



ERSTE ANMERKUNG

Weil ein Körper, welcher sich in einer flüssigen Materie bewegt, nicht fortgehen kann, ohne die ihm im Wege stehenden Theilchen derselben Materie in Bewegung zu setzen, so muß dadurch nothwendig die Geschwindigkeit derselben vermindert werden. Denn da keine Bewegung ohne Kraft hervor gebracht werden kann, so wird zu Fortstossung der Theilchen der flüssigen Materie eine Kraft erfordert. Eben diese Kraft wirkt aber hinwiederum rückwärts auf den Körper selbst, und vermindert folglich seine Bewegung. Dieses folget auch aus dem bekannten Grundsatz der Mechanic, daß kein Körper einem andern eine Bewegung mittheilen könne, ohne zugleich selbst eben so viel von seiner eigenen Bewegung zu verlieren; und hierauf gründen sich die allgemeinen Regeln, nach welchen die Bewegungen zweyer auf einander stossenden Körper nach dem Stoß verändert werden.

Fragt man aber weiter nach der ersten Ursache dieser Veränderungen, so beruhet dieselbe auf dem Vermögen, welches alle Körper, in so ferne dieselben aus Materie bestehen, haben, in ihrem Zustande unverändert zu verharren. Dieses Vermögen ist nemlich eine wesentliche Eigenschaft der Materie, und derselben eben so eigen, als die Ausdehnung selbst, dergestalt, daß gleichwie die Materie ohne Ausdehnung nicht bestehen kann, dieselbe eben so wenig ohne dieses Vermögen, in ihrem Zustande unverändert zu verharren, bestehen kann. Dieses Vermögen äußert sich eben so wohl in ruhenden, als bewegten Körpern. Denn ein ruhender Körper muß kraft dieses Vermögens beständig in Ruhe bleiben, und kann nimmer eine Bewegung erhalten, wofern keine äußerliche Kraft dazu kommt, wodurch derselbe in Bewegung gesetzt wird. Gleicher gestalt, wenn sich ein Körper in Bewegung befindet, so muß derselbe beständig eben diese Bewegung unverändert fortsetzen, wofern keine äußerliche Kraft darinne eine Veränderung verursacht. So oft nun entweder ein Körper, welcher vorher stille gestanden, in Bewegung gesetzt wird, oder ein bewegter Körper in seiner Bewegung eine Veränderung leidet: so kann man immer versichert seyn, daß eine äußerliche Kraft darauf gewürket habe.

Es kommen aber bey einer jeglichen Bewegung zwey Stücke zu betrachten vor, nemlich die Geschwindigkeit, und die Richtung oder Direction derselben, und daher hat auch ein jeglicher Körper kraft seines Wesens das Vermögen, diese beyden Stücke, als wodurch sein Zustand bestimmt wird, unverändert zu erhalten. Wenn also ein Körper einmahl in Bewegung gesetzt worden,

und keine äußerliche Kraft auf denselben würket, so behält derselbe beständig so wohl einerley Geschwindigkeit, als auch einerley Richtung. Wenn man aber wahrnehmen sollte, daß entweder die Geschwindigkeit oder die Richtung derselben, oder beide Stücke zugleich geändert würden: so kan man daraus den sichern Schluß ziehen, daß eine solche Veränderung von einer fremden Kraft verursacht worden. Da nun in der Welt alle Augenblicke dergleichen Veränderungen vorgehen, und darinnen weder eine beständige Ruhe, noch eine gleichförmige Bewegung angetroffen wird, so wird hier billig die Frage aufgeworfen, woher alle diejenigen Kräfte kommen, von welchen diese Veränderungen entspringen.

Um diese Frage zu beantworten, haben verschiedene Weltweise behauptet, daß die Körper noch außer dem Vermögen in ihrem Zustande unverändert zu verharren, mit einer Kraft begabet seyn, ihren Zustand immerfort zu verändern. Ausser dem aber, daß auf diese Weise der Materie zwey ganz widerwärtige Eigenschaften zugeschrieben werden, so wird man dadurch auch nicht einmahl in Stand gesetzt, die geringste Veränderung, welche in der Welt vorgehet, zu erklären. Die Natur hat auch zu diesem Ende keine besondern Kräfte nöthig, sondern wie dieselbe in allen ihren Wirkungen beständig den einfältigsten und kürzesten Weg erwehlet, also bedienet sich dieselbe zu Hervorbringung aller Veränderungen keiner andern Kräfte, als eben des vorhergemeldten Vermögens, womit alle Körper begabt sind, in ihrem Zustande zu verharren.

Dieses scheint zwar dem ersten Anblick nach etwas widersprechendes in sich zu enthalten, indem man schwerlich begreifen kan, wie eine Kraft, welche die Körper in ihrem Zustande zu erhalten bestimmt ist, zugleich auch alle Veränderungen hervor bringen könne. Wenn man aber diese Sache in reifere Erwägung zieht, so sieht man bald, daß diese wesentliche Eigenschaft aller Körper, wodurch sie sich in ihrem Zustand zu erhalten bemühet sind, nicht nur vermögend seyn könne, Veränderungen zu verursachen, sondern daß auch in der That alle Veränderungen, welche wir zu erklären im Stande sind, von nichts anders, als dieser allgemeinen Eigenschaft herrühren.

Um diese Wirkung begreiflich zu machen, so darf man sich nur zwey Körper vorstellen, deren einer stille steht, der andere aber mit einem gewissen Grad der Geschwindigkeit auf den erstern loßgehet. Wir wollen um der Deutlichkeit willen den erstern Körper, welcher stille steht, mit dem Buchstaben *A*, den andern aber, welcher gegen diesen läuft, mit dem Buchstaben *B* bemerken. Der erstere Körper *A* hat nun ein Vermögen, in seiner Ruhe unverändert zu verbleiben, der andere aber *B* hat ein



Vermögen, gleichfalls in seinem Zustande zu verharren, das ist, mit seiner Geschwindigkeit nach seiner Richtung oder nach einer geraden Linie fortzugehen. Wenn nun der Körper *B* wirklich zu dem Körper *A* kömmt, so sieht man wohl, daß keiner von beyden in seinem Zustande verbleiben könne, ohne daß zugleich der Zustand des andern sehr merklich verändert werde. Denn sollte der Körper *A* in seinem Stillstande verharren; weil der andere durch diesen nicht durchdringen kann, so müßte derselbe entweder auch plötzlich stille stehen, oder zurück prellen, oder seitwärts abweichen; in allen Fällen aber würde sein voriger Zustand gar sehr verändert. Sollte aber der Körper *B* seine Bewegung unverändert fortsetzen, so müste derselbe den Körper *A* vor sich her stossen; und folglich würde der Körper *A* aus seinem vorigen Zustande gebracht werden. Da es nun nicht möglich ist, daß diese beyden Körper zugleich in ihrem vorigen Zustande verharren, und auch keine Ursache vorhanden ist, warum nur vielmehr in einem, als dem andern allein eine Veränderung vorgehen sollte, so folget nothwendig, daß beyde Körper zugleich eine Veränderung ihres Zustandes leiden müssen. Der Körper *A* wird nemlich in Bewegung gesetzt, die Geschwindigkeit aber des Körpers *B* vermindert werden. Weil nun die Ursache, wodurch ein Körper in seinem Zustand verändert wird, eine Kraft genennet zu werden pflegt, so ist klar, daß die Kräfte, wodurch in dem erzählten Fall der Zustand beyder Körper *A* und *B* verändert wird, in nichts anders bestehen, als in dem Vermögen, welches ein jeder Körper hat, in seinem Zustande zu verharren. Also ist das Vermögen, welches der Körper *A* hat, in seinem Zustande zu verharren, die Ursache und folglich die Kraft, welche in dem Zustand des Körpers *B* die Veränderung hervor bringt; und hinwiedrum ist das Vermögen, womit der Körper *B* begabet ist, in seinem Zustande zu verbleiben, die Ursache und also die Kraft, durch welche in dem Körper *A* eine Veränderung vorgehet.

So lange also ein Körper seinen Zustand unverändert erhalten, das ist entweder in seinem Ruhestand verbleiben, oder seine Bewegung unverrückt fortsetzen kann, so äußert sich darinne nichts anders, als das Vermögen in seinem Zustande zu verharren; so bald aber dieser Körper einen Widerstand antrifft, welcher verhindert, daß derselbe in seinem Zustand nicht verbleiben kann, so widersteht eben dieses Vermögen der Veränderung, so darinne vorgehen soll, und übet eine Kraft aus, die Hindernisse aus dem Weg zu räumen. Es entstehen demnach alle Kräfte, welche sich in der Welt befinden, aus nichts anders, als aus dem Vermögen, womit alle Körper begabet sind, in ihrem Zustand zu verharren, und welches sich in eine Kraft verwandelt, so bald der Zustand zweyer

oder mehrerer Körper dergestalt gegen einander läuft, daß keiner beybehalten werden kann, ohne zugleich die übrigen zu verändern. Weil nun dergleichen Zufälle in der Welt unaufhörlich vorkommen, da entweder auf einen ruhenden Körper andere stossen, oder verschiedene in Bewegung gesetzte Körper einander begegnen, so äussern sich auch beständig solche Kräfte, wodurch der Zustand eines jeglichen Körpers verändert wird. Und hieraus sieht man, daß alle Veränderungen, welche in der Welt geschehen, bloß allein von dem Vermögen, welches alle Körper haben, in ihrem Zustand unverändert zu verharren, hervorgebracht werden können. Wenn man diese Sache genauer untersucht, so wird man in der That finden, daß der Zustand eines jeglichen Körpers nur in so ferne verändert wird, als derselbe andere Körper antrifft, welche ihren Zustand nicht erhalten können, ohne daß in demselben eine Veränderung vorgehe. Wie groß nun in einem jeglichen Fall, wenn zwey Körper dergestalt zusammen kommen, daß nicht beyde in ihrem Zustand verbleiben können, die Veränderung sey, welche in einem jeden ins besondere vorgeht, wird in der Mechanic bestimmt.

Auf diesem Grunde beruhet nun die ganze Lehre von dem Widerstand der Körper, welche sich in einer flüssigen Materie, als Wasser oder Luft, bewegen. Denn wenn ein Körper in einer solchen flüssigen Materie seine Bewegung unverrückt fortsetzte, so müste nothwendig eine ziemliche Menge Theilchen, woraus die flüssige Materie besteht, fortgestossen und in Bewegung gebracht werden. Da nun diese Theilchen gleichfalls mit einem Vermögen, in ihrem Zustande zu verharren, begabet sind, so widerstehen sie einer solchen Aenderung: und dahero muß in dem Zustande der Körper selbst auch eine Veränderung vorgehen, welche um so viel grösser seyn wird, je mehr Theilchen der flüssigen Materie in Bewegung gesetzt werden müssen, und je grösser die Veränderung ist, so darinne vorgehen muß. Wenn also die Veränderung, welche in der flüssigen Materie verursacht wird, bekannt wäre, so könnte man nach den Grundsätzen der Mechanic ausrechnen, wie groß die Veränderung, welche in dem Körper selbst vorgeht, seyn müßte. Hierinne besteht nun der Widerstand, welchen ein bewegter Körper in einer flüssigen Materie leidet, und muß folglich aus den mechanischen Grundsätzen bestimmt werden.

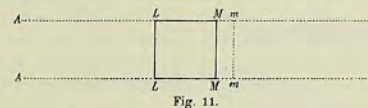


ZWEYTE ANMERKUNG

Der Autor betrachtet erstlich eine solche flüssige Materie, deren Theilchen dergestalt von einander abgesondert sind, daß ein jegliches davon die ihm eingedruckte Bewegung einige Zeit unverändert fortsetzen kann, ohne von den umliegenden darinnen gestört zu werden. Ob nun gleich dieser Begriff der Natur aller flüssigen Materien entgegen ist, und in der ganzen Welt keine solche Materie gefunden wird, so dienet derselbe doch den Grund zur Erkenntnis des Widerstandes zu legen. Wenn sich nun ein Körper in einer solchen flüssigen Materie bewegt, so stösset derselbe beständig auf neue Theilchen; weil diejenigen, welche schon vorher den Stoß ausgehalten, die ihnen eingedruckte Bewegung fortsetzen, ohne den Zustand der übrigen zu verrücken: und wenn diese flüssige Materie für sich still zu stehen angenommen wird, so befinden sich alle Theilchen derselben, worauf der Körper in einem jeden Augenblick stößt, in einer vollkommenen Ruhe. Die Berechnung des Widerstandes, welchen der Körper in dieser flüssigen Materie leidet, beruhet also darauf, daß man bestimme, wie viel ein Körper in einem jeglichen Augenblick von seiner Bewegung verliere, wenn derselbe beständig auf eine gewisse Anzahl kleiner Theilchen stößt, welche stille stehen, und deren Dichte in Ansehung des Körpers bekannt ist. Dieses läßt sich dahero durch die bekannten Regeln, nach welchen die Bewegung zweyer aneinander stossenden Körper verändert wird, ausmachen, wenn man nur vorher weiß, ob diese Theilchen, nebst dem Körper, elastisch sind, und nach dem Stoß von einander prallen, oder nicht, in welchem Fall dieselben nach dem Stoß beisammen bleiben. Wir wollen hier diese beyden Fälle, als von welchen in dem Widerstande ein sehr grosser Unterscheid entsteht, ins besondere in Betrachtung ziehen.

Es soll also für das erste keine elastische Kraft vorhanden seyn, dergestalt, daß die Theilchen, welche von dem Körper schon in Bewegung gesetzt worden, vor demselben hergehen, dennoch aber in den übrigen keine Veränderung verursachen. Damit man nun, um sich dieses deutlicher vorzustellen, keine Schwierigkeiten finde, so darf man sich nur einbilden, daß diejenigen Theilchen, welche schon den Stoß vom Körper ausgehalten, plötzlich verschwinden oder zernichtet werden, damit in dem Zustand der übrigen keine Veränderung vorgehe, ehe der Körper gleichfalls an dieselben stößt. Denn weil der ganze Begriff einer solchen flüssigen Materie bloß allein in der Einbildungskraft besteht, so steht es uns frey auch noch diese Bedingung hin-

zusetzen: als wodurch der Endzweck, weswegen man eine solche flüssige Materie betrachtet, um so viel leichter erhalten wird. Wir wollen also setzen (Fig. 11), daß der Vordertheil des Körpers MM , mit welchem derselbe auf



die Theilchen der flüssigen Materie stößt, flach, und zugleich auf die Richtung AM , nach welcher der Körper fortgeheth, perpendicular sey. Es sey der Inhalt dieser vordern Fläche $MM = cc$, die Länge des Körpers, welcher als ein Cylinder betrachtet werden kan, $LM = a$; und die Geschwindigkeit, womit derselbe anjetzt wirklich fortgeheth, soll durch Vv ausgedrückt werden, oder v bedeutet die Höhe, aus welcher ein fallender Körper eine gleiche Geschwindigkeit erlangt. Die Dichte des Körpers werde ferner durch m , und die Dichte der flüssigen Materie durch n ausgedrückt. Hieraus wird die Massa des Körpers $= macc$. Indem nun der Körper durch den unendlich kleinen Raum $Mm = dx$ fortrücket, so muß derselbe die Theilchen der flüssigen Materie, welche in diesem Raum $MmmM$ enthalten sind, fortstossen; und da die Massa dieser Theilchen ist $= nccdx$, so kommt es hier auf die Auflösung dieser Frage an: um wie viel die Geschwindigkeit Vv eines Körpers, dessen Massa $= macc$, vermindert werde, wenn derselbe auf einen andern still stehenden Körper, dessen Massa ist $= nccdx$, stößt. Vor dem Stoß ist also die Größe der Bewegung

$$= maccVv,$$

und da nach dem Stoß die Geschwindigkeit des Körpers ist

$$V(v + dv) = Vv + \frac{dv}{2Vv},$$

welche derselbe mit den Theilchen der flüssigen Materie $nccdx$, so inzwischen fortgestossen worden, gemein hat, so wird die Grösse der Bewegung beyder Körper zugleich nach dem Stoß seyn

$$= (macc + nccdx) \left(Vv + \frac{dv}{2Vv} \right),$$



welche nach den Gesetzen der Mechanic der vorigen Grösse der Bewegung $maccVv$ gleich seyn muß. Hieraus entspringt also diese Vergleichung

$$maccVv = (macc + nccd x) \left(Vv + \frac{dv}{2Vv} \right),$$

welche in diese verwandelt wird:

$$0 = \frac{maccdv}{2Vv} + nccd x Vv,$$

woraus man bekommt

$$dv = - \frac{2ncev}{macc} dx.$$

Hieraus erhellet, daß die Bewegung des Körpers eben so vermindert werde, als wenn das Gewicht eines aus der flüssigen Materie bestehenden Cylinders dagegen druckte, dessen Basis oder Dicke $= cc$, und dessen Höhe $= 2v$; denn die Massa, und folglich das Gewicht eines solchen Cylinders, wird seyn $= 2ncev$, und da die Massa des Körpers ist $macc$, so muß die Bewegung desselben, indem derselbe durch den Weg dx fortrücket, um so viel vermindert werden, als diese Aequation

$$dv = - \frac{2ncev}{macc} dx$$

anzeigt, welche mit der obigen vollkommen überein kommt. Wenn sich also ein solcher Körper in einer solchen flüssigen Materie bewegt, so ist die Kraft des Widerstands gleich dem Gewicht eines aus dieser flüssigen Materie bestehenden Cylinders, dessen Basis mit der Oberfläche des Körpers $MM = cc$ und dessen Höhe gleich ist der doppelten Höhe $2v$, wodurch die Geschwindigkeit des Körpers ausgedrückt wird. Da nun die Höhe v dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional ist, so siehet man, daß der Widerstand einer solchen flüssigen Materie den Quadraten der Geschwindigkeit der darinn bewegten Körper proportional sey; wenn nemlich die vordere Fläche des Körpers MM perpendicular auf die Theilchen der flüssigen Materie stösset.

Solchergestalt verhält sich also der Widerstand einer solchen flüssigen Materie, wenn keine Elasticität vorhanden ist, und folglich keine Zurückprallung nach dem Stoß geschieht. Wenn aber so wohl der Körper, als die Theilchen der flüssigen Materie, mit einer vollkommenen Elasticität begabet sind, so muß die im vorigen Fall entstehende Wirkung nach den Gesetzen der aneinander stossenden elastischen Körper berechnet werden. In diesem

Fall prellen nun die Theilchen der flüssigen Materie von dem Körper zurück, und bekommen folglich einen grösseren Grad der Geschwindigkeit, als der Körper selbst hat. Dahero sind in diesem Fall zwey Sachen unbekannt, erstlich die Geschwindigkeit des Körpers, und denn auch die Geschwindigkeit der Theilchen der flüssigen Materie nach dem Stoß. Um diese beyden Sachen zu bestimmen, so muß mit dem vorher gebrauchten Grundsatz, kraft welchem einerley Quantität der Bewegung vor und nach dem Stosse erhalten wird, noch dieser andere Grundsatz verknüpft werden, daß bey vollkommenen elastischen Körpern auch einerley sogenannte lebendige Kraft vor und nach dem Stoß erhalten werde. Die lebendige Kraft eines Körpers aber wird gefunden, wenn man die Massam durch das Quadrat der Geschwindigkeit multipliciret. Wenn wir also, wie vorher, die Geschwindigkeit des Körpers, dessen Massa ist $= macc$, vor dem Stoß durch Vv , nach dem Stoß aber durch

$$V(v + dv) = Vv + \frac{dv}{2Vv}$$

ausdrucken, die Geschwindigkeit der flüssigen Materie hingegen, deren Massa ist $= nccd x$, auf welche der Körper stößt, indem derselbe durch den Raum $Mm = dx$ fortgehet, nach dem Stoß durch Vu angezeigt wird, als welche vor dem Stoß $= 0$ gewesen: so wird die Grösse der Bewegung vor dem Stoß seyn

$$= maccVv,$$

nach dem Stoß aber

$$= macc \left(Vv + \frac{dv}{2Vv} \right) + nccd x Vu.$$

Woraus diese Gleichheit nach dem erstern Grund-Satz entspringet:

$$0 = \frac{maccdv}{2Vv} + nccd x Vu.$$

Die lebendige Kraft vor dem Stosse wird seyn

$$= maccv,$$

nach dem Stoß aber

$$= macc(v + dv) + nccd x,$$

aus deren Vergleichung man erhält

$$0 = maccdv + nccd x.$$



Da nun aus der erstern Aequation gefunden wird

$$\sqrt{u} = \frac{-madv}{2ndx\sqrt{v}}$$

und also

$$u = \frac{m^2 a^2 dv^2}{4n^2 dx^2 v},$$

die andere Aequation aber giebt

$$u = \frac{-madv}{ndx},$$

so bekommt man

$$\frac{madv}{4nvdx} = -1 \text{ oder } dv = \frac{-4ncevdx}{macc}.$$

Dahero ist in diesem Fall der Widerstand eben so groß, als wenn gegen den Körper das Gewicht eines aus der flüssigen Materie bestehenden Cylinders druckte, dessen Basis der Dicke des Körpers $MM = cc$ gleich ist, und dessen Höhe viemahl so groß, als diejenige v , wodurch die Geschwindigkeit des Körpers ausgedrückt wird. Da nun in dem vorigen Fall die Höhe des entgegen druckenden Cylinders nur $= 2v$ gefunden worden, so sieht man, daß in dem gegenwärtigen Fall wegen der Elasticität der Widerstand zweymahl so groß sey, als in dem vorigen, wo keine Elasticität vorhanden gewesen. In beyden Fällen aber, wenn sich eben derselbe Körper mit verschiedenen Graden der Geschwindigkeit in eben derselben flüssigen Materie bewegt, so ist der Widerstand immer den Quadraten der Geschwindigkeit proportional. Wenn aber die Dichtigkeit der flüssigen Materie grösser oder kleiner wird: so wird auch der Widerstand um eben so viel grösser oder kleiner. Weil nun auf diese Art die Veränderung der Geschwindigkeit des Körpers leicht gefunden wird, so kann auch daher die ganze Bewegung desselben, so wie selbige nach und nach abnimmt, ohne Schwierigkeit bestimmt werden.

Wir haben aber hier nur den Fall betrachtet, wenn der vordere Theil des Körpers, welcher auf die Theilchen der flüssigen Materie stößt, nicht nur eine Fläche, sondern auch auf die Direction der Bewegung perpendicular ist. In diesem Fall ist die Gewalt des Widerstands der Bewegung des Körpers schnurstracks entgegen, und vermindert folglich nur die Geschwindigkeit derselben, ohne seine Direction zu verändern. Dahero ein solcher Körper seine Bewegung nach einer graden Linie fortsetzt, und sein Zustand nur allein in Ansehung der Geschwindigkeit verändert wird. Es ist also noch übrig, daß

wir den Widerstand bestimmen, wenn die vordere Fläche des Körpers mit seiner Direction einen schiefen Winkel macht, als woraus nachgehends auch der Widerstand für alle so wohl gerade, als krummlinichte Figuren, ausgefunden werden kann.

Wir wollen also setzen, die Figur des Körpers sey also beschaffen, wie die Fig. 12 ausweist, dergestalt, daß der Körper $LLMM$, welcher sich nach

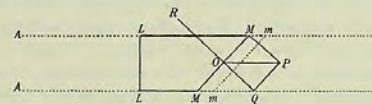


Fig. 12.

der Direction OP in der flüssigen Materie bewegt, mit seiner schiefen Fläche MM auf die Theilchen der flüssigen Materie stösse. Indem also dieser Körper durch den unendlich kleinen Raum $Mm = dx$ fortgeht, so muß derselbe die in dem Raum $MMmm$ enthaltene flüssige Materie fortstossen. Wenn nun wie vorher die vordere Fläche des Körpers $MM = cc$ gesetzt wird, so ist die Menge der flüssigen Materien nicht mehr wie vorher $= cc dx$: sondern dieselbe muß nach der Verhältniß des Radii zum Sinu des Winkels MOP , unter welchem der Vordertheil des Körpers auf die flüssige Materie stösset, vermindert werden. Wenn also der Radius $= 1$, und der Sinus des Winkels $MOP = q$ gesetzt wird, so wird die Menge der flüssigen Materie, welche in Bewegung gesetzt werden muß, indem der Körper durch den Weg $Mm = dx$ fortrücket, durch $ccq dx$ ausgedrückt, und müßte der vorher gefundene Widerstand noch mit q multipliciret werden, wenn nemlich sonst die Wirkung einerley wäre. Allein da der Körper nicht gerade, sondern schief auf diese flüssige Materie stösset, so ist auch der Widerstand nicht so groß, als in dem vorhergehenden Fall, und muß folglich noch aus diesem Grunde nach den Regeln der Mechanic durch q multipliciret werden. Dahero verhält sich der Widerstand der Fläche cc , wenn dieselbe perpendicular auf die flüssige Materie stößt, zu dem Widerstand, wenn eben dieselbe unter einem schiefen Winkel, dessen Sinus $= q$, fortgeht, wie das Quadrat des Radii 1 zum Quadrat des Sinus qq . Da aber ferner die flüssige Materie nur in so fern widersteht, als die Bewegung des Körpers gerade auf MM gerichtet ist, so ist die Direction der widerstehenden Kraft perpendicular auf die Fläche MM . Wenn also die Ge-



schwindigkeit des Körpers durch die Höhe v ausgedruckt wird, so ist die widerstehende Kraft, deren Direction OR perpendicular ist auf MM , gleich dem Gewicht eines aus eben dieser flüssigen Materie bestehenden Cylinders, dessen Basis $= cc$, und die Höhe entweder $= 2qqv$ oder $= 4qqv$, je nach dem sich der Stoß nach den Regeln der nicht elastischen, oder vollkommen elastischen Körper richtet. Weil nun in dem gegenwärtigen Fall der Körper nach der Linie OR , welche auf die vordere Fläche MM perpendicular ist, zurück gestossen wird, diese Direction aber mit der Direction der Bewegung einen schiefen Winkel macht, so wird dadurch nicht nur die Geschwindigkeit des Körpers vermindert, sondern es wird auch seine Direction verändert. Denn wenn wir diese Kraft, welche entweder durch $2nccqqv$ oder durch $4nccqqv$ ausgedruckt wird, wenn nemlich wie vorher n die Dichte der flüssigen Materie anzeigt, nach zwey Directionen auflösen, davon eine der Direction der Bewegung gerade entgegen gesetzt, die andere aber auf dieselbe perpendicular ist, so wird die erstere

$$= \frac{2}{4} nccq^2 v,$$

die letztere aber

$$= \frac{2}{4} nccqqv \sqrt{1 - qq}.$$

Durch jene wird die Geschwindigkeit des Körpers vermindert, durch diese aber, die Direction der Bewegung verändert. Wir wollen für die zwey Zahlen $\frac{2}{4}$ den Buchstaben μ setzen, welcher folglich, wenn die Körper keine Elasticität haben, durch 2, wenn aber eine vollkommene Elasticität vorhanden ist, durch 4 ausgedruckt wird, und P soll die Massam, oder das Gewicht des bewegten Körpers anzeigen. Hieraus ist nun klar, daß, indem der Körper durch $Mm = dx$ fortgethet, erstlich seine Geschwindigkeit V dergestalt vermindert werde, daß

$$dv = -\frac{\mu nccq^2 v dx}{P}.$$

Hernach wird auch inzwischen die Direction dergestalt verändert werden, daß der Körper nach der Krümmung eines Zirkelbogens fortgehen wird, wovon der Radius

$$= \frac{2P}{\mu nccqq \sqrt{1 - qq}}.$$

So bald aber der Körper seine Direction verändert, so wird auch die Schiefe, womit derselbe auf die Theilchen der flüssigen Materie stößt, verändert, und

bekömmt folglich der Sinus q einen anderen Werth. Ueber dieses wird sich auch der Körper selbst umkehren, und also bald mit einem andern Theil seiner Oberfläche an die Theilchen der flüssigen Materie anstossen. Solchergestalt, da der Widerstand alle Augenblicke verändert wird, so wird der Körper daher auch eine sehr verwirrte Bewegung bekommen.

Aus dem Widerstand, welchen eine schief bewegte Fläche in einer flüssigen Materie leidet, kann nun der Widerstand eines jeglichen Körpers, was für eine Figur derselbe immer haben mag, berechnet werden. Allhier sind aber insonderheit die runden Körper, welche sich nach der Direction ihrer Axe bewegen, vor andern merkwürdig, weil in denselben nur allein die Geschwindigkeit vermindert wird, die Direction aber unverändert bleibt. Denn da ein solcher Körper rings herum gleich stark auf alle Seiten getrieben wird, so zernichten sich alle diese Kräfte unter einander, daß daher gar keine Wirkung in der Bewegung des Körpers entstehen kann.

Ein runder Körper entstehet nun, wenn eine beliebige Figur um eine Axe herum gedreht wird. Es sey dahero (Fig. 13) ADB die Figur, aus deren Herumdrehung um die Linie AB der Körper entsteht, dessen Widerstand wir hier untersuchen wollen, wenn sich derselbe nach der Direction seiner Axe BAE in einer flüssigen Materie bewegt. Man siehet also leicht, daß wenn die Figur ADB ein halber Zirkul ist, der daher entstehende Körper eine Kugel seyn werde. Wir wollen aber erstlich die Rechnung insgemein auf eine jegliche krumme Linie, welche für ADB angenommen werden kan, richten. Vor allen Dingen muß man nun denjenigen Theil des Umfangs, welcher auf die flüssige Materie stößt, von dem übrigen Theil wohl unterscheiden. Dieser Theil des Umfangs, auf welchen der Widerstand geschieht, entsteht aber aus dem Theil AMD der angenommenen krummen Linie, und erstreckt sich von A bis D , wo sich der Umfang rückwärts zu schwingen anfängt, das ist gemeiniglich, wo die Tangens der Axe AB parallel wird. Man nehme nun nach Belieben eine Perpendicular-Linie MP auf die Axe AB , und setze $AP = x$, $PM = y$; ferner sey mp der vorigen MP unendlich nahe, und zugleich parallel, und ziehe Mn der Axe parallel, so wird

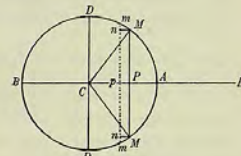


Fig. 13.



$$Pp = Mn - dx, \quad mn = dy \quad \text{und} \quad Mm = V(dx^2 + dy^2);$$

man setze aber Kürze halber

$$Mm = ds.$$

Durch die Herumdrehung dieses Linichens Mm um die Axe AB entsteht ein Ring, dessen äussere Fläche seyn wird

$$= 2\pi y ds,$$

wenn $1:\pi$ die Verhältniß andeutet zwischen dem Diameter eines Zirkuls und seinem Umkreiß. Dieser Ring stößt nun allenthalben auf die Theilchen der flüssigen Materie gleich schief auf, nemlich unter einem Winkel $= m Mn$, dessen Sinus folglich ist $= \frac{dy}{ds}$, und Cosinus $= \frac{dx}{ds}$. Wenn also die Geschwindigkeit des Körpers durch Vv , und die Dichte der flüssigen Materie durch n ausgedrückt wird: so ist der Widerstand des obgedachten Rings (wenn man nemlich $2\pi y ds$ für cc und $\frac{dy}{ds}$ für q setzt)

$$= \mu n \cdot 2\pi y ds \cdot \frac{dy^2}{ds^2} \cdot v = \frac{2\mu\pi n v y dy^2}{ds},$$

dessen Direction nach der Linie MC , so auf Mm perpendicular ist, gerichtet ist. Hieraus erwächst also der Widerstand nach der Direction der Bewegung

$$= \frac{2\mu\pi n v y dy^3}{ds^2};$$

und das Integrale hiervon

$$2\mu\pi n v \int \frac{y dy^3}{ds^2}$$

giebt den ganzen Widerstand, welchen der Theil des Umfangs, so aus dem Bogen AM erzeugt wird, leidet: und wenn man das Punkt M bis in D fortrückt, so kommt der gesuchte Widerstand heraus, wodurch die Bewegung des Körpers vermindert wird.

Um nun hieraus den Widerstand einer Kugel zu finden, so darf man nur für die krumme Linie AMD den vierten Theil eines Zirkuls setzen. Es sey der Radius der Kugel $AC = CD = a$; so wird $CP = V(aa - yy)$ und

$$Mm = ds = \frac{ady}{V(aa - yy)}.$$

Folglich ist

$$ds^2 = \frac{aady^2}{aa - yy},$$

und der oben gefundene Widerstand wird

$$- 2\mu\pi n v \int \frac{y dy(aa - yy)}{aa} = 2\mu\pi n v \left(\frac{1}{2} yy - \frac{y^3}{4aa} \right).$$

Man setze nun, um den völligen Widerstand zu finden, $y = a$, so bekommt man

$$2\mu\pi n v \cdot \frac{1}{4} aa = \frac{1}{2} \mu\pi n a a v.$$

Nun aber drückt πaa den Inhalt eines grossen Zirkuls dieser Kugel, oder die Dicke derselben aus, für welchen wenn man setzt cc , so kommt der Widerstand

$$= \frac{1}{2} \mu n c c v.$$

Wenn aber ein solcher Zirkul, oder ein gleich dicker Cylinder, sich seiner Länge nach in eben dieser flüssigen Materie bewegte, so würde sein Widerstand seyn

$$= \mu n c c v;$$

woraus erhellet, daß der Widerstand einer Kugel nur halb so groß ist, als der Widerstand eines gleich dicken Cylinders, so sich mit einer gleichen Geschwindigkeit in eben derselben flüssigen Materie seiner Länge nach bewegte

DRITTE ANMERKUNG

Eine solche flüssige Materie aber, dergleichen wir hier betrachtet haben, findet sich nicht nur nicht in der Welt, sondern ist auch nicht einmahl möglich: dahero auch der Widerstand, welchen ein Körper in solchen flüssigen Materien, die in der Welt wirklich angetroffen werden, findet, anders beschaffen seyn muß, als in der vorigen Anmerkung gefunden worden. Wir wollen unsere Betrachtung hauptsächlich auf die Luft richten, als deren Widerstand allhier gesucht wird. Hierbey ist nun vor allen Dingen zu merken, daß die Luft nicht nur eine flüssige Materie ist, sondern sich auch



in einem zusammen gedruckten Zustand befindet, dergestalt, daß ein jeglicher Körper, so mit Luft umgeben ist, rings herum von der Luft zusammen gedruckt wird; weil aber diese zusammendruckende Kraft allenthalben gleich groß ist, so wird der Körper davon nicht in Bewegung gesetzt, wenn derselbe vorher stille gestanden. Wenn aber der Körper schon eine Bewegung hat, so leidet derselbe nicht nur die vorige zusammendruckende Kraft, sondern er ist noch über dieses der Kraft, welche aus dem Stoß desselben auf die Theilchen der Luft entsteht, ausgesetzt. Wenn zwar die vorigen Kräfte sich im Gleichgewicht halten, so kommt die Verminderung der Bewegung ganz allein auf die letztere an; welches geschieht, wenn die Bewegung des Körpers nicht allzu schnell ist. Wenn sich aber der Körper sehr geschwind bewegt, so wird die Luft um denselben in eine merkliche Bewegung gesetzt, wodurch der Druck derselben ziemlich verändert, und rings um den Körper herum nicht mehr einerley ist. In diesem Fall wird also der Zustand des Körpers nicht nur von der widerstehenden Kraft der Luft, sondern auch von dem ungleichen Druck derselben, verändert. Insonderheit hat man hier auf den hintern Theil des Körpers zu sehen, welcher, so lange der Körper still steht, von dem Druck der Luft so stark vorwärts, als der vordere Theil hinterwärts, gedruckt wird. Wenn sich aber der Körper so geschwind bewegt, daß die Luft demselben nicht einmahl zu folgen vermögend ist, so kann auf den hintern Theil desselben gar kein Druck geschehen: dahero in diesem Fall der Druck von vornen nicht aufgehoben wird, und also den Widerstand sehr merklich vermehret. Hieraus sieht man also leicht, daß wenn gleich die Geschwindigkeit des Körpers kleiner ist, der Druck von hinten dennoch kleiner seyn müsse, als von vornen: weswegen in diesem Fall die Bewegung des Körpers nicht nur von dem eigentlichen Widerstand, so von dem Stoß auf die Theilchen der Luft herrühret, vermindert wird, sondern auch von dem Druck der Luft, welchen dieselbe auf das Vordertheil ausübet, in so fern derselbe von dem Gegen-Druck von hinten nicht im Gleichgewicht gehalten wird.

Hernach kommt bey der Luft noch ein besonderer Umstand zu betrachten vor, welcher sich bey dem Wasser und anderen flüssigen Körpern nicht ereignet. Dieser besteht darinne, daß sich die Luft so wohl in einen kleineren Raum zusammen drücken, als in einen größeren ausdehnen läßt, und dahero in Ansehung ihrer Dichte sehr verschieden seyn kann. Wenn sich also ein Körper sehr schnell durch die Luft bewegt, und dieselbe vor sich her wegstößt, so ist klar, daß die Luft vor dem Körper immer etwas

dichter, hinter demselben aber etwas dünner seyn müsse; und um dieser Ursache willen findet der Körper von vornen so wohl einen stärkern Gegendruck, als auch einen stärkeren Widerstand: hingegen aber wird der Druck von hinten etwas schwächer. Da nun alle diese Umstände die Geschwindigkeit des Körpers vermindern, und um so viel beträchtlicher werden, je schneller sich der Körper bewegt, so wird dadurch die Meynung des Verfassers auf das nachdrücklichste bekräftiget, daß der Widerstand der Luft auf sehr geschwinde Bewegungen weit grösser sey, als alle bißherigen Theorien anzeigen.

Aus diesem allem erhellet also, daß ein jeder Körper, so sich in der Luft bewegt, einer doppelten Kraft ausgesetzt sey, wovon eine aus dem Stoß desselben gegen die Theilchen der Luft entspringet, und den eigentlichen Widerstand oder die Resistenz ausmachet; die andere Kraft aber kommt von dem ungleichen Druck der Luft auf den Körper her. Ob nun gleich diese beyden Kräfte zusammen in Erwägung gezogen werden müssen, wenn man die Bewegung des Körpers bestimmen will, so muß doch die Grösse einer jeden, da dieselben aus ganz verschiedenen Ursachen herrühren, ins besondere untersucht werden.

Wir wollen zu diesem Ende erstlich die erstere von diesen beiden Kräften betrachten, welche aus dem Stosse des Körpers auf die Theilchen der Luft entsteht. Aus diesem Grunde leidet der Körper in so fern einen Abgang an seiner Geschwindigkeit, als in den umliegenden Theilen der Luft eine Bewegung hervor gebracht werden muß: denn so viel Kraft zu dieser Bewegung in der Luft erfordert wird, eben so viel Kraft wücket hinwiederum auf den Körper zurück. Hier sieht man nun leicht, daß dieser Widerstand der Luft kleiner seyn müsse, als in beiden Fällen der vorigen Anmerkung. Im letzteren Fall, da die Theilchen der flüssigen Materie zurück springen, war der Widerstand dem Gewicht eines Cylinders gleich, dessen Höhe $= 4v$, im erstern aber, da die Theilchen mit dem Körper einerley Geschwindigkeit bekommen, war der Widerstand gleich dem Gewichte eines Cylinders, dessen Höhe $= 2v$. Wenn aber ein Körper auf die Theilchen der Luft stößt, so springen dieselben weder von dem Körper zurück, noch werden dieselben vor dem Körper her getrieben; sondern sie weichen seitwärts aus, und erhalten keine merkliche Bewegung, wenn sich der Körper nicht sehr schnell bewegt. Weil also den Theilchen der Luft eine weit kleinere Bewegung mitgetheilt wird, als in den beyden vorher erklärten Fällen, so muß auch der Widerstand kleiner seyn, als ein Cylinder, dessen Höhe entweder $4v$, oder nur $2v$; und um dieser Ursache willen hat man angenommen, daß der Widerstand



der Luft, welchen eine Fläche $= cc$ leidet, so sich mit einer Geschwindigkeit $= Vv$ perpendicular gegen die Luft bewegt, dem Gewicht einer Luft-Säule gleiche, deren Basis $= cc$, und deren Höhe $= v$. Man hat auch durch die Erfahrung befunden, daß ein Körper in dem Wasser einen gleichen Widerstand leide, welcher durch das Gewicht einer Wasser-Säule deren Höhe $= v$, ausgedrückt werde: und da die Theilchen des Wassers und der Luft einem darinn bewegten Körper auf eine gleiche Art ausweichen, so hat man geschlossen, daß der Widerstand auf eine ähnliche Art in diesen beyden flüssigen Materialien beschaffen sey.

Um dieses deutlicher darzuthun, so ist zu merken, daß der Widerstand, welchen ein Körper, der mit einer gegebenen Geschwindigkeit sich in einer stillstehenden flüssigen Materie bewegt, antrifft, beständig derjenigen Kraft gleich seyn müsse, welche eben derselbe Körper leiden würde, wenn derselbe stille stünde, hingegen aber die flüssige Materie mit einer gleichen Geschwindigkeit gegen denselben bewegt würde. Man stelle sich nun ein Gefäß voll Wasser vor, an dessen Boden ein Loch befindlich, welches mit einem Finger zugehalten wird. In diesem Fall wird der Finger von einer Kraft gedrückt werden, welche dem Gewicht einer Wasser-Säule gleich ist, deren Basis der Weite des Lochs, und deren Höhe der Höhe des Wassers in dem Gefäße gleich ist. Wenn man nun den Finger vor dem Loch etwas zurück zieht, und das Wasser darauf sprützen läßt, so scheint der Wahrheit gemäß zu seyn, daß der Finger eine eben so grosse Kraft, als vorhin ausstehen werde. Das Wasser sprüztet aber mit einer solchen Geschwindigkeit heraus, welche durch die Höhe desselben in dem Gefäße ausgedrückt wird: und also ist die Kraft des auf den Finger heraus sprützenden Wassers gleich dem Gewichte einer Wasser-Säule, deren Basis gleich dem Loch, und deren Höhe mit der Höhe, wodurch die Geschwindigkeit ausgedrückt wird, einerley ist. Auf diese Art wird also die vorher erwähnte Meynung bekräftiget, daß der Widerstand so wohl der Luft, als des Wassers, dem Gewicht eines Cylinders gleiche, dessen Höhe der Höhe v , wodurch die Geschwindigkeit ausgedrückt wird, selbst gleich sey.

