D.

12. Je dis que n fonctions

$$\varphi_1(z), \quad \varphi_2(z), \quad \ldots, \quad \varphi_n(z)$$

sont des fonctions zétafuchsiennes si elles sont uniformes, si elles jouissent de la propriété

$$\varphi_\lambda(z_k) = A_{1,\lambda}^{(k)}\varphi_1(z) + A_{2,\lambda}^{(k)}\varphi_2(z) + \ldots + A_{n,\lambda}^{(k)}\varphi_n(z)$$

(les A étant des constantes, dont le déterminant soit égal à 1) et enfin si elles ne présentent d'autres singularités que celles de G.

Les substitutions linéaires

$$y'_\lambda = A_{1,\lambda}^{(k)}y_1 + A_{2,\lambda}^{(k)}y_2 + \ldots + A_{n,\lambda}^{(k)}y_n$$

devront évidemment former un groupe H isomorphe à G.

J'appellerai

$$\alpha_{1,\lambda}^{(k)}, \quad \alpha_{2,\lambda}^{(k)}, \quad \ldots, \quad \alpha_{n,\lambda}^{(k)}$$

les mineurs du déterminant des $A^{(k)}$.

Cela posé, je considère les groupes G et H comme donnés, et j'envisage n fonctions rationnelles de z, $H_1(z), H_2(z), \ldots, H_n(z)$, convenablement choisies.

Je forme les n séries

$$(7) \qquad \Phi_\lambda(z) = \Sigma_k\left[\alpha_{\lambda,1}^{(k)}H_1(z_k) + \alpha_{\lambda,2}^{(k)}H_2(z_k) + \ldots + \alpha_{\lambda,n}^{(k)}H_n(z_k)\right](\gamma_k z + \delta_k)^{-2m}.$$

Ces séries sont convergentes, pourvu que m soit assez grand.

Elles jouissent de la propriété

$$\Phi_\lambda(z_k) = \left[A_{1,\lambda}^{(k)}\Phi_1(z) + A_{2,\lambda}^{(k)}\Phi_2(z) + \ldots + A_{n,\lambda}^{(k)}\Phi_n(z)\right](\gamma_k z + \delta_k)^{2m}.$$

On démontre dans tous les cas possibles (comme pour les fonctions thétafuchsiennes) que ces fonctions n'ont d'autres singularités que celles de G. Les fonctions

$$\varphi_\lambda(z) = \frac{\Phi_\lambda(z)}{\Theta(z)},$$

où $\Theta(z)$ est une fonction thétafuchsienne quelconque, sont alors des fonctions zétafuchsiennes.

Il est clair que tout déterminant à n lignes, où chaque ligne sera formée

d'un système de n fonctions zétafuchsiennes, sera lui-même une fonction fuchsienne. D'autre part, si x est la fonction fuchsienne définie au paragraphe 8, les dérivées d'ordre m des $\varphi_\lambda(z)$ par rapport à x formeront un système de n fonctions zétafuchsiennes.

Il résulte de là qu'un système de n fonctions zétafuchsiennes

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_n$$

satisfait à une équation linéaire de la forme

$$\frac{d^n\varphi}{dx^n} + P_2\frac{d^{n-2}\varphi}{dx^{n-2}} + P_3\frac{d^{n-3}\varphi}{dx^{n-3}} + \ldots + P_{n-1}\frac{d\varphi}{dx} + P_n\varphi = 0,$$

où les P sont rationnels en x et y.

13. Comment peut-on reconnaître quelles sont les équations linéaires qui sont intégrables par les fonctions zétafuchsiennes? Je ne puis examiner cette question dans toute sa généralité sans dépasser les bornes que je m'impose dans ce résumé. Je me bornerai à quelques exemples.

Considérons l'équation

$$\frac{d^n v}{dx^n} + P_2\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}} + \ldots + P_n v = 0, \tag{8}$$

où les P sont rationnels.

1° Supposons d'abord qu'elle ne présente que des points singuliers réels.

Soient

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_p$$

ces points singuliers; d'après ce que nous avons vu plus haut, nous pouvons toujours construire une fonction fuchsienne

$$x = f(z)$$

ne pouvant prendre aucune des valeurs

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_p.$$

Si l'on substitue $f(z)$ à la place de x dans l'équation (8), il est clair que les intégrales de ces équations seront des fonctions zétafuchsiennes de z. Une remarque importante, c'est que ces fonctions zétafuchsiennes peuvent être représentées par une série ordonnée suivant les puissances de t et *toujours convergente* (1).

(1) C'est-à-dire convergente pour $|t| < 1$. N. E. N.

Toute fonction algébrique pouvant être regardée comme l'intégrale d'une équation linéaire à coefficients rationnels, le même procédé permet, *si tous les points singuliers sont réels*, d'exprimer par des fonctions uniformes d'une variable auxiliaire les coordonnées des points d'une courbe algébrique.

2° Supposons maintenant que tous les points singuliers soient sur différents cercles qui *se coupent en deux points a et b sous des angles commensurables avec* 2π.

Je puis, par un changement de variable très simple, amener tous les points singuliers à avoir des arguments commensurables.

Soient

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_p$$

ces points singuliers. Supposons que tous leurs arguments soient multiples de $\frac{2\pi}{n}$; les quantités

$$a_1^n, \quad a_2^n, \quad \ldots, \quad a_p^n$$

seront réelles. On pourra construire une fonction fuchsienne $f(z)$ ne pouvant prendre aucune des valeurs *réelles*

$$0, \quad a_1^n, \quad a_2^n, \quad \ldots, \quad a_p^n, \quad \infty.$$

Comme $f(z)$ ne peut devenir ni nul, ni infini, $\sqrt[n]{f(z)}$ sera uniforme en z; et comme $f(z)$ ne peut prendre aucune des valeurs

$$a_1^n, \quad a_2^n, \quad \ldots, \quad a_p^n,$$

$\sqrt[n]{f(z)}$ ne pourra prendre aucune des valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_p$. Si donc on substitue $\sqrt[n]{f(z)}$ à la place de x dans l'équation (8), les intégrales de cette équation seront fonctions zétafuchsiennes de z.

3° Nous avons vu plus haut qu'on pouvait toujours construire une fonction fuchsienne ne pouvant devenir égale à aucune des quatre quantités

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4,$$

quelles que soient les valeurs réelles ou imaginaires de ces quantités. On en déduirait, par un raisonnement tout semblable à ceux qui précèdent, que les fonctions zétafuchsiennes permettent d'intégrer toutes les équations linéaires à coefficients rationnels, toutes les fois qu'il n'y a que quatre points singuliers.

14. Tout ce qui est relatif à la convergence des séries (2) et (7) s'applique encore si le groupe G est un groupe kleinéen quelconque. On peut donc définir des fonctions thétakleinéennes, kleinéennes et zétakleinéennes, analogues aux fonctions thétafuchsiennes, fuchsiennes et zétafuchsiennes, et susceptibles des mêmes applications.

L'intégration d'une équation linéaire pourra, dans un très grand nombre de cas (1), s'effectuer d'une infinité de manières à l'aide des fonctions zétafuchsiennes et zétakleinéennes; ce qui permet d'établir entre ces fonctions une infinité de relations que le défaut d'espace ne me permet pas d'étudier dans ce résumé.

15. Une autre application des fonctions fuchsiennes est le calcul des intégrales abéliennes de première espèce. Reprenons, en effet, les deux fonctions fuchsiennes x et y définies au paragraphe 8 et liées par la relation (5).

Soit

$$\int g(x, y)\, dx$$

une intégrale abélienne de première espèce quelconque. Ce sera une fonction de z que j'appellerai $G(z)$. On démontre aisément que si le groupe G est de la première, de la deuxième ou de la sixième famille, $G(z)$ est une fonction holomorphe de z toutes les fois que z est au-dessus de X; cette fonction jouit de la propriété

$$G(z_k) - G(z) = \text{const.}$$

Il est clair d'ailleurs que $G(z)$ peut être représenté par une série ordonnée suivant les puissances de t et toujours convergente.

16. Je ne parlerai pas ici des applications arithmétiques des fonctions fuchsiennes, me bornant à renvoyer à mes Notes sur les invariants arithmétiques et sur l'application de la géométrie non euclidienne à la théorie des formes quadratiques [Association française pour l'Avancement des Sciences, Congrès d'Alger (2)]. Les invariants arithmétiques se ramènent très aisément aux

(1) J'ai démontré dans ma Communication du 8 août que les fonctions zétafuchsiennes intègrent toutes les équations linéaires à coefficients algébriques.

(2) 15 avril 1881, p. 109-117; 16 avril 1881, p. 132-138. *Cf.* aussi le Mémoire *Sur les invariants arithmétiques*, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. 129, p. 89-150.

N. E. N.

fonctions thétafuchsiennes, et l'on peut ramener aussi aux groupes fuchsiens les groupes de substitutions linéaires à coefficients entiers, qui reproduisent une forme quadratique ternaire indéfinie à coefficients entiers (1).

(1) Il existe une expression très simple du genre p de la relation (5). J'appelle $2n$ le nombre des côtés de la première sorte, q celui des côtés de la deuxième sorte, a celui des cycles formés de sommets de la première ou de la deuxième catégorie, b celui des cycles formés d'un nombre impair de sommets de la troisième catégorie, c celui des cycles formés d'un nombre pair de sommets de la troisième catégorie; on trouve

$$2p = n - a + 1$$

pour les fonctions de la première, de la deuxième et de la sixième famille, et

$$2p = 2n - 2a - 2c + q - b \ (*)$$

pour les fonctions des autres familles.

(*) Le second membre doit être : $2n - 2a - c + q - b$ et l'équation se réduit par conséquent à $p = n - a$.

N. E. N.

SUR LES FONCTIONS UNIFORMES

QUI SE REPRODUISENT

PAR DES SUBSTITUTIONS LINÉAIRES.

Mathematische Annalen, t. 19, p. 553-564.

1. Les fonctions que je veux étudier dans ce travail ont les plus grandes analogies avec les fonctions elliptiques et modulaires qui n'en sont que des cas particuliers. On sait quels services les transcendantes à deux périodes ont rendus à l'analyse, et l'on comprend que tous les géomètres ont dû avoir l'idée qu'il y avait lieu de les généraliser. Les fonctions elliptiques ont pour propriété essentielle de se reproduire quand on augmente leur argument ζ de l'une des périodes. Le plan se trouve partagé en une infinité de parallélogrammes qui forment une sorte de damier dont l'ensemble ne varie pas, mais dont les cases se permutent quand on augmente ζ de l'une des périodes.

Nous allons rechercher s'il existe une fonction uniforme $F(\zeta)$ qui ne change pas quand on applique à ζ l'une des substitutions linéaires en nombre infini

$$S_i = \left(\zeta, \frac{\alpha_i\zeta + \beta_i}{\gamma_i\zeta + \delta_i}\right).$$

Je suppose que l'indice i prend toutes les valeurs $0, 1, 2, \ldots$ *ad inf.* et que l'on a

$$\alpha_0 = \delta_0 = 1, \qquad \gamma_0 = \beta_0 = 0, \qquad \alpha_i\delta_i - \beta_i\gamma_i = 1.$$

En d'autres termes, je cherche s'il y a une fonction uniforme $F(\zeta)$ jouissant de la propriété

$$F(\zeta) = F\left(\frac{\alpha_i\zeta + \beta_i}{\gamma_i\zeta + \delta_i}\right).$$

Il est clair que les substitutions S_i devront former un groupe et un groupe discontinu, c'est-à-dire que la portion du plan où la fonction F existe peut être divisée en une infinité de régions $R_0, R_1, \ldots, R_i, \ldots$ telles que quand ζ parcourt R_0, $\frac{\alpha_i\zeta + \beta_i}{\gamma_i\zeta + \delta_i}$ parcourt R_i. Ces diverses régions formeront, comme dans le cas des fonctions elliptiques, une sorte de damier dont l'ensemble ne variera pas, mais dont les cases se permuteront quand on appliquera à ζ l'une des substitutions S_i. A chacune des substitutions S_i correspond de la sorte une des régions R_i.