Um aber dieses aus den vorher fest gesetzten Gründen, nach welchen der Widerstand derjenigen Kraft gleich seyn muß, welche zur Hervorbringung der in der flüssigen Materie entstehenden Bewegung erfordert wird, deutlicher auszuführen, so wollen wir betrachten, daß ein Körper in CD (Fig. 14) still stehe, und die flüssige Materie auf denselben nach der Direction AB mit einer Geschwindigkeit $= Vb$, oder welche durch den Fall aus der Höhe b er-

langt wird, bewegt werde. Es ist nun erstlich klar, daß wenn alle Theile der flüssigen Materie ihre Bewegung ungehindert fortsetzen könnten, der Körper keine Kraft empfinden würde. Weil aber alle Theile der flüssigen Materie, so bald sich dieselben dem Körper nahen, genöthiget werden auszuweichen, und so wohl ihre Geschwindigkeit, als ihre Richtung zu verändern, so muß der Körper eine eben so große Kraft empfinden, als zu dieser Veränderung so wohl in der Geschwindigkeit, als der Richtung der Theilchen, erfordert wird. Wir wollen setzen, daß die flüssige Materie, welche bey Aa mit ihrer Geschwindigkeit $= Vb$ gegen den Körper bewegt wird, genöthiget werde, seitwärts nach $AaMm$ auszuweichen, und wir wollen uns zu diesem Ende einbilden, als wenn dieselbe durch den krummen Canal $AaMm$ fortginge. In diesem Zustande wird nun nicht nur die Direction derselben beständig verändert, sondern nachdem dieser Canal weiter oder enger wird, so wird auch die Geschwindigkeit grösser oder kleiner. Es sey die erste Weite $Aa = a$, welche als unendlich klein angesehen werden muß, indem man sich für eine jede Reihe einen besonderen Canal vorstellen kann. Ferner sey die Weite $Mm = z$; und die Geschwindigkeit der flüssigen Materie bey Mm sey $= Vv$. Da sich nun die Geschwindigkeiten einer durch einen Canal bewegten flüssigen Materie umgekehrt verhalten, wie die Weite des Canals, so ist

$$a : z = Vv : Vb;$$

und folglich

$$zVv = aVb.$$

Man ziehe eine Axe AP perpendicular auf AB , und nenne die Coordinaten $AP = x$, $PM = y$; hernach werde QN mit PM parallel und unendlich nah gezogen; so wird

$$PQ = MO = dx, \quad ON = dy, \quad MN = \sqrt{(dx^2 + dy^2)},$$

und das Theilchen der flüssigen Materie $MNnm$ durch

$$zV(dx^2 + dy^2)$$

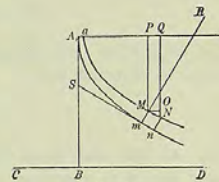


Fig. 14.



ausgedrückt werden. Man setze ferner

$$dy = p dx,$$

so wird

$$MN = V(dx^2 + dy^2) = dx V(1 + pp),$$

und wenn R für das Centrum der Krümmung des Canals in MN angenommen wird, so bekommt man

$$MR = -\frac{dx(1 + pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}.$$

Um nun den Lauf dieses Theilchens $MNnm$ nach dieser Krümmung zu beugen, dazu wird eine Kraft nach der Direction MR erfordert, welche sich verhält zum Gewicht desselben Theilchens, wie

$$2v \text{ zu } \frac{dx(1 + pp)^{\frac{3}{2}}}{dp}.$$

Wenn also das Gewicht dieses Theilchens durch seine Grösse $zdxV(1 + pp)$ ausgedrückt wird, so ist die Kraft [nach] MR

$$= -\frac{2vzdp}{1 + pp}.$$

Ferner wenn die Weite des Canals in Mm grösser wird, so nimmt die Geschwindigkeit ab. Hierzu wird eine Kraft nach der Direction mS , welche den Canal in m berührt, erfordert, und wenn diese Kraft $= T$ gesetzt wird, so bekommt man

$$zdxV(1 + pp) \cdot dv = -TdxV(1 + pp) \text{ oder } T = -zdv.$$

Diese zwey Kräfte MR und mS werden also zu Veränderung des Laufs der flüssigen Materie durch den Canal $AaMm$ in einem jeglichen Punkt M erfordert. Dahero, um die sämtliche Kraft zu bekommen, so wollen wir diese beyden Kräfte nach den beständigen Directionen BA und AP auflösen. Die erstere Kraft MR , welche war

$$= -\frac{2vzdp}{1 + pp},$$

giebt nach der Direction BA diese Kraft

$$= -\frac{2vzdp}{(1 + pp)V(1 + pp)},$$

nach der Direction AP aber diese

$$= \frac{-2vzpdv}{(1 + pp)V(1 + pp)}.$$

Die andere Kraft mS , welche war

$$= -zdv,$$

giebt nach der Direction BA diese Kraft

$$= \frac{-zpdv}{V(1 + pp)},$$

nach der Direction AP aber diese

$$= \frac{zdv}{V(1 + pp)}.$$

Für das Theilchen $MNnm$ wird also nach der Direction BA diese Kraft

$$= \frac{2vzdp}{(1 + pp)V(1 + pp)} - \frac{zpdv}{V(1 + pp)},$$

nach der Direction AP aber diese

$$= \frac{2vzpdv}{(1 + pp)V(1 + pp)} + \frac{zdv}{V(1 + pp)}$$

erfordert. Es ist aber, wie wir vorher gewiesen,

$$z = \frac{aVb}{Vv},$$

und folglich ist die aus der Bewegung des Theilchens $MNnm$ entstandene Kraft nach der Direction BA

$$= -\frac{2adpVbv}{(1 + pp)V(1 + pp)} - \frac{apdvVb}{Vv(1 + pp)}.$$

Hiervon ist das Integrale

$$= -\frac{2apVbv}{V(1 + pp)} + C;$$



und giebt die Kraft nach der Direction BA , welche zur Veränderung der Bewegung aller flüssigen Materie, so in dem Canal $AaMm$ enthalten ist, erfordert wird, wenn nur die Quantität C recht bestimmt wird. Um aber diese Quantität recht zu bestimmen; so ist zu merken, daß, wenn $AP=0$ genommen wird, in welchem Fall p unendlich groß wird, und $v=b$, die ganze Kraft verschwinden müsse: man setze also $p=\infty$, so wird $C-2ab=0$, und folglich $C=2ab$. Dahero wird zur Veränderung der Bewegung der im Canal $AaMm$ enthaltenen flüssigen Materie eine Kraft nach der Direction BA erfordert, welche ist

$$-2ab - \frac{2apVbv}{V(1+pp)} - 2ab\left(1 - \frac{pVv}{Vb(1+pp)}\right).$$

Es deutet aber $\frac{p}{V(1+pp)}$ den Cosinum des Winkels MNO oder des Winkels mSB an, wenn der Radius durch 1 angedeutet wird; und hieraus wird die obige Kraft

$$-2ab\left(1 - \frac{Vv}{Vb} \cos. mSB\right),$$

und mit eben dieser Kraft wird der Körper CD nach der Direction AB fortgestossen. Es bedeutet aber $2ab$ das Gewicht eines Cylinders flüssiger Materie, dessen Basis ist $=Aa=a$, und dessen Höhe $=2b$; wenn Vb die Geschwindigkeit, womit die flüssige Materie gegen den Körper, oder welches gleich viel ist, womit der Körper gegen die flüssige Materie stößt, anzeigt. Diese Kraft, und folglich der Widerstand, beruhet also theils auf der Direction Sm , nach welcher die flüssige Materie seitwärts abgelenket wird, theils auch auf der Geschwindigkeit, welche dieselbe nach dem Stoß behält.

Hieraus erhellet, daß wenn die flüssige Materie, um dem Körper auszuweichen, bis auf einen rechten Winkel von ihrer natürlichen Direction AB abgelenket wird, dergestalt, daß der Winkel $mSB=90^\circ$ wird, so kommt die gefundene Kraft $=2ab$; und wenn dieses bey aller flüssigen Materie, welcher der Körper CD im Wege steht, geschieht, so kommt eben der einige Widerstand heraus, welchen wir in der vorigen Anmerkung im erstern Fall gefunden haben. Eben dieses geschieht auch, wenn die flüssige Materie alle ihre Bewegung durch den Stoß verliert. Sollte aber die flüssige Materie nach dem Stoß nach der vorigen Direction mit gleicher Geschwindigkeit zurück prellen, so wird der Winkel $mSB=180^\circ$, und $Vv=Vb$: dahero die Gewalt seyn wird $=4ab$, wie im andern Fall der vorhergehenden Anmerkung gefunden worden.

Wenn man also wissen könnte, auf was Art ein jeglicher Strahl der flüssigen Materie Aa , welcher gegen den Körper CD fährt, sowohl in Ansehung der Geschwindigkeit, als der Direction, dem Körper ausweiche, so könnte man auch hieraus die Kraft bestimmen, welche auf den Körper wirkt. Man hat aber zu diesem Ende nicht nöthig, die Weite und die Krümmung des Canals $AaMm$, in welchem sich der Strahl Aa gegen den Körper zu bewegen gesetzt worden, allenthalben zu wissen; sondern es ist genug, wenn diese Sachen in dem letzten Punkt des Canals bekannt sind: indem die aus dem Stück $AaMm$ entstehende Kraft nach der Direction AB durch diese Formel

$$2ab\left(1 - \frac{Vv}{Vb} \cos. mSB\right),$$

oder da

$$\frac{Vv}{Vb} = \frac{a}{z},$$

durch diese

$$2ab\left(1 - \frac{a}{z} \cos. mSB\right)$$

ausgedrückt wird, allwo z die Weite des Canals im letzten Punkt M andeutet, und der Winkel mSB durch die Lage des letzten Stückleins MNm bestimmt wird. Hier kömmt es also nur darauf an, wo das Ende des Canals angenommen werden soll. Geht man so weit, biß die flüssige Materie um den Körper völlig vorbeigeflossen, und ihren vorigen Lauf wiederum erlanget hat, so wird $z=a$, und der Winkel mSB verschwindet, dahero der Cosinus desselben $=1$ wird. In diesem Fall würde also die auf den Körper nach der Direction AB wirkende Kraft

$$=2ab(1-1)=0,$$

und der Körper litte gar keinen Widerstand; woraus erhellet, daß man für Wasser und Luft nicht denjenigen Punkt des Canals, wo die Bewegung hinter dem Körper mit der ersten wiederum völlig übereinkommt, für den letzten annehmen könne. Um nun hiervon die Ursache zu untersuchen, so dürfen wir nur den Ursprung dieser Kraft, welche auf den Körper wirkt, genauer betrachten. Wenn wir nur auf den Theil des Canals $AaMm$ Acht haben, so ist die Kraft, welche daraus auf den Körper nach der Direction AB entspringet,

$$=2ab\left(1 - \frac{a}{z} \cos. mSB\right),$$

und diese wird folglich immer grösser, so lang der Winkel MSB grösser wird, je weiter man von dem Anfang Aa fortgehet. Das ist, so lange sich dieser Canal von dem Körper abwärts krümmt, so lange nimmt die daher entstehende Kraft, welche den Körper nach der Direction AB fortstösset, zu. Wenn aber dieser Canal, wie in Fig. 15, seine Krümmung umschwinget, und



Fig. 15.

von M biß D gegen den Körper zu wendet, so nimmt von M biß D der Winkel MSB immer ab, und hierdurch wird die Kraft wiederum vermindert; dergestalt, daß wenn der Canal in Dd mit Aa parallel läuft, und auch daselbst gleich weit ist, die ganze Kraft zernichtet wird. Wenn nun der Canal eine solche Figur hat, so muß man denselben nach seinen beyden Theilen AM und MD ins besondere betrachten, wovon jener AM seine Krümmung von dem Körper BD abwärts, dieser aber MD gegen den Körper zugekehrt hat. Aus dem ersteren Theil AM entsteht eine Kraft, welche den Körper nach der Direction AB fortstößt, und durch $2ab(1 - \frac{a}{z} \cos. MSB)$ ausgedrückt

wird. Aus dem andern Theil DM aber entsteht eine Kraft, welche jener entgegen ist, und von welcher der Körper nach der Direction BA zurück gezogen werden sollte. Da nun kein Körper anders, als durch einen wirklichen Druck in Bewegung gesetzt werden kann, so kann auch diese letztere Kraft nur in so ferne auf den Körper wirken, als der Druck der flüssigen Materie von hinten stark genug ist, den Körper vorwärts zu stossen. Da nun in Luft und Wasser der Druck von vornen nicht nur dem Druck von hinten gleich, sondern noch gemeiniglich grösser ist, so sieht man wohl, daß die aus dem Theil des Canals MD entstehende Kraft auf den Körper gar keine oder zum wenigsten nur eine sehr geringe Wirkung haben könne. Und also wird die aus dem ganzen Canal AMD entstehende Kraft, welche auf den Körper in der That wirkt, beynahe derjenigen gleich seyn, welche aus dem Theil AM entspringt, und folglich durch $2ab(1 - \frac{a}{z} \cos. MSB)$ ausgedrückt werden. Man siehet aber hieraus auch zugleich, daß wenn eine flüssige Materie also beschaffen wäre, daß die aus dem Theil MD entstehende und den Körper zurück ziehende Kraft, ihre völlige Wirkung ausüben könnte, der Körper von dem Anstosse einer solchen flüssigen Materie ganz und gar keine Gewalt ausstehen, und folglich auch keinen Widerstand in derselben antreffen würde. Dieser Fall könnte Platz finden, wenn die flüssige Materie unendlich flüssig, und zugleich von einer unendlichen Kraft zusammen gedrückt wäre. Viel-

leicht ist die subtile Himmels-Materie, in welcher sich die Planeten und Cometen bewegen, von einer solchen Eigenschaft, und daher dieses die Ursache, daß man in diesen Körpern keinen Abgang in ihrer Bewegung verspüren kann. Daß aber diese Eigenschaft in der Luft, dem Wasser und andern bekannten flüssigen Materien, nicht stattfindet, bezeuget der sehr beträchtliche Widerstand derselben: und da dieselben wegen ihrer gegen den Körper gewandten Krümmung MD denselben an sich zu ziehen nicht vermögend sind, so übet die aus der wiederwärtigen Krümmung AM entstehende Kraft ihre völlige Wirkung aus, und eben daher entspringt auch der grosse Widerstand derselben.

Um nun von der Grösse dieses Widerstands gründlicher urtheilen zu können, so wollen wir einen Cylinder betrachten, auf welchen eine solche flüssige Materie mit einer gegebenen Geschwindigkeit fliesset. Es sey dahero (Fig. 16) $OPaQ$ die Hefte dieses Cylinders, und AOQ die Axe desselben; weil, was von einer Hefte gesagt wird, zugleich auch von der andern gilt. Man stelle sich diesen Cylinder in einem Canal eingeschlossen vor, dessen halbe Weite durch AH angedeutet wird, und durch diesen Canal soll Luft oder Wasser mit einer gegebenen Geschwindigkeit gegen den Körper zufließen. Man zertheile in Gedanken diese zufließende Materie in unendlich viel kleine Strahlen AB, BC, CD, DE etc. und erwege, was ein jeglicher derselben für einen Weg um den Körper nehmen werde; so wird man leicht sehen, daß sich dieselben ungefehr, wie die Figur anzeigt, krümmen müssen. Ferner bemerke man in denselben die Punkte a, b, c, d, e, f etc., wo sich dieselben wiederum gegen den Körper zu krümmen anfangen, und berechne die Kräfte nach der Direction AO , welche aus der Krümmung dieser Strahlen, bis zu den Punkten a, b, c, d, e etc. entspringen; so werden alle diese Kräfte zusammen genommen, den Widerstand geben. Man siehet aber leicht, daß sich der erste Strahl $ABab$ bis auf einen rechten Winkel beugen müsse, und dahero wird der daraus entstehende Widerstand seyn $= 2ab$, wenn nemlich a die Dicke des Strahls AB , und b die Höhe, woraus die Geschwindigkeit desselben erzeugt wird, andeutet. Der folgende Strahl $BCbc$ leidet schon keine so grosse Beugung, und folglich entsteht daraus eine kleinere Kraft: und solchergestalt werden die aus den nachfolgenden Strahlen

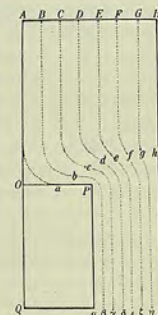


Fig. 16.



CD , DE , EF etc. entstehenden Kräfte immer kleiner, und zuletzt gar nicht mehr merklich. Woraus erhellet, daß der sämtliche Widerstand weit kleiner seyn müsse, als das Gewicht eines Cylinders flüssiger Materie, dessen Weite mit dem Körper einerley, und dessen Höhe der doppelten Höhe b , wodurch die Geschwindigkeit ausgedrückt wird, gleich ist.

Was hier von einem Cylinder, oder einem solchen Körper, dessen Vorder-Theil flach ist, und gerade auf die flüssige Materie stößt, gesagt worden, läßt sich leicht auch auf andere Figuren ziehen. Man sieht aber alsobald, daß wenn der Vorder-Theil des Körpers nicht flach, sondern entweder erhaben, oder gar zugespitzt ist, der Widerstand kleiner seyn müsse, als in dem vorigen Fall. Denn da wird nicht einmahl der erste Strahl AB bis auf einen rechten Winkel gebogen, und die Beugung der folgenden wird noch geringer, als vorher. Daher wir in diesem Stück dem Autori nicht beypflichten können, wenn er sagt, daß in solchen zusammen gedrückten flüssigen Materien der Widerstand nicht von der Figur des Körpers, sondern nur von der Dicke desselben, abhänge. Um dieser Ursache willen, ist es sehr wahrscheinlich, daß der Widerstand, welchen Körper von verschiedenen Figuren auch in zusammen gedrückten flüssigen Materien leiden, nach eben der Regel, welche vorher ist gegeben worden, bestimmt werden könne: und daß der Unterscheid nur darinne bestehe, daß in dem gegenwärtigen Fall der Widerstand viel kleiner sey, als in dem vorigen. Man hat auch Ursache zu vermuten, daß der Widerstand einer Kugel in diesem Fall nur halb so groß sey, als eines gleich dicken Cylinders. Man ist aber im Stande, die meisten über den Widerstand sowohl der Luft, als des Wassers, angestellten Experimente zu erklären, wenn man annimmt, daß der Widerstand eines Cylinders, so sich seiner Länge nach bewegt, gleich sey dem Gewicht eines gleich dicken und aus der flüssigen Materie bestehenden Cylinders, dessen Höhe gleich ist derjenigen, wodurch die Geschwindigkeit ausgedrückt wird.

VIERTE ANMERKUNG

Dieses muß aber nur von demjenigen Theil des Widerstandes verstanden werden, welcher aus dem wirklichen Anstoß des Körpers an die Theilchen der flüssigen Materie entspringt, und von welchem bisher allein die Rede gewesen. Es kann aber, wie schon bemerkt worden, dieser Widerstand noch durch einen besondern Zufall vermehrt werden, wenn nemlich der Körper

von vorne stärker von der flüssigen Materie gedrückt wird, als von hinten. So lange aber der Druck rings um den Körper herum gleich groß ist, wie bey allen nicht allzusehnlichen Bewegungen geschieht, so leidet der Körper keinen andern Widerstand, als welcher von dem wirklichen Stoß des Körpers gegen die Theilchen der flüssigen Materie entstehet, und vorher bestimmt worden ist. Wenn sich aber der Körper zum Exempel in der Luft so geschwind bewegt, daß dieselbe nicht vermögend ist zu folgen, und die von dem Körper verlassenen Plätze gleich wieder einzunehmen, so wird der Körper von hinten ganz und gar nicht gedrückt, und folglich der Druck von vorne dadurch nicht aufgehoben; daher denn der vorige Widerstand noch mit dem Druck von vorne vermehrt werden muß.

Es kömmt also hier darauf an, wie geschwind die Luft einem Körper nachfolgen könne, oder mit was für einem Grad der Geschwindigkeit die Luft in einen Luft-leeren Raum hineindringe. Diese Geschwindigkeit beruht auf der Elasticität der Luft, welche wir oben durch das Gewicht einer Luft-Säule, deren Höhe = 29100 Rheinländische Schuh, ausgedrückt haben; folglich dringt die Luft in einen Luft-leeren Raum mit einer Geschwindigkeit, welche ein fallender Körper aus der Höhe von 29100 Schuhen erlangt, und also in einer Secunde 1348 Schuh beträgt. Wenn sich daher ein Cylinder seiner Länge nach mit einer Geschwindigkeit von 1348 Schuhen in einer Secunde bewegt, so kann demselben die Luft just nachfolgen, daß kein Raum hinter demselben ledig gelassen wird. In diesem Fall übet aber die Luft von hinten auf den Cylinder gar keinen Druck aus. Da nun derselbe von vorne erstlich den Widerstand, welcher dem Gewicht einer gleich dicken Luft-Säule, deren Höhe = 29100, als wodurch die Geschwindigkeit desselben ausgedrückt wird, gleich ist, und noch ausser dem den Gegendruck der Atmosphäre, welcher eben so groß ist, zu überwinden hat, so ist die sämtliche Resistenz zweymahl so groß, als der Widerstand allein, welcher aus dem Anstoß dieses Körpers an die Lufttheilchen entstehet. Sollte sich aber der Cylinder mit einer noch grössern Geschwindigkeit bewegen, so würde derselbe von hinten nicht nur gleichfalls keinen Druck empfinden, sondern es würde so gar immer hinter demselben ein Luft-leerer Raum bleiben. Wenn man also die obige Höhe von 29100 Schuhen, wodurch die Geschwindigkeit der nachfolgenden Luft ausgedrückt wird, durch h , und die Höhe der wirklichen Geschwindigkeit des Cylinders durch v andeutet, dergestalt daß v grösser ist als h , so ist der Widerstand dem Gewicht einer Luft-Säule gleich, deren Höhe = v , wie vorher angezeigt worden; der Gegendruck aber ist einer Luft-



Säule gleich, deren Höhe $= h$. Da nun dieser Cylinder von hinten gar keinen Druck empfindet, so ist der völlige Widerstand gleich einer Luft-Säule, deren Höhe $= h + v$; dahingegen, wenn dieser Körper von vorne und von hinten gleich stark gedrückt würde, der Widerstand nur durch die Höhe v ausgedrückt werden würde. Dahero in diesem Fall, wie der Autor angemerket, die Resistenz weit grösser ist, als nach den gemeinen Regeln gefunden wird.

Wenn aber die Geschwindigkeit des Cylinders kleiner ist, als die Geschwindigkeit, mit welcher die Luft nachzufolgen vermögend ist, das ist, wenn v kleiner als h , so wird derselbe von hinten noch einen Druck empfinden, welcher um so viel grösser seyn wird, je kleiner die Höhe v ist, als h . Um diesen Druck zu finden, so kann man die Geschwindigkeit betrachten, mit welcher die nachfolgende Luft den Körper einhohlet, und welche gleich ist dem Unterschied zwischen der Geschwindigkeit der Luft Vh , und des Körpers Vv . Es ist also eben so viel, als wenn die Luft von hinten auf den Körper mit einer Geschwindigkeit

$$Vh - Vv$$

stiesse: und da die Höhe, aus welcher diese Geschwindigkeit erzeugt wird, ist $= h - 2Vhv + v$, so scheint auch der Druck von hinten dem Gewicht einer Luft-Säule gleich zu seyn, deren Höhe

$$= h - 2Vhv + v.$$

Von vorne wird aber dieser Körper, wie vorher zurück getrieben, mit einer Kraft, welche dem Gewicht einer Luft-Säule, deren Höhe $= h + v$, gleich ist. Wenn wir also hiervon die fortreibende Kraft, welche der Körper von hinten empfindet, abziehen, so bleibt für den Widerstand das Gewicht einer Luft-Säule übrig, deren Höhe $= 2Vhv$ ¹⁾. Wenn also dieser Schluß richtig wäre, so würde der Widerstand nicht, wie wir vorher gefunden haben, den Quadraten der Geschwindigkeit des Körpers, sondern nur der Geschwindigkeit Vv selbst proportional seyn; so lange nemlich der Körper mit einer geringeren Geschwindigkeit fortgeht, als die Luft zu folgen vermögend ist. Der Grund dieses Schlusses aber beruhet darauf, daß die Stärke des Drucks immer dem Quadrat der Geschwindigkeit, womit die Theilchen der Luft auf den Körper stossen, proportional sey, wenn man annimmt, daß sich die Theilchen wirklich mit der Geschwindigkeit bewegen, welche sie erlangen würden, wenn sie

1) Im Original fehlt der Faktor 2. F. R. S.

in einen leeren Raum hineindringen. Denn da der Druck der Luft auf einen Körper eben so stark ist, als wenn dieselbe mit einer so grossen Geschwindigkeit, als aus dem Druck entstehen kann, auf den Körper stiesse, so scheint das obige Raisonement nicht ungegründet zu seyn.

Zum wenigsten, da die Natur der flüssigen Materien noch nicht so vollkommen bekannt ist, daß man darinne ohne Versuche bloß allein aus der Theorie alle Umstände bestimmen könnte, so wird es nicht undienlich seyn, diesen Begriff von der Wirkung der Luft und anderer flüssigen Materien auf harte Körper weiter auszuführen, ungeachtet derselbe, wie bald gezeigt werden soll, mit der Erfahrung unmöglich bestehen kann. Auf diese Art wird aber auch der Druck von vorne auf einen Cylinder, welcher sich seiner Länge nach mit einer Geschwindigkeit $= Vv$ in der Luft bewegt, anders heraus kommen, als vorher. Denn wenn wir setzen, daß sich die Luft statt des Drucks mit einer Geschwindigkeit, so dem Druck gemäß ist, nemlich mit Vh gegen den Cylinder bewege, so ist die relative Geschwindigkeit, womit der Cylinder von vorne auf die Theilchen der Luft stößt,

$$= Vh + Vv,$$

und die Höhe, woraus diese Geschwindigkeit erzeugt wird, $= h + 2Vhv + v$. Also wird der Druck von vorne dem Gewicht einer Luft-Säule gleich seyn, deren Höhe

$$= h + 2Vhv + v.$$

Wenn nun die Geschwindigkeit des Cylinders grösser ist, als die Geschwindigkeit der nachfolgenden Luft, das ist, wenn $v > h$, so leidet der Körper von hinten gar keinen Druck, und folglich wird der Widerstand dem Gewicht einer Luft-Säule gleich seyn, deren Höhe $= h + 2Vhv + v$. Wenn aber die Geschwindigkeit des Cylinders Vv kleiner ist, als Vh , so ist der Druck von hinten, wie wir gesehen, $= h - 2Vhv + v$, welcher von dem vorigen Druck abgezogen den Widerstand giebt $= 4Vhv$, also daß in diesem Fall der Widerstand der Geschwindigkeit des Körpers Vv selbst proportional seyn würde. Man siehet auch hieraus, daß der Widerstand um so viel grösser seyn müsse, je stärker die flüssige Materie zusammen gedrückt ist. Dahero wenn der Widerstand des Wassers solchergestalt beschaffen wäre, so würde der Widerstand eben desselben Cylinders, wenn derselbe mit einerley Geschwindigkeit in verschiedenen Tiefen unter dem Wasser bewegt würde, um so viel grösser seyn, je tiefer der Cylinder unter das Wasser getaucht würde. Der Widerstand würde nemlich

nach den Quadrat-Wurzeln der Tiefe unter dem Wasser zunehmen, dergestalt, daß in einer viermahl grössern Tiefe der Widerstand zweymahl so groß seyn mußte. Also würde ein Fisch, welcher 40 Schuh tief unter dem Wasser schwimmt, eine zweymahl grössere Resistenz antreffen, als wenn sich eben derselbe nur 10 Schuh tief mit eben derselben Geschwindigkeit unter dem Wasser bewegte; wofern nur seine Geschwindigkeit kleiner wäre, als diejenige, welche ein fallender Körper aus der Höhe von 10 Schuhen erlangt. Es wäre dahero zu wünschen, daß man sich die Mühe gäbe, dergleichen Experimente über den Widerstand der Körper in verschiedenen Tiefen unter dem Wasser anzustellen.

Diese Art des Widerstandes verändert sich auch nach ganz andern Gesetzen, wenn die Figur des Körpers nicht cylindrisch ist; und hierbey kommt es nicht allein auf den Vordertheil des Körpers, welcher eigentlich nur auf die Theilchen der flüssigen Materie stößt, an, sondern die Figur des Hintertheils muß dabey auch insonderheit in Betrachtung gezogen werden. Wir wollen also, um die Beschaffenheit dieses Widerstandes genauer zu untersuchen, einen runden Körper betrachten, welcher durch die Herumdrehung der krummen Linie $AMSB$ um die Axe AB (Fig. 17) entsteht, und welcher sich nach

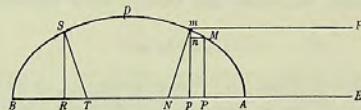


Fig. 17.

der Direction der Axe AB , in der Luft, oder einer andern zusammen gedrückten flüssigen Materie, bewegen soll. Es sey also $\sqrt{b}$ die Geschwindigkeit, mit welcher dieser Körper anjetzo nach der Direction AE fortgeht, und $\sqrt{h}$ sey die Geschwindigkeit, mit welcher die flüssige Materie in einen leeren Raum hindringen würde, und welche wir nach diesem Begriff von dem Widerstande an statt des wirklichen Drucks betrachten. Weil nun dieser Druck auf den Körper allenthalben perpendicular ist, so ziehe man auf das Element Mm die Perpendicular-Linie mN , so wird dasselbe nach dieser Direction eben so gedrückt werden, als wenn die Luft auf dasselbe gerade mit einer Geschwindigkeit $= \sqrt{h}$ stiesse. Da aber ferner der Körper nach der Direction mF mit der Geschwindigkeit $= \sqrt{b}$ fortzugehen gesetzt wird, und der Druck davon gleich-

fals auf Mm perpendicular ist, so muß dieselbe Geschwindigkeit nach dieser Perpendicular-Direction aufgelöset werden, da denn für dieselbe heraus kommt

$$\frac{mn}{Mm} \sqrt{b};$$

wenn man nemlich aus M und m auf die Axe AB die Perpendicular-Linien MP , mp und Mn der Axe parallel zieht. Es sey nun $AP = x$, $PM = y$, so wird

$$Pp = Mn = dx, \quad mn = dy \quad \text{und} \quad Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}.$$

Man setze

$$dy = p dx,$$

so wird $Mm = dx \sqrt{(1 + pp)}$ und

$$\frac{mn}{Mm} \sqrt{b} = \frac{p \sqrt{b}}{\sqrt{(1 + pp)}}.$$

Dahero leidet das Element Mm theils von dem Druck, theils von dem Stoß eben die Kraft, als wenn die Luft nach der Direction mN mit einer Geschwindigkeit

$$= \sqrt{h} + \frac{p \sqrt{b}}{\sqrt{(1 + pp)}}$$

auf dasselbe stiesse: und folglich, als wenn auf dasselbe eine Luft-Säule, deren Höhe

$$= h + \frac{2p \sqrt{b} h}{\sqrt{(1 + pp)}} + \frac{b pp}{1 + pp},$$

druckte. Weil aber die Direction dieser Kraft nach mN gehet, so muß daraus derjenige Theil genommen werden, welcher mit der Bewegung des Körpers einerley Direction hat, und dieser wird

$$= \frac{p}{\sqrt{(1 + pp)}} \left(h + \frac{2p \sqrt{b} h}{\sqrt{(1 + pp)}} + \frac{b pp}{1 + pp} \right).$$

Da nun der ganze Ring, welcher aus dem Element $Mm = dx \sqrt{(1 + pp)}$ durch die Herumdrehung um die Axe AB entsteht, eben diese Gewalt leidet, die Oberfläche dieses Rings aber ist

$$= 2\pi y dx \sqrt{(1 + pp)},$$



wenn man $1:\pi$ für die Verhältniß des Diameters zur Peripherie annimmt, so wird die aus dem Ring entstehende Kraft, wodurch die Bewegung des Körpers vermindert wird, seyn

$$-2\pi y p dx \left(h + \frac{2p\sqrt{bh}}{\sqrt{1+pp}} + \frac{b p p}{1+pp} \right).$$

Und hiervon das Integrale genommen, wird die Grösse des Widerstands, welcher aus dem Stück AM um die Axe gedreht, entspringet, anzeigen. Um also den ganzen Widerstand zu finden, so muß man dasselbe Integrale auf den ganzen Körper ausdehnen, wofern nemlich die Luft auf den ganzen Körper wücket, welches geschieht, wenn die Geschwindigkeit des Körpers $\sqrt{b}$ kleiner ist, als $\sqrt{h}$. Es ist aber hierbey zu merken, daß der Werth des gedachten Integralis, von A an weiter zu gehen, so lange zunehme, als die Applicatae y wachsen, welches bis in D geschieht. Wenn man aber von D weiter gegen B forthehet, weil alsdenn der Buchstabe $p = \frac{dy}{dx}$ negativ wird, so wird die vorige Kraft des Widerstands dadurch vermindert, indem in diesen Gegenden der Körper von dem Druck der Luft vorwärts gestossen wird. In diesem Fall bekommt also auch in der Expression

$$h + \frac{2p\sqrt{bh}}{\sqrt{1+pp}} + \frac{b p p}{1+pp}$$

das andere Glied

$$\frac{2p\sqrt{bh}}{\sqrt{1+pp}}$$

das Zeichen —. Wenn daher $b < h$, so bekommt man den ganzen Widerstand, wenn man das obige Integrale

$$2\pi \int y p dx \left(h + \frac{2p\sqrt{bh}}{\sqrt{1+pp}} + \frac{b p p}{1+pp} \right)$$

auf die ganze krumme Linie ADB ausdehnet.

Wenn aber die Geschwindigkeit des Körpers $\sqrt{b}$ grösser ist, als $\sqrt{h}$, und folglich die Luft von hinten nicht gänzlich nachfolgen kann, so findet sich von hinten ein Theil BS , auf welchen die Luft gar nicht drucket. Um diesen Theil zu finden, so darf man nur das Punkt S suchen, wo der Druck der Luft gänzlich aufhöret, welches geschieht, wenn

$$\sqrt{h} + \frac{p\sqrt{b}}{\sqrt{1+pp}} = 0;$$

das ist, wenn man in S die Perpendicular-Linie ST auf die krumme Linie zieht, weil alsdenn ist

$$\frac{RT}{ST} = \frac{-p}{\sqrt{1+pp}},$$

so muß das Punkt S gefunden werden, wo

$$\sqrt{h} = \frac{RT}{ST} \sqrt{b}, \text{ oder wo } \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{b}} = \frac{RT}{ST}.$$

Hat man nun dieses Punkt S gefunden, so muß das obige Integrale nicht weiter, als bis dahin genommen werden. Hieraus erhellet, daß wenn die krumme Linie bey B dergestalt zugespitzt ist, daß bis in B der Bruch $\frac{RT}{ST}$ beständig grösser ist, als $\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{b}}$, alsdenn das Integrale auch durch die ganze krumme Linie genommen werden müsse. Weil nun der Widerstand durch den Druck, so von hinten geschieht, vermindert wird, so sieht man leicht, daß je mehr der Körper von hinten zugespitzt ist, der Widerstand um so viel kleiner werde, wenn nemlich $\sqrt{b} > \sqrt{h}$. Verschiedene Autores wollen diesen Umstand wirklich durch die Erfahrung wahrgenommen haben, und behaupten, daß der Widerstand eines Schiffs nicht allein auf der Figur des Vordertheils beruhe, sondern daß die Figur des Hintertheils, wenn dasselbe wohl zugespitzt wird, sehr viel zur Verminderung der Resistenz beytrage. Ob nun gleich hierüber keine Experimente mit allem Fleiß angestellt worden, so würde doch diese neue Lehre von dem Widerstande der flüssigen Materien dadurch nicht wenig bekräftiget werden, wenn dieser Umstand nur einiger massen richtig wäre.

Wir wollen inzwischen nach der obigen Regel den Widerstand, welchen eine Kugel in der Luft antrifft, ausrechnen. Es sey also der Diameter der Kugel $AB = 2a$, so wird

$$yy = 2ax - xx \quad \text{und} \quad Mm = \frac{ady}{\sqrt{aa-yy}}.$$

Weil nun $p dx = dy$, so ist

$$\frac{p}{\sqrt{1+pp}} = \frac{\sqrt{aa-yy}}{a},$$

und die Integral-Formel wird

$$\pi \int y dy \left(h + \frac{2\sqrt{bh(aa-yy)}}{a} + \frac{b(aa-yy)}{aa} \right),$$

wovon das Integrale gefunden wird:

$$\pi h y y - \frac{4\pi(aa-yy)Vbh(aa-yy)}{3a} + \frac{4\pi aa Vbh}{3} + \pi b y y - \frac{\pi b y^4}{2aa}.$$

Wenn nun $b < h$, so muß man dieses Integrale biß auf B ausdehnen, und folglich setzen $y = 0$, wobey zu merken, daß wenn die Abscissa x grösser, als der Radius a genommen wird, die Expression $V(aa-yy)$ das Zeichen — bekomme. Derothalben wenn man das Zeichen des andern Glieds umkehrt, und $y = 0$ setzt, so kömmt der Widerstand

$$= \frac{8}{3} \pi aa Vbh.$$

Es ist aber πaa die Fläche eines grossen Zirkels dieser Kugel. Wenn man also diese Fläche durch cc andeutet, so wird der Widerstand

$$= \frac{8}{3} cc Vbh.$$

Wir haben aber oben gesehen, daß wenn sich ein Cylinder, dessen Dicke $= cc$, mit einer gleichen Geschwindigkeit in der Luft bewegt, sein Widerstand seyn würde

$$= 4cc Vbh;$$

dahero sich der Widerstand einer Kugel zum Widerstand eines gleich dicken Cylinders verhalten wird, wie 2 zu 3.

Dieses ist aber nur wahr, wenn $b < h$; wenn aber $b > h$, so muß das Integrale nicht bis zum Punkt B , sondern nur bis S genommen werden, wo

$$Vh = \frac{-pVb}{V(1+pp)}$$

oder

$$\frac{Vh}{Vb} = \frac{-V(aa-yy)}{a}.$$

Da aber dieses Punkt S hinter D fällt, so wird $V(aa-yy)$ negativ, und das Integrale wird also ausgedrückt:

$$\pi h y y + \frac{4\pi(aa-yy)Vbh(aa-yy)}{3a} + \frac{4\pi aa Vbh}{3} + \pi b y y - \frac{\pi b y^4}{2aa}.$$

Alhier setze man also

$$V(aa-yy) = \frac{aVh}{Vb} \quad \text{und} \quad aa-yy = \frac{aah}{b},$$

folglich

$$yy = \frac{aa(b-h)}{b} \quad \text{und} \quad y^4 = \frac{a^4(b-h)^2}{bb},$$

so kommt der verlangte Widerstand heraus

$$= \pi aa \left(\frac{1}{2}b + \frac{4}{3}Vbh + h - \frac{hh}{6b} \right)$$

oder

$$= \frac{8}{3} \pi aa Vbh + \frac{\pi aa}{6b} (Vb - Vh)^2 (3Vb + Vh).$$

Woraus erhellet, daß, wenn $Vb = Vh$, der Widerstand wie in dem vorigen Fall gefunden werde

$$= \frac{8}{3} \pi aa Vbh.$$

Es sey, um noch ein Exempel anzuführen, der runde Körper, welcher sich nach der Direction seiner Axe BAE mit der Geschwindigkeit Vb in der Luft bewegt (Fig. 18), aus zween Kegeln zusammen gesetzt, dergleichen Figur

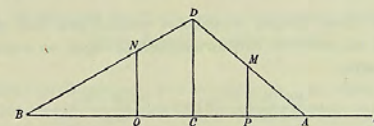


Fig. 18.

entsteht, wenn das Triangulum ADB um die Axe AB herum gedreht wird. Man nenne die Höhe $DC = a$, die Seiten $AD = m$ und $BD = n$, so wird für den Vordertheil ACD seyn

$$\frac{p}{V(1+pp)} = \frac{a}{m},$$

und der Widerstand des Vordertheils

$$= 2\pi \int y dy \left(h + \frac{2aVbh}{m} + \frac{aab}{mm} \right) = \pi aa \left(h + \frac{2aVbh}{m} + \frac{aab}{mm} \right).$$



Der Druck der Luft aber auf den Hintertheil, wenn $Vh > \frac{aVb}{n}$, wird den Körper vorwärts stossen mit einer Kraft

$$- \pi a a \left(h - \frac{2aVbh}{n} + \frac{aab}{nn} \right).$$

Diese Kraft von der vorigen abgezogen, läßt den wirklichen Widerstand dieses Körpers über, welcher seyn wird

$$= \pi a^2 \left(\frac{2a(m+n)Vbh}{mn} + \frac{aab(nn-mm)}{mnn} \right) - \frac{\pi a^2(m+n)}{mn} \left(2Vbh + \frac{ab(n-m)}{mn} \right).$$

Wenn aber $Vh < \frac{aVb}{n}$, so empfindet der Hintertheil gar keinen Druck, und ist also der Widerstand

$$- \pi a a \left(h + \frac{2aVbh}{m} + \frac{aab}{mm} \right).$$

Wenn $Vh > \frac{aVb}{n}$, so ist die Resistenz um so viel kleiner, je länger das Hintertheil ist, und wenn dasselbe unendlich lang wird, so wird die Resistenz

$$- \pi a a \left(\frac{2aVbh}{m} + \frac{aab}{mm} \right).$$

Wenn aber eben dieser Körper umgekehrt würde, und sich mit dem Theil *DBC* in der Luft mit eben der Geschwindigkeit bewegte, so würde der Widerstand desselben seyn

$$= \frac{\pi a^2(m+n)}{mn} \left(2Vbh + \frac{ab(m-n)}{mn} \right),$$

wenn nemlich $Vh > \frac{aVb}{m}$. Woraus erhellet, daß wenn die beyden Kegel ungleich spitzig, der Widerstand des Körpers am kleinsten seyn werde, wenn der spitzigere Theil voraus geht.