Si l'on appelle *points correspondants* les divers points $\frac{\alpha_i\zeta + \beta_i}{\gamma_i\zeta + \delta_i}$, la fonction F reprendra la même valeur en deux points correspondants et il y aura dans chacune des régions R_i un point correspondant à un point donné et un seul. Deux régions R seront dites *limitrophes* quand elles seront contiguës tout le long d'un arc de leur périmètre. Les substitutions qui correspondent aux régions limitrophes de R_0 sont des *substitutions fondamentales* dont toutes les substitutions S_i seront des combinaisons. Il en résulte que le groupe sera complètement déterminé quand on connaîtra ces substitutions fondamentales et par conséquent quand on connaîtra le polygone R_0 et les polygones limitrophes.

2. Je vais chercher d'abord à former tous les groupes discontinus formés de substitutions S_i où les coefficients $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ sont réels.

Je les appelle *groupes fuchsiens*. Dans ce cas, il est aisé de voir que les régions R_i qui forment le *damier* peuvent être réduites à des polygones curvilignes situés tout entiers au-dessus de l'axe des quantités réelles (que j'appelle pour abréger X) et ayant des côtés de deux sortes; ceux de la première sorte sont des arcs de cercle ayant leur centre sur X, ceux de la deuxième sorte sont des segments de l'axe X lui-même.

Chacune des substitutions fondamentales du groupe changera le polygone R_0 en un polygone limitrophe R_1, et par conséquent l'un des côtés de la première sorte ab de R_0 en un autre côté cd de ce même polygone. Cela montre que les côtés de la première sorte sont en nombre pair et se répartissent en paires de côtés conjugués (ab, cd). Si a', b', c', d' sont les quantités imaginaires conjuguées de a, b, c, d, on devra avoir

$$(1) \qquad \frac{a-a'}{a-b'}\frac{b-b'}{b-a'} = \frac{c-c'}{c-d'}\frac{d-d'}{d-c'}.$$

Cette condition est suffisante pour qu'il existe une substitution S_i à coefficients réels, qui change ab en cd; cette substitution est d'ailleurs parfaitement déterminée. Il résulte de là que, si l'on se donne le polygone R_0 et la distribution de ses côtés en paires, les substitutions fondamentales et par conséquent le groupe lui-même seront parfaitement déterminés.

Nous avons vu qu'on ne pouvait avoir deux points correspondants à l'intérieur de R_0; les points du périmètre, au contraire, se correspondent deux à deux, de manière qu'un côté corresponde à son conjugué. De plus, deux ou un plus grand nombre de sommets pourront être des points correspondants. Je dirai alors qu'ils appartiennent à un même cycle.

Voici une règle pratique pour former les cycles; on partira d'un sommet quelconque, on considérera le côté suivant (en parcourant le périmètre de R_0 dans un sens convenu) si ce côté est de la première sorte, puis le côté conjugué, puis le sommet suivant, puis le côté suivant s'il est de la première sorte, puis son conjugué, etc.; on ne sera arrêté que si l'on arrive à un côté de la deuxième sorte, auquel cas le cycle sera *ouvert*, ou si l'on retombe sur le sommet qui a servi de point de départ, auquel cas le cycle sera *fermé*. Tous les sommets rencontrés de la sorte formeront un cycle.

Un cycle fermé sera de la première catégorie si tous ses sommets sont au-dessus de X et de la deuxième dans le cas contraire.

Nous avons vu que, pour déterminer un groupe fuchsien il suffit de connaître R_0 et la distribution de ses côtés en paires. On connaît en effet les substitutions fondamentales, et l'on peut construire les polygones limitrophes de R_0, puis les polygones limitrophes de ceux-ci, et ainsi de suite. Pour que le groupe fuchsien existe, il faut et il suffit que les polygones obtenus de la sorte recouvrent toute une partie du plan et ne la recouvrent qu'une fois, de manière à former un damier.

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi? Je les ai déterminées par des procédés empruntés à la géométrie non euclidienne; j'ai montré qu'outre la condition (1) le polygone R_0 est assujetti à la condition suivante :

La somme des angles qui correspondent aux divers sommets d'un cycle de la première catégorie doit être une partie aliquote de 2π.

3. Pour former tous les groupes fuchsiens, il suffira donc de former tous

les polygones R_0 qui satisfont à ces deux conditions. En voici quelques exemples :

Premier cas. — Je suppose que R_0 soit un polygone de $2n$ côtés de la première sorte dont les sommets se succèdent dans l'ordre suivant : $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}, B_n, B_{n-1}, \ldots, B_2, A_1$; les côtés A_1A_2, A_1B_2; A_2A_3, B_2B_3; ...; A_kA_{k+1}, B_kB_{k+1}; ...; A_nA_{n+1}, B_nA_{n+1}, seront conjugués; il y aura alors $n+1$ cycles formés respectivement des sommets

$$A_1;\quad A_2, B_2;\quad A_3, B_3;\quad A_4, B_4;\quad \ldots;\quad A_n, B_n;\quad A_{n+1}.$$

Le polygone R_0 satisfera à la condition (1) et de plus les angles $A_1, A_2+B_2, A_3+B_3, \ldots, A_n+B_n, A_{n+1}$ seront des parties aliquotes de 2π.

Si je suppose de plus que le polygone est symétrique par rapport à A_1A_{n+1} et que cette droite est perpendiculaire à X, R_0 se trouvera divisé en deux polygones $R'_0 = A_1A_2\ldots A_{n+1}$, et $R''_0 = A_1B_2B_3, \ldots, B_nA_{n+1}$ dont tous les angles seront des parties aliquotes de π. Chacun des polygones R_i du damier se trouvera de même divisé en deux polygones R'_i et R''_i. Le damier sera ainsi formé d'une infinité de polygones R'_i, R''_i et de telle sorte que deux polygones limitrophes soient dérivés l'un de l'autre par une transformation par *rayons vecteurs réciproques* qui n'altère pas leur frontière commune. Si l'on suppose en particulier $n=2$, on retombera sur le cas examiné par M. Schwarz au tome 75 du *Journal de Crelle*.