Es konten aus diesem Begriff von dem Widerstand der flüssigen Materien noch viele andere schöne Folgen hergeleitet werden, welche wir aber billig übergehen, da es noch sehr ungewiß ist, ob derselbe mit der Erfahrung auch nur einiger massen überein kömmt oder nicht. Inzwischen wird auch hierdurch der Satz des Verfassers bestätigt, daß wenn sich eine Kugel mit einer grössern Geschwindigkeit, als die Luft zu folgen vermögend ist, bewegt, der Widerstand weit grösser werde, als man sonst glaubt. Denn, wenn $Vb > Vh$, so

muß zu dem Widerstand $\frac{8}{3} \pi a a V b h$, welcher herauskommt, wenn Vb nicht grösser ist als Vh , noch diese Quantität $\frac{\pi a a}{6b} (Vb - Vh)^2 (3Vb + Vh)$ hinzugethan werden.

Es mag aber für die Luft diese oder eine andere Erklärung des Widerstands gelten, so kommt doch dabey noch ein anderer Umstand zu betrachten vor, wodurch der Widerstand noch mehr vergrössert wird. Dieser beruhet darauf, daß sich die Luft so wohl in einen kleinern Raum einschränken, als in einen grössern ausdehnen läßt. Dadurch geschieht, daß wenn sich ein Körper in der Luft sehr schnell bewegt, die Luft vor demselben mehr zusammen gedrückt, und folglich dichter, hinter demselben aber weniger zusammen gedrückt, und folglich dünner wird. Wegen des ersteren Umstands wird also die widerstehende Kraft von vorne stärker, wegen des andern aber die fort-treibende Kraft von hinten schwächer; daher der Widerstand der Luft auch aus diesem Grunde bey schnellen Bewegungen weit grösser wird, als bey langsamen.

ZWEYTER SATZ

Wie man den Widerstand der Luft, welchen ein darinn bewegter Körper leidet, durch Versuche bestimmen soll?

Vermittelst der Maschine, welche oben in dem 8ten Satz beschrieben worden, bin ich immer im Stande, die Geschwindigkeit einer Kugel in einem jeglichen Punkt des Weges, durch welchen sich dieselbe bewegt, zu bestimmen. Die ganze Sache kommt nur auf die Richtung des Laufs an, welche so beschaffen seyn muß, daß die Kugel an dem gegebenen Ort ihres Weges auf das Pendulum stosse. Ich nahm also einen Mußketen-Lauf, welcher eine bleyerne Kugel von $\frac{3}{4}$ Zoll im Diameter schoß, und ladete denselben ungefehr mit dem halben Gewicht Pulver, wobey ich die Vorsichtigkeit gebrauchte, daß ich das Pulver immer auf das genaueste abwog, und in allen Stücken also verfuhr, daß ich durch sehr viel vorher angestellte Proben versichert seyn konnte, daß die Geschwindigkeit der Kugel in allen Schüssen biß auf 20 Schuh in einer Secunde einerley war. Hierauf schoß ich diesen Lauf zu dreym verschiedenen mahlen gegen das Pendulum loß, welches das erste mal 25 Schuh,



das andere mahl 75 Schuh, und das dritte mahl 125 Schuh weit von der Mündung des Laufs entfernt worden: und befand, daß die Kugel in dem ersten Fall mit einer Geschwindigkeit von 1670 Schuhen in einer Secunde auf das Pendulum gestossen, in dem zweyten Fall mit einer Geschwindigkeit von 1550 Schuhen, und in dem dritten mit einer Geschwindigkeit von 1425 Schuhen in einer Secunde. Also hatte diese Kugel, indem dieselbe 50 Schuh weiter in einer Secunde fortgegangen, an ihrer Geschwindigkeit ungefähr 120 bis 125 Schuh in einer Secunde verlohren; und die Zeit, in welcher dieselbe durch diesen Raum von 50 Schuhen gefahren, war ungefähr $\frac{1}{32}$ oder $\frac{1}{30}$ einer Secunde. Woraus folget, daß die mittlere Grösse des Widerstands der Luft in diesen Versuchen ungefähr 120 mahl grösser gewesen, als das Gewicht der Kugel; und es hat also der Widerstand, da die Kugel bey nahe $\frac{1}{12}$ μ gewogen, ungefähr 10 μ Avoirdupoise betragen. Wenn wir nun hierüber die Rechnung nach des Hrn. NEWTONS Methode für zusammengepreßte flüssige Materien, welche in der 38ten Propos. des 2ten Buchs ausgeführt ist, anstellen, und dabey annehmen, daß die Luft 850 mahl leichter ist, als Wasser, so werden wir finden, daß der Widerstand einer Kugel von $\frac{3}{4}$ Zoll im Diameter, welche sich mit einer Geschwindigkeit von ungefähr 1600 Schuhen in einer Secunde bewegt, nicht mehr als $4\frac{1}{6}$ μ Avoirdupoise austrage. Da wir nun wissen, daß diese Regeln, welche in der angeführten Proposition des Hrn. NEWTONS enthalten, bey langsamen Bewegungen sehr genau eintreffen, so können wir hieraus sicher schließen, daß die widerstehende Kraft der Luft in langsamen Bewegungen kleiner sey, als in geschwinden, und dieses in der Verhältniß von $4\frac{1}{6}$ zu 10, welche Verhältniß zwischen diesen 1 zu 2 und 1 zu 3 enthalten ist.

Ich habe ferner den vorigen Lauf wiederum mit gleichen Ladungen von Pulver, und gleich schwehren Kugeln, zu verschiedenen mahlen geladen, und alle mögliche Sorgfalt angewandt, daß alle Schüsse mit gleicher Geschwindigkeit geschehen. Auf diese Art habe ich dreymahl gegen das Pendulum, welches 25 Schuh von der Mündung des Laufs entfernt war, geschossen, und befunden, daß die mittlere Geschwindigkeit der Kugel ungefähr 1690 Schuh in einer Secunde betragen. Hernach habe ich den Lauf 175 Schuh weit von dem Pendulo gesetzt, und nachdem ich verschiedene mahl geschossen, befunden, daß die mittlere Geschwindigkeit von 5 Schüssen, mit welcher die Kugel auf das Pendulum in dieser Entfernung gestossen, in einer Secunde 1300 Schuh betragen. Indem also diese Kugel durch einen Raum von 150 Schuhen fortgegangen, so hatte dieselbe ungefähr 390 Schuh in einer Secunde von ihrer Geschwindigkeit

verlohren. In diesen Versuchen war also der Widerstand etwas grösser, als in den vorigen, und betrug hier zwischen 10 und 12 Pfund Avoirdupoise. Nach diesen Versuchen kommt also die Verhältniß der widerstehenden Kraft der Luft für sehr schnelle Bewegungen zu sehr langsamen der Verhältniß 3 zu 1 näher, als in den vorigen.

Nachdem ich also auf diese Art den Widerstand der Luft auf eine Geschwindigkeit bey nahe von 1700 Schuhen in 1" erkannt hatte, welche groß genug ist, um hinter der Kugel einen Luft-leeren Raum zu lassen, so habe ich auch den Widerstand für kleinere Grade der Geschwindigkeit untersucht. Zu diesem Ende habe ich den vorigen Lauf zwar mit eben so grossen Kugeln als vorher, aber mit weniger Pulver geladen, und nachdem ich das Pendulum 25 Schuh weit von dem Lauf gesetzt, habe ich fünfmal nach einander mit einerley Ladung gegen dasselbe geschossen, und die mittlere Geschwindigkeit der Kugel, mit welcher dieselbe auf das Pendulum gefahren, von 1180 Schuhen in 1" befunden. Alsdenn habe ich das Pendulum auf eine Weite von 250 Schuhen von dem Lauf entfernt, und wiederum zu 5 mahlen nacheinander dagegen geschossen; so war, nachdem ich dazwischen ein Mittel genommen, die Geschwindigkeit der Kugel noch 950 Schuh in der Secunde. Indem also die Kugel in der Luft durch einen Weg von 225 fortgegangen, so hat dieselbe 230 Schuh in 1" in ihrer Geschwindigkeit verlohren. Da nun dieselbe diesen Weg in ungefähr $\frac{3}{14}$ einer Secunde zurück gelegt, so mußte der Widerstand der Luft auf einen mittlern Grad der Geschwindigkeit bey nahe $33\frac{1}{2}$ mahl grösser gewesen seyn, als das Gewicht der Kugel, und folglich 2 μ 10 Untzen Avoirdupoise betragen haben. Nun aber kommt nach den Regeln des Widerstands für langsame Bewegungen, für diesen Fall nur $\frac{7}{11}$ des gefundenen Gewichts heraus: daher die widerstehende Kraft der Luft auf eine Geschwindigkeit von 1065 Schuhen in einer Secunde nicht mehr, als nach der Verhältniß wie 7 zu 11 vermehret wird, da wir doch bey den vorigen Versuchen gesehen, daß für einen höhern Grad der Geschwindigkeit diese Vermehrung der Verhältniß von 1 zu 3 sehr nahe gekommen.

Ferner habe ich drey Schüsse von der vorgemeldeten Grösse und Gewicht über ein stillstehendes Wasser dergestalt gethan, daß man den Ort, wo die Kugel das Wasser zu berühren anfieng, deutlich bemerken, und so wohl die Zeit, als den Weg, welchen die Kugel von dem Lauf an bis in das Wasser durchgelaufen, genau bestimmen könnte. Ein jeder Schuß geschehe mit einer Geschwindigkeit von 400 Schuhen in einer Secunde, und ich war durch viele

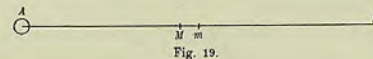
Versuche von eben dieser Ladung versichert, daß ich mich auf diese Geschwindigkeit bey 10 Schuhen in einer Secunde verlassen konnte. Der erste Schuß reichte 313 Yards, ehe die Kugel das Wasser berührte, und solches geschah in $4\frac{1}{4}$ Secunde: also daß die Kugel 313 Yards in $4\frac{1}{4}$ Secunde durchgelaufen. Die zweyte gieng 319 Yards in 4 Secunden, und die dritte 373 Yards in $5\frac{1}{2}$. Nach der für langsame Bewegungen fest gesetzten Lehre des Widerstands hätte der erste Schuß nur in $3\frac{1}{2}$, der zweyte in $3\frac{1}{4}$, und der dritte in 4 geschehen müssen. Woraus erhellet, daß in einem jeglichen dieser Schüsse die Bewegung merklich mehr durch den Widerstand der Luft ist gehemmet worden, als solches nach der Theorie hätte geschehen sollen. Folglich ist auch noch bey solchen ziemlich langsamen Bewegungen, als von 400 Schuhen in $1\frac{1}{2}$, die widerstehende Kraft der Luft um ein merkliches grösser, als bey langsamen Bewegungen.

Aus allem diesen nun, was hier angeführt worden, erhellet also, daß die Lehre von dem Widerstand der Luft, so wie derselbe von dem Hrn. Newton für langsame Bewegungen fest gesetzt, und durch mancherley Versuche bestätigt worden, ganz und gar von der Wahrheit abweicht, wenn man dieselbe auf sehr schnelle Bewegungen, dergleichen eine Mucketen-Kugel hat, ziehen will; dergestalt daß in diesem Fall die widerstehende Kraft der Luft bey nahe drey-mahl grösser wird, als dieselbe nach der gedachten Lehre seyn sollte. Gleichwohl aber nimmt diese Vermehrung der widerstehenden Kraft der Luft um so vielmehr ab, je kleiner die Geschwindigkeit der Kugel wird, biß endlich, wenn diese Geschwindigkeit schon klein genug worden, die GröÙe des Widerstands mit der Theorie völlig überein kommt. Dahero wächst der Widerstand nicht nach den Quadraten der Geschwindigkeit, wie man gemeinlich anzunehmen pflegt, sondern derselbe weicht von dieser Verhältniß um so vielmehr ab, je grösser die Geschwindigkeit der Kugel, nebst der Zusammen-drückung der Luft vor derselben wird. Wir dürfen also in Erwägung dieser Umstände fest behaupten, daß, da man sich bißher von dem Widerstand der Luft solche unvollkommene und irrige Begriffe gemacht, der Weg, welchen eine Kugel durch die Luft beschreibet, auch keinesweges mit Gewisheit hat bestimmt werden können, und daß folglich die Kunst der Artillerie in diesem Stück bißher noch sehr unvollkommen geblieben ist. Inzwischen ist es nicht genug, daß wir hier diese Vermehrung des Widerstands der Luft in sehr schnellen Bewegungen, welche alles dasjenige, was man bisher davon gemuth-maßet, weit übersteiget, dargethan, und außer Zweifel gesetzt haben: sondern

wenn wir in den Stand gesetzt werden sollen, die Bewegung der geschossenen Körper in der Luft zu bestimmen, so ist es nöthig, daß wir noch über dieses die wahre Verhältniß, nach welcher der Widerstand für einen jeglichen Grad der Geschwindigkeit bestimmt wird, ergründen. Dieses wird uns also die Materie zum folgenden Satz geben.

ERSTE ANMERKUNG

Der Verfasser liefert uns hier einige sehr merkwürdige Versuche, wodurch der wirkliche Widerstand der Luft für schnelle Bewegungen erkannt werden kann. Ob man nun gleich wegen der oben angeführten Ursachen die Geschwindigkeit der Kugel, welche der Autor heraus gebracht, einiger maßen in Zweifel ziehen könnte, indem derselbe nicht auf alle nöthige Umstände gesehen zu haben scheint, und noch über dieses seine Rechnung nach einer unrichtigen Regel angestellt: so sind wir doch genöthiget, dieselben, weil der Fehler nicht sonderlich groß seyn kann, um so vielmehr als richtig anzunehmen, da aus Ermangelung einer vollständigen Beschreibung dieser Versuche mit dem Pendulo nicht möglich ist, den etwa im rechnen begangenen Fehler zu verbessern. Um nun vor allen Dingen zu sehen, wie viel die gemeine Lehre von dem Widerstand der Luft in diesen von dem Verfasser angestellten Versuchen von der Wahrheit abweiche, so wollen wir nach derselben berechnen, wie viel die Kugel, welche mit einer gegebenen Geschwindigkeit sich zu bewegen anfangt, indem dieselbe durch einen gegebenen Weg fortgehet, von ihrer Geschwindigkeit verlieren müsse. Ob aber gleich dieser Weg, welchen die Kugel beschrieben, in der That eine Krümmung gehabt, so war doch dieselbe sehr geringe, und man siehet leicht, daß man dieselbe bey der gegenwärtigen Untersuchung gänzlich aus der Acht laßen könne. Wir wollen also setzen (Fig. 19),



es bewege sich eine Kugel in der Luft nach der geraden Linie AB ; und die Schwere derselben verhalte sich zu der Schwere der Luft, wie n zu 1. Wenn man nun annimmt, daß das Wasser 850 mahl schwerer sey, als die Luft, so



bekömmt der Buchstabe n nach den verschiedenen Materien, woraus die Kugel bestehen kann, nachfolgende Werthe:

Materie der Kugel	Schwehrr als Regen-Wasser	Der Werth des Buchstabens n
Gold fein	19,080	16218
Silber fein	10,480	8908
Bley	11,350	9647
Kupfer	8,840	7514
Eisen	7,820	6647
Meßing	8,412	7150
Helfenbein	1,826	1552
Marmel	2,710	2303

Es sey nun c der Diameter der Kugel, so wird die Kugel so viel wägen, als ein gleich dicker Cylinder Luft, dessen Höhe $= \frac{2}{3}nc$. Die Geschwindigkeit der Kugel in A sey ferner $= Vb$, oder b soll die Höhe bedeuten, aus welcher ein fallender Körper mit der Kugel einerley Geschwindigkeit erhält; und nachdem die Kugel durch den Weg $AM = x$ fortgelaufen, so soll Vv die Geschwindigkeit derselben in M anzeigen. Wenn nun die Kugel einen eben so grossen Widerstand litte, als ein gleich dicker Cylinder, so würde der Widerstand dem Gewicht einer Luft-Säule gleich seyn, deren Höhe $= v$; da aber der Widerstand einer Kugel nur halb so groß seyn soll nach der gewöhnlichen Lehre, so wird derselbe durch das Gewicht einer gleich dicken Luft-Säule ausgedrückt werden, deren Höhe $= \frac{1}{2}v$; folglich wird sich der Widerstand zur Schwehre der Kugel verhalten, wie $\frac{1}{2}v$ zu $\frac{2}{3}nc$, oder wie $\frac{3v}{4nc}$ zu 1. Indem also die Kugel durch den unendlich kleinen Raum $Mm = dx$ fortrücket, so wird man diese Aequation bekommen:

$$dv = -\frac{3vdx}{4nc},$$

oder wenn man integrirt, diese

$$\frac{3x}{4nc} = l \frac{b}{v},$$

wo $l \frac{b}{v}$ den hyperbolischen Logarithmum von $\frac{b}{v}$ andeutet. Oder es ist

$$\frac{3x}{4nc} = 2l \frac{Vb}{Vv},$$

wenn aber c für die Zahl gesetzt wird, deren hyperbolischer Logarithmus $= 1$, so hat man

$$\frac{Vb}{Vv} = e^{3x:8nc} \quad \text{oder} \quad \frac{Vv}{Vb} = e^{-3x:8nc}.$$

Weil nun in den gegenwärtigen Exempeln $\frac{3x}{8nc}$ ein ziemlich kleiner Bruch ist, so wird beynahe sein:

$$\frac{Vv}{Vb} = 1 - \frac{3x}{8nc} + \frac{9xx}{128nncc},$$

folglich

$$\frac{Vb - Vv}{Vb} = \frac{3x}{8nc} - \frac{9xx}{128nncc}.$$

Aus diesen Formeln wollen wir also erstlich die ersten Exempel des Autoris berechnen. Die Kugel war von Bley, und also $n = 9647$. Ferner war der Diameter der Kugel $c = \frac{3}{4}$ Zoll und die Geschwindigkeit derselben in A betrug 1670 Schuh in einer Secunde, welche Zahl wir hier für Vb annehmen können, da es nur auf die Verhältniß zwischen Vb und Vv ankommt. Ferner lief die Kugel in dem ersten Versuche durch 50 Schuh, und behielt eine Geschwindigkeit von 1550 Schuhen in einer Secunde. Also war $x = 50$ Schuh, und $\frac{x}{c} = 800$, folglich

$$\frac{3x}{8c} = 300 \quad \text{und} \quad \frac{3x}{8nc} = \frac{300}{9647} = 0,03109.$$

Dahero der Terminus

$$\frac{9xx}{128nncc} = 0,00048.$$

Da nun

$$Vb = 1670 \quad \text{und} \quad Vv = 1550,$$

so wird

$$\frac{Vb - Vv}{Vb} = \frac{120}{1670} = 0,07185,$$

welche Zahl gleich seyn sollte der vorigen 0,03061.¹⁾ Da aber jene mehr als zweymal grösser ist, als diese, so folgt daraus, daß der Widerstand mehr als zweymahl grösser gewesen, als angenommen worden, welches fast mit des

1) Nämlich $\frac{3x}{8nc} - \frac{9xx}{128nncc} = 0,03109 - 0,00048 = 0,03061.$ F. R. S.



Autoris Anmerkung gänzlich übereinkommt. Wir haben hierbey gesetzt, daß der Widerstand einer Kugel nur halb so groß sey, als eines gleich dicken Cylinders; der Autor aber will, daß beyde Körper einen gleichen Widerstand leiden. Wenn wir also den Widerstand dieser Körper zweymahl so groß angenommen hätten, so würden wir an statt der Zahl 0,03061 diese 0,06026¹⁾ gefunden haben, welche der andern 0,07185 weit näher kommt; folglich würde die gemeine Lehre nicht mehr so viel von der Wahrheit abgehen, und die Verdickung der Luft vor der Kugel könnte hinreichend scheinen, diese Vermehrung des Widerstands zu verursachen. Inzwischen scheint aber doch die Meynung des Autoris, daß eine Kugel mit einem gleich dicken Cylinder einerley Widerstand leide, der Wahrheit nicht gemäß zu seyn, und wir wollen daher lieber mit dem Autore diese Vermehrung des Widerstands einer andern Ursache zuschreiben, als dieser. Wir werden aber hernach auch langsame Bewegungen nach dieser Methode berechnen, um zu sehen, ob der Widerstand einer Kugel aus der gantzen Höhe v , oder nur aus der Helfte derselben, bestimmt werden müsse.

Das zweyte Experiment des Autoris geht auf die vorige Kugel, welche, nachdem dieselbe 100 Schuh weit gelaufen, eine Geschwindigkeit von 1425 Schuhen in einer Secunde behalten. Es war also nach der obigen Regel $Vb = 1670$, $Vv = 1425$, folglich

$$\frac{Vb - Vv}{Vb} = \frac{245}{1670} = 0,14670.$$

Ferner war $\frac{3x}{8nc} = 0,06220^2)$, und müßte also seyn $0,14670 = 0,06030^3)$, woraus wiederum erhellet, daß der Widerstand allzuklein angenommen worden. Aus diesen beyden Exempeln kommt fast einerley Verhältniß zwischen dem wahren Widerstand, und dem angenommenen heraus; denn beyde geben, daß sich der angenommene Widerstand zu dem wahren verhalte, wie 1 zu 2,40.⁴⁾

Das dritte Exempel ist mit eben der vorigen Kugel gemacht worden, welche anfänglich in A eine Geschwindigkeit von 1690 Schuhen in 1" hatte, und nachdem dieselbe durch einen Raum von 150 Schuhen fortgelaufen, noch eine Geschwindigkeit von 1300 Schuhen in einer Secunde behalten. Es war also $Vb = 1690$ und $Vv = 1300$ folglich

$$\frac{Vb - Vv}{Vb} = \frac{390}{1690} = 0,23077.$$

1) Im Original 0,06029. 2) Im Original 0,06218. 3) Das Verhältniß $(1 - e^{-2x:8nc}) \cdot \frac{Vb - Vv}{Vb}$ ist beim ersten Experiment 1:2,35 und beim zweiten 1:2,43. F. R. S.

Ferner war $\frac{3x}{8nc} = 0,09329^1)$, und müßte also seyn $0,23077 = 0,08907^2)$; woraus folgt, daß sich der angenommene Widerstand zu dem wahren verhalten, wie 1 zu 2,59.³⁾ Dieses Experiment stimmt also mit den vorigen nicht recht überein, und da in diesem die Kugel weiter gelaufen, so hätte, nach des Autoris eigener Meynung, der Unterschied kleiner seyn sollen, als vorher, indem je mehr die Geschwindigkeit der Kugel abnimmt, auch der Widerstand mit der Theorie näher übereintreffen sollte.

Das vierte Experiment war mit einer gleichen Kugel angestellt; dieselbe hatte aber in A nur eine Geschwindigkeit von 1180 Schuhen in einer Secunde; nachdem nun dieselbe 225 Schuh weit gelaufen, so betrug ihre Geschwindigkeit noch 950 Schuh in 1". Also war

$$\frac{x}{c} = 3600 \quad \text{und} \quad \frac{3x}{8nc} = 0,13994.^4)$$

Ferner war $Vb = 1180$ und $Vv = 950$, folglich müßte nach der Theorie seyn

$$0,13994 = \frac{1180}{950} = \frac{118}{95} = 0,21681.$$

In diesem Fall ist also auch der angenommene Widerstand zu klein, und verhält sich zu dem wahren, wie 1 zu 1,493⁵⁾, welches mit des Autoris Verhältniß wie 7 zu 11 ziemlich genau übereintrifft. Da nun der Unterschied um so viel kleiner gefunden wird, je kleiner die Geschwindigkeit der Kugel wird, so erhellet hieraus, daß man nicht fehle, wenn man für sehr langsame Bewegungen den Widerstand einer Kugel nur halb so groß annimmt, als eines gleich dicken Cylinders.

Die Untersuchung der folgenden Exempel erfordert eine andere Art der Rechnung; denn in denselben wird außer der Geschwindigkeit, so die Kugel im Anfange der Bewegung in A gehabt, die Zeit gegeben, innerhalb welcher dieselbe einen gegebenen Weg durchgelaufen. Wenn also wie vorher die Geschwindigkeit in $A = Vb$, in $M = Vv$ und der Weg $AM = x$ gesetzt wird, so haben wir diese Aequation gefunden

$$Vv = e^{-2x:8nc} Vb.$$

1) Im Original 0,09327. 2) Im Original $0,23077 = 0,08905$. 3) Im Original 1 zu 2,92. 4) Im Original 0,13993. 5) Im Original 1,549. Berichtigt von F. R. S.



Man setze nun die Zeit, in welcher die Kugel von A biß M gekommen, $= t$, so wird

$$dt = \frac{dx}{Vv} = \frac{e^{3x:8nc} dx}{Vb},$$

wovon das Integrale gefunden wird:

$$t = \frac{8nc(e^{3x:8nc} - 1)}{3Vb} = \frac{8nc}{3b}(e^{3x:8nc} - 1)Vb.$$

Welche Formel also zu gebrauchen ist: man drücke b in tausendsten Theilen eines Rheinländischen Schubes aus, und dividire alsdenn die herauskommende Zahl durch 250; so wird der Quotient die Anzahl der Secunden, aus welchen die Zeit t besteht, anzeigen.¹⁾ Wir haben aber oben²⁾ gesehen, daß wenn man Vb , nachdem man b in tausendsten Theilen eines Rheinländischen Schubes ausgedrückt hat, durch 4 dividirt, der Quotient anzeige, wie viel Schuh die Kugel mit der Geschwindigkeit Vb in einer Sekunde durchzulaufen vermögend ist. Wenn also die Kugel mit ihrer ersten Geschwindigkeit in A m Rheinländische Schuhe in 1" hätte zurück legen können, so wird $\frac{Vb}{4} = m$ und $b = \frac{16mm}{1000}$ Rheinländische, oder $\frac{16mm}{970}$ Englische Schuh, und die gesuchte Zeit wird

$$t = \frac{8nc}{3b}(e^{3x:8nc} - 1) \frac{m}{62,5}$$

Secunden. Wenn also die Zeit t in Secunden ausgedrückt wird, so hat man

$$e^{3x:8nc} = 1 + \frac{1875bt}{80mnc}$$

oder

$$\frac{3x}{8nc} = l \left(1 + \frac{1875bt}{80mnc} \right).$$

Wenn demnach diese Aequation bey einem Experiment statt findet, so ist es ein Zeichen, daß der Widerstand recht angenommen worden; wo aber nicht,

1) Weil EULER $\frac{1}{1000}$ des rheinländischen Fußes als Längen- und $\frac{1}{250}$ Sekunde als Zeiteinheit wählt, erhält die Beschleunigung der Schwere die Maßzahl $\frac{31,25 \cdot 1000}{250^2} = \frac{1}{2}$, daher die Endgeschwindigkeit für die Fallhöhe v die Maßzahl Vv , jedoch bezogen auf rheinländische Fuß und Sekunden die Maßzahl $\frac{Vv}{1000} \cdot 250 = \frac{1}{4} Vv$. F. R. S.

2) Siehe p. 78. F. R. S.

so wird man bald sehen, ob der angenommene Widerstand zu groß oder zu klein, und dieses auch um wie viel. Wenn $\frac{3x}{8nc}$ eine sehr kleine Zahl ist, so läßt sich die erstere Aequation auf diese bringen:

$$t = \frac{mx}{62,5b} \left(1 + \frac{3x}{16nc} + \frac{9xx}{16 \cdot 24n^2c^2} + \text{etc.} \right),$$

oder da $b = \frac{16mm}{970}$ Englische Schuh, so wird

$$t = \frac{97x}{100m} \left(1 + \frac{3x}{16nc} + \frac{9xx}{16 \cdot 24n^2c^2} + \text{etc.} \right).$$

Oder wenn die erste Geschwindigkeit Vb auch in englischen Schuhen gegeben wird, und dieselbe m solche Schuhe in einer Sekunde beträgt, so kommt

$$t = \frac{x}{m} \left(1 + \frac{3x}{16nc} + \frac{9xx}{16 \cdot 24n^2c^2} + \text{etc.} \right)$$

Secunden, in welcher Formel es gleich viel ist, wenn nur die Grössen x , m und c nach einerley Maaß-Stab genommen worden, indem es nur auf die Verhältniß derselben ankommt. Ferner ist hier zu merken, daß die absolute Größe des Widerstands durch $\frac{3}{8n}$ angedeutet wird. Wenn also der angenommene Widerstand zu klein gefunden wird, so darf man nur sehen, was für einen grössern Bruch man für $\frac{3}{8n}$ annehmen müsse, damit die Gleichheit erhalten würde, und alsdenn wird derselbe die wahre Größe des Widerstands anzeigen.

In diesen letztern von dem Verfasser angeführten Versuchen war nun wie vorher $c = \frac{3}{4}$ Zoll, und $n = 9647$. Ferner war die anfängliche Geschwindigkeit 400 Schuh in einer Sekunde: wenn wir also setzen $m = 400$, so müssen wir auch die übrigen Grössen nach diesem Maaß ausdrücken. Der erstere Schuß gieng 313 Yards in $4\frac{1}{4}$ "; es hält aber ein Yard 3 englische Schuh, folglich wird $x = 939$ Schuh und $\frac{x}{m} = 2,3475$, ferner

$$\frac{x}{c} = 15024 \quad \text{und} \quad \frac{3x}{8nc} = 0,58401.$$

Wenn man nun diese Werthe in der obigen Vergleichung setzt, so kommt

$$4,25 = 3,18643^1),$$

1) Im Original 3,18839. Berichtigt von F. R. S.



woraus erhellet, daß die angenommene Resistenz zu klein ist. Der Autor findet für diesen Fall aus eben der Theorie 3,2", welche Zeit mit der unsrigen sehr genau überein kommt. Um nun eine völlige Gleichheit zu erhalten, so müßte man den Widerstand beynahe noch so groß setzen. Es scheint aber, daß man sich auf dieses Experiment nicht allzuwohl verlassen könne, da in dem folgenden Experiment die Kugel um 6 Yards weiter in einer kürzern Zeit, nemlich in 4" gegangen, woraus folglich der Zuwachs des Widerstands kleiner heraus kommen muß. Wir wollen also dieses Experiment genauer erwegen. Hier wird nun $x = 957$ Schub, und folglich $\frac{x}{m} = 2,3925$, ferner

$$\frac{x}{c} = 15312 \quad \text{und} \quad \frac{3x}{8nc} = 0,59521.$$

Woraus man bekommt

$$4 = 3,2696.$$

Wenn also auch hier eine Gleichheit heraus kommen soll, so muß der Widerstand, und folglich der Terminus $\frac{3x}{8nc}$ grösser angenommen werden. Man setze $\frac{3x}{8nc} = z$, so muß seyn

$$\frac{4}{2,3925} = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \frac{z^3}{24} + \frac{z^4}{120} + \text{etc.} = 1,6719^1)$$

oder

$$\frac{z}{2} + \frac{z^2}{2 \cdot 3} + \frac{z^3}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{z^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \text{etc.} = 0,6719.^2)$$

Hieraus findet man

$$z = 0,9528^3),$$

und verhält sich also die angenommene Resistenz zu der wahren, wie 0,9521 zu 0,9528⁴⁾ das ist wie 1 zu 1,0008.⁴⁾ Welcher Unterschied doch noch viel zu groß scheint, weil oben in dem 4ten Experiment, da die Geschwindigkeit der Kugel im Anfang fast fünfmal grösser, als hier gewesen, die Verhältniß wie 1 zu 1,493⁵⁾ heraus gebracht worden. Es kömmt aber hierinne auf eine solche genaue Bestimmung in allen Stücken an, da die geringste Unrichtigkeit einen sehr merklichen Unterschied verursachen kann. Dahero können diese

1) Im Original 1,6718. 2) Im Original 0,6718. 3) Im Original 0,9556.
4) Im Original 1,6055. 5) Im Original 1,549. Berichtigt von F. R. S.

Experimente nicht anders gebraucht werden, als nur überhaupt zu zeigen, daß der wahre Widerstand, welchen eine schnell bewegte Kugel in der Luft leidet, viel grösser sey, als die hier gebrauchte Theorie anzeigt, und daß, je grösser die Geschwindigkeit der Kugel ist, diese Theorie um so viel mehr von der Wahrheit abweiche.

ZWEYTE ANMERKUNG

Um diese Abhandlung von dem Widerstand der Körper in der Luft vollständig zu machen, so wollen wir auch langsamere Bewegungen untersuchen, dergleichen in fallenden Körpern beobachtet werden. In solchen Fällen läßt sich die Größe des Widerstands bestimmen, wenn man die Zeit bemerkt, in welcher ein gegebener Körper durch eine gegebene Höhe herunter fällt. Denn da man weiß, in wie langer Zeit ein Körper in einem Luft-leeren Raum durch eine jegliche Höhe kraft seiner Schwerkraft fällt, so wird diese Zeit in der Luft grösser: und aus dem Unterschied ist man im Stande, die Größe des Widerstands herzuleiten. Die Luft hat aber hieby eine doppelte Wirkung; denn außer dem Widerstand wird auch das Gewicht des Körpers um so viel vermindert, als eine mit demselben gleich grosse Masse Luft wiegt.

Es sey A (Fig. 20) eine Kugel, welche aus dem Punkt A nach der senkrechten Linie AB herunter fällt; der Diameter derselben sey $= c$, und ihre Schwerkraft verhalte sich zu der Schwerkraft der Luft, wie n zu 1: folglich wird das Gewicht derselben um $\frac{1}{n}$ Theil vermindert. Wir wollen setzen, die Kugel sey schon biß in P herunter gefallen, die Höhe AP sey $= x$, und die Geschwindigkeit in P sey $= v$. Hieraus wird nun in P die Kraft der Schwerkraft durch $1 - \frac{1}{n}$, die Kraft des Widerstands aber durch $\frac{3v}{4nc}$ ausgedrückt werden: dahero die Acceleration in folgender Aequation enthalten seyn wird:

$$dv = \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{3v}{4nc}\right) dx.$$

Hieraus bekommt man:

$$\frac{3dx}{4nc} = \frac{3dv}{4nc - 4c - 3v},$$

wovon das Integrale ist

$$\frac{3x}{4nc} = \int \frac{4(n-1)c}{4(n-1)c - 3v}.$$

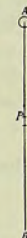


Fig. 20.



Wenn nun e für die Zahl angenommen wird, deren hyperbolischer Logarithmus = 1, oder wenn $e = 2,718281828459$, so wird

$$e^{3x:4nc} = \frac{4(n-1)c}{4(n-1)c - 3v}$$

oder

$$1 - \frac{3v}{4(n-1)c} = e^{-3x:4nc},$$

und hieraus bekommt man

$$v = \frac{4(n-1)c}{3} (1 - e^{-3x:4nc}),$$

und folglich

$$Vv = \sqrt{\frac{4(n-1)c}{3}} (1 - e^{-3x:4nc}).$$

Wenn ferner die Zeit, in welcher die Kugel aus A bis zu P heruntergefallen, durch t angedeutet wird, dergestalt, daß t in Secunden ausgedrückt werden soll, so wird

$$dt = \frac{dx}{250 \sqrt{\frac{4(n-1)c}{3}} (1 - e^{-3x:4nc})}$$

und

$$t = \frac{\sqrt{3}}{500 \sqrt{(n-1)c}} \int \frac{dx}{V(1 - e^{-3x:4nc})}$$

Die Integration aber giebt

$$t = \frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3}(n-1)} l \frac{1 + V(1 - e^{-3x:4nc})}{1 - V(1 - e^{-3x:4nc})}$$

oder

$$t = \frac{2n\sqrt{c}}{125\sqrt{3}(n-1)} l(1 + V(1 - e^{-3x:4nc})) + \frac{x\sqrt{3}}{500V(n-1)c}.$$

Wenn der Bruch $\frac{3x}{4nc}$ sehr klein ist, so setze man Kürze halber $\frac{4nc}{3} = m$, und da wird

$$e^{-\frac{x}{m}} = 1 - \frac{x}{m} + \frac{x^2}{2m^2} - \frac{x^3}{6m^3} + \frac{x^4}{24m^4} - \text{etc.}$$

folglich

$$l(1 + V(1 - e^{-\frac{x}{m}})) = l(1 + V(\frac{x}{m} - \frac{x^2}{2m^2} + \frac{x^3}{6m^3} - \frac{x^4}{24m^4} + \text{etc.})).$$

Wenn man nun diesen Logarithmum durch die Näherung ausdrückt¹⁾, und in obiger Aequation anbringt, so kommt

$$t = \frac{2n\sqrt{cx}}{125\sqrt{3}(n-1)m} \left(1 + \frac{x}{12m} + \frac{xx}{480m^2} - \frac{x^3}{2688m^3} - \text{etc.}\right)$$

oder

$$t = \left(1 + \frac{x}{12m} + \frac{xx}{480m^2} - \frac{x^3}{2688m^3} - \frac{x^4}{92160m^4} - \text{etc.}\right) \cdot \frac{1}{125} \sqrt{\frac{nx}{n-1}},$$

allwo in dem Glied $\sqrt{\frac{nx}{n-1}}$ die Höhe x in tausendsten Theilen eines Rheinländischen Schuhs ausgedrückt werden muß.

Um nun diese Formel durch ein Exempel zu erläutern, und zugleich zu sehen, wie genau dieselbe mit der Erfahrung überein stimmt, so wollen wir zu diesem Ende aus den *Princ. Phil. Nat.* des Hrn. NEWTONS eines nehmen, wo derselbe eine gläserne Kugel in der St. Paul-Kirche durch eine Höhe von 220 Englischen Schuhen hat herunterfallen lassen.²⁾ Die Kugel hielt in ihrem Diameter 5 Zoll, und wog 483 Gran. Eine gleich grosse Kugel von Wasser würde gewogen haben 16600 Gran; wenn also die Luft 850 mahl leichter gesetzt wird, als Wasser, so müste eine gleich grosse Kugel von Luft gewogen haben $\frac{16600}{850}$, das ist 19,53 Gran. Also war $c = 5$ Zoll, und da diese Kugel in einem Luft-leeren Raum würde 502,53 Gran gewogen haben, so wird $n = \frac{502,53}{19,53} = 25,73$ und $x = 220$ Schuh. Ferner wird $m = 171,5$ Zoll, und da $x = 2640$ Zoll, so wird

$$\frac{x}{m} = \frac{26400}{1715} = 15,3935.$$

Da nun hier $\frac{x}{m}$ keine so kleine Zahl ist, daß die obige Näherung Statt finden könnte, so müssen wir die erst gefundene Aequation gebrauchen:

$$t = \frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3}(n-1)} l \frac{1 + V(1 - e^{-3x:4nc})}{1 - V(1 - e^{-3x:4nc})},$$

wo c in tausendsten Theilen eines Rheinländischen Schuhs ausgedrückt

1) Man entwickle zunächst die Quadratwurzel nach steigenden Potenzen von $\sqrt{\frac{x}{m}}$ und setze dann das Resultat (es werde mit u bezeichnet) ein in $l(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} \dots$ F. R. S.

2) I. NEWTON, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Editio tertia, Londini 1726, p. 351. F. R. S.

werden muß. Es wird also $c = 404,166$ und folglich

$$\frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}} = 0,48044.$$

Man setze Kürze halber

$$\frac{x}{m} = 15,3935 = \alpha,$$

so hat man

$$t = 0,48044 l \frac{1 + \sqrt{1 - e^{-\alpha}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-\alpha}}}$$

Secunden. Es sey $e^{-\alpha} = z$, so wird $lz = -\alpha l e$; da nun $c = 2,718281828$, so ist nach den gemeinen Logarithmis $le = 0,43429448$, und also

$$lz = -15,3935 \cdot 0,43429448 = -6,6853,$$

folglich

$$z = \frac{1}{4845100}.$$

Da nun $z = e^{-\alpha}$ eine so sehr kleine Zahl ist, so wird

$$\sqrt{1-z} = 1 - \frac{1}{9690200}$$

und

$$t = 0,48044 l 19380400$$

Secunden. Der gemeine log. von 19380400 ist 7,287363, welcher mit 2,30258509 multiplicirt den hyperbolischen Logarithmum giebt: dieser wird also seyn = 16,7797, und da kommt heraus

$$t = 8,0616$$

Secunden. NEWTON hat aber diese Zeit auf das genaueste beobachtet, und dieselbe befunden 8,2". Die Kugel hat also etwas mehr Zeit gebraucht, um aus der Höhe von 220 Schuhen herunter zu fallen, als durch die Theorie gefunden wird, folglich hat dieselbe einen etwas grösseren Widerstand angetroffen, als nach der Theorie angenommen worden. Inzwischen ist der Unterschied so geringe, daß, da in der Observation leicht ein so kleiner Fehler könnte eingeschlichen seyn, die wahre Grösse des Widerstands daraus nicht wohl bestimmt werden kann. NEWTON hat dieses und noch mehr dergleichen Experimente auf eine andere Art ausgerechnet, in-

dem er aus der gegebenen Zeit die Höhe gesucht, durch welche der Körper nach der Theorie hätte herunter fallen müssen. Er findet aber diese Höhe immer etwas grösser, als dieselbe in der That gewesen, woraus folglich genugsam erhellet, daß der Widerstand in der That etwas grösser gewesen seyn müsse, als solcher nach der Theorie gesetzt worden. Hierdurch wird also die Meynung des Verfassers noch um so viel mehr bekräftiget, daß bey schnellen Bewegungen die Theorie den Widerstand zu klein angebe; denn auch in diesen Versuchen war gegen das Ende des Falls die Geschwindigkeit nicht mehr klein, und betrug ungefähr 29 Schuh in einer Secunde, welche Geschwindigkeit schon einen etwas grössern Widerstand leiden muß.

Die Berechnung dieses und anderer dergleichen Exempel, wo $e^{-3x:4nc}$ eine so sehr kleine Zahl ist, kan folgender gestalt bequemer angestellt werden. Denn da ohne Fehler ist

$$\sqrt{1 - e^{-3x:4nc}} = 1 - \frac{1}{2} e^{-3x:4nc},$$

so wird

$$t = \frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}} l \frac{2 - \frac{1}{2} e^{-3x:4nc}}{\frac{1}{2} e^{-3x:4nc}} = \frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}} l 4 e^{3x:4nc}$$

oder

$$t = \frac{n\sqrt{c}}{125\sqrt{3(n-1)}} l 4 + \frac{x\sqrt{3}}{500\sqrt{(n-1)}c}.$$

Da nun $l 4 = 1,38629436$, so wird

$$t = \frac{n\sqrt{c}}{\sqrt{(n-1)}} \left(0,0064030 + 0,0034641 \frac{x}{nc} \right)$$

Secunden. Will man aber in diesen Fällen aus der gegebenen Zeit t die Höhe x finden, so kommt

$$0,0034641 \frac{x}{nc} = \frac{t\sqrt{(n-1)}}{n\sqrt{c}} - 0,0064030$$

und also

$$x = 288,675 t \sqrt{c(n-1)} - 1,8484 nc,$$

oder

$$\frac{x}{nc} = 288,675 \cdot \frac{t\sqrt{(n-1)}}{n\sqrt{c}} - 1,8484,$$

wo in dem Glied $\frac{t\sqrt{(n-1)}}{n\sqrt{c}}$ die Zeit t in Secunden, und der Diameter c in tausendsten Theilen eines Rheinh. Schuhses ausgedruckt werden muß. Da nun



in dem vorher berechneten Exempel war $t = 8,2''$, $c = 404,166$ und $n = 25,73$, so wird $nc = 128,65$ Engl. Zoll, oder 10,72 Engl. Schuhe. Hieraus bekommt man:

$$\frac{x}{10,72} = 20,9086 \quad \text{oder} \quad x = 224,14$$

Engl. Schuhe, und ist daher grösser als die Höhe 220 Schuhe, welche diese Kugel in dieser Zeit in der That beschrieben. Der Unterschied ist aber nur 4 Schuh, welche die Kugel in $\frac{1}{7}''$ durchlaufen könnte. Da nun ein so geringer Theil der Zeit nicht genau bemerkt werden kann, so sieht man hieraus, daß die gewöhnliche Theorie des Herrn NEWTONS bey nicht allzu schnellen Bewegungen sehr genau übereintreffe, bey schnellen Bewegungen aber den Widerstand allzuklein anzeige.

DRITTE ANMERKUNG

Hieraus erhellet also zur Gnüge, und es könnte auch noch durch andere Experimente dargethan werden, daß für nicht allzu schnelle Bewegungen die bekannte Lehre von dem Widerstand der Luft, so wie dieselbe von dem grossen NEWTON vorgetragen, und bisher von den Gelehrten gebraucht worden, mit der Wahrheit sehr genau übereinstimme. In solchen Fällen ist also ausgemacht: erstlich, daß der Widerstand eines Körpers den Quadraten der Geschwindigkeit desselben proportional sey, und daß zweytens der Widerstand eines Cylinders, welcher sich seiner Länge nach in der Luft bewegt, dem Gewicht eines gleich dicken Cylinders Luft gleich sey, dessen Höhe so groß ist, daß ein schwerer Körper, so aus derselben herunter fällt, mit dem bewegten Cylinder einerley Geschwindigkeit erhält. Drittens ist auch gewiß, daß der Widerstand einer Kugel nur halb so groß sey, als eines gleich dicken Cylinders. Hieraus kan man nun auch ziemlich sicher schliessen, daß bey Körpern von andern Figuren der Widerstand so beschaffen seyn werde, wie die oben gelehrte Art, den Widerstand zu berechnen, anzeigt; ob es gleich sehr schwer ist, mit solchen Körpern richtige Experimente anzustellen, um derselben Bewegung mit der Rechnung vergleichen zu können. Weil nun in dieser Rechnung bloß allein die vordere Figur des Körpers in Betrachtung gezogen wird, so folgt hieraus, daß die hintere Figur desselben nicht viel zur Grösse des Widerstands beytrage: daher die, in den dem vorigen Satz bey-

gefügtten Anmerkungen, angeführten Gründe alle Kraft fast gänzlich zu verlieren scheinen. Insonderheit fällt die letztere daselbst gegebene Art den Widerstand zu bestimmen, wo derselbe der Geschwindigkeit selbst proportional gefunden worden, gänzlich weg: indem der Widerstand nicht zugleich den Geschwindigkeiten des Körpers selbst, und auch ihren Quadraten, proportional seyn kann. Denn ungeachtet es bey einem jeden Körper einen solchen Grad der Geschwindigkeit giebt, für welchen nach beyden Proportionen einerley Widerstand heraus kommt, so muß derselbe doch bey allen übrigen Graden der Geschwindigkeit verschieden seyn. Wenn sich nemlich der Körper geschwinder bewegt, so geben die Quadrata der Geschwindigkeit einen grösseren Widerstand, als die Geschwindigkeiten selber: und umgekehrt, wenn sich der Körper mit einem geringeren Grad der Geschwindigkeit bewegt, so geben die Geschwindigkeiten selbst einen grössern Widerstand, als ihre Quadrata. Aus dieser Betrachtung könnte man also einwenden, daß sich öfters diese beyden Unterscheide ersetzen, und also beyde Theorien der Wahrheit gemäß gefunden werden könnten. Insonderheit scheint die letztere Meynung noch dadurch eine neue Kraft zu erhalten, daß in sehr langsamen Bewegungen der Widerstand grösser befunden wird, als die Theorie anzeigt: ungeachtet man gemeinlich diesen Umstand einer Zähigkeit der flüssigen Materie zuschreiben will.

Damit man aber hiervon desto gründlicher urtheilen könne, so wollen wir nach dieser Theorie einige Exempel¹⁾ berechnen. Es sey also c der Durchmesser der Kugel, und V/b ihre Geschwindigkeit, V/h aber die Geschwindigkeit, mit welcher die Luft in einen leeren Raum hinein zu dringen vermögend ist; so wird der Widerstand eines gleich dicken Cylinders dem Gewicht eines Cylinders von Luft gleich seyn, dessen Höhe $= 4Vbh$. Der Widerstand der Kugel wird aber dem Gewicht eines gleich dicken Cylinders Luft gleich seyn, dessen Höhe $= \frac{8}{3}Vbh$, wenn nemlich $b < h$. Wenn aber $b > h$, so muß die Höhe eines gleich schweren Cylinders genommen werden

$$= \frac{8}{3}Vbh + \frac{1}{6b}(Vb - Vh)^2(3Vb + Vh);$$

es ist aber $h = 29100$ Rheinl. Schuhe, und dieser letztere Fall findet statt, wenn die Geschwindigkeit der Kugel in einer Secunde mehr, als 1348 beträgt. Nach der gemeinen Lehre würde der Widerstand dieser Kugel dem Gewicht einer Luft-Säule gleichen, deren Höhe $= \frac{1}{2}b$. Um also zu sehen, wenn die Kugel

1) Siehe hierzu EULERS Vierte Anmerkung zum Ersten Satze dieses Capitels. F. R. S



nach diesen beyden Theorien einerley Widerstand leiden müßte, so darf man nur setzen $\frac{1}{2}b = \frac{8}{3}\sqrt{bh}$, und da kömmt $\sqrt{b} = \frac{16}{3}\sqrt{h}$; oder die Kugel müßte sich mit einer Geschwindigkeit von 7189 Schuhen in einer Secunde bewegen; bey kleinern Geschwindigkeiten würde also $\frac{8}{3}\sqrt{bh}$ immer grösser seyn, als $\frac{1}{2}b$, und das um $\frac{16}{3}\sqrt{h}$. Bey einer Geschwindigkeit also von 30 Schuhen in einer Secunde, würde der Widerstand nach diesem neuen Begriff 239 mahl grösser heraus kommen, als nach der gewöhnlichen Art. Da nun dieser mit der Wahrheit sehr genau überein kommt, so ist klar, daß der neue Begriff gar entsetzlich von der Wahrheit abweichen müsse. Wenn man auch sagen wolte, daß die Geschwindigkeit der Luft, womit dieselbe in einen leeren Raum hinein dringt, wegen anderer uns verborgenen Umstände nicht so groß wäre, als wir hier angenommen, so würde doch immer noch etwas sehr ungereimtes heraus kommen. Denn wenn auch $\sqrt{h} = 100$ oder noch weniger angenommen würde, so würde nicht nur bey sehr langsamen Bewegungen der Widerstand noch weit zu groß gefunden werden, sondern man würde auch bey sehr geschwinden Bewegungen den Widerstand immer viel kleiner finden, als nach der üblichen Lehre, da doch nach dieser in solchen Fällen der Widerstand viel zu klein gefunden wird. Es würde derowegen unnöthig seyn, diesen letztern Begriff von dem Widerstand durch mehr Exempel zu widerlegen, da die Unrichtigkeit desselben Sonnen-klar dargethan worden. Man kan hieraus den Schluß ziehen, daß man bey dergleichen Untersuchungen jederzeit die ausserste Behutsamkeit gebrauchen müße: da es nicht so leicht in die Augen fällt, wie in der daselbst gebrauchten Methode gefehlet worden. Inzwischen dienet aber dieses, die gebräuchliche Lehre von dem Widerstand der flüssigen Körper auf langsame Bewegungen um so viel mehr zu bekräftigen, und ausser allen Zweifel zu setzen. Wie aber dieselbe für sehr schnelle Bewegungen verbessert, und zur Vollkommenheit gebracht werden müsse, solches wird im folgenden dargethan werden.

DRITTER SATZ

Wie man die verschiedenen Vermehrungen der widerstehenden Kraft der Luft nach den verschiedenen Geschwindigkeiten der darinn bewegten Körper bestimmen soll?

Da in der Praxi nicht bald solche Schüsse vorkommen, in welchen die Kugel eine grössere Geschwindigkeit, als von 1700 Schuhen erhält, so habe ich auch noch keine Versuche angestellt, um die widerstehende Kraft der Luft zu bestimmen, wenn sich die Kugel mit einer grössern Geschwindigkeit bewegt. Es wird aber auch zu unserem gegenwärtigen Vorhaben genug seyn, wenn wir nur die Veränderungen des Widerstands für alle geringere Grade der Geschwindigkeit anzeigen können.

Nach den Versuchen, welche ich über diese Materie angestellt, wird die widerstehende Kraft der Luft für alle Geschwindigkeiten, welche kleiner sind, als von 1700 Schuhen in einer Secunde, vermittelst der folgenden Regel immer sehr genau bestimmt werden können.

Man nehme (Fig. 21) AB zu AC , wie sich verhält die Geschwindigkeit von 1700 Schuhen in einer Secunde, zu der vorgegebenen Geschwindigkeit, für



Fig. 21.

welche die widerstehende Kraft der Luft gesucht wird. Ferner verlängere man die Linie AB biß in D , dergestalt, daß sich verhalte BD zu AD , wie sich verhält die widerstehende Kraft der Luft für sehr langsame Bewegungen, zu der widerstehenden Kraft für die Geschwindigkeit von 1700 Schuhen in 1". Wenn dieses geschehen, so wird sich CD zu AD verhalten, wie die widerstehende Kraft der Luft für langsame Bewegungen zu der widerstehenden Kraft für den vorgegebenen Grad der Geschwindigkeit, welche durch die Linie AC vorgestellt worden.



ERSTE ANMERKUNG

Nachdem also die gemeine Lehre von dem Widerstand der Luft auf mittelmäßige Bewegungen fest gesetzt, und zugleich dargethan worden, daß für sehr schnelle Bewegungen nach derselben der Widerstand zu klein heraus komme, so muß man in diesen Fällen den Widerstand vermehren, um diese Lehre der Wahrheit völlig gemäß einzurichten. Wir haben auch oben schon die Ursache dieser Vermehrung deutlich genug eingesehen, welche auf diesen zweyen Gründen beruhet, daß erstlich bey sehr schnellen Bewegungen, die Luft nicht vermögend ist, der Kugel zu folgen, wodurch folglich der Widerstand noch mit dem Druck der Luft von vorne vermehret wird. Hernach wird auch in diesen Fällen die Luft vor der Kugel viel dicker, wodurch so wohl der Gegendruck, als der Widerstand vermehret wird. Wenn sich nun diese beyden Umstände aus der Natur der Luft genau bestimmen liessen, so wäre man im Stande, die Lehre von dem Widerstand derselben zur Vollkommenheit zu bringen. Da aber unsere Erkenntniß hierzu keineswegs hinreichend ist, so muß man sich begnügen, aus der Erfahrung diese nöthige Verbesserung, so viel als möglich, genau und der Wahrheit gemäß herzuleiten. Diesen Weg hat auch der Verfasser erwöhlet, um den Widerstand der Luft auf sehr schnelle Bewegungen in diesem Satz zu bestimmen: und da seine Versuche auf keine grössere Geschwindigkeiten, als von 1700 Schuhen in 1" gerichtet sind, so hat er sich begnügt, eine solche Regel zu geben, welche für alle geringere Grade der Geschwindigkeit den Widerstand eben so, wie er solchen durch die Erfahrung befunden hatte, anzeigte.

Um nun den Grund dieser Regel deutlicher zu erklären, so wollen wir erstlich die langsamen Bewegungen, mit welchen die Theorie gänzlich übereinstimmen gezeigt worden, in Betrachtung ziehen. Wenn sich also eine Kugel in der Luft mit einer solchen Geschwindigkeit, welche durch den Fall aus einer Höhe $= v$ erlangt wird, bewegt, so ist der Widerstand dem Gewicht einer gleich dicken Luft-Säule gleich, deren Höhe $= \frac{1}{2}v$: und auf diese Art bekommt man immer die wahre Grösse des Widerstands, wenn die Höhe v nicht sehr groß ist. Ist aber die Höhe v so groß, daß daraus eine Geschwindigkeit von 1000 und mehr Schuhen in 1" entspringt, so haben wir gesehen, daß der Widerstand in der That weit grösser sey, als $\frac{1}{2}v$; und daß derselbe, wenn die Geschwindigkeit 1700 Schuh in 1" beträgt, ungefähr durch eine Luft-Säule, deren

Höhe $= \frac{3}{2}v$, ausgedrückt worden. Wir wollen also, um unsere Ausdrückung allgemein zu machen, setzen, daß der wahre Widerstand einer Kugel dem Gewicht einer gleich dicken Luft-Säule gleiche, deren Höhe $= \theta v$: und da ist klar, daß θ eine solche veränderliche Grösse seyn müsse, daß dieselbe, wenn v nicht sehr groß ist, immer $= \frac{1}{2}$ sey: wenn aber v sehr groß wird, einen grössern Werth bekomme, und endlich gar $= \frac{3}{2}$ werde, wenn die Geschwindigkeit der Kugel auf 1700 Schuh in 1" anwächst, das ist, wenn v ungefähr 46400¹⁾ Englische Schuh groß wird. Die ganze Sache kommt also darauf an, daß man für θ eine solche Ausdrückung finde, welche, wenn v nicht merklich groß ist, allezeit $\frac{1}{2}$, wenn aber $v = 46400$, als denn $\frac{3}{2}$ gebe. Dieser Buchstabe θ ist also dasjenige, was der Autor die widerstehende Kraft der Luft nennet, und welche er in diesem Satz für einen jeglichen Fall bestimmt. Um nun aus seiner gegebenen Regel den Werth dieses Buchstabens θ heraus zu bringen, so sey f die Höhe, aus welcher die Geschwindigkeit von 1700 Schuhen in einer Secunde erlangt wird, oder es sey $\sqrt{f} = 1700$, und $\sqrt{v}$ die Geschwindigkeit, für welche die widerstehende Kraft oder der Werth des θ gesucht wird. Es bedeute ferner α den Werth für θ , wenn $\sqrt{v} = \sqrt{f}$, dergestalt, daß in diesem Fall α ungefähr $\frac{3}{2}$ seyn muß; wenn aber $\sqrt{v}$ sehr klein, so muß seyn $\theta = \frac{1}{2}$. Man nenne nun die Linie $AB = a$, so macht der Verfasser erstlich diese Proportion

$$AB(a):AC = \sqrt{f}:\sqrt{v},$$

hieraus wird

$$AC = \frac{a\sqrt{v}}{\sqrt{f}}.$$

Die zweyte Proportion des Autoris verhält sich also:

$$BD:AD = \frac{1}{2}:\alpha,$$

welche in diese verwandelt wird:

$$AB:AD = \alpha - \frac{1}{2}:\alpha;$$

hieraus wird

$$AD = \frac{2\alpha a}{2\alpha - 1}.$$

1) EULER ersetzt hier 17² durch 290 und nimmt die Beschleunigung der Schwere zu 31,25 englische Fuß an, was übrigens für die folgende numerische Rechnung belanglos ist. F. R. S



Da nun $AC = \frac{aVv}{Vf}$, so wird

$$CD = \frac{2\alpha a Vf - (2\alpha - 1)aVv}{(2\alpha - 1)Vf}$$

Endlich sagt er, werde seyn

$$CD : AD = \frac{1}{2} : \theta$$

und folglich

$$\theta = \frac{AD}{2CD}$$

Hieraus wird

$$\theta = \frac{aVf}{2\alpha Vf - (2\alpha - 1)Vv};$$

und der Widerstand einer Kugel, welche sich mit der Geschwindigkeit Vv in der Luft bewegt, wird dem Gewicht einer gleich dicken Luft-Säule gleich seyn, deren Höhe

$$= \frac{aVf}{2\alpha Vf - (2\alpha - 1)Vv} v.$$

Dieser gefundene Werth für θ hat nun die erfordernten Eigenschaften. Denn wenn die Geschwindigkeit Vv sehr klein ist, so verschwindet der Terminus $(2\alpha - 1)Vv$ vor $2\alpha Vf$, und wird also $\theta = \frac{1}{2}$; wenn aber die Geschwindigkeit Vv , 1700 Schuhe in 1" beträgt, oder dem Vf gleich wird, so kömmt $\theta = \alpha$, wie erfordert worden. Für kleinere Geschwindigkeiten bekommt θ kleinere Werthe, wie aus beygefügter Tabelle, wo wir $\alpha = \frac{3}{2}$ angenommen haben, erhellet.

Wenn die Geschwindigkeit der Kugel in einer Secunde so viel Englische Schuhe beträgt:	So ist die widerstehende Kraft der Luft, oder der Werth des Buchstabens θ :
0	0,5000
100	0,5204
200	0,5425
300	0,5667
400	0,5930
500	0,6219
600	0,6538
700	0,6892
800	0,7286
900	0,7727
1000	0,8226
1100	0,8793
1200	0,9444
1300	1,0200
1400	1,1087
1500	1,2143
1600	1,3421
1700	1,5000

Man siehet aber leicht, daß man diesen Werth des Buchstabens θ nicht für grössere Geschwindigkeiten gebrauchen könne. Denn wenn $Vv = \frac{2\alpha Vf}{2\alpha - 1}$, das ist, wenn die Geschwindigkeit 2550 Schuh in einer Secunde austragen sollte so würde θ unendlich groß, und müßte in diesem Fall der Widerstand unendlich groß seyn, welches ganz und gar ungereimt wäre. Ob nun gleich der Verfasser dieses wohl eingesehen, und seine Regel nur für kleinere Grade der Geschwindigkeit, als von 1700 Schuhen in 1" ausdrücklich einschränket, so siehet man doch, daß, da dieselbe von der Wahrheit bey grössern Geschwindigkeiten so sehr abweicht, dieselbe auch bey etwas kleineren der Wahrheit nicht völlig gemäß seyn könne. Und da man mit leichter Mühe unendlich viel dergleichen Formeln für θ finden kann, welche eben diese zwey Eigenschaften besitzen, daß erstlich für ganz kleine Geschwindigkeiten $\theta = \frac{1}{2}$, und für die Geschwindigkeit von 1700 Schuhen in 1" heraus komme $\theta = \frac{3}{2}$, so wird man der Wahrheit näher kommen, wenn man aus denselben eine solche

erwehlet, welche dieser Ungereimtheit nicht unterworfen ist. Es scheint also vielmehr, daß man den wahren Widerstand durch eine solche Formel

$$\frac{1}{2}v + pv^n$$

ausdrücken sollte, wo p eine sehr kleine Zahl, und n grösser ist, als 1. Denn auf diese Art kann man gleichfalls die nöthigen Bedingungen erhalten, daß wenn v sehr klein ist, der terminus pv^n in Ansehung des $\frac{1}{2}v$ verschwinde, und wenn v sehr groß, nemlich 46400 Schuh, daß alsdenn der terminus pv^n zwey mahl so groß werde, als der erste $\frac{1}{2}v$. Um der ersten Bedingung ein Genügen zu leisten, wird unumgänglich erfordert, daß die Zahl n grösser sey, als 1. Es kommt also nur darauf an, ob man für dieselbe $\frac{3}{2}$ oder 2 annehmen wolle: im erstern Fall würde dieser Zusatz pv^n den Cubis der Geschwindigkeit, im andern aber den Quadrato-quadratis proportional seyn. Wolte man das erstere erwehlen, so findet sich diese Schwierigkeit, daß wenn der Körper zurück gieng, und man folglich die Geschwindigkeit $\sqrt{v}$ negativ annähme, der Widerstand $= \frac{1}{2}v - pv\sqrt{v}$ heraus kommen würde, da derselbe doch eben sowohl, als im ersten Fall $= \frac{1}{2}v + pv\sqrt{v}$ seyn müßte.

Diese Schwierigkeit fällt nun weg, wenn wir für n die Zahl 2 annehmen, dergestalt, daß der Widerstand durch

$$\frac{1}{2}v + pv^2$$

ausgedrückt wird. Denn hier ist es gleich viel, ob die Geschwindigkeit selbst, $\sqrt{v}$, affirmative oder negative angenommen wird; ferner kommt auch auf diese Art die obige Schwierigkeit nicht zum Vorschein, daß für einen endlichen Grad der Geschwindigkeit der Widerstand unendlich groß wird. Diese Form erhält auch daher keine geringe Bekräftigung, daß bey sehr langsamen Bewegungen der Widerstand etwas grösser, als $\frac{1}{2}v$ werde, welche Wirkung der Zähigkeit der Luft zugeschrieben wird. Es ist aber, wie der grosse NEWTON gewiesen, die Kraft der Zähigkeit weder den Geschwindigkeiten, noch ihren Quadraten, proportional, sondern sie bleibt immer einerley.¹⁾ Wenn also diese Zähigkeit durch δ angedeutet wird, so kömmt nach der ordentlichen Lehre der ganze Wider-

1) I. NEWTON, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Editio tertia, Londini 1726, p. 274. F. R. S.

stand also ausgedrückt $\delta + \frac{1}{2}v$ heraus, wo δ eine so kleine Grösse ist, daß wenn v nicht über die massen klein ist, dieselbe in Ansehung des $\frac{1}{2}v$ gänzlich aus der Acht gelassen werden kann; als wenn zum Exempel δ nur den tausendsten Theil eines Schuhs bedeutete, so verschwindet dasselbe, so bald nur v etliche Zoll groß wird. Weil nun diese Expression $\delta + \frac{1}{2}v$ noch nicht den ganzen Widerstand ausdrückt, wenn v sehr groß ist, und folglich zu derselben noch ein Terminus gesetzt werden muß, so kann derselbe, allem Vermuthen nach, nicht anders als von dieser Form pv^2 seyn. Da wir aber den ersten Terminus δ bey geschwinden Bewegungen, dergleichen wir hier betrachten, gänzlich weglassen können, so wird der Widerstand also $\frac{1}{2}v + pv^2$ ausgedrückt werden müssen. Wenn wir daher gewiß wüsten, daß für eine Geschwindigkeit von 1700 Schuhen in 1", oder wenn $v = 46400$ Schuh, der wahre Widerstand dreymahl grösser wäre, als nach der gemeinen Regel, so würde sich hieraus der Buchstabe p bestimmen lassen. Denn da müste seyn

$$\frac{1}{2} \cdot 46400 + p \cdot 46400^2 = \frac{3}{2} \cdot 46400,$$

folglich

$$p = \frac{1}{46460}.$$

Wenn aber der Widerstand erst für eine Geschwindigkeit von 1900 Schuhen 3 mahl so groß würde, so bekäme man $p = \frac{1}{58200}$, wobey zu merken, daß 58200 Schuh die doppelte Höhe h geben, welche oben zu Ausdrückung der Elasticität der Luft ist gebraucht worden.¹⁾ Weil uns aber dieser Werth für p noch nicht bekannt ist, so wollen wir für denselben $\frac{1}{2g}$ setzen, dergestalt, daß die wahre Grösse des Widerstands seyn soll

$$= \frac{1}{2}v + \frac{1}{2g}v^2;$$

und wir wollen den wahren Werth von g aus den Experimenten selbst bestimmen. Wenn man im übrigen für $\frac{1}{2g}$ den obigen Bruch $\frac{1}{46400}$ annimmt, so kommt für alle niedrigere Grade der Geschwindigkeit fast eben der Widerstand heraus, als aus des Autoris Regel. Denn wenn wir hier wiederum die

1) Dieser Wert von p entspricht auf rheinländisches Maß bezogen einer Geschwindigkeit von 1907 Schuh. F. R. S.



widerstehende Kraft der Luft durch θ andeuten, so wird

$$\theta = \frac{1}{2} + \frac{v}{46400},$$

oder wenn die Kugel n Schuh in einer Secunde macht, so wird

$$\theta = \frac{1}{2} + \frac{nn}{2890000}.$$

Ist also $n=100$, so wird $\theta=0,5034$, welches kleiner ist, als nach des Autoris Regel; wird aber $n=800$, so kommt $\theta=0,7214$ fast wie bey dem Autore; wenn aber $n>800$ bis $n=1700$, so sind die hieraus entstehenden Werthe des θ grösser, als nach dem Autore, welches der Wahrheit nicht entgegen zu seyn scheint.

ZWEYTE ANMERKUNG

Wir wollen also annehmen, der wahre Widerstand, welchen eine Kugel, die sich mit einer Geschwindigkeit Vv in der Luft bewegt, sey gleich einem gleich dicken Cylinder Luft, dessen Höhe

$$= \frac{1}{2}v + \frac{1}{2g}v^2,$$

und wir wollen den Buchstaben g dergestalt bestimmen, daß die Rechnung mit den Experimenten des Verfassers, so viel als möglich, übereinkommt. Es sey daher (Fig. 19) der Diameter der Kugel $=c$, welche sich nach der geraden Linie AB in der Luft dergestalt bewegen soll, daß ihre Geschwindigkeit in dem Anfang der Bewegung in A sey $=Vb$; woraus man die Geschwindigkeit derselben in einem jeglichen Punkt M bestimmen solle, welche sey $=Vv$. Man setze den Weg $AM=x$, und die Kugel bestehe aus einer solchen Materie, welche n mahl schwerer sey, als die Luft, folglich wird die Schwere der Kugel einer gleich dicken Luft-Saule gleichen, deren Höhe $=\frac{2}{3}nc$; und die Schwere der Kugel wird sich also zu dem Widerstand in M verhalten, wie $\frac{2}{3}nc$ zu $\frac{1}{2}v + \frac{1}{2g}v^2$ oder

$$\text{wie 1 zu } \frac{3v}{4nc} + \frac{3v^2}{4ncg}.$$

Indem also die Kugel durch den unendlich kleinen Raum $Mm=dx$ fortgethet, so wird seyn:

$$dv = -\frac{3dx}{4nc} \left(v + \frac{vv}{g} \right)$$

oder

$$\frac{3dx}{4nc} = \frac{-g dv}{gv + vv} = \frac{-dv}{v} + \frac{dv}{g+v},$$

welches gehöriger massen integrirt gibt

$$\frac{3x}{4nc} = l \frac{b(g+v)}{v(g+b)},$$

oder wenn e für die Zahl angenommen wird, deren hyperbolischer Logarithmus -1 , so wird

$$e^{3x:4nc} = \frac{b(g+v)}{v(g+b)}$$

oder

$$e^{3x:4nc}bv + e^{3x:4nc}gv = bg + bv,$$

woraus man erhält

$$g = \frac{(e^{3x:4nc} - 1)bv}{b - e^{3x:4nc}v},$$

wobey zu merken, daß wenn $\frac{3x}{4nc}$ ein sehr kleiner Bruch, alsdenn beynahe sey

$$e^{3x:4nc} = 1 + \frac{3x}{4nc} + \frac{9xx}{2 \cdot 16n^2c^2} + \text{etc.}$$

In den von dem Autore angeführten Exempeln war nun, weil die Kugel von Bley gewesen, $n=9647$, und der Diameter der Kugel $c=\frac{3}{4}$ Zoll. Ferner hatte die Kugel anfänglich eine Geschwindigkeit von 1670 Engl. Schuhen in einer Secunde, daher $b=41990$ Rheintl. Schuhe oder 43237¹⁾ Engl. Schuhe. Wir wollen hierzu das zweyte Exempel des Autoris in Betrachtung ziehen, worinne die Kugel, nachdem dieselbe einen Weg von 100 Schuhen durchgelaufen, noch eine Geschwindigkeit von 1425 Schuhen in einer Secunde behalten. Also verhält sich $Vb:Vv=1670:1425$; und $b:v=103:75$ bey nahe. Hernach da $x=100$ Schuh, so wird

$$\frac{3x}{4nc} = 0,12439^2),$$

1) Im Original 42190.

2) Im Original 0,12436.

Berichtigt von F. R. S.

folglich

$$e^{\frac{3x}{4nc}} = 1,13242$$

und dahero wird

$$g = \frac{0,13242 \cdot 75}{103 - 75 \cdot 1,13242} b = \frac{9,93150}{18,0685} b^1),$$

oder da $b = 41990$ Rheinl. Schuhe, so wird $g = 23080^2)$ Rheinl. Schuhe.

Im dritten Exempel war $Vb = 1690$ Schuh, $x = 150$ Schuh, und $Vv = 1300$ Schuh, dahero $\frac{3x}{4nc} = 0,18654$ und $e^{\frac{3x}{4nc}} = 1,20507$ und folglich

$$g = \frac{0,20507 v}{b - 1,20507 v} b.$$

Da nun

$$Vb : Vv = 13 : 10 \quad \text{und} \quad b : v = 169 : 100,$$

so wird

$$g = \frac{20,507}{48,493} b.$$

Es ist aber $b = 42981$ Rheinl. Schuh, und wird also $g = 18176$ Rheinl. Schuh.

Wir wollen nun den Werth von g noch aus dem 4ten Experiment untersuchen, in welchem, wie in den vorhergehenden, war $c = \frac{3}{4}$ Zoll, und $n = 9647$. Die Geschwindigkeit der Kugel in A aber war $Vb = 1180$ Schuh, und nachdem dieselbe den Raum $x = 225$ Schuh durchlaufen, war $Vv = 950$ Schuh. Hieraus wird $\frac{3x}{4nc} = 0,27986$, und also $e^{\frac{3x}{4nc}} = 1,32294$, folglich

$$g = \frac{0,32294 v}{b - 1,32294 v} b.$$

Es ist aber $b : v = 13924 : 9025$ und dahero wird

$$g = \frac{2914,5335}{1984,4665} b.$$

Nun aber ist hier $b = 20958$ Rheinl. Schuh, derowegen wird $g = 30781$ Rheinl. Schuh.

Aus diesen drey Experimenten des Autoris haben wir also drey verschiedene Werthe für die Buchstaben g bekommen, nemlich

1) Im Original $\frac{9,93150}{18,86758} b$. 2) Im Original 22102. Berichtigt von F. R. S.

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. } g = 23080^1) \\ \text{II. } g = 18176 \\ \text{III. } g = 30781 \end{array} \right\} \text{ Rheinl. Schuh.}$$

Wenn man nun zwischen diesen ein Mittel nimmt, so kommt heraus $g = 24012^2)$. Da aber in dem dritten die Kugel einen weit grösseren Weg, als in den beyden andern beschrieben, und auch der Unterschied zwischen den Geschwindigkeiten in A und M grösser gewesen, so hat die Unrichtigkeit der Ausmessungen in dem letzten Experiment keinen so grossen Einfluß haben können, als in den andern, und dahero scheint der letzt gefundene Werth des g der Wahrheit am meisten gemäß zu seyn. Weil man aber doch Ursache zu vermuthen hat, daß derselbe noch etwas zu groß ist, die Höhe einer natürlichen Luft-Säule aber, welche der elastischen Kraft der Luft gleich ist, etwas kleiner gefunden wird, so scheint der Wahrheit gemäß zu seyn, daß dieser Buchstabe g dieser Höhe accurat gleich sey. Wir haben aber oben diese Höhe etwas zu groß angesetzt, weil wir daselbst die Luft 864 mahl leichter, als das Wasser genommen haben. Wenn wir also [für die Höhe] einer Quecksilber-Säule, deren Gewicht der Elasticität der Luft gleich ist, 30 Englische Zoll oder $2\frac{1}{2}$ Schuh annehmen, das Quecksilber aber 13,575 mahl schwerer, als Wasser, und 11538 mahl schwerer, als Luft setzen, so kommt die Höhe einer natürlichen Luft-Säule, deren Gewicht der Elasticität der Luft gleich ist, = 28845 Englische, oder 27979 Rheinl. Schuh, und also werden wir uns am allerwenigsten von der Wahrheit entfernen, wenn wir für g diese Höhe annehmen. Da wir nun bisher den Buchstaben h für diese Höhe gebraucht haben, welcher folglich diesen Werth haben wird

$$h = 28845$$

Engl. Schuh oder

$$h = 27979$$

Rheinl. Schuh, so wird $g = h$, und dahero ist der Widerstand einer Kugel gleich dem Gewicht einer gleich dicken Luft-Säule, deren Höhe $= \frac{1}{2} v + \frac{1}{2} h v v$. Die widerstehende Kraft der Luft, welche hier durch $\frac{1}{2} + \frac{v}{2h}$ ausgedrückt wird, ist also um so viel grösser, je geschwinder sich die Kugel bewegt, und das fast nach

1) Im Original 22102. 2) Im Original 23686. Berichtigt von F. R. S.



eben der Regel, welche der Autor gegeben. Nach unserer Regel beträgt die Geschwindigkeit der Kugel, deren Widerstand drey-mahl grösser ist, als nach der gemeinen, 1870 Rheinl. oder 1926 Engl. Schuh. Der Autor scheint zwar der Meynung zu seyn, als wenn dieses schon bey einer Geschwindigkeit von 1700 Schuhen in 1" geschähe; der Unterscheid ist aber bey so vielen Unrichtigkeiten, welchen die Versuche unterworfen sind, nicht so groß, daß derselbe in Betrachtung gezogen zu werden verdiente. Im übrigen bekräftiget diese Uebereinstimmung der Buchstaben g und h die Wahrheit unserer Formel nicht wenig, weil man vorher hätte sehen können, daß der gefundene Zusatz $\frac{1}{2h}vv$ durch die Elasticität der Luft bestimmt werden müßte. Denn da diese Vermehrung des Widerstands, theils von der Verdickung der Luft vor der Kugel, theils von der Verdünnung hinter derselben herkommt, diese beyden Umstände aber auf der Elasticität der Luft beruhen, so kann die gedachte Vermehrung keiner andern Ursache, als der Elasticität der Luft, zugeschrieben werden. Man siehet auch ferner, daß je grösser die Elasticität der Luft ist, je geringer die entstehende Verdickung vor der Kugel, und die Verdünnung hinter derselben seyn müsse; indem alsdenn die Luft mehr Kraft hat, sich mit der umliegenden ins Gleichgewicht zu setzen. Hieraus folget also, daß je grösser die Elasticität der Luft ist, je kleiner der Zuwachs des Widerstands werden, und daß derselbe, wenn die Elasticität unendlich groß wäre, völlig verschwinden müsse. Eben dieses weist auch die gefundene Formel $\frac{1}{2}v + \frac{1}{2h}vv$, in welcher der Zusatz $\frac{1}{2h}vv$ um so viel kleiner wird, je grösser man die Höhe h , wodurch die Elasticität der Luft ausgemessen wird, annimmt; und wenn h gar unendlich groß gesetzt werden sollte, so würde das Glied $\frac{1}{2h}vv$ gänzlich verschwinden, wie solches die Natur der Sache zu erkennen giebt. Eben diese Eigenschaften würden zwar auch Statt finden, wenn man für g an Statt h , entweder $2h$ oder $3h$, oder auch $\frac{1}{2}h$ setzen sollte; allein es ist aus den obigen Rechnungen leicht zu sehen, daß, um den Experimenten ein Genügen zu leisten, für g weder $\frac{1}{2}h$ noch $2h$, noch viel weniger $3h$ angenommen werden könne. Dahero diese Simplicität, daß just die Höhe h dem Werth von g am nächsten gekommen, die Gewißheit unserer gefundenen Formel um so vielmehr bestärket, indem dergleichen Ausdrücke der Natur immer am meisten gemäß befunden werden. Wenn also diese unsere Regel, um den Widerstand der Luft zu bestimmen, mit der Wahrheit gänzlich übereinstimmt, ungeachtet dieselbe hier bloß aus der Erfahrung hergeleitet worden, so ist doch kein Zweifel, daß man dieselbe nicht auch aus der Theorie allein sollte

heraus bringen können. Und da man von der Wahrheit derselben zum voraus versichert ist, so kann die Betrachtung derselben nicht wenig zu einer vollkommenern Erkenntniß der Natur und wahren Ursache des Widerstands, als welche, wie aus dem obigen zur Gnüge erhellet, noch sehr unvollständig ist, beytragen.

VIERTER SATZ

Wie man die Geschwindigkeit, mit welcher Müssketen- und Canonen-Kugeln durch Hülfe der gewöhnlichen Ladung Pulver heraus geschossen werden, bestimmen soll?

Aus den in dem 7ten Satz des ersten Capitels angestellten, und durch die folgenden Versuche bekräftigten Rechnungen erhellet, daß eine bleyerne Kugel von $\frac{3}{4}$ Zoll im Diameter und $1\frac{1}{8}$ Unzen Avoirdupoise am Gewicht, wenn dieselbe mit dem halben Gewicht Pulver aus einem Lauf, der 45 Zoll lang ist, heraus geschossen wird, eine solche Geschwindigkeit erhalte, mit welcher dieselbe nach einer gleichförmigen Bewegung 1700 Schuh in einer Secunde zurück legen würde.

Wenn man, an statt einer bleyernen Kugel, eine eiserne von gleicher Grösse und unter gleichen Umständen in den Lauf laden, und mit der vorigen Ladung Pulver herauschiessen sollte, so würde diese eiserne Kugel eine grössere Geschwindigkeit erhalten, als die bleyerne, und das nach der Verhältniß der Quadrat-Wurzeln aus der Schwere des Bleys zur Schwere des Eisens. Wenn wir nun diese Verhältniß setzen wie 3 zu 2, und nach den an dem angeführten Ort gegebenen Regeln die Rechnung anstellen, so wird man finden, daß eine eiserne Kugel, so 24 Pfund schwehr, wenn dieselbe aus einem Stück, dessen Seele 10 Schuh lang, mit 16 Pfund Pulver geschossen wird, dadurch eine solche Geschwindigkeit erhalten werde, womit dieselbe, nach einer gleichförmigen Bewegung, beynahe 1650 Schuh in einer Secunde durchlaufen könnte.

Dieses ist also die Geschwindigkeit, welche eine Canon-Kugel von 24 Pfund nach unserer Theorie erhalten muß, wenn dieselbe mit voller Ladung heraus geschossen wird. Wenn man aber an statt dieser Ladung Pulver, welche $\frac{2}{3}$ des Gewichts der Kugel austrägt, nur die Helfte des Gewichts der Kugel, nemlich 12 Pfund laden sollte, so wird nach eben diesen Regeln die Geschwin-



digkeit der Kugel in einer Secunde nicht mehr, als 1490 Schuh austragen. Eben diese Geschwindigkeit wird auch bey allen kleinern Kugeln Statt finden, wofern dieselben nur mit einer ähnlichen Ladung Pulver geschossen werden, und die Länge des Laufs zum Diameter der Kugel beständig einerley Verhältniß behält. Ob man aber gleich in der Artillerie bey den kleinern Stücken diese Verhältniß zwischen der Länge der Seele und dem Diameter der Kugel nicht zu beobachten pflegt, so ist doch der Unterscheid nicht so groß, daß die hier bestimmte Geschwindigkeit viel von der Wahrheit abweichen könnte, welches vermittelt der Rechnung ein jeder leicht befinden wird.

Wir setzen aber bey diesen Bestimmungen zum voraus, daß der Spielraum nicht grösser sey, als eben nöthig ist, die Kugel in den Lauf leicht hinein zu bringen, ungeachtet es in der That entweder aus Unachtsamkeit oder Unwissenheit öfters zu geschehen pflegt, daß der Diameter der Mündung den Diameter der Kugel so sehr überschreitet, daß ein grosser Theil der fortreibenden Gewalt des Pulvers an den Seiten heraus dringt: und in diesem Fall mag freylich die Geschwindigkeit der Kugel sehr merklich kleiner seyn, als wir hier bestimmt haben. Inzwischen ist es doch wahrscheinlich, daß ein guter Theil dieses Verlusts durch den Zuwachs der grösseren Hitze, womit, wie oben in dem sechsten Satz angemerkt worden, dergleichen grosse Ladungen Pulver allem Ansehen nach begleitet sind, ersetzt werde.