Deuxième cas. — Je suppose que les sommets du polygone R_0 soient au nombre de $2n$ et que les côtés opposés soient conjugués. Si n est pair, tous les sommets appartiennent au même cycle et la somme des angles doit être une partie aliquote de 2π. Si n est impair, il y a deux cycles formés, l'un de tous les sommets de rang impair, l'autre de tous les sommets de rang pair. La somme de tous les angles de rang pair, comme celle de tous les angles de rang impair, devra diviser 2π.

Troisième cas. — R_0 a huit sommets A, B, C, D, E, F, G, H; les côtés BC, DE, FG, HA sont de la deuxième sorte; les côtés AB et CD, EF et GH sont conjugués; tous les cycles sont *ouverts;* un pareil polygone n'est assujetti à *aucune* condition.

Quatrième cas. — L'un des cas particuliers les plus remarquables est celui où les coefficients des S_i sont entiers, et qui a fait l'objet des savantes recherches de M. Klein sur les fonctions modulaires.

4. J'ai supposé jusqu'ici que les coefficients des S_i étaient réels; il est facile de faire une première généralisation. Posons

$$t=\frac{a\zeta+b}{c\zeta+d}, \qquad t_i=\frac{\alpha_i\dfrac{a\zeta+b}{c\zeta+d}+\beta_i}{\gamma_i\dfrac{a\zeta+b}{c\zeta+d}+\delta_i},$$

a, b, c, d étant quatre constantes imaginaires telles que

$$ad-bc=1.$$

A la substitution S_i correspond la substitution linéaire

$$T_i=(t,t_i)$$

dont les coefficients sont imaginaires. Mais, de même que les substitutions S_i conservent X et changent également en lui-même le demi-plan qui est au-dessus de cet axe, de même les substitutions T_i conserveront un certain cercle qui a pour équation

$$\text{partie imaginaire de } \frac{a\zeta+b}{c\zeta+d}=0,$$

et que j'appellerai *cercle fondamental*. De plus, si les substitutions S_i forment un groupe discontinu, il en sera de même des substitutions T_i; à chacune d'elles correspondra, comme dans le cas précédent, une case d'un certain damier formé par des polygones R dont les côtés de la première sorte sont des arcs de cercle coupant orthogonalement le cercle fondamental et ceux de la deuxième sorte sont des arcs du cercle fondamental. Mais la surface totale de ce damier sera finie (contrairement à ce qui avait lieu dans le cas précédent), car elle ne recouvrira que l'intérieur du cercle fondamental ou une partie seulement de ce cercle. Nous conserverons le nom de *fuchsiens* à ces groupes dont les groupes à substitutions réelles ne sont que des cas particuliers.

Reste à examiner le cas le plus général, celui où l'on ne fait aucune hypothèse sur les substitutions S_i. Dans ce cas, il y a encore des groupes discontinus que j'ai appelés *kleinéens* et dont j'ai démontré l'existence et étudié le mode de génération par des procédés empruntés à la géométrie non euclidienne à trois dimensions. Dans certains cas particuliers, des méthodes plus simples peuvent être employées; mais, dans le cas le plus général, les conditions auxquelles sont assujettis les groupes kleinéens sont très compliquées et ne peuvent être énoncées ici. Nous aurons encore un damier dont les cases, en nombre infini,

seront des polygones limités par des arcs de cercle, et dont la surface totale sera en général finie.

5. De l'existence des groupes discontinus on pourrait sans doute, par des procédés analogues à ceux de M. Schwarz, déduire celle de fonctions uniformes reproduites par les substitutions de ce groupe; mais on n'aurait pas ainsi l'expression explicite de ces transcendantes. Aussi est-il préférable d'employer d'autres méthodes. Mon point de départ est ce fait que la série

$$\sum_i \text{mod}\frac{1}{(\gamma_i\zeta+\delta_i)^{2m}}$$

(où m est un entier plus grand que 1) est convergente. Je m'appuie sur ce que l'aire totale du damier est finie : dans les cas particuliers où cela ne serait pas, un changement linéaire convenablement choisi de la variable nous ramènerait au cas général. La série

$$\Theta(\zeta)=\sum H\left(\frac{\alpha_i\zeta+\beta_i}{\gamma_i\zeta+\delta_i}\right)\frac{1}{(\gamma_i\zeta+\delta_i)^{2m}},$$

où $H(\zeta)$ est une fonction rationnelle quelconque, est convergente et définit une fonction uniforme de ζ.

Cette fonction jouit de la propriété

$$\Theta\left(\frac{\alpha_i\zeta+\beta_i}{\gamma_i\zeta+\delta_i}\right)=\Theta(\zeta)(\gamma_i\zeta+\delta_i)^{2m}.$$

De plus, le nombre des zéros et des infinis de cette fonction intérieurs à R_0 est toujours fini, ce que j'établis par la considération de l'intégrale

$$\int\frac{\Theta(\zeta)\,d\zeta}{\Theta(\zeta)}$$

si aucun des angles de R_0 n'est nul, et par un raisonnement plus compliqué dans le cas contraire. $\Theta(\zeta)$ s'appellera une fonction *thétafuchsienne* ou *thétakleinéenne*, selon que le groupe correspondant sera fuchsien ou kleinéen.

Soit $F(\zeta)$ le quotient de deux fonctions telles que $\Theta(\zeta)$ correspondant à une même valeur de m. Il est clair qu'à l'intérieur de R_0 cette fonction n'aura qu'un nombre fini de zéros et d'infinis et qu'elle jouira de la propriété

$$F\left(\frac{\alpha_i\zeta+\beta_i}{\gamma_i\zeta+\delta_i}\right)=F(\zeta).$$

Nous appellerons *fonction fuchsienne* (ou *kleinéenne*) toute fonction jouissant de ces deux propriétés.