ZUSATZ

Die Betrachtung dieser hier bestimmten erstaunlichen Geschwindigkeit der Canonen-Schüsse kann dienen, um eine Schwierigkeit aufzulösen, wodurch verschiedene Autores, welche über die gemeine Lehre der Artillerie geschrieben haben, sind veranlasset worden, auf eine ganz ausserordentliche und ungereimte Meynung zu verfallen. Diese Schwierigkeit, wovon ich rede, besteht in dem sogenannten Kernschuß, oder der Weite, durch welche die Kugel sich nach einer geraden Linie, wie man sich die Sache vorzustellen pflegt, bewegen soll. Unser ANDERSON¹⁾ hatte durch viele Versuche befunden, daß die Bahn der Kugeln und Bomben im ersten Anfang ihrer Bewegung nicht so viel gekrümmt war, als dieselbe nach den Grundsätzen des GALILEI, wenn man mit denselben die Weite des Schusses in Vergleichung ziehet, hätte seyn sollen. Um nun diesen Umstand nach seiner Theorie zu erklären, so hat er geglaubt, daß bey

1) Siehe die Anmerkung 2 p. 36. F. R. S.

einem jeglichen Schusse die Kugel durch eine gewisse Weite von der Mündung des Stücks in einer geraden Linie fortgehe, und daß die Kraft der Schwebre auf dieselbe inzwischen keine Wirkung habe. Durch dieses Mittel dachte er die Lehre von der parabolischen Bewegung zu retten, und stimmte zugleich der gemeinen Meynung, welche die practischen Scribenten überhaupt hierüber gegeben, bey. Wenn man aber auch gleich diese Beobachtung auf keine bessere Art erklären könnte, so würde doch verhoffentlich nicht nöthig seyn, eine so ungereimte Meynung, dergleichen die Aufhebung der Kraft der Schwebre ist, zu widerlegen. In der That aber hat sich der ANDERSON darinn betrogen, daß er nicht gewußt, wie sehr die erste Geschwindigkeit der schwersten Canonen-Schüsse durch den Widerstand der Luft während der Bewegung verändert wird. Hieraus ist es auch nicht schwer, die gemeine Meynung der practischen Artilleristen zu erklären, wenn dieselben behaupten, daß eine jede Canonen-Kugel auf eine gewisse Weite von dem Stück in einer geraden Linie fortgehe, welche eingebildete Weite sie den Kern-Schuß zu nennen pflegen. Denn hierzu haben wir nicht mehr nöthig, als darzuthun, daß in dieser also bestimmten und benannten Weite die Abweichung der Bahn, worinn sich die Kugel bewegt, von einer geraden Linie so geringe ist, daß sie dieselbe nach ihrer Art nicht zu bemerken vermögend sind. Da nun eine Kugel von 24 $\#$, welche mit einer Ladung von $\frac{2}{3}$ ihres Gewichts Pulver geschossen wird, in einer Weite von 1500 Schuhen von dem Stück nicht mehr von ihrer ersten Richtung, als um einen Winkel, so nur etwas wenig grösser ist, als ein halber Grad, abweicht, so werden diejenigen, denen die ungewissen Methoden bekannt sind¹⁾, nach welchen die Stücke öfters gerichtet zu werden pflegen, leicht erkennen, daß eine so geringe Abweichung als diese ist, von dem gemeinen Haufen der Artilleristen nicht wohl bemerkt werden könne, und daß dieselben folglich diesen Theil der Bahn, in welcher sich die Kugel bewegt, unfehlbar als eine gerade Linie ansehen müssen: insonderheit da noch öfters andere Fehler mit unterlaufen, welche vielmehr austragen, als die Krümmung dieser Linie, welche von der Kraft der allgemeinen Schwebre verursacht wird.

In diesem Satz ist also die Geschwindigkeit der Kugel, so wohl wenn die Ladung an Pulver zwey Drittel ihres Gewichts, als wenn dieselbe nur die Helfte austrägt, bestimmt worden. Ich muß aber bey dieser Gelegenheit erinnern, daß nach den Gründen unserer Theorie, welche in dieser Abhandlung fest ge-

1) Die Worte *bekannt sind* fehlen im deutschen, nicht aber die entsprechenden im englischen Original. F. R. S.



gesetzt worden, wenn die Ladung immer grösser angenommen wird, die Geschwindigkeit der Kugel dadurch nur biß auf einen gewissen Grad vermehrt werden könne; dergestalt, daß man für einen jeglichen Fall eine gewisse Grösse der Ladung anzeigen kann, durch welche die Kugel am geschwindesten fortgetrieben wird: und wenn man noch mehr Pulver laden sollte, daß alsdenn die Geschwindigkeit der Kugel geringer seyn würde. Diese Ladung, welche der Kugel die größte Geschwindigkeit mittheilet, und die Verhältnisse dieser Geschwindigkeit zu denjenigen, welche von grössern oder kleinern Ladungen herkommen, kann folgender Gestalt ausfindig gemacht werden.

Man stelle sich die Linie AB (Fig. 22) als die Axe des Stücks vor, und ziehe darauf die Perpendicular-Linie AC ; zwischen diesen Linien AC und AB ,

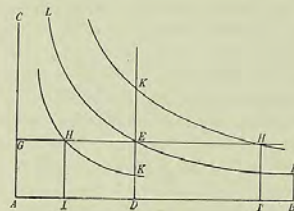


Fig. 22.

als den Asymptoten, beschreibe man eine Hyperbel LEF , und ziehe die Linie BF parallel mit AC . Hierauf finde man das Punkt D , wo das Viereck $ADGE$ gleich wird dem hyperbolischen Raum $DEFF$; alsdenn wird die Linie AD die Höhe der Ladung anzeigen, welche der Kugel die allergrösste Geschwindigkeit mittheilet. Da sich nun, wie aus der Lehre von den Logarithmis bekannt ist, AD zu AB verhält, wie 1 zu 2,71828, so wird aus der Länge der

Linie AD , welche solchergestalt gefunden worden, und aus der Weite der Mündung, die Menge des Pulvers, so zu dieser Ladung erfordert wird, leicht bestimmt werden können.

Wenn man aber an statt dieser Ladung eine andere annimmt, welche in der Höhlung des Stücks den Raum AI einnimmt, so ziehe man IH mit AC parallel, und beschreibe durch das Punkt H zwischen den vorigen Asymptoten AB und AC eine Hyperbel HK . Wenn dieses geschehen, so wird sich die grösste Geschwindigkeit zu der Geschwindigkeit, welche der Kugel durch diese Ladung AI eingedrückt wird, verhalten, wie die Quadrat-Wurzel aus dem Viereck AE zu der Quadrat-Wurzel aus einem Raum, welcher entsteht, wenn man von dem Viereck AE die dreylinichte Figur HEK wegnimmt. Alles dieses folgt leicht aus den Grundsätzen, welche in dem siebenten Satz des ersten Kapitels fest gesetzt worden.

ERSTE ANMERKUNG

Nachdem der Autor im ersten Kapitel nur die Geschwindigkeit von kleinen Mußketen-Kugeln ausgerechnet, und durch die Erfahrung vermittelt seines Penduli bestätigt hatte, so zieht derselbe allhier die Canonen-Kugeln in Betrachtung; und da die Geschwindigkeit derselben nicht durch die vorher gebrauchte Maschine bestimmt werden kann, so begnügt er sich, dieselbe bloß allein aus seiner Theorie heraus zu bringen. Denn, weil bey kleinen Kugeln sich kein merklicher Unterscheid zwischen der Theorie und der Erfahrung geäußert, so konnte er mit dem grössten Grunde vermuthen, daß die Theorie auch bey grossen Kugeln mit der Erfahrung übereinstimmen würde. Und ob zwar gleich der Spielraum in Canonen nach Proportion weit grösser ist, als in Mußketen, und dadurch folglich vielmehr von der fortreibenden Gewalt des Pulvers verlohren geht, so ist hinwiederum bey Canonen-Schüssen die Erhitzung, welche durch die Entzündung des Pulvers verursacht wird, seiner Meynung nach grösser, als in kleinen Schießgewehren; und da hierdurch die fortreibende Kraft des Pulvers vermehrt wird, so mag durch diesen Zuwachs der Gewalt der gedachte Abgang ungefehr ersetzt werden. Wir haben schon oben bemerkt, wie viel Umstände der Autor in Berechnung der Geschwindigkeit der Kugel aus der Acht gelaßen. Da aber dieselben hauptsächlich bey Untersuchung der Natur und der wahren Kraft des Pulvers in Betrachtung gezogen werden müssen, so kann es zu dem gegenwärtigen Endzweck genug seyn, eine solche Formel, wodurch die Geschwindigkeit der Kugel ausgedrückt wird, zu erwählen, welche mit der Experientz bey kleinern Kugeln übereinstimmend befunden worden, wenn in derselben auch gleich nicht auf alle Umstände gesehen wird. Denn es ist zu vermuthen, daß eine solche Regel, welche für kleine Kugeln der Wahrheit gemäß gefunden worden, auch für grosse Kugeln nicht so sehr von der Wahrheit abweichen werde; insonderheit da man in diesem Stück keine vollkommene Erkenntniß hoffen kann.

Wir wollen also hierzu die in der Anmerkung zu dem letzten Satz des vorigen Kapitels gegebene Formel gebrauchen, als welche keine weitläufige Rechnung erfordert, und für kleine Kugeln fast eben diejenige Geschwindigkeit gibt, welche durch die Erfahrung befunden worden. Da sich aber in derselben zwey Buchstaben m und n befinden, welche auf der Güte des Pulvers beruhen, so wollen wir dafür diejenigen Werthe ansetzen, welche das Gouvernements-Pulver, so der Autor gebraucht, denselben beyleget; es wird also ungefehr



$m = 244$ und $n = 850$. Dieses vorausgesetzt, so sey die Länge des ganzen Laufs $= a$, die Länge des Raums hinter der Kugel, welcher mit Pulver ausgefüllt wird, $= b$, und k die Höhe einer Luft-Säule, so dem Gewicht der Kugel gleich ist, und h die Höhe einer Luft-Säule, welche die Elasticität der Luft ausmisst, dergestalt, daß $h = 27980$ Rheintl. Schuh, wie wir befunden. Endlich sei v die Höhe, aus welcher ein fallender Körper eben diejenige Geschwindigkeit erlanget, mit welcher die Kugel heraus getrieben wird, und da hatten wir diese Vergleichung gefunden:

$$v = \frac{244\beta b h}{k + 425b} l^{\frac{800a - 396b}{404b}} \quad 1)$$

Es ist aber nach dem Autore $244\beta = 1000^2$, und wenn wir in dem Bruch $\frac{800a - 396b}{404b}$ für die Zahlen 396 und 404 die runde Zahl 400 setzen, als wodurch der Werth dieses Bruchs nicht merklich verändert wird, so bekommen wir

$$v = \frac{1000bh}{k + 425b} l^{\frac{2a-b}{b}}$$

Setzt man nun hier für des Autoris erstes Experiment $a = 45$ Zoll, $b = 2\frac{5}{8}$ Zoll, $k = 4900$ Zoll, so kommen für die Geschwindigkeit der Kugel 1684 Englische Schuh in einer Secunde, welches mit der Wahrheit ziemlich genau übereinstimmt. Wenn nun c für den Diameter der Kugel [gesetzt wird], und die Materie der Kugel n mahl schwerer ist, als die Luft, so wird $k = \frac{2}{3}nc$. Da nun das Gewicht des Pulvers ist $= 850b$, so wird sich das Gewicht der Kugel zum Gewicht der Ladung verhalten, wie k zu $850b$. Es sey also das Gewicht der Kugel $= P$, das Gewicht der Ladung $= Q$, so wird seyn $k:850b = P:Q$ und also $k:b = 850P:Q$. Derowegen da in den Schüssen die Verhältniß zwischen dem Gewicht der Kugel und des Pulvers gegeben zu werden pflegt, so entspringet hieraus diese Aequation

$$v = \frac{1000Qh}{425(2P+Q)} l^{\frac{2a-b}{b}},$$

oder da $h = 27980$ Rheintl. Schuh, so wird

$$v = \frac{65700Q}{2P+Q} l^{\frac{2a-b}{b}}$$

Rheintl. Schuh.

1) Siehe p. 234.

2) Siehe p. 205.

F. R. S.

Ferner da $k = \frac{2}{3}nc$, so wird

$$P:Q = \frac{2}{3}nc:850b = nc:1275b,$$

folglich

$$b = \frac{nQc}{1275P};$$

und wird also b durch den Diameter der Kugel c bestimmt. Es pflegt aber auch die Länge des Stücks a in solchen Diametern ausgedrückt zu werden; wenn wir also setzen, daß $a = ic$, so wird

$$a:b = i:\frac{nQ}{1275P} = 1275iP:nQ$$

und also wird

$$v = \frac{65700Q}{2P+Q} l^{\frac{2550iP-nQ}{nQ}}$$

Rheintl. Schuh. Wenn nun, wie für die Canonen zu seyn pflegt, die Kugel von Eisen ist, so wird $n = 6647$ oder 6650, dahero für eiserne Kugeln seyn wird

$$v = \frac{65700Q}{2P+Q} l^{\frac{51iP-133Q}{133Q}}$$

Rheintl. Schuh. Wenn also die Ladung Q halb so schwer genommen wird, als die Kugel P , so bekommen wir

$$v = 13140 l^{\frac{102i-133}{133}}$$

Rheintl. Schuh. Beträgt aber die Ladung Q $\frac{2}{3}$ des Gewichts der Kugel P , so wird

$$v = 16425 l^{\frac{153i-266}{266}}$$

Rheintl. Schuh, und diese zwey Fälle werden hier von dem Autore in Betrachtung gezogen. Wir wollen aber noch über dieses setzen, daß die Ladung Q drey Viertel des Gewichts der Kugel ausmache, so wird

$$v = 17918 l^{\frac{204i-399}{399}}$$

Rheintl. Schuh.



Und wenn endlich die Ladung Q an Pulver dem Gewicht der Kugel selbst gleich genommen wird, so bekommt man

$$v = 21900 \sqrt{\frac{51i - 133}{133}}$$

Der Autor betrachtet ferner nur die Schüsse einer halben Carthaune, indem er das Gewicht der Kugel 24 α setzt; wir wollen aber hier aus diesen Formeln die Geschwindigkeit der Kugeln für alle gebräuchliche Arten der Stücke ausrechnen. Hier kommen also erstlich vor die ganzen Carthaunen, aus welchen 48pfündige Kugeln geschossen werden; in denselben pflegt $i = 18$ zu seyn. Hernach folgen die drey Viertel-Carthaunen, welche Kugeln von 36 α schiessen; in diesen ist gemeiniglich $i = 20$. Drittens kommen die halben Carthaunen, so 24pfündige Kugeln schiessen, und in welchen $i = 24$. In Viertel-Carthaunen von 12pfündigen Kugeln ist $i = 26$, in Achtel-Carthaunen oder 6pfündigen Kugeln ist $i = 27$. In Regiments-Stücken ist aber selten i mehr, als 18. Außer diesen pflegen noch andere Arten Stücke gebraucht zu werden, als da sind die ganzen Feldschlangen, aus welchen 18pfündige Kugeln geschossen werden, in diesen ist $i = 30$; für halbe Feld-Schlangen ist $i = 32$; für Viertel- oder vielmehr Drittel-Feldschlangen, weil die Kugeln 6 Pfund wägen, ist $i = 34$. In Quartier-Feldschlangen oder Falkonets ist $i = 36$; in halben Falkonets ist $i = 38$, und in den Serpentineln ist $i = 40$. Aus allen diesen verschiedenen Arten von Stücken wird also die Kugel mit einer solchen Geschwindigkeit heraus geschossen, als die nachfolgende Tabelle ausweist, welche aus 4 Columnen besteht. Die erste gilt, wenn das Gewicht der Ladung halb so groß ist, als das Gewicht der Kugel, die andere, wenn die Ladung $\frac{2}{3}$ des Gewichts der Kugel austrägt; die dritte ist für die Ladung, welche $\frac{3}{4}$ des Gewichts der Kugel ausmacht, und die vierte, wenn die Ladung der Kugel gleich ist. Die Geschwindigkeit ist endlich in Rheinl. Schublen ausgedruckt, so viel die Kugel in einer Secunde durchlaufen würde.

	h. Lad.	$\frac{2}{3}$ Lad.	$\frac{3}{4}$ Lad.	g. Lad.	i
ganze Carth.	1447	1515	1535	1559	18
3viert. Carth.	1479	1554	1577	1612	20
halbe Carth.	1532	1618	1647	1697	24
viertel Carth.	1554	1645	1676	1733	26
achtel Carth.	1565	1657	1690	1749	27
Reg.-Stück	1447	1515	1535	1559	18
g. Feld-Schl.	1593	1692	1727	1794	30
h. Feld-Schl.	1610	1712	1749	1821	32
dr. Feld-Schl.	1626	1731	1769	1845	34
Falkonets	1642	1749	1788	1868	36
h. Falkonets	1656	1766	1806	1889	38
Serpentinel	1669	1781	1823	1909	40

Aus diesem Täflein sieht man also, daß, wenn die Ladung zum Gewicht der Kugel einerley Verhältniß hat, alsdenn die Geschwindigkeit der Kugel um so viel grösser heraus komme, je mehrmahl der Diameter der Kugel in der Länge des Stücks enthalten ist. Also treibet eine ganze Carthaune ihre Kugel mit einer geringeren Geschwindigkeit heraus, als eine halbe Carthaune, welches denen Artilleristen, welche von dem Widerstand der Luft keinen rechten Begriff haben, unglaublich und ungereimt vorkommen wird. Denn da durch die Erfahrung bekannt ist, daß unter einerley Richtung der Schuß einer ganzen Carthaune weiter reicht als einer halben, so scheint daraus zu folgen, daß auch die Kugel der ganzen Carthaune eine grössere Geschwindigkeit haben müsse, als einer halben. Dieser Schluß würde seine völlige Richtigkeit haben, wenn entweder der Widerstand der Luft gar nicht vorhanden, oder doch nicht merklich wäre, wie man insgemein dafür zu halten pflegt; denn alsdenn müßte auch ohne Zweifel ein Schuß unter einerley Richtung des Stücks um so viel weiter reichen, je grösser die Geschwindigkeit wäre, mit welcher die Kugel heraus getrieben wird. Weil aber der Widerstand der Luft so erstaunlich groß ist, wie allbereit dargethan worden, und derselbe insonderheit von der Größe der Kugel abhängt, so ist es möglich, daß eine grössere Kugel weiter reicht, als eine kleinere, wenn auch jener anfanglich eine kleinere Geschwindigkeit eingedruckt worden, als dieser. Um dieses begreiflicher zu machen, so ist zu merken, daß die Wirkung des Widerstands nicht so wohl aus der Grösse



desselben selbst, als aus der Verhältniß desselben zum Gewicht der Kugel beurtheilt werden muß. Wenn wir uns also zwey Kugeln von gleicher Materie vorstellen, wovon die erste dem Diameter nach zweymahl so groß seyn soll, als die andere, so wird das Gewicht der ersten acht mahl grösser sein, als der andern. Ob nun gleich der Widerstand der ersten viermahl grösser ist, als der anderen, wenn ihre Geschwindigkeiten einander gleich sind, indem der Widerstand sich nach den Oberflächen, oder nach den Quadraten der Diameterum richtet, so wird doch die Wirkung des Widerstands der ersten Kugel sich zur andern verhalten, nicht wie 4 zu 1, sondern wie $\frac{4}{8}$ zu $\frac{1}{1}$, folglich wird die Wirkung des Widerstands in der ersten und grössten Kugel nur halb so groß seyn, als in der andern. Hieraus erhellet nun, daß wenn diese beyden Kugeln mit einerley Geschwindigkeit und Richtung geworfen würden, die erstere nothwendig viel weiter reichen würde, als die andere; und wenn beyde gleich weit gehen sollten, so würde die grössere anfanglich einen kleinern Grad der Geschwindigkeit gehabt haben, als die kleinere. Dieser Unterschied ist auch, wie aus dem folgenden mit mehrerem erhellen wird, so groß, daß sich daraus gar leicht begreifen läßt, wie eine grössere Kugel unter einerley Richtung weiter getrieben werden könne, als eine kleinere, ungeachtet jene anfanglich keine so grosse Geschwindigkeit gehabt, als diese.

Der Autor betrachtet nur eine eiserne 24pfündige oder halbe Carthaunen-Kugel, und gibt derselben, wenn die Ladung 16 # ist, eine Geschwindigkeit von 1650 Schuhen in 1", welches ziemlich genau mit unserer Bestimmung übereintrifft; denn die Tabelle weiset für diesen Fall 1618 Rheintl. Schuh, welches 1666 englische Schuh beträgt. Wenn aber die Ladung nur halb so schwehr ist, als die Kugel, nemlich von 12 #, so setzt der Autor die Geschwindigkeit nur von 1490 Engl. Schuhen in 1", da wir für diesen Fall 1532 Rheintl. oder 1577 Engl. Schuh gefunden. Es ist aber zu merken, daß der Autor die Geschwindigkeit nach einer solchen Regel gerechnet, in welcher alle nöthige Umstände, welche sich bey Entzündung des Pulvers ereignen, aus der Acht gelassen worden. Die Regel, deren sich derselbe bedient, ist in dieser Formel enthalten

$$v = \frac{1000bh}{k} l^{\frac{a}{b}}$$

oder, wenn die Gewichte der Ladung und der Kugel eingeföhret werden, in dieser

$$v = \frac{32850 Q}{P} l^{\frac{1275 i P}{n Q}}$$

Rheintl. Schuh, wo P , Q , n und i eben die Werthe haben, welche denselben in unserer Formel beygeleget worden. Wenn also die Kugel von Eisen ist, so ist nach des Autoris Regel

$$v = \frac{32850 Q}{P} l^{\frac{51 i P}{266 Q}}$$

und wenn die Ladung Q halb so groß ist, als das Gewicht der Kugel P , so wird

$$v = 16425 l^{\frac{51 i}{133}}$$

Wenn nun hier $i = 24$ gesetzt wird, wie in den halben Carthaunen zu seyn pflegt, so findet man die Geschwindigkeit der Kugel = 1509 Rheintl. oder 1554 Engl. Schuh in einer Secunde, welches von des Autoris Rechnung ziemlich unterschieden ist. Wenn nun kein Druckfehler in des Autoris Zahl eingeschlichen ist, so mag der Unterschied außer den Buchstaben h und k , welche der Autor etwas anders bestimmt, insonderheit daher rühren, daß wir hier den Diameter der Kugel dem Diameter der Mündung des Stücks gänzlich gleich gesetzt haben, da sich doch dazwischen wegen des Spielraums ein kleiner Unterschied befindet. Weil sich aber wegen so vieler andern Umstände hierinn nichts genaueres bestimmen läßt, so haben wir nicht nöthig erachtet, diesen Umstand in Betrachtung zu ziehen, und dadurch die Rechnung beschwerlicher zu machen. Die Haupt-Ursache aber des Unterschieds zwischen des Autoris und unserer Formel steckt darinn, daß derselbe die gröbere Materie des Pulvers, welche theils mit in Bewegung gesetzt werden muß, theils den Raum der zusammen gepreßten Luft vermindert, gar nicht in Betrachtung gezogen hat. Der erstere Umstand, daß diese gröbere Materie mit in Bewegung gesetzt werden muß, vermindert die Geschwindigkeit der Kugel; der andere aber, insofern die zusammen gepreßte Luft dadurch in einen kleinern Raum eingeschränckt wird, macht die Geschwindigkeit der Kugel grösser. Wenn also diese beyden Wirkungen beynabe gleich viel austragen, so stimmt des Autoris Regel mit der unsrigen überein, wie bey der 24pfündigen Kugel, welche mit 16 # Pulver geschossen wird, geschehen; in andern Fällen aber hat man sich nicht zu verwundern, wenn dieselben sehr merklich von einander abgehen. Inzwischen haben wir doch Ursache zu glauben, daß die in obiger Tabelle gegebenen Zahlen zu groß seyn werden, indem wir darinn angenommen, daß sich alles Pulver auf einmahl entzünde, und auch den wegen des Spielraums entstehenden Verlust der fortreibenden Kraft nicht in Betrachtung gezogen haben. Unter-



dessen wird doch die Verhältniß derselben Zahlen unter sich ziemlicher maßen richtig seyn, dergestalt, daß wenn man wüßte, um wie viel eine derselben zu groß wäre, man auch die übrigen darnach verbessern könnte. Sollte also eine halbe Carthaunen-Kugel durch 16 μ Pulver wirklich eine Geschwindigkeit von 1650 Engl. oder 1601 Rheinh. Schuhen erhalten, so würden unsere Zahlen nur ungefähr um 20 Schuh zu groß seyn, welcher Unterschied vermittelt der Versuche unmöglich wahrgenommen werden kann.

ZWEYTE ANMERKUNG

Wir haben in diesen Rechnungen angenommen, daß das Pulver eben so schwer, als Wasser, und folglich 850 mahl schwerer sey, als Luft, welches von der Wahrheit nicht merklich abweichen mag. Denn obgleich die Pulver-Körner in dem Wasser zu Boden fallen, so trägt hinwiederum die zwischen den Körnern enthaltene Luft so viel aus, daß ein cubischer Schuh Pulver bey nahe eben so viel wägen kann, als Wasser. Wenn wir des Autoris Regel, um die Geschwindigkeit der Kugel zu finden, [anwenden] nemlich

$$v = \frac{1000bh}{k} l^{\frac{a}{b}},$$

und die Schwere des Pulvers dergestalt bestimmen, daß für eine 24pfündige eiserne Kugel, welche mit 16 Pfund Pulver geschossen wird, eine Geschwindigkeit von 1650 Engl. Schuhen in 1" heraus kommt, so müßte das Pulver 910 mahl schwerer, als die Luft angenommen werden. Hierbey ist aber der Spielraum nicht in Betrachtung gezogen worden, welcher in Canonen gemeinlich den 15ten Theil der ganzen Mündung¹⁾ beträgt. Wenn wir also setzen, daß das Pulver in der That m mahl schwerer sey, als Luft, so wird die Schwere der Ladung Q dem Gewicht eines Cylinders Luft gleich seyn, dessen Dicke mit der Kugel einerley, die Höhe aber $= \frac{16}{15}mb$. Und also wird sich verhalten $P:Q = \frac{2}{3}nc:\frac{16}{15}mb$, oder wie k zu $\frac{16}{15}mb$; und muß folglich nach des Autoris Rechnung gesetzt werden $\frac{16}{15}m = 910$, woraus kommt $m = 853$, fast wie wir angenommen haben. Wenn wir aber den Spielraum mit in unsere obige Rech-

1) Das Wort *Mündung* bedeutet hier die Großkreisfläche des kugelförmigen Projektils.
F. R. S.

nung ziehen wollen, so müssen wir an statt der Zahl 850 in der Verhältniß P zu Q , die Zahl 910 gebrauchen, so kommt $P:Q = nc:1365b$, und da $a = ic$, so wird $a:b = 1365iP:nQ$, und $k:b = 910P:Q$. Hieraus entspringt

$$v = \frac{1000Qh}{455(2P+Q)} l^{\frac{2730iP-nQ}{nQ}}$$

oder

$$v = \frac{61494Q}{2P+Q} l^{\frac{65iP-158Q}{158Q}}$$

Rheinh. Schuh für eine eiserne Kugel. Und nach den oben angenommenen Verhältnissen zwischen P und Q , kommt heraus:

$$\text{Wenn } Q = \frac{1}{2}P,$$

$$v = 12298,8 l^{\frac{65i-79}{79}},$$

$$\text{wenn } Q = \frac{2}{3}P,$$

$$v = 15373,5 l^{\frac{195i-316}{316}},$$

$$\text{wenn } Q = \frac{3}{4}P,$$

$$v = 16771,1 l^{\frac{130i-237}{237}},$$

$$\text{wenn } Q = P,$$

$$v = 20498,0 l^{\frac{65i-158}{158}}.$$

Und hieraus kann nach Belieben die obige Tabelle verbessert, oder von neuem berechnet werden.

Wir wollen nun aus dieser Vergleichung, welche der Wahrheit näher kommen muß, als die vorhergehende, eine andere Tabelle ausrechnen; und damit man aus derselben mehr Nutzen ziehen könne, so wollen wir auch kleinere Ladungen betrachten. Zu diesem Ende wollen wir das Gewicht der Kugel, welche von Eisen angenommen wird, in 6 gleiche Theile theilen, und die Rechnung auf 6 verschiedene Ladungen richten. Erstlich soll die Ladung an Pulver dem sechsten Theil des Gewichts der Kugel gleich seyn, hernach zwey Sechsteln, drittens drey Sechsteln, viertens vier Sechsteln, fünftens fünf Sechsteln, und endlich sechstens sechs Sechsteln, oder dem ganzen Gewicht

1) Im Original $v = 16862,0 l^{\frac{130i-237}{237}}$.



der Kugel gleich seyn. Wenn also die ganze Länge des Stücks sich zum Diameter der Kugel verhält, wie i zu 1, und v die Höhe in Rheinl. Schuhen andeutet, aus welcher ein Körper durch den Fall in einem Luft-leeren Raum eine gleiche Geschwindigkeit mit der Kugel erhält, so wird für diese sechserley Ladungen der Werth von v also ausgedrückt werden. Es ist nemlich wie vorher P das Gewicht der Kugel, und Q das Gewicht der Ladung an Pulver:

Wenn	so wird seyn
$Q = \frac{1}{6} P$	$v = 4730,31 \sqrt{\frac{780i-316}{316}}$
$Q = \frac{2}{6} P$	$v = 8784,85 \sqrt{\frac{390i-316}{316}}$
$Q = \frac{3}{6} P$	$v = 12298,8 \sqrt{\frac{260i-316}{316}}$
$Q = \frac{4}{6} P$	$v = 15373,5 \sqrt{\frac{195i-316}{316}}$
$Q = \frac{5}{6} P$	$v = 18086,5 \sqrt{\frac{156i-316}{316}}$
$Q = \frac{6}{6} P$	$v = 20498,0 \sqrt{\frac{130i-316}{316}}$

Weil hernach ferner die Geschwindigkeit der Kugel nicht sowohl auf dem Nahmen der Stücke, als auf der Grösse der Zahl i beruhet, so wollen wir wie vorher erstlich $i = 18$ setzen, und damit immer um zwey aufsteigen, bis auf 40. Solchergestalt werden hierunter alle mögliche Arten von Stücken begriffen werden. Denn wenn auch bißweilen i eine ungrade Zahl seyn sollte, so wird es leicht seyn, aus den nächsten geraden Zahlen für diese Fälle die Geschwindigkeit zu schliessen. Damit man aber auch für kürzere Stücke die Geschwindigkeit finden könne, so wollen wir mit $i = 10$ den Anfang machen, und wie oben die Geschwindigkeiten der Kugel, in Rheinl. Schuhen auf eine Secunde gerechnet, ausdrücken.

Länge des Stücks Caliber	Ladung					
	$\frac{1}{6}$ Kug.	$\frac{2}{6}$ Kug.	$\frac{3}{6}$ Kug.	$\frac{4}{6}$ Kug.	$\frac{5}{6}$ Kug.	$\frac{6}{6}$ Kug.
10	967	1155	1233	1256	1245	1206
12	996	1201	1295	1336	1342	1325
14	1019	1238	1345	1398	1417	1414
16	1039	1269	1386	1448	1478	1484
18	1056	1295	1420	1491	1528	1543
20	1071	1318	1450	1527	1571	1592
22	1084	1338	1477	1559	1608	1635
24	1096	1357	1501	1588	1642	1672
26	1107	1374	1522	1614	1671	1706
28	1117	1389	1542	1637	1698	1736
30	1126	1403	1560	1658	1723	1764
32	1135	1416	1576	1678	1745	1789
34	1143	1428	1591	1696	1766	1813
36	1150	1439	1605	1713	1785	1834
38	1157	1449	1619	1729	1803	1854
40	1164	1459	1631	1744	1820	1873

Man kann aus dieser Tabelle einen vielfältigen Nutzen ziehen. und mancherley Umstände, welche in der Artillerie vorkommen, erklären. Erstlich sieht man daraus, daß, wenn die Ladung nach dem Gewicht des Pulvers gegeben, die Geschwindigkeit der Kugel immer grösser werde, je länger das Stück ist. Dieses scheint zwar mit der Erfahrung zu streiten, indem man insgemein der Meynung ist, als wenn die Geschwindigkeit der Kugel in einem allzulangen Stücke wiederum geschwächt würde, und aus diesem Grunde hat man die vortheilhafteste Länge eines Stücks bestimmen wollen. Ungeachtet aber die Kugel in dem Stücke den Widerstand der Luft auf sich empfindet, so ist derselbe doch nicht nur nicht grösser, als in der freyen Luft, sondern wenn die Geschwindigkeit sehr groß ist, noch um ein merkliches kleiner, indem hinter der Kugel in dem Stück kein leerer Raum statt finden kann, wie in der offenen Luft zu geschehen pflegt. Ueber dieses bleibt die forttreibende Kraft des Pulvers, so lange sich die Kugel in dem Stück befindet, noch sehr beträchtlich, und also hinlänglich, die Geschwindigkeit derselben zu vermehren; und was die Friction anlangt, so ist schon oben dargethan worden, daß dieselbe in Ansehung der grossen Gewalt des Pulvers nicht verdiene, in Betrachtung gezogen zu werden. Da also die Kugel, so lange sie in dem Stück ist, keine Verminderung ihrer Bewegung leidet, welcher dieselbe in offener Luft



nicht in einem höheren Grad ausgesetzt wäre, und außer dem darinnen immer noch mehr fortgetrieben wird, so ist es unmöglich zu begreifen, wie eine allzu große Länge des Stücks die Geschwindigkeit der Kugel vermindern könnte. Es könnte zwar geschehen, daß, wenn das Stück nicht nach einer geraden Linie gebohret worden, die Kugel darinnen einen so grossen Abgang an ihrer Bewegung litte, daß dieselbe, wenn das Stück kürzer gemacht, und der krumme Theil davon abgeschnitten würde, die Kugel eine grössere Geschwindigkeit erhielte; und dieser Umstand hat sich ohne Zweifel in denjenigen Versuchen ereignet, worauf man diese Meynung zu gründen pflegt. Man beruft sich nehmlich auf einen Zufall, da von einer sehr langen Canone ein Stück $2\frac{1}{2}$ Schuh lang ungefehr abgesprungen, wobey man wahrgenommen haben soll, daß aus demselben Stück nach diesem Zufall die Kugeln mit einer grösseren Geschwindigkeit geschossen worden, als vorher. Allein eben dieser Zufall scheint zu beweisen, daß die Seele dieses Stücks vorher gekrümmt gewesen, und daß das gemeldte Stücke daraus nicht so wohl von der Gewalt des Pulvers, als von dem Anstossen der Kugel, abgesprungen. Hernach pflegt man sich auch, um diese Meynung zu behaupten, auf die Veränderung, welche mit den alten Canonen [vorgenommen wurde], als welche viel länger waren, als heut zu Tag, zu berufen. Denn da man durch diese Verkürzung keinen geringen Vortheil erhalten zu haben glaubt, so will man daraus schliessen, daß eine nach der heutigen Art gegossene Canone die Kugel mit einer grösseren Geschwindigkeit heraus treibt, als wenn dieselbe länger wäre. Man beweiset aber dieses durch kein tüchtiges Experiment, sondern führt nur an, wie man wahrgenommen, daß eine alte Canone von 96 # nicht so weit geschossen, als eine heutige gantze Carthaune von 48 #, ungeachtet jene länger gewesen, als diese. Wenn nun gleich in beyden Fällen die Ladung an Pulver zum Gewicht der Kugel einerley Verhältniß gehabt, so ist doch zu merken, daß die Geschwindigkeit der Kugel nicht so wohl von der Länge der Canone, als von der Anzahl der Caliber abhänge. Also mag wohl eine solche 96pfündige Canone länger gewesen seyn, als eine heutige ganze Carthaune, ungeachtet ihre Länge weniger Caliber in sich enthalten; und wenn eine 96pfündige Canone ihre Kugel mit eben der Geschwindigkeit als eine ganze Carthaune hätte heraus treiben sollen, so hätte jene um den vierten Theil länger seyn müssen, als diese.

Die fürnehmste Ursache aber, weswegen man die alten langen und schwehren Canonen abgeschafft, war ohne Zweifel die grosse Beschwerlichkeit, dieselben im Felde fortzuschleppen, welche weder durch die Grösse der Kugeln, noch durch die grössere Geschwindigkeit derselben ersetzt werden kann. Denn

wenn eine Breche geschossen werden soll, so thut eine zweymahl so schwere Kugel keine zweymahl so starke Wirkung, indem dieselbe kein zweymahl so grosses Loch in den Wall, welcher zerstört werden soll, macht; dahero zwey Schüsse mit einer halb so schweren Kugel weit mehr ausrichten, und dabey nicht mehr kosten, als ein Schuß aus der doppelten Canone. Um dieser Ursache willen werden auch die ganzen 48pfündigen Carthaunen bey dem Breche-Schiessen nicht mehr gebraucht, indem man durch halbe Carthaunen mit weniger Mühe und Unkosten den vorgesetzten Zweck erhalten kann. Hingegen aber werden die ganzen Carthaunen auf der See mit weit grösserem Vortheil gebraucht, als die halben. Denn wenn ein Schiff von einer ganzen Carthaune unter dem Wasser wohl getroffen wird, so läßt sich das Loch nicht nur nicht so leicht wiederum zustopfen, sondern die Kugel verursacht noch dazu so viel Splitter, daß die Umstehenden dadurch auf eine gute Entfernung beschädigt, und ums Leben gebracht werden.

Hernach hat man auch auf die Vermehrung der Geschwindigkeit so sehr nicht nöthig zu sehen. Denn wenn die Kugel so geschwind heraus geschossen wird, daß dieselbe entweder zu Lande den Wall auf eine gewisse Tiefe, oder zu Wasser das Schiff durch zu bohren vermögend ist, so würde es unnöthig und in einigen Fällen so gar schädlich seyn, der Kugel eine grössere Geschwindigkeit einzudrücken. Wenn nun eine 24pfündige Kugel, welche aus einer halben Carthaune mit 12 # Pulver geschossen wird, die erwünschte Wirkung thut, so beträgt dieser erforderte Grad der Geschwindigkeit ungefehr 1500 Schuh in einer Secunde. Bey Batterie-Stücken kommt es also darauf an, daß man die Länge der Canone bestimme, damit dadurch einer 24pfündigen Kugel eine Geschwindigkeit von 1500 Schuhen in einer Secunde eingedruckt werde. Soll nun dieses mit 12 # Pulver bewerkstelliget werden, so muß die Canone 24 Caliber lang seyn, welches das ordentliche Maaß der halben Carthaune zu seyn pflegt. Wollte man aber eben diese Wirkung mit weniger Pulver zu wege bringen, so müßte die Canone viel länger seyn; denn wenn man nur 8 # Pulver brauchen wolte, so würden 40 Caliber noch lange nicht für die Länge des Stücks hinlänglich seyn. Wollte man aber mehr Pulver zu einem jeglichen Schuß anwenden, so könnte man an der Länge der Canone etwas gewinnen: als wenn man zu einem jeden Schuß 16 # Pulver brauchen wolte, so dürfte die Länge der Canone nur ungefehr 19 Caliber betragen. Wolte man aber 20 biß 24 # Pulver laden, so müßte doch die Canone nicht kürzer, als 17 Caliber seyn. Wenn man also die Unkosten des Pulvers mit den Beschwerden



der Länge und folglich des Gewichts der Canonen vergleichen könnte, so würde es leicht seyn, hieraus die vortheilhafteste Länge der Canonen zu bestimmen. Zum wenigsten sieht man hieraus so viel, daß es vortheilhafter ist, 12 μ Pulver zu gebrauchen, und die Canone 24 Caliber lang zu machen, als an der Ladung 4 μ zu ersparen, hingegen aber die Canone mehr als 40 Caliber lang zu machen. Was hernach die Ladung von 16 μ Pulver betrifft, so scheint der Vortheil von 5 Calibern, welche man an der Länge der Canone gewinnt, die grössern Unkosten in Ansehung des Pulvers nicht zu ersetzen. Dahero die gebräuchliche Ladung von 12 μ Pulver und die Länge des Stücks von 24 Caliber die bequemste zu seyn scheint.

Weil ferner eine grössere Kugel in der Luft nicht so viel von ihrer Geschwindigkeit verliert, als eine kleinere, so ist auch nicht nöthig, daß derselben von dem Pulver eine so grosse Geschwindigkeit eingedruckt werde, als den kleinern. Also kan eine 48pfündige Kugel eben so tief in einen Wall hinein dringen, als eine 24pfündige, wenn gleich die erste Geschwindigkeit jener kleiner ist, als dieser. Wenn die ganzen Carthaunen zu diesem Endzweck hinreichend sind, so muß die nöthige Geschwindigkeit einer 48pfündigen Kugel 1420 Schuh in einer Secunde betragen. Wenn man nun diese Geschwindigkeit mit 16 μ Pulver erhalten wolte, so müste die Canone 34 Caliber lang seyn, dergleichen Maschine zum Gebrauch gänzlich untüchtig seyn würde. Will man aber zu einem Schuß 24 Pfund Pulver gebrauchen, so ist eine Länge von 18 Calibern genug, welche die aller vortheilhafteste ist: indem, wenn man auch mehr Pulver, als 32 μ zu einem Schuß anwenden wolte, man an der Länge nur 2 Caliber gewinnen würde.

Solten aber kleine Kugeln eben so weit gehen, als eine 24pfündige, welche mit einer Geschwindigkeit von 1500 Schuhen in einer Secunde heraus geschossen wird, so müssen dieselben, wegen des grösseren Widerstands der Luft auch anfänglich eine grössere Geschwindigkeit haben. Alles beruhet also auf dem Endzweck, welchen man sich bey einer jeglichen Art von Schüssen vorsetzt. Denn daraus erkennt man die Geschwindigkeit, welche die Kugel, in dem sie aus dem Stück fährt, haben muß, und hieraus kan man ferner die vortheilhafteste Länge des Stückes, nebst der bequemsten Ladung finden. Wir wollen setzen, daß man ein Stück verlange, aus welchem eine 18pfündige Kugel mit einer Geschwindigkeit von 1650 Schuhen in einer Secunde geschossen würde. Wenn man nun hierüber die gegebene Tabelle zu Rathe zieht, so sieht man leicht, daß dieses weder mit einer Ladung von 3 Pfund, noch 6 Pfund, noch 9 Pfund Pulver geschehen könne, dieweil auch in dem letzten Fall das Stück

noch über 40 Caliber lang sein müste. Wolte man aber dazu 12 Pfund Pulver gebrauchen, so müste die Canone 30 Caliber lang seyn; für 15 Pfund Pulver aber wird die Canone ungefehr 25 Caliber lang, und für 18 Pfund Pulver wird dieselbe ungefehr 23 Caliber lang. Bey den letzten Fällen sieht man wohl, daß man um 2 Caliber willen nicht 3 Pfund Pulver mehr laden werde, 5 Caliber aber möchten den Zuwachs der Ladung von 3 Pfund ungefehr ersetzen. Dahero wird die Canone am füglichsten 30 Caliber lang, und die Ladung 12 Pfund schwehr genommen werden. Dieser Umstand ereignet sich in der That bey den Feld-Schlangen, deren Endzweck in weit reichenden Schüssen besteht.

DRITTE ANMERKUNG

Wenn wir nun diese Bestimmungen, welche durch die Erfahrung bestätigt worden, zum Grunde legen, so kann daraus nachfolgende Regel hergeleitet werden, vermittelst welcher man für eine jede Geschwindigkeit, welche der Kugel mitgeteilt werden soll, die vortheilhaftigste Länge der Canone, nebst der dazu gehörigen Ladung anzeigen kann.