Occupons-nous d'abord des fonctions fuchsiennes. Si le polygone R_0 n'admet pas de cycle ouvert, les fonctions Θ et F n'existeront qu'à l'intérieur du cercle fondamental dont la circonférence est pour elles une ligne singulière essentielle. Dans certains cas particuliers même, les transcendantes n'existent pas dans tout le cercle fondamental, mais seulement dans un domaine limité par une infinité de circonférences coupant orthogonalement le cercle fondamental (1). Si au contraire R_0 admet des cycles ouverts, les fonctions Θ et F existent dans tout le plan et leurs points singuliers sont isolés, quoique en nombre infini.

Supposons de nouveau que R_0 n'admette pas de cycle ouvert. Si $H(\zeta)$ a des infinis intérieurs au cercle fondamental, la fonction Θ aura des infinis et l'on sera certain qu'elle n'est pas identiquement nulle. Mais si $H(\zeta)$ ne devient pas infini à l'intérieur du cercle fondamental, la fonction Θ sera holomorphe à l'intérieur de ce cercle et pourra même être identiquement nulle. Et, en effet, on voit aisément que toutes les fonctions Θ *sans infini* peuvent (*pour une même valeur de m*) s'exprimer linéairement par un nombre fini d'entre elles. Ces relations linéaires, dont l'existence se démontre aisément *a priori*, peuvent être *effectivement* écrites, grâce à la considération de fonctions auxiliaires de la forme

$$(2)\qquad \sum \frac{\varphi\left(\frac{\alpha_i a+\beta_i}{\gamma_i a+\delta_i}\right)}{\zeta-\frac{\alpha_i a+\beta_i}{\gamma_i a+\delta_i}}\,\frac{1}{(\gamma_i a+\delta_i)^{2m}}.$$

C'est de la même manière qu'on arrive à exprimer une fonction fuchsienne donnée à l'aide de séries telles que Θ et cela d'une infinité de manières; mais je ne puis insister davantage sur ce point, cela m'entraînerait trop loin.

Passons maintenant aux fonctions kleinéennes. Les unes existeront dans tout le plan et auront des points singuliers isolés; les autres n'existeront que dans un certain domaine. La limite de ce domaine n'est pas une courbe analytique; la tangente en un de ses points est généralement déterminée, mais il n'en est pas de même du rayon de courbure.

6. Entre deux fonctions fuchsiennes (ou kleinéennes) F et F_1 correspondant à un même groupe, il y a toujours une relation algébrique, car à une valeur de F correspondent un nombre fini de valeurs de F_1 et réciproquement. Toutes les fonctions qui correspondent à un même groupe s'exprimeront donc rationnellement en fonctions de deux d'entre elles que j'appelle x et y et entre lesquelles il y a une relation algébrique

(1) Ce cas d'exception n'a pas lieu; la fonction existe toujours dans tout le cercle fondamental. N. E. N.

$$(3)\qquad f(x,y)=0.$$

Quel est le genre de cette relation? La géométrie de situation permet aisément de le déterminer. Soient $2n$ le nombre des côtés de la première sorte, p celui des cycles fermés. Le genre sera $\frac{n+1-p}{2}$ s'il n'y a pas de cycle ouvert et $n-p$ s'il y en a. Reprenons les exemples que nous avons envisagés plus haut. Dans le premier cas, le genre est nul; dans le deuxième, il est $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$, selon que n est pair ou impair; dans le troisième, il est égal à 2.

7. Nous allons voir maintenant comment les fonctions x et y définies plus haut permettent d'intégrer certaines équations linéaires du second ordre. Soit

$$v_1=\sqrt{\frac{dx}{d\zeta}},\qquad v_2=\zeta\sqrt{\frac{dx}{d\zeta}},$$

les fonctions v_1 et v_2 seront des intégrales d'une équation linéaire du second ordre de la forme

$$(4)\qquad \frac{d^2v}{dx^2}=v\,\varphi(x,y),$$

φ étant rationnel en x et en y, et y étant lié à x par la relation algébrique (3). Ici x est une fonction fuchsienne ou kleinéenne du rapport ζ des intégrales. *Il existe donc des équations linéaires de la forme* (4) *telles que la variable indépendante soit une fonction uniforme du rapport des intégrales.*

Il s'agit maintenant, étant donnée une équation de la forme (4), de reconnaître si x est fonction fuchsienne ou fonction kleinéenne, ou encore fonction non uniforme du rapport des intégrales et, dans les deux premiers cas, d'exprimer x à l'aide des séries Θ. Le second problème peut se résoudre à l'aide des considérations dont j'ai parlé plus haut et qui permettent d'exprimer toute fonction fuchsienne par les séries Θ. Disons quelques mots du premier problème.

Les conditions auxquelles sont assujettis les coefficients de l'équation (4) pour que x soit fonction uniforme du rapport des intégrales sont très compliquées; voici quelle est la forme la plus simple sous laquelle on pourra les présenter : on pourra exprimer les coefficients de l'équation (4) en fonctions transcendantes, mais *uniformes* d'un nombre égal de paramètres auxiliaires convenablement choisis. Les conditions cherchées se réduiront alors à un cer-

tain nombre d'inégalités ou d'égalités *algébriques* entre les parties réelles et imaginaires de ces nouveaux paramètres. Je ne puis ici entrer dans plus de détails.

8. J'ajouterai cependant quelques mots en ce qui concerne le cas le plus simple, celui où l'équation (4) est de la forme

$$\frac{d^2v}{dx^2} = v\,\frac{P_n}{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x-l)^\lambda},$$

P_n étant un polynome de degré n en x.

Supposons d'abord

$$(5) \qquad \alpha \leqq 2, \quad \beta \leqq 2, \quad \dots, \quad \lambda \leqq 2, \quad n \leqq \alpha+\beta+\dots+\lambda-2.$$

C'est le cas où les intégrales sont *régulières* (suivant l'expression de M. Fuchs) dans le voisinage de chacun des points singuliers $a, b, \dots, l, \infty$. Pour que x soit une fonction uniforme du rapport des intégrales, il faut d'abord que la différence des racines de chaque équation déterminante soit nulle ou soit une partie aliquote de l'unité. Mais cette condition n'est pas suffisante. Si de plus les coefficients de P_n satisfont à certaines *inégalités*, x sera fonction *kleinéenne* du rapport des intégrales; s'ils satisfont en outre à certaines *égalités*, x sera fonction fuchsienne de ce rapport. Donc, si l'on suppose remplie la condition relative aux équations déterminantes, il suffit, pour que x soit fonction uniforme du rapport ζ des intégrales, que certaines quantités soient comprises entre certaines limites; pour que ce soit une fonction fuchsienne de ce rapport ζ, il faut en outre que ces quantités prennent certaines valeurs déterminées.

Si x est fonction fuchsienne de ζ, cette fonction n'existe qu'à l'intérieur du cercle fondamental. Si nous supposons de plus que les racines de chaque équation déterminante soient égales, nous verrons aisément que x ne peut prendre aucune des valeurs $a, b, \dots, l, \infty$ quand ζ est intérieur au cercle fondamental.

Supposons maintenant que les inégalités (5) cessent d'avoir lieu, de telle sorte que les intégrales deviennent *irrégulières*. Dans ce cas, x pourra encore être fonction fuchsienne de ζ, mais cette fonction, au lieu d'exister dans tout le cercle fondamental, n'existera plus que dans un domaine limité par une infinité de circonférences qui coupent orthogonalement ce cercle (1).

(1) Ce résultat a été retiré plus tard. Cf. *Mémoires sur les fonctions zétafuchsiennes*, *Acta mathematica*, t. V, p. 211; et ce tome plus loin. N. E. N.

9. Nous avons vu qu'une fonction fuchsienne peut s'exprimer à l'aide de séries telles que Θ; mais on en peut trouver beaucoup d'autres expressions. Si par exemple x ne peut devenir infini quand ζ est intérieur au cercle fondamental, on pourra exprimer cette fonction par une série toujours convergente et ordonnée suivant les puissances croissantes de $\zeta - \zeta_0$ (ζ_0 étant le centre du cercle fondamental). Dans le cas contraire, on pourra représenter x d'une infinité de manières comme le quotient de deux pareilles séries dont on pourra calculer les coefficients par récurrence. Enfin, nous pourrons encore exprimer une fonction fuchsienne d'une infinité de manières à l'aide de séries telles que (2).

10. J'ai démontré le théorème suivant :

On peut toujours construire une fonction fuchsienne $F(\zeta)$ *n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental et ne pouvant prendre à l'intérieur de ce cercle aucune des* $n+1$ *valeurs données*

$$a_1, \quad a_2, \quad \dots, \quad a_n, \quad \infty.$$

Le calcul numérique des constantes qui servent à construire cette fonction est assez long; mais si, au lieu de calculer exactement ces constantes, on n'en prend que des valeurs approchées, on aura construit, au lieu de $F(\zeta)$, une fonction kleinéenne jouissant des mêmes propriétés.

Ce théorème a une première conséquence importante. Soit une relation algébrique quelconque

$$f(x, y) = 0$$

admettant comme points singuliers

$$a_1, \quad a_2, \quad \dots, \quad a_n.$$

Faisons-y

$$x = F(\zeta),$$

$F(\zeta)$ étant la fonction définie plus haut; tant que ζ sera à l'intérieur du cercle fondamental, x ne pourra passer par aucun des points singuliers; si ζ sort de ce cercle, x cessera d'exister. Il résulte de là que y est une fonction uniforme de ζ qui n'existe qu'à l'intérieur du cercle fondamental et l'on voit aisément que cette fonction est une fonction fuchsienne.

Donc les coordonnées des points d'une courbe algébrique quelconque peuvent s'exprimer par des fonctions fuchsiennes d'un même paramètre ζ.

11. Considérons maintenant une équation linéaire quelconque

$$\frac{d^n v}{dx^n} + P_{n-2}\frac{d^{n-2} v}{dx^{n-2}} + P_{n-3}\frac{d^{n-3} v}{dx^{n-3}} + \ldots + P_1 \frac{dv}{dx} + P_0 v = 0. \tag{6}$$

Je suppose que les P soient des fonctions rationnelles de deux variables x et y liées entre elles par une relation algébrique

$$f(x, y) = 0 \tag{7}$$

et qu'on ait fait disparaître le coefficient de $\frac{d^{n-1} v}{dx^{n-1}}$, ce qui est toujours possible. Soient

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n$$

les points singuliers de l'équation (7) et les infinis des P. Faisons, comme dans le paragraphe précédent,

$$x = F(\zeta).$$

On démontrerait, par un raisonnement tout semblable à celui qui précède, que les n intégrales de l'équation (6) sont des fonctions $\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta), \ldots, \varphi_n(\zeta)$ uniformes en ζ et n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental. Ces fonctions, comme $F(\zeta)$ d'ailleurs, peuvent s'exprimer par des séries toujours convergentes ordonnées suivant les puissances de $\zeta - \zeta_0$ et dont les coefficients se calculent par récurrence.

12. Je dis que n fonctions

$$\varphi_1(\zeta), \quad \varphi_2(\zeta), \quad \ldots, \quad \varphi_n(\zeta)$$

sont des fonctions zétafuchsiennes si elles sont uniformes et si elles jouissent de la propriété

$$\varphi_\lambda\left(\frac{\alpha_i \zeta + \beta_i}{\gamma_i \zeta + \delta_i}\right) = A^i_{1,\lambda}\varphi_1(\zeta) + A^i_{2,\lambda}\varphi_2(\zeta) + \ldots + A^i_{n,\lambda}\varphi_n(\zeta). \tag{8}$$

Les A sont des constantes dont le déterminant est l'unité, et les substitutions $\left(\zeta, \frac{\alpha_i \zeta + \beta_i}{\gamma_i \zeta + \delta_i}\right)$ sont toutes celles d'un groupe fuchsien G. Les substitutions linéaires

$$y'_\lambda = A^i_{1,\lambda} y_1 + A^i_{2,\lambda} y_2 + \ldots + A^i_{n,\lambda} y_n$$

devront évidemment former un groupe H isomorphe à G.