Es sey n der Weg in Rheinländischen Schuhen, welchen die Kugel in einer Secunde beschreiben soll; die Länge der Canone halte i Caliber oder Diameter der Kugel, und die Ladung verhalte sich zum Gewicht der Kugel, wie m zu 1, das ist, es sey $Q = mP$. Da nun oben v die Höhe angedeutet, aus welcher ein Körper durch den Fall mit der Kugel einerley Geschwindigkeit erhält, so ist

$$n = \frac{1}{4} \sqrt{1000v},$$

und folglich

$$v = \frac{16nn}{1000}$$

Oben¹⁾ ist aber gefunden worden

$$v = \frac{61494 Q}{2P + Q} \sqrt{\frac{65iP - 158Q}{158Q}}$$

oder

$$v = \frac{61494 m}{2 + m} \sqrt{\frac{65i; m - 158}{158}}$$

Rheinl. Schuh. In den obigen Bestimmungen aber der Canonen, welche durch die Erfahrung bestätigt worden, hält i zu m fast überall einerley Verhältniß, welches für halbe Carthaunen, so 24 Caliber lang gemacht werden, ist wie 48 zu 1. Bey

1) Siehe p. 325. F. R. S.



ganzen Carthaunen kommt zwar diese Verhältniß $i:m = 36:1$, in andern Arten von Stücken aber fällt der Werth von $\frac{i}{m}$ zwischen 48 und 36. Da man nun die halben Carthaunen in ihrer Art für vollkommener hält, als die ganzen, so muß der vortheilhafteste Werth des Bruchs $\frac{i}{m}$ der Zahl 48 näher kommen, als der Zahl 36; und da die halben Carthaunen auch bißweilen nur 22 Caliber lang gemacht zu werden pflegen, woraus $\frac{i}{m} = 44$ wird, so haben wir alle Ursache zu vermuthen, daß wir den in der Praxi abgezielten grösten Vortheil am nächsten erhalten werden, wenn wir der Verhältniß $i:m$ beständig den Werth 45:1 beylegen. Es sey also $\frac{i}{m} = 45$; und hieraus kann man sogleich für alle Arten von Stücken, wenn die Länge derselben in Calibern bekannt, die beste Ladung finden. Man darf nemlich nur die Anzahl der Caliber durch 45 dividiren, so wird der Quotient anzeigen, den wie vielen Theil des Gewichts der Kugel das Pulver austragen muß. Also wenn ein Stück 30 Caliber lang ist, so wird die tachtigste Ladung $\frac{2}{3}$ des Gewichts der Kugel. Und wiederum, wenn die Ladung in Ansehung des Gewichts der Kugel, oder der Buchstabe m bekannt ist, so findet man daraus die bequemste Länge der Canone in Calibern also ausgedrückt $i = 45m$. Wenn also die Ladung dem halben Gewicht der Kugel gleich seyn soll, so muß die Länge der Canone $22\frac{1}{2}$ Caliber halten. Wolte man aber die Ladung dem ganzen Gewicht der Kugel gleich setzen, so müste die zu diesem Ende bequemste Canone 45 Caliber lang seyn.

Da wir nun also die bequemste Verhältniß zwischen i und m entdeckt haben, so kann man daraus leicht für eine jede Geschwindigkeit, mit welcher die Kugel aus der Canone geschossen werden soll, die vortheilhafteste Länge derselben nebst der dazu erfordernten Ladung bestimmen. Denn weil der Bruch $\frac{i}{m}$ allezeit einerley Werth behält, so ist auch für alle Fälle der Logarithmus $\lg \frac{65i:m-158}{158}$ einerley; wodurch die Rechnung ungemein erleichtert wird. Man setze also $\frac{i}{m} = 45$, so wird

$$\lg \frac{65i:m-158}{158} = \lg \frac{2767}{158} = 2,86292.$$

Da nun $v = \frac{16nn}{1000}$, so wird

$$\frac{16nn}{1000} = \frac{61494m}{2+m} \cdot 2,86292 \quad \text{oder} \quad nn = \frac{11003300m}{2+m},$$

woraus also kommt

$$\frac{2+m}{m} = 1 + \frac{2}{m} = 1 + \frac{90}{i} = \frac{11003300}{nn}.$$

Aus dieser Formel ist nun die nachfolgende Tabelle berechnet worden, welche für eine jegliche Geschwindigkeit der Kugel die Länge der Canone in Calibern, und die Ladung in tausendsten Theilen des Gewichts der Kugel anzeigt:

Geschwindigkeit der Kugel in Rh. Schuhen, auf 1 Secunde	Länge der Canone in Calibern und hundertsten Theilen	Pulver Ladung in tausendsten Theilen des Gewichts der Kugel
500	2,09	46
550	2,54	57
600	3,04	68
650	3,59	80
700	4,19	93
750	4,85	108
800	5,56	124
850	6,32	141
900	7,15	159
950	8,02	179
1000	9,00	200
1050	10,02	223
1100	11,12	248
1150	12,29	273
1200	13,55	308
1250	14,89	331
1300	16,33	363
1350	17,87	397
1400	19,51	434
1450	21,26	484
1500	23,14	514
1550	25,14	559
1600	27,29	606
1650	29,59	659
1700	32,06	712
1750	34,71	771
1800	37,56	835
1850	40,63	903
1900	43,95	977
1950	47,53	1056
2000	51,40	1142
2050	55,61	1236
2100	60,20	1338
2150	65,20	1449
2200	70,68	1571



Durch Hülfe dieser Tabelle ist es also leicht, für einen jeglichen gegebenen Fall, die bequemste Form der Canone, nebst der dazu gehörigen Ladung zu bestimmen, wenn man nur die Geschwindigkeit der Kugel weiß, welche zu Erhaltung des vorgesetzten Endzwecks erfordert wird. Hierbey ist es aber öfters am schwérsten, diesen Grad der Geschwindigkeit zu finden, indem man bisher nicht einmahl im Stand gewesen, die Grösse der Geschwindigkeit einer Canon-Kugel nur beyläufig auszumessen. Da man aber aus der Länge der Canone und der Grösse der Ladung die Geschwindigkeit der Kugel ziemlich genau ausrechnen kann, so darf man nur aus einer schon vorhandenen Canone mit verschiedenen Ladungen einige Schüsse thun, und sehen, welcher noch vermögend ist, dem vorgesetzten Endzweck ein Genügen zu leisten: und auf diese Art kann man sodann die dazu erforderte Geschwindigkeit durch die Rechnung bestimmen. Nur ist zu merken, daß man diese Prob-Schüsse mit einer eben so grossen Kugel, als bey der verlangten Canone gebraucht werden soll, und in eben der Distantz, anstellen muß, weil der Widerstand der Luft sowohl auf Kugeln von ungleicher Grösse, als auf verschiedene Distantzen eine ungleiche Wirkung ausübet. Diese Ungleichheit soll aber im folgenden dergestalt ausgeführt werden, daß wenn auch die Probe mit grösseren oder kleineren Kugeln in verschiedenen Distantzen angestellt werden sollte, man daraus gleichwohl die nöthige Geschwindigkeit bestimmen könnte. Wenn also zum Breche-schiessen eine 24pfündige Kugel mit einer Geschwindigkeit von 1500 Schuhen in einer Secunde aus der Canone herausgetrieben werden soll, so sieht man aus der gegebenen Tabelle, daß die zu diesem Ende tüchtigste Canone $23\frac{14}{100}$ Caliber lang seyn, und daß die Ladung an Pulver $\frac{611}{1000}$ des Gewichts der Kugel oder $12\frac{1}{3}$ Pfund genommen werden müsse, welches mit der üblichen Einrichtung der halben Carthaunen sehr genau übereinkömmt. Es giebt aber viel Gelegenheiten, in welchen es nicht nöthig ist, daß die Kugel eine so grosse Geschwindigkeit habe, als bey des VAUBANS Batterien à Ricochet, und wenn durch die Kugeln nur Menschen in keiner allzugrossen Entfernung getödtet werden sollen. Wenn nun zu diesem Ende eine Geschwindigkeit von 1000 Schuhen in 1" hinlänglich wäre, so dürften dazu die tauglichsten Canonen nicht mehr als 9 Caliber lang seyn, und die Ladung an Pulver nicht mehr als den fünften Theil des Gewichts der Kugel betragen. Wolte man aber zu diesem Endzweck keine besondern Canonen verfertigen, sondern sich anderer, welche eigentlich zu anderen Absichten bestimmt, und viel länger sind, bedienen, so könnte man noch an

dem Pulver nicht wenig ersparen: indem, zum Exempel, nach der vorigen Tabelle¹⁾, wenn die Canone 20 Caliber lang wäre, nicht einmahl der sechste Theil des Gewichts der Kugel nöthig ist, wenn eine Geschwindigkeit von 1000 Schuhen in 1" hervorgebracht werden soll. Wenn man aber auf eine sehr grosse Entfernung mit einer Canonen-Kugel noch gewiß schiessen wolte, und zu diesem Ende die Kugel eine Geschwindigkeit von 1900 Schuhen in einer Secunde haben müßte, so würde dieser Endzweck mit keiner nach Art der Carthaunen verfertigten Canone erreicht werden können, sondern die beste Canone müßte fast 44 Caliber lang seyn, und die Ladung an Pulver beynahe dem ganzen Gewicht der Kugel gleich genommen werden. Mit einer solchen Canone würde man also viel weiter schiessen können, wofern nur die Kugel nicht allzulein angenommen wird, als mit einer Feldschlange, welche 30 Caliber lang, und mit $\frac{2}{3}$ des Gewichts der Kugel geladen wird. Man könnte auch nach dieser Tabelle solche Canonen verfertigen, welche der Kugel eine noch schnellere Bewegung eindrückten, wenn solches verlangt werden sollte.

VIERTE ANMERKUNG

Wenn man auf diese Art für eine gegebene Kugel sowohl die Länge der Canone, als die Grösse der Ladung gefunden hat, so ist es leicht, die dazu erforderte Stärke des Metalls an allen Orten zu bestimmen, und einen tüchtigen Riß von der ganzen Canone zu verfertigen. Die Länge der Canone wird zu diesem Ende am füglichsten in zwey Theile zertheilet, wovon der hintere Theil die Ladung oder das Pulver in sich enthält, der vordere Theil den Weg, wodurch die Kugel getrieben wird, vorstellt. Die Stärke des hinteren Theils muß aus der Gewalt des Pulvers im ersten Augenblick der Entzündung bestimmt werden, welche am grössten ist, ehe die Kugel noch von ihrer Stelle fortgerücktet wird. Wenn wir also mit dem Autore annehmen, daß die erste Gewalt des Pulvers 1000 mahl grösser ist, als der Druck der Atmosphäre, welcher durch eine Wasser-Säule von 32 Schuhen im Gleichgewicht erhalten wird, so muß das Boden-Stück einer Canone so stark seyn, daß dasselbe den Druck einer Wasser-Säule, welche 32000 Schuh hoch ist, aushalten könnte. Wenn man also die Stärke des Metalls, woraus die Canone gegossen wird,

1) Siehe p. 327 F. R. S.



genau ausrechnen könnte, so würde man daraus die Dicke des Boden-Stücks bestimmen können. Denn wir haben oben in der dritten Anmerkung zum 9ten Satz des ersten Capitels erwiesen, daß die Dicke des Metalls zum Diameter der Kugel immer einerley Verhältniß haben müste. Dahero wenn man in einem einigen Fall wüste, wie sich die Dicke des Metalls an dem Boden-Stück zum Diameter der Kugel verhalten muß, so würde eben diese Verhältniß bey allen andern Arten von Canonen Platz finden. Man hat aber durch die Erfahrung befunden, daß in den Carthaunen die Dicke des Metalls an dem Boden-Stücke dem Diameter der Kugel gleich seyn müsse, woraus diese allgemeine Regel fließt, daß bey allen Canonen die Dicke des Metalls an dem Boden-Stücke dem Diameter der Kugel beständig gleich genommen werden müsse. Diese Regel gründet sich also auf zwey Stücke, nemlich auf die Festigkeit des Metalls, und auf die Kraft des Pulvers. Solte man eine andere Mixtur erfinden, welche die gebräuchliche an Festigkeit überträfe, so würde eine geringere Dicke des Metalls an dem Boden-Stück hinlänglich seyn, die Gewalt des Pulvers auszuhalten. Wenn man aber hergegen die Kraft des Pulvers vermehren könnte, so müßte die Dicke der Canonen grösser angenommen werden. Denn wenn man auch gleich in diesem Fall weniger Pulver laden wollte, so würde doch dadurch die Ausdehnungs-Kraft im ersten Augenblick der Entzündung nicht kleiner werden, als wenn die Ladung wäre grösser angenommen worden. Woraus erhellet, daß wenn man die Gewalt des Pulvers merklich vermehren könnte, alle jetzigen Canonen unbrauchbar seyn würden. So lange man aber einerley Pulver gebraucht, so hat das Boden-Stück einer Canone beständig einerley Gewalt auszuhalten, man mag die Ladung groß oder klein annehmen. Wenn also dasselbe der Gewalt einer kleinen Ladung zu widerstehen vermögend ist, so wird auch eine weit grössere Ladung nicht vermögend seyn, dasselbe zu zersprengen. In dieser Absicht ist aber das Vorder-Theil oder das Mund-Stück einer Canone ganz anders beschaffen. Denn da die Gewalt des Pulvers um so vielmehr abnimmt, in je einen grösseren Raum sich dasselbe schon ausgebreitet, so ist klar, daß ein jeglicher Theil des Mundstücks eine um so viel grössere Gewalt auszustehen habe, je grösser die Ladung an Pulver angenommen wird. Wenn daher das Mundstück einer Canone die gehörige Stärke haben soll, so muß dieselbe aus der grössten Ladung, welche immer gebraucht werden kann, bestimmt werden.

Es bedeute zum Exempel AF (Fig. 1, p. 70) die grösste Ladung, welche bey der Canone AB immer vorkommen kann, so ist AF das Boden-Stück, und FB das Mundstück; bey jenem muß die Dicke des Metalls allenthalben dem Diameter

der Kugel gleich seyn, und da die Gewalt auf das Boden-Stück allenthalben gleich groß ist, so ist auch unnöthig, daß die Canone zu hinterst bey A stärker gegossen werde, als bey F . Aus dieser Betrachtung könnte also bey Giessung der Canonen nicht wenig Metall erspartet und dieselben dadurch ohne Gefahr leichter gemacht werden. Denn wenn die Dicke bey E , welche schon etwas kleiner als der Diameter der Kugel gesetzt zu werden pflegt, stark genug ist, der Gewalt des Pulvers zu widerstehen, so wird auch bey D keine grössere Stärke erfordert. Was aber das Mundstück FB anlangt, so ist leicht für ein jegliches Punkt desselben M die Gewalt des Pulvers zu bestimmen, welche darauf wücket, wenn die Kugel bis dahin ist fortgestossen worden. Nach des Autoris Regel verhält sich diese Kraft zu der ersten Kraft des Pulvers, welche das Boden-Stück aussteht, wie AF zu AM , und folglich könnte die Dicke des Metalls bey M um so viel geringer seyn, als bey F , um so viel AF kleiner ist, als AM ; solchergestalt würde die äußere Figur einer Canone nach einer Hyperbel gekrümmt seyn müssen. Nach unserer Bestimmung der Gewalt des Pulvers nimmt dieselbe, indem die Kugel durch das Mundstück FB fährt, nach einer grössern Verhältniß ab, und dürfte also das Mundstück nicht so stark seyn, als nach des Autoris Regel. Allein da sich die beyden Regeln auf die plötzliche Entzündung des Pulvers gründen, in der That aber die Entzündung nach und nach geschieht, so wird die Gewalt, welche das Mundstück auszustehen hat, in Ansehung der Gewalt des Bodenstücks grösser seyn, als nach den angeführten Regeln, und folglich muß die Dicke desselben allenthalben etwas grösser seyn, als nach diesen Regeln gefunden wird.

Wenn man aber gleich die allmähliche Entzündung des Pulvers in die Rechnung bringen könnte, so findet sich doch noch ein anderer Umstand, welcher die Bestimmung der Stärke des Mundstücks viel schwerer und fast unmöglich macht. Derselbe bestehet darinne, daß das Mundstück nicht allein der Gewalt des Pulvers ausgesetzt ist, sondern auch von der Kugel, indem dieselbe dadurch fährt, öfters keine geringere Kraft auszustehen hat. Wenn zwar die Seele einer Canone vollkommen nach einer geraden Linie gebohret wäre, und die Kugel beständig nach eben dieser geraden Linie fortgetrieben würde, so würde dieselbe auf die Seele der Canone nicht die geringste Gewalt ausüben und dadurch gleichsam, ohne die Canone zu berühren, heraus fahren, indem das Gewicht der Kugel, wovon die untere Seite derselben gedruckt wird, für nichts zu achten ist. Wenn aber die Seele der Canone nur etwas wenig gekrümmt wäre, und folglich die Kugel genöthiget würde, von ihrer einge-



drückten Direction abzuweichen, so siehet man wohl, daß alsdenn die Kugel auf die Canone nach der Kraft, welche Vis centrifuga genennet wird, zurück wirken müsse. Diese Kraft kan nun sehr beträchtlich werden; denn wenn wir setzen, daß das Mundstück irgendwo nach einem Zirkulbogen, dessen Radius = r , gekrümmet sey, und daß die Geschwindigkeit der Kugel daselbst durch die Höhe v bestimmt werde, so wird sich der Druck der Kugel auf die innere Wand der Canone zu ihrer Schwere verhalten, wie $\frac{2v}{r}$ zu 1. Wenn also diese Krümmung der Seele der Canone nach einem Zirkul geschähe, dessen Radius $r = 100$ Schuh, dergleichen Krümmung in einer geringen Länge kaum zu merken ist, und wenn die Kugel daselbst eine Geschwindigkeit von 1500 Schuhen in einer Secunde hätte, so würde $v = 36000$ Schuh, und die Canone würde an diesem Ort von einer Kraft gedrückt werden, welche 720 [mah] grösser wäre, als das Gewicht der Kugel, wovon die Wirkung um so viel grösser seyn würde, da diese ganze Kraft nur auf einen sehr geringen Platz, in welchem die Kugel das Metal berührt, [würket,] als diejenige, welche von der Ausdehnungskraft des Pulvers herrührt. Eben dieser Umstand kan sich aber auch ereignen, wenn gleich die Seele der Canone vollkommen gerade gebohret worden: denn wenn die Kugel durch die Gewalt des Pulvers nicht völlig nach der Direction der Seele fort getrieben wird, so ist es eben so viel, als wenn die Seele in Ansehung der Bewegung der Kugel eine kleine Krümmung hätte, und ist folglich die Canone in diesem Fall eben der Gewalt unterworfen, als in dem vorigen. Es kan aber aus vielerley Ursachen die Direction, welche der Kugel von dem Pulver eingedrückt wird, etwas wenigens von der Direction der Seele abweichen: wohin insonderheit der Spielraum zu rechnen, und wenn die Direction der fortreibenden Kraft nicht durch das Mittelpunkt der Schwere der Kugel durch gehet. Dieses sind nun Umstände, welche bißweilen mehr, bißweilen weniger austragen können: und in denselben scheint die wahre Ursache verborgen zu seyn, warum bißweilen eine Canone von einem nicht allzustarken Schuß zerspringet, nachdem dieselbe doch vorher eine grosse Anzahl stärkerer Schüsse ausgehalten. Um dieser Ursache willen ist also höchst nöthig, daß man das Mundstück einer Canone weit stärker mache, als nach irgend einer oben angeführten Regel erfordert wird, damit dieselbe diesen ungewissen Kräften meistens zu widerstehen hinreichend sey. Dieser Gewalt der Kugel sind aber die längern Canonen mehr unterworfen, als die kürzern; denn je länger die Canone ist, desto eher und leichter kan sich der Umstand ereignen, daß die Direction der Kugel etwas von der Axe der Canone abweicht. Hernach erhält auch die Kugel in längern Canonen eine grössere

Geschwindigkeit, wodurch die Vis centrifuga sehr merklich vermehret wird, als welche nach den Quadraten der Geschwindigkeit wächst.

Endlich kan auch mit Stillschweigen nicht übergangen werden, daß die Bewegung der Kugel selbst durch diesen Druck gegen die Canone keinen geringen Abbruch leidet. Denn dadurch wird die Friction, welche sonst, wie oben gewiesen worden, nicht merkwürdig war, gar sehr vermehret, als welche um so viel grösser wird, je stärker ein Körper gegen den andern gedrückt wird. Da also dieser Druck auf sehr gewissen Umständen beruhet, so kan es leicht geschehen, daß bey gleichen Kugeln, welche mit gleicher Ladung aus einer Canone geschossen werden, ein ziemlicher Unterscheid in ihrer Geschwindigkeit wahrgenommen werden kan. Inzwischen scheint es doch, daß man durch einen grossen Fleiß diese Unrichtigkeit meistens sollte heben können; wenn man nehmlich erstlich die Canone vollkommen gerade bohren, hernach die Kugeln vollkommen rund machen, und drittens bey der Ladung alle Sorgfalt anwenden wolte, damit der Mittelpunkt der Kugel auf das genaueste in die Axe der Seele zu liegen käme, und in wärender Bewegung daraus nicht weichen könnte. Auf diese Art würde die Canone nicht nur keine so grosse Gewalt ausstehen haben; sondern man würde sich auch auf die Schüsse selbst viel sicherer verlassen können, wie in folgendem ausführlich dargethan werden wird.

FÜNFTE ANMERKUNG

Was der Autor ferner in diesem Satz gegen die ungereimte Meynung derjenigen, welche behaupten, daß eine Canonen-Kugel anfänglich auf eine gewisse Weite in einer völlig geraden Linie fortgehe, anführet, ist an sich klar und deutlich; indem die erste Geschwindigkeit einer solchen Kugel so groß ist, daß die Krümmung ihrer Bahn, welche von der Schwere verursacht wird, in einer ziemlichen Weite noch nicht bemerkt werden kann. Denn wenn die Geschwindigkeit durch die Höhe v angedeutet, und die Kugel nach einer Horizontal-Direction geschossen wird, so muß der Radius eines gleich krummen Zirkels, als die Bahne der Kugel ist, einer Länge von $2v$ gleich seyn. Da nun, wenn die Geschwindigkeit der Kugel 1500 Schuh in einer Sekunde beträgt, wird $v = 36000$ Schuh, so wird die Bahn dieser Kugel keine grössere Krümmung haben, als ein Zirkul, dessen Radius 72000 Schuh hält. Diese Krümmung ist aber so geringe, daß dieselbe erst in einer Weite von 1256



Schuben einen Grad ansträgt. Ob nun gleich wegen des Widerstands der Luft diese Weite etwas verringert wird, so bleibt dieselbe doch groß genug, daß man in der Praxi einen sehr langen Theil der Bahn, als eine gerade Linie ohne Fehler ansehen kann, welche von den Artilleristen die Weite des Kernschusses genennet zu werden pflegt. Weil aber hiervon im folgenden weitläufiger gehandelt werden soll, so wollen wir uns dabey nicht länger aufhalten, sondern noch dasjenige, was der Autor in diesem Satz von der stärksten Ladung einer Canone anführt, erwegen, ungeachtet wir schon oben in der fünften Anmerkung zum 11. Satz diese Materie ziemlich weitläufig abgehandelt, und für die stärkste Ladung daselbst eine Tabelle¹⁾ gegeben haben. Inzwischen liegt dieser Umstand, daß es für eine jede Canone eine bestimmte Ladung gibt, wodurch der Kugel die größte Bewegung mitgetheilet wird, in der bey unserer zweyten Anmerkung zu diesem Satz gegebenen Tabelle²⁾ deutlich vor Augen: indem wir aus derselben sehen, daß aus einer Canone, welche 10 Caliber lang, die Kugel mit einer Ladung von $\frac{2}{3}$ des Gewichts der Kugel schneller heraus geschossen wird, als mit einer grössern Ladung. Eben diese stärkste Ladung erhellet auch noch in eben derselben Tabelle bey 12 und 14 Caliber langen Canonen, als aus welchen die Kugel mit einer ihrem ganzen Gewichte gleichen Ladung an Pulver nicht so geschwind heraus getrieben wird, als mit kleineren Ladungen.

Der Autor bestimmt die Grösse dieser stärksten Ladung aus seiner Regel, wodurch er die Geschwindigkeit der Kugel angiebt, und welche in folgender Form enthalten ist

$$v = \frac{1000bh}{k} l \frac{a}{b}.$$

Da nun in dieser Form sehr viel Umstände aus der Acht gelassen werden, welche doch keine geringe Veränderung verursachen, so ist kein Wunder, daß seine Bestimmung der stärksten Ladung mit der unsrigen nicht überein kommt. Aus dieser Formel findet der Autor, daß für die stärkste Ladung die Länge b des Raums, welchen das Pulver anfüllet, zur ganzen Länge des Stücks a allzeit einerley Verhältniß haben müsse, nemlich wie 1 zu der Zahl 2,71828, deren hyperbolischer Logarithmus = 1; nach unserer Regel aber ist diese Verhältniß nicht immer einerley, sondern beruhet sowohl auf der Anzahl der Caliber, welche in der Länge des Stückes a enthalten sind, als auf der Materie der Kugel, wie aus der oben gegebenen Tabelle erhellet: inzwischen läßt sich

1) Siehe p. 192. F. R. S.

2) Siehe p. 327. F. R. S.

doch eine ziemliche Uebereinstimmung zwischen dieser Tabelle und des Autoris Verhältniß wahrnehmen. Wie aber diese Verhältniß aus des Autoris Formel folge, ist aus der Lehre von dem größten und kleinsten an sich klar. Denn weil k und h unveränderliche Grössen sind, so kommt die Sache nur darauf an, daß man den Werth von b bestimme, damit $bl \frac{a}{b}$ am aller größten werde. Zu diesem Ende muß man diese Quantität $bl \frac{a}{b}$ dergestalt differentiren, daß man nur b als veränderlich annehme: da denn kommt

$$db l \frac{a}{b} - db.$$

Dieses Differentiale muß man ferner nach der bekanten Regel gleich nichts setzen, so hat man

$$l \frac{a}{b} - 1 = 0 \quad \text{oder} \quad l \frac{a}{b} = 1.$$

Weil nun hier von hyperbolischen Logarithmis die Rede ist, so muß $\frac{a}{b}$ derjenigen schon öfters gebrauchten Zahl 2,7182818 etc. gleich seyn, deren hyperbolischer Logarithmus = 1: folglich wird

$$\frac{a}{b} = 2,7182818 \quad \text{oder} \quad b : a = 1 : 2,7182818,$$

wie der Autor gefunden. Da nun $l \frac{a}{b} = 1$, so wird diese größte Geschwindigkeit nach dem Autore aus der Höhe v entspringen, dergestalt daß

$$v = \frac{1000bh}{k}.$$

Um aber mit dieser Geschwindigkeit andere kleinere Geschwindigkeiten der Kugel zu vergleichen, wie der Autor gethan, so hat man nur in der Hyperbel (Fig. 22, p. 316) LEF zu betrachten, daß, da $AD = b$ und $AB = a$, erstlich das Viereck $ADEG$ allenthalben eine beständige Grösse habe, und daß sich ferner dieses Viereck zum Inhalt der Figur $EDBF$ verhalte, wie 1 zum hyperbolischen Logarithmo von $\frac{AB}{AD}$. Da nun dieser Logarithmus gleich 1 ist, so muß die Figur $DEFB$ dem Viereck $AGED$ gleich seyn. Wir wollen die Linie $DE = f$ setzen, so wird die Figur $DEFB$ durch $bfl \frac{a}{b}$, das ist durch bf ausgedrückt werden. Man betrachte jetzt eine andere Ladung, welche den



Lauf von A bis I anfülle, und nenne $AI = \beta$, so wird sich das Quadrat der grösten Geschwindigkeit zum Quadrat der aus dieser Ladung AI entstehenden Geschwindigkeit verhalten, wie bf zu $\beta fl \frac{a}{\beta}$. Es ist aber

$$l \frac{a}{\beta} = l \frac{a}{b} + l \frac{b}{\beta} = 1 + l \frac{b}{\beta},$$

weil $l \frac{a}{b} = 1$, also wird jene Verhältniß wie bf zu $\beta f + \beta fl \frac{b}{\beta}$. Aus der vorher angeführten Natur der Hyperbel aber drückt $\beta fl \frac{b}{\beta}$ den Inhalt der Figur $IHKD$ aus, und βf ist das Viereck $AGHI$, gleich wie bf dem Viereck $AGED$ gleich ist; dahero ist

$$\beta f + \beta fl \frac{b}{\beta} = AGHI + IHKD = AGED - HEK.$$

Folglich wird sich das Quadrat der grösten Geschwindigkeit zum Quadrat der aus der Ladung AI entspringenden Geschwindigkeit verhalten, wie $AGED$ zu $AGED - HEK$, wie der Autor findet. Wir haben hier den Fall betrachtet, da die Ladung AI kleiner ist, als die stärkste AD ; wenn aber AI grösser ist, als AD , und $\beta > b$: so ist der Beweis mit dem vorigen einerley, wenn man nur erweget, daß in diesem Fall der Inhalt der Figur $DKHI$ nicht durch $\beta fl \frac{b}{\beta}$, sondern durch $\beta fl \frac{\beta}{b}$, oder durch $-\beta fl \frac{b}{\beta}$ ausgedrückt werde.

Ungeachtet wir nun die stärkste Ladung aus einer der Wahrheit weit näher kommenden Formel schon oben bestimmt haben, so hat doch daselbst der Buchstabe a nicht die ganze Länge des Laufs, sondern nur einen Theil desselben angedeutet, so daß in derselben Tabelle immer ein längerer Lauf, als daselbst bemerkt wird, verstanden werden muß. Um nun diesen Mangel zu ersetzen, so wollen wir aus derjenigen Formel, welche wir hier zur Bestimmung der Geschwindigkeit gebraucht haben, auch die stärkste Ladung herleiten, weil dieselbe auf diese Art der Wahrheit weit näher kommen muß. Unsere Aequation ist nun, wenn der Spiel-Raum mit in Betrachtung gezogen wird, diese¹⁾:

$$v = \frac{1000bh}{k+455b} l \frac{2a-b}{b}.$$

Diese wird am grösten, wenn $\frac{b}{k+455b} l \frac{2a-b}{b}$ den grösten Werth erhält. Um diesen zu finden, so differenzire man diese Formel, indem man nur b als

1) Siehe p. 318 und 325. F. R. S.

veränderlich ansieht, und setze das Differentiale gleich nichts, so wird man finden

$$\frac{kdb}{(k+455b)^2} l \frac{2a-b}{b} - \frac{2adb}{(k+455b)(2a-b)} = 0$$

oder

$$l \frac{2a-b}{b} = \frac{2a(k+455b)}{(2a-b)k}.$$

Man setze

$$\frac{2a-b}{b} = u,$$

so wird $b = \frac{2a}{1+u}$ und

$$lu = 1 + \frac{1}{u} + \frac{910a}{ku}.$$

Wenn wir nun setzen, daß das Stück i Caliber lang, und die Materie der Kugel n mahl schwerer sey, als Luft, so wird

$$k : a = 910 : \frac{1365i}{n},$$

folglich bekommt man

$$lu = 1 + \frac{1}{u} + \frac{1365i}{nu}.$$

Wenn ferner die Kugel von Eisen angenommen wird, so ist $n = 6650$ und $\frac{1365}{n} = \frac{1}{5}$ so nahe, daß der Unterschied nicht zu achten. Dahero hat man

$$lu = 1 + \frac{i+5}{5u}.$$

Aus dieser Aequation kan zwar überhaupt der Werth von u nicht angezeigt werden; in einem jeglichen Fall aber ist es leicht, denselben durch die Näherung heraus zu bringen. Um ein Exempel hiervon zu geben, so wollen wir setzen $i = 30$; so wird

$$lu = 1 + \frac{7}{u}.$$

Wenn man nun eine Tabelle von hyperbolischen Logarithmis bey der Hand hat, so wird man bald sehen, daß u zwischen 7 und 8 enthalten sey. Man gebe also dem u diese beyden Werthe, und bemerke bey jedem den Unterschied folgender Gestalt



$u = 7$	$u = 8$
$lu = 1,945909$	2,079441
$1 + \frac{7}{u} = 2,000000$	1,875000
Unterscheid $-.054091$	$+.204441$

Weil diese beyden Unterscheide verschiedene Zeichen haben, so addire man dieselben zusammen, und sage nach der Regul falsi, wie sich diese Summe verhält zu 1, nehmlich dem Unterscheid zwischen den beyden angenommenen Werthen von u , also verhält sich ,054091 zum Überschuß des wahren Werths von u über 7, welcher gefunden wird $= 0,21$, also ist $u = 7,21$. Weil nun $a = 30c$, so wird $b = \frac{60c}{8,21} = 7,31c$. Hieraus kan man auch ferner das Gewicht dieser stärksten Ladung in Ansehung des Gewichts der Kugel bestimmen. Denn, wenn das Gewicht der Kugel $= P$, das Gewicht der Ladung $= Q$, und man setzt $Q = mP$; so wird beynahe $m = \frac{b}{5c}$. Aus diesem Grunde ist also die folgende Tabelle ausgerechnet worden:

Tabelle für die stärkste Ladung¹⁾

Länge des ganzen Laufs in Calibern	Länge des Pulver-Raums in Calibern	Gewicht des Pulvers in 100sten Theilen des Gewichts der Kugel
2	0,82	16
4	1,54	31
6	2,18	43
8	2,78	56
10	3,35	67
12	3,86	77
14	4,30	86
16	4,77	95
18	5,20	104
20	5,59	112
22	5,96	119
24	6,32	126
26	6,66	133

1) Zufolge der Interpolation zwischen zu weiten Grenzen ist in der zweiten und dritten Spalte dieser Tabelle je die letzte Stelle ungenau. F. R. S.

Länge des ganzen Laufs in Calibern	Länge des Pulver-Raums in Calibern	Gewicht des Pulvers in 100sten Theilen des Gewichts der Kugel
28	6,99	140
30	7,31	146
32	7,61	152
34	7,90	158
36	8,18	163
38	8,44	169
40	8,69	174
42	8,93	179
44	9,18	184
46	9,42	188
48	9,66	193
50	9,89	198
52	10,11	202
54	10,31	206
56	10,51	210
58	10,71	214
60	10,90	218

Da diese Tabelle aus derjenigen Formel entsprungen, welche wir zuletzt gefunden, und in welcher alle Umstände ausser der allmählichen Entzündung des Pulvers in Betrachtung gezogen worden, so ist kein Zweifel, daß die in dieser Tabelle gegebenen stärksten Ladungen mit der Wahrheit näher übereinstimmen werden, als diejenigen, welche entweder nach des Autoris Regel gefunden worden, oder in der oben gegebenen Tabelle enthalten sind. Erstlich sieht man, daß alle in dieser Tabelle befindlichen stärksten Ladungen kleiner sind, als in der obigen; und wenn man ferner dieselbe mit des Autoris Regel vergleicht, so findet man, daß, wenn die Länge des Laufs kleiner ist, als 6 Caliber, die hier gegebene stärkste Ladung grösser sey, als nach dem Autore. Bey 6 Calibern stimmen dieselben völlig mit einander überein, und wenn der Lauf länger ist, als 6 Caliber, so weichen unsere Ladungen je länger je mehr ab von des Autoris Regel. Denn wenn der Lauf 60 Caliber lang ist, so kommt nach des Autoris Regel die Länge des Pulver-Raums ungefehr von 22 Caliber heraus, da unsere nicht einmahl die Helfte austrägt. Und wenn es möglich wäre, einen Lauf so 10000 Caliber lang zu machen, so würde die zum stärksten Schuß erfordernde Ladung nicht mehr als einen Raum von $49\frac{3}{4}$ Calibern ein-



nehmen, und diese Ladung würde bey nahe 10 mahl schwerer seyn, als das Gewicht der Kugel. Wolte man aber die allmähliche Entzündung des Pulvers noch in Betrachtung ziehen, so würden, allem Ansehen nach, diese grössten Ladungen noch kleiner heraus kommen, daher man um so viel weniger zu zweifeln Ursache hat, daß die Regel des Autoris diese Ladung weit zu groß anzeige.

FÜNFTER SATZ

Wenn eine Canonen-Kugel von 24 Pfund mit voller Ladung geschossen wird, so ist der Widerstand der Luft, indem dieselbe aus der Canone herausfährt, mehr als zwanzig mahl grösser, als das Gewicht derselben.

Wir haben in dem zweyten Satz dieses Capitels gezeigt, daß der Widerstand der Luft auf eine Kugel von $\frac{3}{4}$ Zoll im Diameter, welche sich mit einer Geschwindigkeit von 1670 Schuhen in einer Secunde bewege, einem Gewicht von 10 Pfunden gleich sey. In dem vorhergehenden Satz aber ist ausgemacht worden, daß eine eiserne Kugel von 24 Pfunden, wenn dieselbe mit 16 Pfund Pulver geschossen wird, welche Ladung gemeiniglich für die tüchtigste um Breche zu schiessen gehalten wird, eine Geschwindigkeit von ungefehr 1650 Schuhen in einer Secunde erhalte, welche von der vorigen nicht merklich unterschieden ist. Da nun der Umfang¹⁾ dieser letztern Kugel mehr als 54 mahl grösser ist, als der Umfang der vorigen, so $\frac{3}{4}$ Zoll im Diameter hielt, und ihre Geschwindigkeiten beynahe einerley waren, so folget, daß der Widerstand, welchen die grössere Kugel empfunden, mehr als 540 Pfund austrage, welches beynahe 23 mahl mehr ist, als das Gewicht der Kugel.

ZUSATZ.

Wir haben schon oben in der Einleitung angemerkt, daß diejenigen, welche sich die Artillerie gründlich abzuhandeln bemühet haben, insgesamt voraus gesetzt, daß die Bahn einer Stück-Kugel oder Bombe derjenigen krummen Linie, welche Parabel genennt wird, sehr nahe komme. Unsere beyden letzte-

1) Das Wort *Umfang* wird hier zur Bezeichnung der Oberfläche verwendet. F. R. S.

ren Sätze zielen nun insonderheit dahin ab, um diese Meynung zu widerlegen.

Die Ursache aber, warum die gedachten Autores diese Meynung behauptet haben, gründete sich fürnehmlich darauf, daß sie glaubten, der Widerstand der Luft könne keine merkliche Wirkung haben. Weil nun unstreitig war dargethan worden, daß die Bahn aller geworfenen Körper, wenn kein Widerstand vorhanden wäre, eine Parabel seyn müßte, so haben sie aus Uebereilung so gleich geschlossen, daß dergleichen schwere Körper als Bomben und Stück-Kugeln von einer solchen subtilen Materie, als die Luft ist, keinen merklichen Widerstand leiden könnten, und daß folglich ihre parabolische Bahn dadurch nicht merklich verändert würde.

Dieses Vorurtheil wird nun durch den erstaunlichen Widerstand der Luft auf eine 24 pfündige Kugel, dessen Grösse wir hier bestimmt haben, hinlänglich bestritten. Denn, wie irrig muß nicht eine solche Meynung seyn, in welcher eine Kraft, so mehr als zwanzig mahl grösser ist, als das Gewicht des Körpers, für nichts geachtet wird? Unterdessen wollen wir uns nicht allein begnügen, die Wirklichkeit und die Grösse des Widerstands der Luft erwiesen zu haben; sondern wir wollen auch noch die wahre Bahn der Körper in dieser flüssigen Materie umständlicher in Erwägung ziehen. Wir wollen nemlich durch vielerley Versuche deutlich zeigen, wie sehr die Bahn, welche ein jeglicher geworfener Körper in der Luft beschreibt, nach allen Umständen von derjenigen, welche aus den insgemein angenommenen Gründen fliesst, abweiche. Zu diesem Ende ist aber nöthig, einige wenige Sätze voraus zu setzen, wovon der Beweis bey den meisten Autoren, welche die gemeine Lehre von den fallenden Körpern abgehandelt haben, gefunden wird.

1. Lehr-Satz. Wenn der Widerstand der Luft so klein ist, daß die Bewegung eines geworfenen Körpers in einer Parabel geschieht, so steht die Axe dieser Parabel immer senkrecht auf dem Horizont, und folglich ist der Theil dieser krummen Linie, in welchem der Körper hinauf steigt, demjenigen gleich und ähnlich, in welchem der Körper wiederum herunter fällt.

2. Lehr-Satz. Wenn die Parabel, in welcher sich der Körper bewege, auf einer Horizontal-Fläche aufsteht, so ist der oberste Punkt derselben von beyden Enden gleich weit entfernt.

3. Lehr-Satz. Der Körper wird in diesem Fall auch unter eben demselben Winkel, und mit eben der Geschwindigkeit auf die Erde fallen, als derselbe anfänglich ist herauf geworfen worden.



4. Lehr-Satz. Wenn der Körper mit einerley Geschwindigkeit, aber unter verschiedenen Winkeln, geworfen wird, so wird derjenige Wurf am weitesten reichen, welcher unter einem Winkel von 45 Graden mit dem Horizont gethan worden.

5. Lehr-Satz. Wenn die Geschwindigkeit, mit welcher der Körper anfänglich geworfen wird, bekannt ist, so kann die grösste Weite des Wurfs daraus also gefunden werden. Man berechne nach der bekannten Lehre von dem Fall der Körper die Höhe, aus welcher ein Körper durch den Fall eben diejenige Geschwindigkeit erhält, mit welcher der Körper geworfen wird: alsdenn wird diese Höhe zweymahl genommen, die grösste Weite geben, zu welcher der Körper, wenn derselbe unter einem Winkel von 45 Graden mit dem Horizont geworfen wird, gelangen kann.

6. Lehr-Satz. Die Horizontal-Würfe eines Körpers, wenn derselbe mit einerley Geschwindigkeit unter verschiedenen Winkeln mit dem Horizont geworfen wird, verhalten sich untereinander, wie der Sinus der doppelten Winkel, unter welchen die Würfe geschehen.

7. Lehr-Satz. Wenn der Körper unter einerley Winkel mit dem Horizont, aber mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortgeworfen wird, so werden sich die Würfe auf einer Horizontal-Fläche verhalten, wie die Quadrate der Geschwindigkeiten.