Les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ du paragraphe précédent sont évidemment des fonctions zétafuchsiennes, ce qui me permet d'énoncer le résultat suivant :

Toute équation différentielle linéaire à coefficients algébriques est intégrable par les fonctions fuchsiennes et zétafuchsiennes.

Mais le procédé indiqué au paragraphe précédent n'est pas unique; au lieu de substituer $F(\zeta)$ à la place de x dans l'équation (6), on aurait pu substituer une infinité d'autres fonctions fuchsiennes et l'on aurait également obtenu pour les intégrales un système de fonctions zétafuchsiennes. On aurait pu aussi substituer à la place de x une infinité de fonctions kleinéennes, et les intégrales auraient été des fonctions zétakleinéennes formées avec un groupe kleinéen comme les fonctions zétafuchsiennes le sont avec un groupe fuchsien. Le nombre des intégrations de l'équation (6) à l'aide des transcendantes nouvelles est donc infini.

13. Nous ne pourrons dire toutefois que nous avons intégré l'équation (6) que quand nous aurons donné une expression explicite des fonctions φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$; nous en avons une déjà, il est vrai, sous la forme de séries toujours convergentes et ordonnées suivant les puissances de $\zeta - \zeta_0$, ou bien encore sous la forme d'un quotient de deux pareilles séries. Mais on peut en donner une expression différente analogue à celle des fonctions fuchsiennes à l'aide des séries Θ.

Soient (en reprenant les constantes A du paragraphe précédent)

$$a^i_{1,\lambda}, \quad a^i_{2,\lambda}, \quad \ldots, \quad a^i_{n,\lambda}$$

les mineurs du déterminant des A^i.

Cela posé, je considère les groupes G et H comme données, et j'envisage n fonctions rationnelles de ζ, $H_1(\zeta)$, $H_2(\zeta)$, ..., $H_n(\zeta)$. Je forme les n séries

$$\Phi_\lambda(\zeta) = \sum_i \left[a^i_{\lambda,1} H_1\left(\frac{\alpha_i \zeta + \beta_i}{\gamma_i \zeta + \delta_i}\right) + a^i_{\lambda,2} H_2\left(\frac{\alpha_i \zeta + \beta_i}{\gamma_i \zeta + \delta_i}\right) + \ldots + a^i_{\lambda,n} H_n\left(\frac{\alpha_i \zeta + \beta_i}{\gamma_i \zeta + \delta_i}\right)\right] (\gamma_i \zeta + \delta_i)^{-2m}. \tag{9}$$

Ces séries sont convergentes, pourvu que m soit assez grand. Elles jouissent de la propriété

$$\Phi_\lambda\left(\frac{\alpha_i \zeta + \beta_i}{\gamma_i \zeta + \delta_i}\right) = [A^i_{1,\lambda}\Phi_1(\zeta) + A^i_{2,\lambda}\Phi_2(\zeta) + \ldots + A^i_{n,\lambda}\Phi_n(\zeta)](\gamma_i \zeta + \delta_i)^{2m}.$$

Les n fonctions

$$\frac{\Phi_\lambda(\zeta)}{\Theta(\zeta)},$$

où $\Theta(\zeta)$ est la série du paragraphe 5, sont des fonctions zétafuchsiennes et, si l'on considérait un système quelconque de fonctions zétafuchsiennes, on

verrait que ces fonctions peuvent toujours s'exprimer rationnellement par un certain nombre de séries de la forme $\Theta(\zeta)$ et de séries de la forme (9).

14. Je n'ai pu donner ici les démonstrations de ces théorèmes, je n'ai pu qu'énoncer des résultats en supprimant tous les raisonnements intermédiaires que je publierai prochainement dans un travail de longue haleine. L'énoncé des résultats eux-mêmes n'a pu être complet, je prie le lecteur de vouloir bien m'excuser.

Je ne parlerai pas ici des applications des fonctions fuchsiennes à l'arithmétique et au calcul des intégrales abéliennes de première espèce, et je me bornerai à résumer en ces quelques lignes les résultats de ce travail :

Si l'on envisage une équation différentielle linéaire à coefficients algébriques, on peut exprimer la variable indépendante et les intégrales en fonctions uniformes d'un même paramètre ζ.

Ces fonctions uniformes peuvent d'une infinité de manières s'exprimer rationnellement par un certain nombre de séries à coefficients entiers ou rationnels (1).

Paris, 17 décembre 1881.

(1) Die vorstehend abgedruckte Arbeit des Herrn Poincaré resumirt gewisse Resultate, welche der Verfasser in einer Reihe aufeinanderfolgender Artikel in den Comptes rendus dieses Jahres mitgetheilt hat. Es wird kaum nöthig sein, dieselben der Beachtung der Mathematiker noch besonders zu empfehlen. Handelt es sich doch um Functionen, welche geeignet scheinen, in der Lehre von den algebraischen Irrationalitäten den Abel'schen Functionen erfolgreiche Concurrenz zu machen, und die überdies einen ganz neuen Einblick in diejenigen Abhängigkeiten gewähren, welche durch lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten bestimmt sind. Indem ich Herrn Poincaré im Namen der Annalenredaction den besonderen Dank dafür aussprecbe, dass er uns vorstehenden Aufsatz hat überlassen wollen, glaube ich ihm nur in dem Punkte entgegentreten zu sollen, dass ich die von ihm vorgeschlagene Benennung der in Betracht kommenden Functionen als verfrüht bezeichne. Einmal nämlich bewegen sich alle die Untersuchungen, welche Hr. Schwarz und ich in der betreffenden Richtung bislang veröffentlicht haben, auf dem Gebiete der « fonctions fuchsiennes », über die Hr. Fuchs selbst nirgends publicirt hat. Andererseits habe ich über die allgemeineren Functionen, welche Hr. Poincaré mit meinem Namen in Verbindung bringt, von mir aus bisher nichts drucken lassen; ich habe nur gelegentlich Herrn Poincaré auf die Existenz dieser Functionen aufmerksam gemacht [siehe *Comptes rendus*, t. XCII, 1881 (*), p. 1484]. Letzterer Umstand ist aber um so irrelevanter, als sich ein specieller Fall jener allgemeineren Functionen bereits anderwärts bei Gelegenheit in Betracht gezogen findet, nämlich in der Arbeit von Hrn. Schottky im 83ten Bande von *Borchardt's Journal*. Es werden dort (p. 346 ff.) Functionen besprochen, welche sich symmetrisch reproduciren, wenn man einen ebenen Bereich, der von lauter getrennten Kreislinien begrenzt ist, an eben diesen Kreislinien spiegelt. Uebrigens möchte ich auch auf die Dyck'schen Arbeiten im 17ten und 18ten Bande dieser Annalen sowie insbesondere auf dessen demnächst (in Bd. XX) erscheinende Habilitationsschrift verweisen, wo Gebietseintheilungen der allgemeinsten hier in Betracht