In diesen Lehr-Sätzen sind nun alle diejenigen Gründe enthalten, nach welchen die Bewegung der geworfenen Körper von den heutigen Scribenten der Artillerie berechnet zu werden pflegt. Wenn also einige von diesen Lehr-Sätzen bey der Bewegung der geworfenen Körper nicht Stich halten, so folgt daraus unstreitig, daß der Körper in seiner Bewegung von der Parabolischen Bahn abweiche. Dahero wird die gemeine Lehre von der Bewegung der geworfenen Körper völlig umgestossen, wenn wir werden darthun können, daß überhaupt kein einiger von diesen Sätzen mit der wahren Bewegung der Körper übereinstimme.

ERSTE ANMERKUNG

In diesem Satz untersucht der Autor die Grösse des Widerstands der Luft, welchen eine halbe Carthaunen-Kugel, so sich darinn mit einer Geschwindigkeit von 1650 Schuhen in einer Secunde bewegt, auszustehen hat, und weist, daß die Kraft des Widerstands über 20 mahl grösser sey, als das Gewicht der Kugel. Um dieses zu erweisen, so legt er den vorher bestimmten Widerstand, welchen eine Kugel, so nur $\frac{3}{4}$ Zoll im Diameter hat, und sich mit einer Geschwindigkeit von 1670 Schuhen in 1" bewegt, leidet, zum Grunde. Denn da diese beyden Geschwindigkeiten nicht merklich von einander unterschieden sind, so muß sich der Widerstand der grössern zum Widerstand der kleinern verhalten, wie das Quadrat des Diameters der grössern zum Quadrat des Diameters der kleinern: weil sich die Oberflächen zweyer Kugeln unter sich, wie die Quadrate ihrer Diameter verhalten. Nun aber sagt der Autor, daß die Oberfläche der 24pfündigen Kugel mehr als 54 mahl grösser gewesen, als der kleinern Kugel, deren Diameter nur $\frac{3}{4}$ Zoll war, folglich muß der Diameter der großen Kugel gewesen sein $= \frac{3}{4} \sqrt{54}$ Zoll, das ist beynahe $5\frac{1}{2}$ Zoll. Dahero wiegt eine eiserne Kugel, deren Diameter $5\frac{1}{2}$ Zoll groß ist, 24 Pfund; und hieraus läßt sich der Diameter einer jeglichen eisernen Kugel, deren Gewicht bekannt ist, bestimmen. Wir können aber aus der oben gefundenen Formel, wodurch der Widerstand einer Kugel ausgedruckt wird, in einem jeglichen Fall die Verhältniß des Widerstands der Luft zu dem Gewicht der Kugel leicht anzeigen. Denn es sey der Diameter der Kugel $= c$, und v die Höhe, aus welcher die Geschwindigkeit der Kugel erzeugt werden kann, so ist, wie wir gefunden haben¹⁾, der Widerstand dem Gewicht einer mit der Kugel gleich dicken Luft-Säule gleich, deren Höhe

$$\frac{1}{2} v + \frac{1}{2h} vv,$$

wo h eine Höhe von 28845 Englischen oder 27979 Rheinh. Schuhen anzeigt. Ferner ist die Kugel selbst einem gleich dicken Cylinder gleich, dessen Höhe $= \frac{2}{3} c$. Wenn also die Materie der Kugel n mahl schwehrrer, als die Luft gesetzt wird, so ist das Gewicht der Kugel dem Gewicht einer gleich dicken Luft-Säule gleich, deren

1) Siehe p. 311. F. R. S.



Höhe $= \frac{2}{3}nc$, folglich wird sich der Widerstand der Kugel zu ihrer eignen Schwere verhalten, wie $\frac{1}{2}v + \frac{1}{2h}vv$ zu $\frac{2}{3}nc$, das ist, wie $\frac{3v(h+v)}{4nch}$ zu 1. Wenn also die Kugel von Eisen ist, so wird $n = 6647$, und der Widerstand der Kugel verhält sich zu ihrer Schwere, wie $\frac{v(h+v)}{8863ch}$ zu 1. Laßt uns nun setzen, die Geschwindigkeit der Kugel betrage 1650 Englische oder 1600 Rheintl. Schuh in einer Secunde, so wird die Höhe $v = 40960$ Rheintl. oder 42226 Engl. Schuh, und $h + v = 71071$ Engl. Schuh. Folglich wird sich der Widerstand zur Schwere der Kugel verhalten, wie 11,7386 Schuh zum Diameter der Kugel. Weil nun nach des Autoris Rechnung der Diameter der 24pfündigen Kugel $5\frac{1}{2}$ Zoll, oder $\frac{11}{24}$ Schuh beträgt, so muß sich der Widerstand derselben zu ihrem eignen Gewicht von 24 $\mathcal{L}$ verhalten, wie 11,7386 zu $\frac{11}{24}$ oder wie 25,6115¹⁾ zu 1, und ist also der Widerstand über $25\frac{1}{2}$ mahl grösser, als das Gewicht der Kugel. Es ist nicht nöthig, die Ursache zu untersuchen, warum der Autor diesen Widerstand nur 23 mahl grösser findet, als das Gewicht der Kugel. Denn man siehet aus seinem Vortrag sogleich, daß seine Absicht nur dahin gegangen, um zu zeigen, daß der Widerstand der Kugel im vorgelegten Fall gewiß über 20 mahl grösser sey, als das Gewicht derselben; und deswegen mag derselbe mit Fleiß alle Bestimmungen etwas zu klein angenommen haben, damit man um so viel weniger an der Richtigkeit seines Satzes zu zweifeln Ursache hätte.

Da nun der Widerstand der Luft so erstaunlich groß ist, so kann man der gemeinen Meynung, daß sich die Kugeln in Parabeln bewegen, um so viel weniger länger beypflichten, da dieselbe schon hinlänglich widerlegt seyn würde, wenn auch der Widerstand der Luft nur dem Gewicht der Kugel selbst gleich wäre. Inzwischen ist die Unrichtigkeit dieser gemeinen Meynung schon längst gründlich genug dargethan worden, obgleich der gemeine Haufe der Artilleristen sich wenig daran gekehret zu haben scheint. Dahero der Autor seine Ausdrückungen, als wenn er zu allererst diesen Fehler entdeckt hätte, etwas mäßigen sollte. Wir haben schon in unsern Anmerkungen zu der Vorrede des Verfassers gewiesen, daß dieser Fehler bereits vor geraumer Zeit nicht nur bemerkt, sondern auch verbessert worden; indem man diejenige Linie, welche von einem Körper wirklich in der Luft beschrieben wird, zu bestimmen vermögend gewesen. Unterdessen aber hat man doch die größte Ursache, dem Autori verpflichtet zu seyn, daß er diesen merklichen Zuwachs des Widerstands

1) Im Original: 25,6615. Berichtigt von F. R. S.

der Luft, wenn die Bewegung sehr schnell ist, wahr genommen; als wodurch er nicht nur den gemeinen Haufen von einem groben Irrthum befreiet, sondern auch den Gelehrten die Unrichtigkeit der durchgehends angenommenen Lehre von dem Widerstand der Luft deutlich vor Augen gelegt hat.

ZWEYTE ANMERKUNG

Weil der Autor im folgenden Satz willens ist, den grossen Unterscheid durch Versuche zu zeigen, welcher sich zwischen der wahren Bahn, so ein geworfener Körper in der Luft beschreibt, und einer Parabel befindet, so zieht er hier die fürnehmsten Eigenschaften der parabolischen Bewegung in Betrachtung. Denn da es nicht so leicht ist, die wahre Bahn, welche ein Körper beschreibt, durch die Erfahrung zu bestimmen, so würde es sehr schwer seyn, unmittelbar den Unterscheid zwischen dieser Bahn und einer Parabel zu beobachten. Derowegen betrachtet hier der Verfasser einige Eigenschaften, mit welchen die Bewegung in einer Parabel nothwendig verknüpft ist, um nachgehends untersuchen zu können, ob sich diese Eigenschaften bey der Bewegung eines Körpers in der Luft befinden, oder nicht. Denn wenn nur einige von diesen Eigenschaften in der Luft nicht statt finden, so folgt daraus unstreitig, daß die Bahn, welche ein solcher Körper in der Luft beschreibt, keine Parabel seyn könne. Ob sich nun gleich diese Eigenschaften in unzehlich viel Büchern gründlich erwiesen befinden, so wollen wir doch dieselben alhier aus den ersten Grund-Sätzen der Bewegung herleiten, theils damit man die Wahrheit derselben desto deutlicher einsehe, theils aber fürnehmlich, damit wir hernach auf gleiche Weise die wahre Bewegung eines Körpers in der Luft desto leichter bestimmen können.

GALILEUS hat schon gefunden, daß ein schwerer Körper in einem Luft-leeren Raum, oder wenn derselbe gar keinen Widerstand antrifft, sich in einer Parabel bewege; und aus eben diesem Grunde haben die meisten Autores, welche von der Artillerie geschrieben haben, die Bahn einer Bombe oder einer Stück-Kugel in der Luft für eine Parabel gehalten; nicht als wenn dieselben gar keinen Begriff von dem Widerstand gehabt hätten, sondern weil sie diesen Widerstand so klein zu seyn geglaubet haben, daß derselbe in der Bewegung dieser Körper keine merkliche Veränderung verursachen könnte. Wir wollen also setzen, daß der Körper gar keinen Widerstand leide, und aus den Grund-



sätzen der Bewegung diejenige Linie bestimmen, nach welcher derselbe seine Bewegung fortsetzen muß, nachdem derselbe mit einer gegebenen Geschwindigkeit unter einem gegebenen Winkel mit dem Horizont geworfen worden.

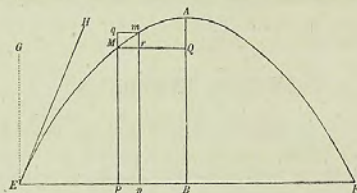


Fig. 23.

Es sey demnach EF (Fig. 23) eine Horizontal-Linie, auf welcher ein Körper aus dem Punkt E nach der Direction EH mit einer Geschwindigkeit, so durch den Fall aus einer Höhe $= b$ erlangt wird, geworfen worden, und die krumme Linie $EMAF$ soll den Weg vorstellen, nach welchem sich der Körper bewegt, biß derselbe wiederum auf die Horizontal-Linie in F herunter fällt. Man nenne den Winkel $HEF = \zeta$, welchen die Direction des Körpers EH anfanglich mit der Horizontal-Linie EF macht. Da nun die Geschwindigkeit des Körpers in E durch $\sqrt{b}$ ausgedrückt wird, wenn man diese Bewegung in den Gedanken in zwey andere zertheilet, deren eine nach der Vertical-Linie EG , die andere aber nach der Horizontal-Linie EF gerichtet ist, so wird die Geschwindigkeit der erstern $= \sqrt{b} \cdot \sin. \zeta$, und die Geschwindigkeit der letztern $= \sqrt{b} \cdot \cos. \zeta$. Wenn man nemlich den Sinum von $90^\circ = 1$ annimmt. Nun wollen wir setzen, der Körper sey schon biß in M gekommen, und aus M die Perpendicular-Linie MP herunter lassen, alsdenn $EP = x$ und $PM = y$ nennen; die Zeit aber, in welcher der Körper in M gekommen, sey $= t$. In einer unendlich kleinen Zeit dt wird der Körper durch Mm fortgehen, und wenn der Weg durch die Zeit dividirt für die Geschwindigkeit angenommen wird, so wird die Geschwindigkeit des Körpers in M seyn $= \frac{Mm}{dt}$. Diese Bewegung zertheile man auch in zwey andere nach den Directionen Mq und Mr , deren jene auf den Horizont perpendicular, diese aber dem Horizont parallel ist; und weil, nachdem man die Linie mp mit MP parallel gezogen, seyn wird

$$Mq = mr = dy \quad \text{und} \quad Mr = dx,$$

so wird die Geschwindigkeit nach der Direction $Mq = \frac{dy}{dt}$ und nach der Direction $Mr = \frac{dx}{dt}$. Da nun die Bewegung des Körpers nur allein von seiner Schwere verändert wird, deren Direction nach MP abwärts gerichtet ist, so sieht man wohl, daß die Geschwindigkeit nach der Direction Mr davon keine Veränderung leide, und dahero allenthalben gleich groß, das ist der ersten Geschwindigkeit nach der Horizontal-Direction, welche war $= \sqrt{b} \cdot \cos. \zeta$, beständig gleich bleibe. Dahero ist

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{b} \cdot \cos. \zeta, \quad \text{oder} \quad dx = dt \sqrt{b} \cdot \cos. \zeta,$$

welche Vergleichung integrirt giebt

$$x = t \cos. \zeta \cdot \sqrt{b},$$

woraus erhellet, daß der Körper nach der Horizontal-Direction immer gleich geschwind fortgehe. Hergegen wirket aber die ganze Schwere nach der andern Vertical-Direction Mq . Da nun die Geschwindigkeit nach dieser Direction ist $= \frac{dy}{dt}$, so wird die Höhe, aus welcher diese Geschwindigkeit erzeugt wird, $= \frac{dy^2}{dt^2}$, wovon das Differentiale, wenn dt unveränderlich angenommen, seyn wird

$$= \frac{2dyddy}{dt^2}.$$

Dieses Differentiale muß sich zu dem Raum dy , welchen der Körper nach dieser Bewegung in der Zeit dt beschreibt, verhalten, wie die Kraft, welche nach der Direction Mq auf den Körper wirket, zu seinem Gewicht. Nun aber ist diese Kraft dem Gewicht des Körpers selbst gleich; nur ist zu merken, daß dadurch die Geschwindigkeit nicht vermehret, sondern vermindert werde. Dahero erhalten wir diese Proportion:

$$\frac{2dyddy}{dt^2} : dy = -1 : 1,$$

woraus diese Aequation entspringt:

$$2ddy = -dt^2.$$

Hiervon ist das Integrale

$$\frac{2dy}{dt} = C - t,$$



allwo $\frac{dy}{dt}$ die Vertical-Geschwindigkeit des Körpers nach Verfließung der Zeit t anzeigt. Da nun im Anfange, da $t=0$, die Vertical-Geschwindigkeit war $= Vb \cdot \sin. \zeta$, so wird für diesen Ort $2Vb \cdot \sin. \zeta = C$, wodurch die Größe des Buchstabens C , welcher durch die Integration hinein gekommen, bestimmt wird. Also wird seyn

$$\frac{2dy}{dt} = 2Vb \cdot \sin. \zeta - t,$$

oder

$$2dy = 2dt \sin. \zeta \cdot Vb - tdt,$$

wovon das Integrale giebt

$$2y = 2t \sin. \zeta \cdot Vb - \frac{1}{2} tt.$$

Aus der Differential-Aequation

$$\frac{2dy}{dt} = 2Vb \cdot \sin. \zeta - t$$

erhellet erstlich, weil $\frac{dy}{dt}$ die Vertical-Bewegung anzeigt, daß wenn $t = 2Vb \cdot \sin. \zeta$, die Vertical-Geschwindigkeit des Körpers verschwindet, und derselbe seine Horizontal-Bewegung allein behalte. Wenn wir also setzen, daß dieses im Punct A geschehe, so wird die Tangens der krummen Linie in A horizontal seyn. Wenn aber t grösser wird, als $2Vb \cdot \sin. \zeta$, so bekommt die Vertical-Geschwindigkeit $\frac{dy}{dt}$ einen negativen Werth, welcher anzeigt, daß der Körper alsdann im Herunterfallen begriffen sey. Also wird EA derjenige Theil der Bahn EMF seyn, durch welchen der Körper hinauf steigt, und AF der Theil, durch welchen der Körper wiederum herab fällt.

Um aber die Natur dieser krummen Linie näher zu erkennen, so ist zu merken, daß

$$t = \frac{x}{\cos. \zeta \cdot Vb}.$$

Man setze also diesen Werth für t in der Integral-Aequation

$$2y = 2t \sin. \zeta \cdot Vb - \frac{1}{2} tt,$$

so wird

$$2y = 2x \tan g. \zeta - \frac{xx}{2b \cos. \zeta^2},$$

oder

$$xx - 4bx \sin. \zeta \cos. \zeta = -4by \cos. \zeta^2.$$

Hieraus kommt

$$-x + 2b \sin. \zeta \cos. \zeta = 2 \cos. \zeta \cdot V(bb \sin. \zeta^2 - by).$$

Aus dieser Aequation sieht man nun leicht, daß die gesuchte krumme Linie EMF eine Parabel sey. Denn man nehme

$$EB = 2b \sin. \zeta \cos. \zeta,$$

so wird

$$BP = 2b \sin. \zeta \cos. \zeta - x.$$

Hernach richte man in B die Perpendicular-Linie auf $BA = b \sin. \zeta^2$, und ziehe MQ mit EF parallel, so wird

$$AQ = b \sin. \zeta^2 - y, \quad MQ = BP.$$

Nun nenne man $AQ = p$ und $QM = q$, so wird $q = 2 \cos. \zeta \cdot Vbp$ oder

$$qq = 4bp \cos. \zeta^2,$$

welche Aequation klar zeigt, daß die gesuchte krumme Linie eine Parabel sey, deren Axe die Vertical-Linie AB . Und hieraus erhellet die Wahrheit des ersten, andern und dritten Lehrsatzes: nemlich erstlich, daß die Axe der Parabel AB auf die Horizontal-Linie EF perpendicular, und daß folglich die beyden Theile AE und AF einander gleich und ähnlich seyn. Hernach ist auch klar, daß die äussersten Puncte auf der Horizontal-Linie E und F gleich weit von dem höchsten Punct A entfernt seyn. Drittens folgt aus dieser Gleichheit der Theile AE und AF , daß die Winkel, welche die krumme Linie in E und F mit der Horizontal-Linie EF macht, einander gleich seyn. Weil ferner $EF = 2EB = 4b \sin. \zeta \cos. \zeta$, so wird die Vertical-Geschwindigkeit des Körpers in F seyn

$$= Vb \cdot \sin. \zeta - \frac{x}{2Vb \cdot \cos. \zeta},$$

wenn man für x den Werth $4b \sin. \zeta \cos. \zeta$ setzt. Es wird also diese Geschwindigkeit

$$= -Vb \cdot \sin. \zeta,$$

welche von der ersten in E nur darinne unterschieden ist, daß jene aufwärts, diese aber abwärts gerichtet ist. Weil nun die Horizontal-Bewegung immer

einerley bleibt, so folgt hieraus, daß der Körper in F eben diejenige Geschwindigkeit habe, mit welcher er in E fortgeworfen worden. Weil ferner $EB = 2b \sin. \zeta \cos. \zeta$, so ist $EB = b \sin. 2\zeta$, und die Weite des Wurfs auf der Horizontal-Linie, nemlich EF ,

$$= 2b \sin. 2\zeta.$$

Woraus erstlich folgt, daß, wenn die Geschwindigkeit Vb im Anfange E einerley bleibt, die Weite des Wurfs dem Sinus des doppelten Winkels HEF proportional sey; wenn aber der Winkel FEH einerley bleibt, und die Geschwindigkeit Vb verändert wird, so ist die Weite des Wurfs EF dem b , das ist dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional. Dieses dienet zum Beweisthum des 6ten und 7ten Lehr-Satzes. Was ferner die gröste Weite des Wurfs anlangt, weil die Weite $EF = 2b \sin. 2\zeta$ gefunden worden, so sieht man sogleich, daß dieselbe am grösten werde, wenn der Winkel 2ζ neunzig Grad hält; denn da wird sein Sinus dem Radio gleich, alle übrigen Sinus aber sind, wie bekannt, kleiner als der Radius. Wenn also der Wurf auf der Horizontal-Linie am weitesten reichen soll, so muß der Winkel HEB , unter welchem der Körper anfänglich geworfen wird, 45° halten; und hierinne besteht der vierdte Lehr-Satz. Nimmt man nun den Winkel HEB von 45° , so wird $\sin. 2\zeta = 1$ und folglich die Weite des Wurfs $EF = 2b$, das ist, der doppelten Höhe b , aus welcher die erste Geschwindigkeit des Körpers durch den Fall erzeugt werden kann. Hieraus erhält also der fünfte Lehr-Satz seine Richtigkeit. In allen Fällen aber kann die Weite des Wurfs durch diese Regel De-tri gefunden werden. Man sage nemlich, wie sich verhält der Sinus von 90° zum Sinus des doppelten Winkels HEB , welchen die Direction des Körpers im Anfange mit dem Horizont machet, also verhält sich die doppelte Höhe b , woraus die Geschwindigkeit des Körpers erzeugt wird, zur Weite des Wurfs EF , welche solcher Gestalt gefunden wird. Wollte man noch ferner die gröste Höhe AB bestimmen, zu welcher der Körper in seinem Heraufsteigen gelangt, so ist dieselbe $AB = b \sin. \zeta^2$, und wird folglich auch leicht durch die Regel De-tri gefunden.

Wenn also der Widerstand der Luft auf die Canonen-Kugeln keine Wirkung hätte, so würde die Bahn derselben beständig eine Parabel seyn, und die Bewegung der Kugel würde sich auch nach den hier gefundenen Gesetzen richten, und folglich leicht bestimmt werden können, wie fast aus allen Anleitungen der Artillerie, welche auf diese Gründe gebauet worden, zur Gnüge erhellet. Wir hätten auch leicht unsere Bestimmung allgemeiner machen

können, wenn wir die Linie EF nicht horizontal, sondern auf den Horizont nach Belieben inclinirt, angenommen hätten. Die Rechnung würde fast gar nicht weitläufiger worden seyn, und aus derselben würde man gesehen haben, daß, wenn der Wurf auf einer solchen schiefen Fläche am weitesten reichen soll, alsdenn die erste Direction des Körpers EH den Winkel GEF , welchen die Vertical-Linie GE , als nach welcher die Schwebre wärket, mit der schiefen Linie EF macht, gleichfalls in zwey gleiche Theile zerschneiden müsse. Weil aber diese Betrachtungen in der Artillerie gar keinen Nutzen haben können, so wollen wir uns dabey nicht länger aufhalten, sondern zum folgenden Satz des Autoris fortschreiten.

SECHSTER SATZ

Die Bahn, nach welcher sich eine Bombe oder Stück-Kugel in der Luft bewegt, ist weder eine Parabel, noch bey nahe eine Parabel, wenn die Geschwindigkeit, womit dieselben geschossen worden, nicht sehr geringe ist.

Wir haben in dem vierdten Satz dieses Capitels gewiesen, daß eine Mußketen-Kugel von $\frac{3}{4}$ Zoll im Diameter, wenn dieselbe mit der Helfte ihres Gewichts Pulver aus einem Lauf, der 45 Zoll lang, geschossen wird, eine Geschwindigkeit von ungefehr 1700 Schuhen in 1" erlange. Wenn sich nun diese Kugel in einer Parabel bewege, so müßte der weiteste Schuß, welcher unter einem Winkel von 45° mit dem Horizont geschieht, kraft des fünften Lehr-Satzes sich ungefehr auf 17 Englische Meilen erstrecken. Nun aber versichern uns alle practische Autores, daß dieser Schuß nicht einmahl auf eine halbe Meile reiche. DIEGO UFANO¹⁾ bestimmet für ein Schieß-Gewehr, welches 4 Schuh lang ist, und eine bleyerne Kugel von anderthalb Untzen schießt, welches bey nahe mit unserem Exempel überein kommt, den weitesten Schuß auf 797 gemeine Schritt, wenn dasselbe nemlich unter einem Winkel zwischen 40 und 50 Graden mit dem Horizont gerichtet, und mit so viel von dem feinsten Pulver, als das ganze Gewicht der Kugel beträgt, geladen wird. MERSENNUS²⁾ berichtet uns,

1) Siehe die Anmerkung 1 p. 34. F. R. S.

2) P. M. MERSENNE (1588—1648), p. 84 der Abhandlung *Ballistica et Acontismologia* in seinem Sammelwerk *Cogitata physico-mathematica*, Paris 1644. F. R. S.

daß er die Horizontal-Schußweite eines Feuer-Rohrs, welches unter einem Winkel von 45° gerichtet gewesen, kleiner als 400 Faden oder 800 Yards befunden. Da nun alle diese Schüsse sich nicht einmahl auf eine Englische Meile erstrecken, so folget, daß ein Mußketen-Schuß, welcher mit einer hinlänglichen Ladung Pulver gethan wird, unter einer Richtung von 45° nicht einmahl den 34sten Theil der Weite beträgt, zu welcher derselbe gelangen müßte, wenn sich die Kugel in einer Parabel bewegte.

Ueber diese große Verminderung der Horizontal-Schuß-Weite hat man sich um so viel weniger zu verwundern Ursache, wenn man betrachtet, daß der Widerstand dieser Kugel, indem dieselbe aus dem Lauf herausfähret, ungefähr 120 mahl größer ist, als ihre eigene Schwere: als welches in dem zweyten Satz dieses Capitels durch unstreitige Versuche ist bewiesen worden.

Wollte man aber dagegen einwenden, wie diese Abweichung des Flugs einer Mußketen-Kugel von einer Parabel noch nicht genugsam beweise, daß auch weit schwereere Kugeln, als welche in Ansehung ihres Gewichts einen weit kleineren Widerstand leiden, von der gemeinen Meynung merklich abweichen, so wollen wir zu diesem Ende eine eiserne Kugel von 24 α , dergleichen gemeinlich zu Lande die schwersten zu seyn pflegen, als ein Exempel anführen. Wenn eine solche Kugel aus einer dazu gebräuchlichen Canone mit voller Ladung geschossen wird, so wird derselben, wie in dem vierdten Satz dieses Capitels gezeigt worden, eine Geschwindigkeit von 1650 Schuhen in einer Secunde eingedrückt. Wenn man nun hieraus nach dem fünften Lehr-Satz die gröste Schußweite für den Winkel von 45° nach der Parabel berechnet, so findet man dafür ungefähr 16 Meilen, welche zwischen fünf und sechs mahl grösser ist, als dieselbe wirklich befunden wird; denn alle Practici stimmen darinnen überein, daß sich dieser Schuß nicht gar auf 3 Meilen erstrecke. Sr. REMY¹⁾ giebt uns auch Nachricht von einigen Versuchen, welche von dem Mr. DU METZ²⁾ angestellt worden. Nach denselben beträgt die Schußweite unter einem Winkel von 45° von einem Stück, welches 10 Schuh lang, und eine 24pfündige Kugel führete, und mit 16 α Pulver geladen worden, mehr nicht, als 2250 französische Faden, welche Weite um 222 Faden kleiner ist, als drey Meilen. Wenn also eine 24pfündige eiserne Kugel mit ihrer völligen Ladung Pulver unter einem Winkel von 45° geschossen wird, so geht dieselbe

1) P. S. DE SAINT-REMY (1650—1716), *Mémoires d'Artillerie*, Paris 1697. F. R. S.

2) P. C. B. DU METZ (1638—1690), französischer Artillerie-General. F. R. S.

nicht einmahl den fünften Theil so weit, als sie gehen müßte, wenn ihre Bewegung nach einer Parabel geschähe.

Es geschieht aber nicht allein in diesem Fall, wenn die Kugel mit einer so sehr grossen Geschwindigkeit geschossen wird, daß ihre Bahn so merklich von einer Parabel unterschieden ist; eine gleiche Abweichung findet auch öfters in solchen Bewegungen statt, welche so langsam sind, daß man den Flug derselben mit Augen sehen und erkennen kann. Denn da finden sich sehr wenig Bewegungen, so auf diese Art untersucht werden können, welche nicht merklich von dem ersten, zweyten und dritten Lehrsatz abweichen sollten: indem diese Körper immer nach einer solchen krummen Linie wiederum herab kommen, welche kürzer ist, und mit dem Horizont einen größern Winkel macht als diejenige, nach welcher die Körper herauf gestiegen. Ferner ist auch der höchste Punkt ihrer Bahn dem Ort, wo der Körper herunter fällt, immer viel näher, als demjenigen, von welchem derselbe hinauf gefahren. Um hiervon völlig überzeugt zu werden, daß auch nicht der geringste Zweifel überbleibe, so darf man nur aus einem dazu bequemen Ort auf den Flug der Steine, Pfeile oder Bomben, welche auf eine ziemliche Weite geworfen werden, wohl Achtung geben.

Ich habe auch so gar durch die Erfahrung befunden, daß der fünfte, sechste und siebente Lehrsatz sehr weit von der Wahrheit abweichen, wenn man nach denselben die Bewegung solcher Kugeln, welche nur einen kleinen Grad der Geschwindigkeit haben, beurtheilet. Ich habe zum Exempel eine bleyerne Kugel von $\frac{3}{4}$ Zoll im Diameter mit einer Geschwindigkeit von 400 Schuh in 1" unter einem Winkel von $19^\circ, 5'$ mit dem Horizont abgeschossen, und befunden, daß dieselbe auf einem ebenen Grunde nicht weiter als 448 Yards gegangen, da doch die gröste Horizontal-Schußweite nach dem fünften Lehrsatz zum wenigsten 1700 Yards, und hieraus ferner nach dem sechsten Lehr-Satz die Schußweite für den Winkel von $19^\circ, 5'$ von 1050 Yards gefunden wird. Dahero in diesem Versuche die Schußweite nicht gar $\frac{3}{7}$ derjenigen ausgetragen, zu welcher die Kugel hätte gelangen müssen, wenn die gemeine Meynung wahr wäre.

Ferner ist diese Kugel mit eben der Geschwindigkeit als im vorigen Versuche, aber nur unter einem Winkel von $9^\circ, 45'$ abgeschossen, und die Weite des Schusses auf einer Horizontal-Fläche bey 330 Yards befunden worden.

Diese Weite hätte nun nach dem fünften und sechsten Lehr-Satz in Ansehung der ersten Geschwindigkeit 566 Yards seyn sollen. Wenn man aber dieselbe aus dem vorhergehenden Versuche mittelst des sechsten Lehr-Satzes



berechnet, so findet man nicht mehr als 241 Yards, und sind also diese beyden Zahlen sehr weit von 330 Yards unterschieden.

Weiter wurde eine Kugel unter einem Winkel von 8° mit dem Horizont, aber mit einer Geschwindigkeit von 700 Schuhen in 1" abgeschossen, und die Schußweite von 690 Yards befunden.

Wenn man aber diese Weite aus der ersten Geschwindigkeit der Kugel nach dem 5ten und 6ten Lehr-Satz berechnet, so findet man, daß, wenn die Lehre, auf welche sich diese Lehr-Sätze gründen, der Wahrheit gemäß wäre, die Kugel in dem gegenwärtigen Exempel auf eine Weite von 1400 Yards hätte gelangen müssen. Woraus erhellet, daß die Kugel nicht halb so weit gegangen, als sie hätte gehen sollen, wenn ihre Bewegung nach einer Parabel geschehen wäre.

Wiederum ist eine Kugel mit eben derselben Geschwindigkeit, als in dem letzten Experiment, aber nur unter einem Winkel von 4° geschossen, und die Weite des Schusses 600 Yards befunden worden.

Diese Weite hätte nun nach dem vorhergehenden Versuche, kraft des 6ten Lehr-Satzes, nicht mehr als 350 Yards austragen sollen, woraus die Unrichtigkeit dieses Satzes, und folglich auch der gemeinen parabolischen Lehre, worauf derselbe gegründet ist, klarlich erhellet.

Da nun solcher gestalt bewiesen worden, daß die Bahn, welche auch von den schwersten Kugeln in der Luft beschrieben wird, weder eine Parabel sey, noch derselben nahe komme, ausgenommen diejenigen Fälle, in welchen die Kugel mit einer sehr geringen Geschwindigkeit bewegt wird, so wollen wir die weitere Erklärung der Natur dieser krummen Linien, nach welchen sich die Kugeln wirklich in der Luft bewegen, auf einen andern Theil versparen. Inzwischen will ich noch hier, um einen Begriff von den grossen Schwierigkeiten, womit diese Untersuchung verknüpft ist, zu geben, einige Nachricht von einem ganz außerordentlichen Umstand, welcher öfters vorkommt, mittheilen.

Weil die Schwebre nach einer senkrechten Direction auf den Horizont wirkt, so ist klar, daß, wenn außer der Schwebre keine andere Kraft einen geworfenen Körper von seinem geradlinichten Lauf ablenkete, seine Bewegung beständig in einer Perpendicular-Fläche auf den Horizont geschehen müste, welche durch die Linie, nach welcher der Körper anfänglich geworfen worden, durch gieng. Wir haben aber befunden, daß die Körper in ihrer Bewegung öfters von dieser Fläche, bald zur Rechten, bald auch zur Linken, abweichen,

und dieses nach einer gebogenen Linie, welche die erhabene Krümmung gegen die gemeldete Fläche zukehret. Solcher gestalt geschieht die Bewegung einer Kugel öfters in einer Linie, welche eine doppelte Krümmung hat, indem dieselbe erstlich durch die Kraft der Schwebre abwärts, und hernach aus der Vertical-Fläche ihrer ursprünglichen Bewegung entweder zur Rechten oder zur Linken durch eine andere Kraft gezogen wird. In diesem Fall liegt also kein Theil der Bahn, in welcher sich die Kugel bewegt, in einer Fläche, sondern dieser Weg wird sich gleichsam in der Oberfläche einer Art von Cylinder befinden, dessen Axe auf dem Horizont senkrecht aufsteht. Die Wahrheit dieses Umstandes soll nun in dem folgenden Satz durch unwidersprechliche Versuche dargethan werden.

ERSTE ANMERKUNG

Der Verfasser hat uns hier zu einem zweyten Theil, in welchem die wahre Bahn einer Canonen-Kugel bestimmt werden sollte, Hoffnung gemacht; so viel uns aber hiervon bekannt, so ist darüber noch nichts zum Vorschein gekommen, obgleich seit der Zeit schon etliche Jahre verflossen. Diese Untersuchung ist aber auch so schwer, daß der Autor mit Recht eine weit grössere Zeit zu Vollendung derselben fordern kann. Wir wollen inzwischen aus demjenigen Begriff von dem Widerstand der Luft, welchen wir aus der Erfahrung hergeleitet, uns bemühen, die wahre Bewegung einer Kugel in der Luft zu bestimmen, in der Hoffnung, daß unsere Arbeit nicht viel von derjenigen, welche uns der Autor darüber versprochen hat, unterschieden seyn werde. Hierbey wird aber unumgänglich nöthig seyn, den Umstand, dessen der Autor zu Ende dieses Satzes Meldung thut, nach welchem eine Kugel von der Vertical-Fläche, in welcher die Bewegung angefangen, bald zur Rechten, bald zur Linken getrieben wird, völlig aus den Augen zu setzen, indem dieser Umstand, wie im folgenden gezeigt werden soll, meistens von der irregulären Figur der Kugel herkommt. Wir setzen also zum voraus, daß die Kugel, welche geschossen wird, nicht nur vollkommen rund sey, sondern, daß auch ihr Mittelpunkt der Schwebre mit dem Mittelpunkt ihrer Ründung auf das genaueste übereinkomme; ingleichen auch, daß die Kugel keine sonderbare Bewegung um ihr Centrum bekomme. Denn wenn man solche Zufälle mit in Betrachtung ziehen wollte, so würde die Untersuchung nicht nur höchst schwer, und viel-



leicht gar unmöglich seyn, sondern man würde daraus auch nicht den geringsten Nutzen schöpfen können, indem wir nimmer vorher von der Ungleichheit, welche sich in der Figur und innern Beschaffenheit der Kugel findet, eine genaue Erkenntniß haben können. Wenn wir aber die Kugel vollkommen rund annehmen, und das Centrum gravitatis derselben von ihrem Mittelpunct nicht unterschieden ist, so ist klar, daß dieselbe ihre Bewegung immer in einer Vertical-Fläche fortsetzen müsse.

Damit aber diese Untersuchung in der Ausübung der Artillerie einigen Nutzen habe, so wird nöthig seyn, dieselbe in drey Theile zu theilen.

Erstlich wollen wir die Horizontal-Schüsse, in so fern die Krümmung ihrer Bahn nicht merklich ist, betrachten, und sowohl die Verringerung der Geschwindigkeit, als die Abweichung der Kugel von der Horizontal-Linie bestimmen.

Zweitens wollen wir die Vertical-Schüsse vornehmen, und sowohl das Hinaufsteigen, als das Herunterfallen der Kugel, untersuchen.

Drittens wollen wir alle schiefe Schüsse, welche unter einem schiefen Winkel mit dem Horizont gethan werden, in Erwägung ziehen, und sowohl die Natur der krummen Linie, in welcher sich die Kugel beweget, als auch die Weite des Schusses bestimmen; da denn die von dem Autore angeführten Versuche dienen werden, um unsere Theorie zu bestätigen.

Wir wollen also setzen, die Kugel werde nach der Horizontal-Direction EF (Fig. 24) geschossen. Ob nun gleich die Bahn der Kugel EMG von dieser

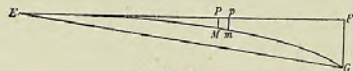


Fig. 24.

geraden Linie EF je länger je mehr abweicht, so wird doch auf eine ziemliche Weite der Unterschied so geringe seyn, daß derselbe kaum bemerkt werden kann. Weil man nun vermeynte, daß die Kugel auf eine gewisse Weite sich wirklich nach der geraden Linie EF bewege, so hat man diese Weite den Kernschuß genennet, als welcher die Kugel auf eben das Punkt, nach welchem die Canone gerichtet worden, tragen soll. In der That aber fängt sich die wahre Bahn der Kugel gleich von der Mündung des Stücks E an abwärts zu krümmen; daher man sich die Weite des Kern-Schusses EF so lang vor-

stellen muß, bis die Abweichung FG oder vielmehr der Winkel FEG in der Praxi merklich zu werden beginnt. Da nun der Winkel FEG sehr klein ist, so wird die krumme Linie EMG so wenig von der geraden EF unterschieden seyn, daß man den Unterschied ohne Fehler aus der Acht lassen kann. Wir können uns also einbilden, als wenn sich die Kugel in der That nach der geraden Linie EF bewege, wenn wir nur zugleich bey einem jeglichen Punkt derselben P bestimmen, wie weit die Kugel von demselben schon abwärts in M gesunken; welches sehr leicht ist, wenn nur die Zeit von E zu P bekannt, indem diese Linie PM die Wirkung der Schwere ist, welche in einer Secunde 15,625 Rheintl. Schuh beträgt.

Es sey also b die Höhe, aus welcher die Geschwindigkeit der Kugel in E durch den Fall erlanget wird; der Diameter der Kugel sey c , und die Materie, woraus die Kugel besteht, sey n mal schwerer, als die Luft. Nach einer Zeit t sey die Kugel schon bis in M oder P gekommen, und man nenne $EP = x$, $PM = y$, und die Geschwindigkeit der Kugel $= Vv$. Weil nun $PM = y$ der Höhe gleich ist, durch welche die Kugel in der Zeit t gefallen seyn würde, so ist $y = \frac{1}{2}gt^2$. Um aber die Bewegung nach der Horizontal-Linie EP zu bestimmen, so ist zu merken, daß der Widerstand in P durch eine Luft-Säule ausgedrückt werde, deren Höhe $= \frac{1}{2}v + \frac{1}{2h}vv$, wo h die Höhe der Atmosphäre andeutet, und entweder 28845 Englische, oder 27979 Rheintl. Schuh beträgt. Da nun das Gewicht der Kugel durch eine Luft-Säule ausgedrückt wird, deren Höhe $= \frac{2}{3}nc$, so verhält sich die Gewalt des Widerstandes zum Gewicht der Kugel, wie $\frac{2v(h+v)}{4nch}$ zu 1. Indem also die Kugel durch $Pp = dx$ fortgeht, so wird

$$dv = -\frac{3v(h+v)}{4nch} dx \quad \text{und} \quad dt = \frac{dx}{Vv}.$$

Weil nun

$$dx = \frac{4nchdv}{3v(h+v)},$$

so wird

$$dt = \frac{4nchdv}{3v(h+v)Vv}.$$

Die erstere Aequation kann auf diese Form gebracht werden:

$$dx = \frac{4nc}{3} \left(\frac{dv}{v} - \frac{dv}{h+v} \right).$$

1) Siehe die Anmerkung 1 p. 290.

F. R. S.



wovon das Integrale ist

$$x = \frac{4nc}{3} \int \frac{b(h+v)}{v(b+h)}$$

Setzt man nun Kürze halber $\frac{3x}{4nc} = z$, und e für die Zahl, deren hyperbolischer Logarithmus = 1, so wird

$$e^z = \frac{b(h+v)}{v(b+h)} \quad \text{und} \quad v = \frac{bh}{e^z(b+h) - b}$$

Die andere Aequation

$$dt = \frac{-4nchdv}{3v(h+v)\sqrt{v}},$$

giebt

$$dt = \frac{-4nc}{3} \cdot \frac{h dv}{(h+v)v\sqrt{v}}$$

Man setze, um die Irrationalität zu heben, $h = aa$, und $v = uu$, so wird

$$dt = \frac{-4nc}{3} \cdot \frac{2aadu}{uu(aa+uu)} = \frac{8nc}{3} \left(\frac{du}{aa+uu} - \frac{du}{uu} \right),$$

wovon das Integrale zum Theil auf der Quadratur des Zirkels beruht. Denn es ist

$$\int \frac{adu}{aa+uu} = A. \text{ tang. } \frac{u}{a},$$

das ist einem Zirkul-Bogen, dessen tangens = $\frac{u}{a}$, wenn der Radius = 1 genommen wird. Also bekommt man

$$t = \frac{8nc}{3} \left(\frac{1}{a} A. \text{ tang. } \frac{u}{a} + \frac{1}{u} - C \right).$$

Man setze nun wiederum $a = \sqrt{h}$, und $u = \sqrt{v}$, und bestimme die Größe C dergestalt, daß $v = b$ wird, wenn $t = 0$, so wird man finden

$$t = \frac{8nc}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{h}} A. \text{ tang. } \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{h}} - \frac{1}{\sqrt{h}} A. \text{ tang. } \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{h}} + \frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{1}{\sqrt{b}} \right)$$

oder

$$t = \frac{8nc}{3} \left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{v}}{\sqrt{bv}} - \frac{1}{\sqrt{h}} A. \text{ tang. } \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{v})\sqrt{h}}{h+\sqrt{bv}} \right).$$

Da nun vorher v aus der Weite x bestimmt worden, so kann auch t durch x ausgedrückt werden, und folglich bekommt man $y = \frac{tt}{4}$ durch x ausgedrückt, woraus man den Winkel PEM , nachdem man die Linie EM gezogen, erhält.