N. E. N.

(*) Ce tome p. 21.

kommen Art zu gruppentheoretischen Zwecken verwandt werden. — Vielleicht ist es gut, diesen kleinen Bemerkungen noch eine allgemeinere zuzugesellen und bei vorliegender Gelegenheit zu constatiren, dass alle die hier in Frage kommenden Untersuchungen, und zwar sowohl diejenigen, welche ein geometrisches Gepräge besitzen, als auch die mehr analytischen, die sich auf die Lösungen linearer Differentialgleichungen beziehen, auf Riemann'sche Ideenbildungen zurückgehen. Der Zusammenhang ist ein so enger, dass man behaupten kann, es handele sich bei Untersuchungen im Sinne des Hrn. Poincaré geradezu um die weitere Durchführung des allgemeinen functionentheoretischen Programm's, welches Riemann in seiner Doctordissertation aufgestellt hat.

Leipzig, den 30. December 1881.

F. Klein.

SUR LES FONCTIONS UNIFORMES

QUI SE REPRODUISENT

PAR DES SUBSTITUTIONS LINÉAIRES

(Extrait d'une lettre adressée à M. F. Klein).

Mathematische Annalen, t. 20, p. 52-53.

....Vous avez eu dernièrement la bonté de faire insérer aux *Mathematische Annalen* (1) mon travail sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires et vous l'avez fait suivre d'une Note où vous exposez les raisons qui vous font trouver peu convenables les noms que j'ai donnés à ces transcendantes. Permettez-moi de vous adresser quelques lignes pour défendre mes dénominations, que je n'ai pas choisies au hasard (2).

Si j'ai cru devoir donner aux fonctions nouvelles le nom de M. Fuchs, ce n'est pas que je méconnaisse la valeur des travaux de M. Schwarz et des vôtres; je suis le premier, au contraire, à en apprécier la haute importance. Mais il ne m'était pas possible d'oublier les découvertes si remarquables que le savant

(1) T. XIX, p. 553-564. Ce tome, p. 92.

(2) Herrn Poincaré's Darlegungen habe ich nur hinzuzufügen, dass ich für mein Theil allerdings nach wie vor an der Auffassung festhalte, der ich auf p. 564 des XIX. Annalenbandes Ausdruck gegeben habe. Dabei will ich nicht unterlassen, ausdrücklich auf die Note aufmerksam zu machen, mit welcher Herr Fuchs von sich aus dem auf ihn bezüglichen Passus meiner Auseinandersetzung entgegengetreten ist (Cf. *Göttinger Nachrichten*, vom 4. März 1882).

Düsseldorf, den 2. April 1882. F. Klein.

professeur de Heidelberg a publiées dans le *Journal de Crelle*. Elles sont le fondement de la théorie des équations linéaires et, sans elles, je n'aurais pu aborder l'étude de mes transcendantes qui se lient si directement à cette théorie. Dans ses premiers travaux, M. Fuchs se place, il est vrai, à un point de vue un peu différent du mien et ne se préoccupe ni de la discontinuité des groupes, ni de l'uniformité des fonctions. Mais M. Schwarz, dans ses Mémoires des Tomes 70 et 74 du *Journal de Crelle*, ne s'en préoccupe pas non plus; il en dit quelques mots dan un cas très particulier, dans le Mémoire du Tome 75 que j'ai cité dans ma Note. C'est là seulement qu'il se trouve : « auf dem Gebiete der fonctions fuchsiennes ». Dans vos belles recherches sur les fonctions modulaires, votre façon d'envisager les choses différait peu de la mienne, mais vous aviez plutôt en vue alors l'étude des fonctions elliptiques que celles des équations linéaires. Quant à M. Fuchs, dans ses Mémoires des Tomes 83 et 89 du *Journal de Crelle*, il s'est élevé à un point de vue nouveau et a mis en lumière le lien étroit qui unit la théorie des équations différentielles à celles de certaines fonctions uniformes. Ce fut la lecture de ces Mémoires qui devint le point de départ de mes recherches.

En ce qui concerne les fonctions kleinéennes, j'aurais cru commettre une injustice si je leur avais donné un autre nom que le vôtre. C'est M. Schottky qui a découvert la figure qui faisait l'objet de votre lettre, mais c'est vous qui avez « ihre principielle Wichtigkeit betont », comme vous dites à la fin de votre savant travail : *Ueber eindeutige Functionen mit linearen Transformationen in sich*.

Quant à ce que vous dites de Riemann, je ne puis qu'y souscrire pleinement. C'était un de ces génies qui renouvellent si bien la face de la Science qu'ils impriment leur cachet, non seulement sur les œuvres de leurs élèves immédiats, mais sur celles de tous leurs successeurs pendant une longue suite d'années. Riemann a créé une théorie nouvelle des fonctions, et il sera toujours possible d'y retrouver le germe de tout ce qui s'est fait et se fera après lui en analyse mathématique....

Paris, le 30 mars 1882.