Weil wir aber setzen, daß die Abweichung von der Horizontal-Linie EF nicht merklich ist, so kann man sich mit grösserem Vortheil einer bequemen Näherung bedienen. Denn in diesem Fall muß der Bruch $\frac{3x}{4nc} = z$ sehr klein seyn, und da wird beynahe

$$e^z = 1 + z = 1 + \frac{3x}{4nc},$$

folglich

$$v = b - \frac{b(b+h)z}{h}$$

und

$$\sqrt{v} = \sqrt{b} - \frac{(b+h)z\sqrt{b}}{2h},$$

und also

$$t = \frac{8nc}{3} \left(\frac{(b+h)z}{2h\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{h}} A. \text{ tang. } \frac{z\sqrt{b}}{2\sqrt{h}} \right).$$

Da nun z sehr klein, so ist

$$A. \text{ tang. } \frac{z\sqrt{b}}{2\sqrt{h}} = \frac{z\sqrt{b}}{2\sqrt{h}},$$

und also

$$t = \frac{4ncz}{3\sqrt{b}} = \frac{z}{\sqrt{b}},$$

welcher Ausdruck für eine gänzlich gleichförmige Bewegung gilt. Weil aber doch die Bewegung nicht als gleichförmig angesehen werden kann, so müssen wir die Näherung genauer nehmen. Es sey also

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2}zz,$$

so wird

$$v = b - \frac{b(b+h)}{h} \left(z - \frac{1}{2}zz - \frac{bzz}{h} \right)$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{v}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{(b+h)z}{2h\sqrt{b}} + \frac{(b+h)(h-b)zz}{8h^2\sqrt{b}}$$



Da nun

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{v}} \quad \text{und} \quad z = \frac{3x}{4nc}$$

so wird

$$t = \frac{x}{\sqrt{b}} + \frac{3(b+h)xx}{16nch\sqrt{b}} + \frac{3(hh-bb)xx^2}{128nnccch\sqrt{b}}$$

woraus die Zeit, in welcher die Kugel durch die Weite $EP = x$ gehet, erkannt wird. Hieraus findet man aber ferner die Abweichung $PM = \frac{xx}{4}$, welche seyn wird:

$$PM = \frac{xx}{4b} + \frac{3(b+h)xx}{32ncbh}$$

und folglich bekommt man den Winkel PEM , dessen Tangens seyn wird

$$= \frac{x}{4b} + \frac{3(b+h)x}{32ncbh}$$

Die Geschwindigkeit der Kugel in P aber wird aus dieser Aequation erkannt werden

$$v = b - \frac{3b(b+h)x}{4nch} + \frac{9b(b+h)(2b+h)xx}{32n^2c^2bh}$$

oder es verhält sich $\sqrt{b}$ zu $\sqrt{v}$, wie

$$1 + \frac{3(b+h)x}{8nch} + \frac{9(hh-bb)xx}{128n^2c^2h^2} \text{ zu } 1.$$

Da des Winkels PEM Tangens bey nahe ist $-\frac{x}{4b}$, so läßt sich hieraus die Weite EF bestimmen, wo der Abweichungs-Winkel FEG eine gegebene Grösse bekommt. Es sey nun dieser Winkel FEG ein halber Grad, so wird

$$\frac{x}{4b} = 0,0087269, \quad \text{und also} \quad EF = \frac{8b}{229} \text{ ungefehr.}$$

Weil aber der Winkel FEG doch noch etwas grösser als $\frac{1}{2}$ Grad seyn würde, so muß EF etwas kleiner als $\frac{8b}{229}$ angenommen werden; und damit der Winkel FEG für eine 24pfündige eiserne Kugel, welche mit einer Geschwindigkeit von 1500 Schuhen in einer Secunde geschossen wird, einen halben Grad betrage, so muß seyn $EF = \frac{b}{40}$, oder = 900 Schuh. Wenn also das Punct G , welches von der Canone 900 Schuh weit entfernt ist, getroffen werden soll,

so muß die Axe der Canone nach dem Punct F oder um einen halben Grad höher gerichtet werden. Man kann aber aus diesen Formeln für einen jeglichen Fall, wenn die Geschwindigkeit der Kugel in E , nebst ihrem Diameter c und ihrer Schwehre n in Ansehung der Luft gegeben ist, das Punct G in einer gegebenen Weite $EF = a$, bestimmen, wohin die Kugel treffen wird, und auch ausser dem Winkel FEG noch die Geschwindigkeit, welche die Kugel in G haben wird, anzeigen; wenn nemlich nur die Weite EF nicht allzugroß ist, als daß man die Krümmung für nichts achten kann.

Laßt uns setzen, der Diameter der Kugel sey $5\frac{1}{2}$ Zoll, oder $\frac{11}{24}$ Engl. Schuh, ferner sey die Kugel von Eisen, und also $n = 6647$, und die erste Geschwindigkeit derselben betrage 1650 Engl. Schuh, oder 1600 Rheinh. Schuh; so wird die Höhe $b = 40960$ Rheinh. Schuh. Da nun $c = \frac{11}{24}$ Engl. = 0,44458 Rheinh. Schuh, so wird $\frac{4nc}{8} = 3940$, und es ist $h = 27979$ Rheinh. Schuh.

Nun sey die Weite $EF(a) = 1000$ Rheinh. Schuh, so wird $x = 1000$ und $z = \frac{3x}{4nc} = \frac{100}{394}$. Hieraus erhellet, daß z so klein ist, daß die obigen Näherungen genau genug sind. Weil also, wenn die Geschwindigkeit in G durch $\sqrt{v}$ angedeutet, sich verhält

$$\sqrt{b} : \sqrt{v} = 1 + \frac{(b+h)x}{2h} + \frac{(b+h)(h-b)xx}{8hh} : 1,$$

so ist $\sqrt{b} : \sqrt{v} = 1,30348 : 1$, folglich beträgt die Geschwindigkeit der Kugel in G noch 1227 Rheinh. Schuh in einer Secunde. Hernach ist die Tangens des Winkels FEG

$$= \frac{x}{4b} + \frac{(b+h)xx}{8bh} = \frac{x}{4b} \left(1 + \frac{(b+h)x}{2h} \right),$$

welche in Zahlen gefunden wird

$$= 1,31268 \cdot \frac{x}{4b} = 0,008012,$$

und dieses ist die Tangens von $27', 32''$. Also ist in diesem Exempel der Abweichungs-Winkel FEG nicht grösser als $27', 32''$, ungeachtet die Weite EF 1000 Rheinh. Schuh groß, und die Geschwindigkeit der Kugel in G schon sehr merklich abgenommen. Wenn also in einer Distanz von 1000 Schuhen mit dieser Kugel ein gegebenes G getroffen werden soll, so muß man mit dem Stücke nach einem höheren Punct F zielen, dergestalt, daß der Winkel FEG $27', 32''$ betrage, zu welchem Ende man sich auf dem Stück solche Marquen, um darnach zu zielen,



machen könnte, daß die Visier-Linie mit der Axe des Stücks einen Winkel von 27, 32" machte. Wäre die Distanz noch so groß, so müßte dieser Winkel auch ungefehr noch so groß genommen werden. Für kleinere Distanzen aber, als 1000 Schuh, wird man nicht merklich fehlen, wenn man diesen Winkel nach eben derjenigen Verhältniß vermindert. Also wird für eine Weite von 500 Schuhen der Abweichungs-Winkel = 13', 46", für 250 Schuh aber 6', 53". Ueberhaupt aber sieht man hieraus, daß, wenn die gegebene Weite nicht viel grösser, als 1000 Schuh gesetzt wird, der Winkel *FEG* nicht einmahl auf einen halben Grad steige. Da man nun in der gewöhnlichen Art die Canonen zu richten auf solche kleine Winkel nicht sieht, so liegt die Ursache klar vor Augen, warum man insgemein geglaubet, daß eine Stück-Kugel auf eine ziemliche Weite nach einer vollkommen geraden Linie fortgehe. So geringe ist also die Krümmung der Bahn einer Stück-Kugel, wenn das Stück horizontal gerichtet worden; dieselbe wird aber noch kleiner, wenn das Stück mit dem Horizont einen Winkel macht. Denn alsdenn würket nur ein Theil der Schwere auf die Krümmung der Bahn, da in den Horizontal-Schüssen die ganze Schwere dahin gerichtet war. Diese Verminderung geschieht ungefehr nach dem Cosinu des Winkels, welchen das Stück mit dem Horizont macht; und wenn das Stück völlig aufrecht gestellet wird, so fährt die Kugel nach einer geraden Linie in die Höhe, und leidet gar keine Krümmung, welches der zweyte Fall ist, den wir uns zu erläutern vorgenommen haben.

ZWEYTE ANMERKUNG

Es sey demnach wie vorher der Diameter der Kugel = *c*, die Schwere der Kugel *n* mahl grösser, als die Schwere der Luft, und die erste Geschwindigkeit der Kugel = $\sqrt{b}$, mit welcher dieselbe gerade aufwärts nach der Vertical-Direction *EA* (Fig. 25) geschossen wird. Wir wollen setzen, diese Kugel sey nach Verfließung der Zeit *t* biß in *P* gestiegen, wo wir die Geschwindigkeit derselben = $\sqrt{v}$, und die Höhe *EP* = *x* nennen wollen. Wenn nun das unendlich kleine Element *Pp* = *dx* gesetzt wird, so wird $dt = \frac{dx}{\sqrt{v}}$, und indem die Kugel durch *Pp* hinauf steigt, so wird ihre Bewegung beydes durch ihre

1) Im Original: $dt = \frac{-dx}{\sqrt{v}}$. Berichtigt von F. R. S.

Schwere und durch den Widerstand der Luft vermindert. Die natürliche Schwere der Kugel muß aber um $\frac{1}{n}$ vermindert werden, weil ein jeglicher Körper in der Luft so viel von seiner Schwere verliert, als eine gleich große Maße Luft wiegt. Dahero wird die Wirkung der Schwere auf die Kugel durch $1 - \frac{1}{n}$ ausgedrückt werden, wofür wir Kürze halber *g* setzen wollen. Hernach ist, wie wir oben¹⁾ gesehen, die Wirkung des Widerstands

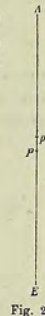
$$= \frac{3v(h+v)}{4nch},$$

woraus wir diese Vergleichung erhalten

$$dv = -gdx - \frac{3v(h+v)dx}{4nch}$$

oder

$$dx = \frac{-4nchdv}{4ngch + 3hv + 3vv}$$



Wovon die Integration entweder von der Quadratur des Zirkels, oder von den Logarithmis abhängt, oder auch algebraisch bewerkstelliget werden kann. Denn wenn $h < \frac{16}{3}ngc$, oder wenn $h < \frac{16}{3}(n-1)c$, so erfordert die Integration die Quadratur des Zirkels; wenn aber $h > \frac{16}{3}(n-1)c$, so kommt man auf Logarithmos, und wenn $h = \frac{16}{3}(n-1)c$, so kann die Integration algebraisch verrichtet werden. Da nun $h = 27979$ Rheinh. Schuh, so geht die Integration für eine eiserne Kugel, da $n = 6647$, algebraisch von statten, wenn der Diameter der Kugel $c = \frac{176}{223}$ Rheinh. Schuh, oder wenn der Diameter der Kugel $9\frac{3}{4}$ engl. Zoll halt. Wenn also der Diameter einer eisernen Kugel grösser ist, als $9\frac{3}{4}$ Zoll, so erfordert die Integration die Quadratur des Zirkels; hingegen wenn der Diameter der Kugel kleiner ist, als $9\frac{3}{4}$ Zoll, so kommt man auf Logarithmos, und dieses ist der Fall, welcher am öftesten vorkommt.

Wir wollen inzwischen für das erste den Fall betrachten, wenn $h = \frac{16}{3}ngc$, oder wenn

$$4ngch = \frac{3}{4}hh \quad \text{und} \quad 4nch = \frac{3hh}{4g}$$

1) Siehe p. 363. F. R. S.

Hier wird also

$$dx = \frac{-hh}{4g} \cdot \frac{dv}{(\frac{1}{2}h + v)^2}$$

oder

$$x = \frac{hh}{2g(h + 2v)} - \frac{hh}{2g(2b + h)} \quad ^1)$$

woraus die ganze Höhe EA , auf welche die Kugel steigen wird, heraus kommt, wenn man setzt $v = 0$: indem die Kugel so lang steigt, biß ihre Geschwindigkeit völlig zernichtet wird. Daher wird in diesem Fall

$$EA = \frac{h}{2g} - \frac{hh}{2g(2b + h)} = \frac{bh}{g(2b + h)} \quad ^2)$$

Wenn aber der Diameter der Kugel kleiner ist, als in diesem Fall, oder $4ngch < \frac{3}{4}hh$, so laßt uns setzen

$$4ngch = \frac{3}{4}hh - 3kk;$$

so wird

$$dx = \frac{-(hh - 4kk)dv}{4g((\frac{1}{2}h + v)^2 - kk)}$$

oder

$$\frac{4gdx}{hh - 4kk} = \frac{dv}{2k(v + \frac{1}{2}h + k)} - \frac{dv}{2k(v + \frac{1}{2}h - k)}$$

Wovon das Integrale gefunden wird

$$x = \frac{hh - 4kk}{8gk} \left(\frac{2v + h + 2k}{2v + h - 2k} \right) \cdot \frac{(2b + h - 2k)}{(2v + h + 2k)}$$

Wenn man nun hier setzt $v = 0$, so wird

$$EA = \frac{hh - 4kk}{8gk} \cdot \frac{(h + 2k)(2b + h - 2k)}{(h - 2k)(2b + h + 2k)}$$

und da $g = 1 - \frac{1}{n}$, so ist

$$k = \sqrt{\left(\frac{1}{4}hh - \frac{4}{3}(n-1)ch\right)}.$$

1) Im Original $x = \frac{hh}{2g(h+v)} - \frac{hh}{2g(b+h)}$. Berichtigt von F. R. S.

2) Im Original $EA = \frac{h}{2g} - \frac{hh}{2g(b+h)} = \frac{bh}{2g(b+h)}$. Berichtigt von F. R. S.

Hieraus wollen wir nun die Höhe bestimmen, zu welcher eine eiserne Canonen-Kugel, deren Diameter $= 5\frac{1}{2}$ Zoll, und welche mit einer Geschwindigkeit von 1650 Engl. Schuhen gerade aufwärts geschossen wird, gelangen kann.

Es ist also $b = 40960$ Rheinh. Schuh, $\frac{4nc}{3} = 3940$ Rheinh. Schuh, und

$$\frac{4}{3}(n-1)ch = 110226100^3) = \frac{hh - 4kk}{4}.$$

Ferner wird gefunden $\frac{1}{4}hh = 195706110^3)$ und ist also $k = \sqrt{85480010 - 9245,54^3)}$; folglich

$$\frac{hh - 4kk}{8gk} = 5962,^4)$$

dahero wird

$$EA = 5962 \frac{46470 \cdot 91408}{9488 \cdot 128390} = 7447.^5)$$

Also wird diese Kugel nicht höher, als auf 7447⁶⁾ Rheinh. Schuh steigen, da dieselbe doch in einem Luft-leeren Raum auf eine Höhe von 40960 Rheinh. Schuhen gestiegen seyn würde. Weil aber die Luft je höher je dünner wird, und also der Widerstand derselben abnimmt, so muß diese Kugel in der That doch etwas höher kommen, welches aber, da die Kugel in der untern Gegend den größten Widerstand leidet, nicht viel austragen kann.

Da nun solcher Gestalt die Höhe EA , zu welcher die Kugel gelangt, gefunden wird, so können wir dieselbe an statt der Geschwindigkeit in E als bekannt annehmen, um auf diese Art das Herunterfallen der Kugel, nebst der dazu erfordernten Zeit, desto bequemer bestimmen zu können. Es sey also die ganze Höhe $AE = a$, die Geschwindigkeit der aufsteigenden Kugel in $P = \sqrt{v}$, und die Geschwindigkeit der herunterfallenden Kugel gleichfalls in P sey $= \sqrt{u}$: die Höhe AP aber werde $= z$ gesetzt. Da nun $z = a - x$ und $dz = -dx$, so wird man für das Heraufsteigen diese Differential-Vergleichung haben

$$4nchdv - 4ngchdz + 3hvdz + 3vvdz.$$

Im Herunterfallen ist aber nur der Widerstand der Luft der Bewegung ent-

1) Im Original 110237500. 2) Im Original 195705800.

3) Im Original $\sqrt{85468300} = 9245$. 4) Im Original 5963.

5) Im Original $EA = 5963 \frac{46469 \cdot 91409}{9489 \cdot 128389} = 9376$. 6) Im Original 9376.

Berichtigt von F. R. S.



gegen, indem die Schwebre die Kugel abwärts zieht, und die Bewegung vermehrt. In diesem Fall wird man also diese Aequation bekommen

$$4nchdu = 4ngchdz - 3hudz - 3uudz.$$

Diese Aequation entsteht aus jener, wenn man $-c$ für c schreibt: dahero wenn das Integrale für die erste Aequation wird gefunden worden seyn, so wird daraus durch diese Veränderung das Integrale der andern leicht hergeleitet werden können. Es wird aber zu unserem Vorhaben dienlicher seyn, diese Integrationen durch eine bequeme Näherung zu verrichten. Weil nun, wenn z und folglich v noch sehr klein ist, diese Aequation

$$4nchdv = 4ngchdz \quad \text{oder} \quad dv = g dz$$

statt findet, so wollen wir für den wahren Werth von v diese Seriem annehmen

$$v = gz + \alpha z^3 + \beta z^5 + \gamma z^7 + \delta z^9 + \text{etc.}$$

und die Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. aus der erstern Aequation bestimmen. Um aber dieses desto leichter zu bewerkstelligen, so wollen wir 1 für g setzen, indem $\frac{1}{m}$ ein so geringer Bruch ist, welcher nicht in Betrachtung kommt. Hernach laßt uns setzen $4nc = 3mh$, oder $m = \frac{4nc}{3h}$; so wird die erste Aequation in diese verwandelt

$$mhhdv = mhh dz + hvdz + vvdz,$$

und wenn man hierzu annimmt

$$v = z + \alpha z^3 + \beta z^5 + \gamma z^7 + \delta z^9 + \text{etc.},$$

so wird gefunden

$$\alpha = \frac{1}{2mh}, \quad \beta = \frac{1}{6m^2h^2}(2m+1),$$

$$\gamma = \frac{1}{24m^3h^3}(8m+1), \quad \delta = \frac{1}{120m^4h^4}(16m^2+22m+1).$$

Und also hat man

$$v = z + \frac{z^3}{2mh} + \frac{(1+2m)z^5}{6m^2h^2} + \frac{(1+8m)z^7}{24m^3h^3} + \frac{(1+22m+16m^2)z^9}{120m^4h^4} + \text{etc.},$$

welche Ausdrückung für das Aufsteigen gilt. Für das Herunterfallen aber bekommt man

$$u = z - \frac{z^3}{2mh} + \frac{(1-2m)z^5}{6m^2h^2} - \frac{(1-8m)z^7}{24m^3h^3} + \frac{(1-22m+16m^2)z^9}{120m^4h^4} - \text{etc.}$$

Um nun hieraus so wohl die Zeit des Aufsteigens als des Herunterfallens zu bestimmen, so suche man die Werthe von $\frac{1}{Vv}$ und von $\frac{1}{Vu}$. Man wird aber finden

$$\frac{1}{Vv} = \frac{1}{Vz} \left(1 - \frac{z}{4mh} + \frac{(1-16m)z^3}{96m^2h^2} + \frac{(1-16m)z^5}{384m^3h^3} - \frac{(1+32m+256m^2)z^7}{10240m^4h^4} - \text{etc.} \right)$$

$$\frac{1}{Vu} = \frac{1}{Vz} \left(1 + \frac{z}{4mh} + \frac{(1+16m)z^3}{96m^2h^2} - \frac{(1+16m)z^5}{384m^3h^3} - \frac{(1-32m+256m^2)z^7}{10240m^4h^4} + \text{etc.} \right)$$

Man multiplicire diese Formeln mit dz , und integrir dieselben, hernach aber setze man $z = a$, so wird man für die Zeit des Heraufsteigens finden

$$2Va - \frac{aVa}{6mh} + \frac{(1-16m)a^2Va}{240m^2h^2} + \frac{(1-16m)a^2Va}{1344m^3h^3} - \frac{(1+32m+256m^2)a^4Va}{46080m^4h^4} - \text{etc.}$$

Für die Zeit des Herunterfallens aber findet man

$$2Va + \frac{aVa}{6mh} + \frac{(1+16m)a^2Va}{240m^2h^2} - \frac{(1+16m)a^2Va}{1344m^3h^3} - \frac{(1-32m+256m^2)a^4Va}{46080m^4h^4} + \text{etc.}$$

Diese beyden Ausdrückungen zusammen genommen geben die ganze Zeit, in welcher die Kugel in der Luft schwebet, biß dieselbe wiederum herunter fällt. Diese Zeit ist also

$$4Va + \frac{a^2Va}{120m^2h^2} - \frac{a^2Va}{42m^2h^2} - \frac{(1+256m^2)a^4Va}{23040m^4h^4} + \text{etc.}$$

Wenn man nemlich a in tausendsten Theilen eines Rheind. Schuhs ausdrückt, und diese Formel durch 250 dividirt, so kommt die Zeit in Secunden ausgedrückt heraus. Wenn also umgekehrt die Zeit, welche von dem Schuß biß zum Fall der Kugel verflossen, gegeben wird, so kann man daraus die Höhe $EA = a$ finden, zu welcher die Kugel gekommen. Es sey also diese Zeit $= \mu$ Secunden, und man setze $t = 250\mu$, so findet man

$$Va = \frac{t}{4} - \frac{t^3}{2^{15} \cdot 3 \cdot 5 m^2 h^2} + \frac{t^5}{2^{17} \cdot 3 \cdot 7 m^2 h^2} + \frac{t^7}{2^{19} \cdot 3 \cdot 5 m^4 h^4} + \frac{t^9}{2^{21} \cdot 5 \cdot 9 m^4 h^4} - \text{etc.}$$



und auf diese Art wird a in 1000sten Theilen eines Rheinl. Schuh's ausgedrückt. Diese Series nimmt so stark ab, daß die hier angeführten Termini hinlänglich sind, die Höhe $EA = a$ zu bestimmen, wenn nur t keine allzugrosse Zahl wird.

Um diese Rechnung zu erläutern, so wollen wir ein Exempel von denjenigen, welche der Herr BERNOULLI in dem zweyten Tomo der Petersburgischen Comment.¹⁾ angeführet, untersuchen. Dieselben sind mit einer drey-pfundigen eisernen Kugel gemacht worden, deren Diameter 0,2375 englische Schuh hielt. Nachdem diese Kugel aus einer Canone, so 32 Caliber lang war, mit einer Ladung Pulver von 2 Untz oder $\frac{1}{8}$ α gerade aufwärts in die Höhe geschossen worden, so fiel dieselbe nach 34" wiederum zu Boden.

Hier ist also $n = 6647$, $c = 0,2304$ Rheinl. Schuh. Folglich ist $nc = 1531$ und $\frac{4}{3}nc = 2041 = mh$, also $mh = 2041000$ tausendstel Rheinl. Schuh, und $m = 0,07295$. Nun multiplicire man die 34" mit 250; so wird $t = 8500$: und hieraus findet man

$$\begin{aligned}\frac{t}{4} &= 2125 \\ \frac{t^2}{2^{15} \cdot 15 m^2 h^2} &= 21,670 \\ \frac{t^3}{2^{17} \cdot 21 m^3 h^3} &= 9,993 \\ \frac{t^4}{2^{19} \cdot 15 m^4 h^4} &= 1,657 \\ \frac{t^5}{2^{21} \cdot 45 m^5 h^5} &= 1,193.\end{aligned}$$

$$Va = 2115,973$$

$$a = 4478$$

Rheinl. Schuh.²⁾

Nach dieser Rechnung müßte also die Kugel auf eine Höhe von 4478 Rheinl. Schuh gestiegen seyn: aus welcher jetzt die erste Geschwindigkeit der Kugel, oder die Höhe b , aus welcher diese Geschwindigkeit durch den Fall in einem Luft-leeren Raum erzeugt wird, gefunden werden kann. Denn da

1) Siehe die Anmerkung 1, p. 41. F. R. S.

2) Aus den für die fünf Glieder von Va angegebenen Werten erhält man $Va = 2116,173$. Da aber das letzte Glied nicht gleich 1,193 ist, sondern den Wert 0,753 hat, so wird $Va = 2115,733$, woraus sich 4476,3 rheinländische Schuh für a ergeben; eine Strecke, die von der im Text angeführten unwesentlich abweicht. F. R. S.

$EA = a = 4478$ Rheinl. Schuh, welche Höhe von derjenigen, so der Hr. BERNOULLI gefunden, nicht viel unterschieden ist¹⁾, wenn man nimmt

$$k = \sqrt{\left(\frac{1}{4}hh - \frac{4}{3}nch\right)},$$

so wird $k = 11773$ Rheinl. Schuh, und man bekommt

$$a = \frac{hh - 4kk}{8gk} \cdot \frac{(h+2k)(2b+h-2k)}{(h-2k)(2b+h+2k)}.$$

Um nun hieraus b zu finden, weil $g = 1$ und $\frac{1}{4}hh - kk = 2041h$, so wird

$$\frac{8ak}{hh - 4kk} = 1,8464;$$

und wenn e für die Zahl, deren hyperbolischer Logarithmus $= 1$, genommen wird, so wird

$$e^{1,8464} = 6,3373,$$

und die gesuchte Höhe b wird also ausgedrückt

$$b = \frac{5,3373(hh - 4kk)}{2h + 4k - 6,3373(2h - 4k)}.$$

Woraus gefunden wird $b = 26014$ Rheinl. Schuh, und daher müßte die Kugel mit einer Geschwindigkeit von 1275 Schuhen in 1" aus der Canone geschossen worden seyn. Diese Geschwindigkeit ist nun weit grösser, als diejenige, welche der Hr. Prof. BERNOULLI aus seiner Theorie gefunden.²⁾ Man hat sich aber hierüber nicht zu verwundern; denn da wir hier den Widerstand mit dem Autore grösser annehmen, als der Hr. BERNOULLI gethan, so muß auch die Kugel anfänglich eine weit grössere Geschwindigkeit gehabt haben, um auf eben diejenige Höhe zu gelangen. Hierdurch wird aber eine weit grössere Schwierigkeit verursacht, indem man aus der oben festgesetzten Wirkung des Pulvers unmöglich erklären kann, wie eine drey-pfundige Kugel von einer Ladung von $\frac{1}{8}$ α eine so große Geschwindigkeit erhalten könne. Denn wenn man nach unserer obigen Regel setzt, das Gewicht der Kugel $P = 3$, das Gewicht der Ladung $= \frac{1}{8}$ und die Länge der Canone in Calibern $i = 32$, so

1) BERNOULLI hatte 4550 englische Fuß $= 4419$ rheinländische Schuh erhalten. F. R. S.

2) BERNOULLI hatte 13694 englische Fuß für b gefunden, woraus sich eine Geschwindigkeit von 912 rheinländischen Schuhen ergibt. F. R. S.



findet man $b = 6855$ Rheinl. Schuh, und die Kugel würde also keine größere Geschwindigkeit als von 654 Schuhen in 1" gehabt haben.¹⁾ Dieser Unterschied zwischen 654 Schuh, und 1275 Schuh ist so groß, daß derselbe von keiner geringen Abweichung der Theorie von der Wahrheit entspringen kann. Wenn also bey diesem Experiment kein merklicher Fehler eingeschlichen, so müßte entweder die Gewalt des Pulvers fast 4 mahl grösser seyn, als der Autor behauptet, welche Folge auch der Herr BERNOULLI aus eben diesen Experimenten ziehet, oder die gebrauchte Näherung zu Bestimmung der Höhe a müßte unrichtig seyn. Denn ungeachtet die 5 ersten Termini, wodurch Va ausgedrückt worden, ziemlich stark abnehmen, so könnte es doch geschehen, daß die folgenden Termini wiederum grösser würden, und also der wahre Werth von a in der That weit kleiner wäre. Um nun dieses zu untersuchen, so wollen wir die Frage umkehren, und aus der ersten Geschwindigkeit der Kugel, welche 1275 Schuh in 1" seyn soll, die Zeit bestimmen, welche sowohl zum Aufsteigen der Kugel, als zum Herabfallen erfordert wird, und alsdenn sehen, ob diese Zeit 34" betrage, wie in dem Experiment befunden worden.

Es sey demnach $b = 26014$ Rheinl. Schuh, und $m = \frac{4nc}{3h} = 0,07295$, und $mh = 2041$ Rheinl. Schuh. Weil nun oben für das Heraufsteigen der Kugel gefunden worden

$$mhh\dot{v} = mhh\dot{z} + h\dot{v}dz + v\dot{v}dz,$$

so wird

$$dz = \frac{mhh\dot{v}}{mhh + hv + vv}.$$

Man setze ferner

$$mhh = \frac{1}{4}hh - kk,$$

so wird $k = 11773$ Rheinl. Schuh, und wird also

$$dz = \frac{mhh\dot{v}}{(v + \frac{1}{4}h + k)(v + \frac{1}{4}h - k)}.$$

Wenn nun die Zeit $-t$ gesetzt wird, so bekommt man

$$dt = \frac{dz}{Vv} = \frac{mhh\dot{v}}{(v + \frac{1}{4}h + k)(v + \frac{1}{4}h - k)Vv}.$$

1) Aus der zweiten Gleichung p. 325 erhält man 7219 für b und für die Geschwindigkeit 671,7 rheinländische Schuh pro Sekunde. F. R. S.

Es sey $Vv = s$, so wird

$$dt = \frac{2mhh\dot{v}}{(ss + \frac{1}{4}h + k)(ss + \frac{1}{4}h - k)}$$

oder

$$dt = \frac{mhh}{k} \left(\frac{ds}{ss + \frac{1}{4}h - k} - \frac{ds}{ss + \frac{1}{4}h + k} \right).$$

Es ist aber

$$\frac{1}{2}h - k = 2216,5 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}h + k = 25762,5,$$

folglich beruht die Integration beyder Glieder auf der Quadratur des Zirkuls.

Es sey Kürze halber

$$\frac{1}{2}h - k = 2216,5 = \beta\beta,$$

$$\frac{1}{2}h + k = 25762,5 = \gamma\gamma,$$

so wird

$$t = \frac{mhh}{\beta k} \text{ A. tang. } \frac{s}{\beta} - \frac{mhh}{\gamma k} \text{ A. tang. } \frac{s}{\gamma}.$$

Wenn man hier die Grössen in tausendsten Theilen eines Rheinländischen Schuhs ausdrückt, und durch 250 dividirt, so bekommt man die Zeit in Sekunden. Und die ganze Zeit des Heraufsteigens kömmt also heraus, wenn man $v = b$ und $s = Vb = 161,29$ setzt. Auf diese Art wird

$$\beta = 47,08 \quad \text{und} \quad \gamma = 160,50 \quad \text{und} \quad \frac{mh}{k} = 0,17336,$$

ferner

$$\frac{Vh}{\beta} = 3,55298 \quad \text{und} \quad \frac{Vh}{\gamma} = 1,04218.$$

Derowegen wird seyn

$$t = 3,66797 \left(3,55298 \text{ A. tang. } \frac{16129}{4708} - 1,04218 \text{ A. tang. } \frac{16129}{16050} \right)$$

Secunden, und hieraus findet sich die Zeit des Heraufsteigens $= 13\frac{3}{4}''$.

1) Genauer 13,758 Sekunden. F. R. S.



Wenn wir die Zeit des Herunterfallens genau bestimmen wollen, so müssen wir zuerst die Geschwindigkeit, mit welcher die Kugel herunter fällt, suchen. Dieses geschieht aus der Aequation

$$dz = \frac{mhh du}{mhh - hu - uu}$$

Man setze

$$mhh = ff - \frac{1}{4}hh,$$

so wird

$$f = h \sqrt{\left(m + \frac{1}{4}\right)} = 15900$$

und

$$dz = \frac{mhh du}{\left(f - \frac{1}{2}h - u\right)\left(f + \frac{1}{2}h + u\right)},$$

folglich

$$dz = \frac{mhh}{2f} \left(\frac{du}{f + \frac{1}{2}h + u} + \frac{du}{f - \frac{1}{2}h - u} \right),$$

wovon das Integrale gehörig genommen, giebt

$$z = \frac{mhh}{2f} \log \frac{\left(f - \frac{1}{2}h\right)\left(f + \frac{1}{2}h + u\right)}{\left(f + \frac{1}{2}h\right)\left(f - \frac{1}{2}h - u\right)}.$$

Nun setze man $z = 4478$ Rheinh. Schuh, nemlich der gefundenen Höhe $EA = a$; so wird

$$\frac{2fz}{mhh} = \frac{2a \sqrt{\left(m + \frac{1}{4}\right)}}{mh} = 2,49367$$

und

$$e^{2,49367} = 12,1056;$$

diese Zahl setze man $= N$, so wird

$$N = \frac{ff - \frac{1}{4}hh + \left(f - \frac{1}{2}h\right)u}{ff - \frac{1}{4}hh - \left(f + \frac{1}{2}h\right)u}$$

und

$$u = \frac{mhh(N-1)}{\left(f + \frac{1}{2}h\right)N + f - \frac{1}{2}h}.$$

Hieraus kommt $u = 1743,51^1)$ Rheinh. Schuh.

1) Im Original 1743,7. Berichtigt von F. R. S.

Man setze jetzt die Zeit des Herabfallens $= t$, so wird

$$dt = \frac{dz}{Vu} = \frac{mhh}{2f} \left(\frac{du:Vu}{f + \frac{1}{2}h + u} + \frac{du:Vu}{f - \frac{1}{2}h - u} \right).$$

Es sey

$$Vu = s = 41,7582,$$

$$f + \frac{1}{2}h = \beta\beta \quad \text{und} \quad f - \frac{1}{2}h = \gamma\gamma,$$

so wird

$$\beta = 172,873 \quad \text{und} \quad \gamma = 43,7607,$$

und

$$dt = \frac{mhh}{f} \left(\frac{ds}{\beta\beta + ss} + \frac{ds}{\gamma\gamma - ss} \right),$$

wovon das Integrale ist

$$t = \frac{mhh}{\beta f} A. \text{ tang. } \frac{s}{\beta} + \frac{mhh}{2\gamma f} \log \frac{\gamma + s}{\gamma - s}.$$

Es ist aber

$$\frac{mh}{f} = 0,128365, \quad \frac{Vh}{\beta} = 0,96759 \quad \text{und} \quad \frac{Vh}{2\gamma} = 1,91118.$$

Hieraus wird

$$t = 2,71595 \left(0,96759 A. \text{ tang. } \frac{417582}{1728730} + 1,91118 \log \frac{855189}{20025} \right)$$

Secunden und also die Zeit des Herabfallens wird $= 20,11$ Secunden: dahero die ganze Zeit, in welcher die Kugel in der Luft geschwebet, ist $= 33,87$ Secunden, welche von der beobachteten Zeit, nemlich von $34''$, nur um $\frac{13}{100}$ Secunden unterschieden ist.) Hieraus erhellet, daß man sich auf die obige Näherung sicher verlassen könne.

1) Die Gleichung für t ergibt für die Fallzeit in Secunden den Ausdruck

$$\frac{mh}{2507} \sqrt{1000h} \left(\frac{Vh}{\beta} \text{ arctg. } \frac{s}{\beta} + \frac{Vh}{2\gamma} \log \frac{\gamma + s}{\gamma - s} \right),$$

woraus man, unter Benutzung der genaueren Werte

$$s = 41,75538, \quad \beta = 172,886, \quad \gamma = 43,70926, \quad \frac{Vh}{\beta} = 0,967513, \quad \frac{Vh}{2\gamma} = 1,91343,$$

für die Zeit des Herabfallens 20,26 Secunden, somit für die ganze Dauer der Bewegung in der Luft 34,02 Secunden erhält. F. R. S.



Da sich nun hierinn kein Irrthum gefunden, so muß die Geschwindigkeit, mit welcher die Kugel aus der Canone geschossen worden, nothwendig ungefähr 1275 Schuh in 1" betragen haben, und bleibet also noch die gröste Schwierigkeit, woher die Kugel diese so grosse Geschwindigkeit erhalten habe. Wir haben schon gewiesen, daß 2 Unzen Pulver, welche bey diesem Schuß sollen seyn gebraucht worden, nach der oben¹⁾ fest gesetzten Theorie der Kugel keine grössere Geschwindigkeit, als von 654 Schuhen in 1" hätten eindrücken können. Dieser Unterschied ist allzugroß, und die Ladung zu klein, als daß man aus der Vermehrung der Hitze bey Entzündung des Pulvers diesen Zuwachs der Kraft solte herleiten können. Man kann aber aus diesem Experiment auch nicht schliessen, daß die Gewalt des Pulvers so sehr viel grösser seyn solte, als wir oben angenommen haben. Denn wenn man dieses behaupten wolte, so müßte auch in allen von dem Autore angestellten Versuchen die Geschwindigkeit der Kugel fast zwey mahl so groß gewesen seyn, als durch die Erfahrung befunden worden, welches man keineswegs zugeben kann. Nach unserer Tabelle, welche wir oben²⁾ gegeben, müßte zur Hervorbringung dieser Geschwindigkeit die Ladung über ein halb Pfund, und folglich vier mahl grösser, als die angezeigte, welche nur 2 Unzen war, gewesen seyn. Die Höhe von 4478 Schuhen ist auch zu klein, als daß die Verdünnung der Luft eine merkliche Veränderung hatte hervorbringen können; denn nach allen Meynungen kann die Luft zu oberst in *A* nicht über den Fünftel dünner seyn, als unten in *E*, welches bey der daselbst schon schwachen Bewegung nichts merkliches austragen kann. Wir wollen also dieses Experiment an seinen Ort gestellt seyn lassen, und zur Untersuchung der krumm-linichten Bewegung einer Kugel fortschreiten.

DRITTE ANMERKUNG.

Es sey wiederum wie bißher der Diameter der Kugel = *c*, die Schwere der Kugel zur Schwere der Luft, wie *n* zu 1, und *b* die Höhe, aus welcher die erste Geschwindigkeit der Kugel in *E* (Fig. 23, p. 352) durch den Fall erlangt wird. Wir wollen also setzen, die Kugel werde unter einem schiefen Winkel mit dem Horizont *EF* aus der Canone geschossen, nemlich nach der Direction der Linie *EH*, und den Winkel *HEF* = θ setzen. Da nun die Geschwindigkeit der Kugel

1) Siehe p. 234, 318 und 325. 2) Siehe p. 327. F. R. S.

durch $\sqrt{b}$ ausgedrückt wird, wenn wir dieselbe nach der Horizontal-Direction *EF* und Vertical-Direction *EG* zertheilen, so wird die Horizontal-Geschwindigkeit = $\sqrt{b} \cdot \cos. \theta$, und die Vertical-Geschwindigkeit = $\sqrt{b} \cdot \sin. \theta$. Nach Verfließen der Zeit = *t* sey die Kugel in *M* gekommen, wo ihre Geschwindigkeit seyn soll = $\sqrt{v}$. Man ziehe aus *M* die Vertical-Linie *MP*, und nenne *EP* = *x*, *PM* = *y*, so wird, nachdem man sich die Vertical-Linie *pm* der *PM* unendlich nahe gezogen vorstellt, seyn *Pp* = *Mr* = *dx* und *mr* = *Mq* = *dy*. Ferner nenne man das Element der krummen Linie

$$Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds,$$

und den Winkel *mMr* = φ , so wird

$$\sin. \varphi = \frac{dy}{ds}, \quad \cos. \varphi = \frac{dx}{ds} \quad \text{und} \quad \text{tang. } \varphi = \frac{dy}{dx}.$$

Hernach wird die Horizontal-Geschwindigkeit der Kugel in *M*

$$= \sqrt{v} \cdot \cos. \varphi$$

und die Vertical-Geschwindigkeit

$$= \sqrt{v} \cdot \sin. \varphi;$$

und über dieses giebt die Betrachtung der Zeit

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{v}}.$$

Die Kraft der Schwere wird, wie wir vorher gesehen, durch $1 - \frac{1}{n}$ ausgedrückt, wofür wir Kurze halber *g* setzen wollen; durch diese Kraft wird die Vertical-Geschwindigkeit vermindert. Hernach ist die Kraft des Widerstands

$$= \frac{3v(h+v)}{4nch},$$

welche nach der Direction *mM* wücket. Hieraus wird also die Vertical-Geschwindigkeit vermindert durch die Kraft $\frac{3v(h+v)}{4nch} \sin. \varphi$ und die Horizontal-Geschwindigkeit durch die Kraft $\frac{3v(h+v)}{4nch} \cos. \varphi$.



Aus diesen Kräften erwachsen also diese Aequationen:

$$d. v \sin. \varphi^2 = -g dy - \frac{3v(h+v)dy \sin. \varphi}{4nch}$$

$$d. v \cos. \varphi^2 = \frac{-3v(h+v)dx \cos. \varphi}{4nch}$$

Oder da

$$dx = ds \cos. \varphi \quad \text{und} \quad dy = ds \sin. \varphi,$$

so bekommen wir

$$dv \sin. \varphi^2 + 2vd\varphi \sin. \varphi \cos. \varphi = -gds \sin. \varphi - \frac{3v(h+v)ds \sin. \varphi^2}{4nch},$$

$$dv \cos. \varphi^2 - 2vd\varphi \sin. \varphi \cos. \varphi = \frac{-3v(h+v)ds \cos. \varphi^2}{4nch}.$$

Jene durch diese dividirt giebt also

$$\frac{dv \sin. \varphi^2 + 2vd\varphi \sin. \varphi \cos. \varphi}{dv \cos. \varphi^2 - 2vd\varphi \sin. \varphi \cos. \varphi} = \frac{4ngch \sin. \varphi + 3v(h+v) \sin. \varphi^2}{3v(h+v) \cos. \varphi^2}.$$

in welcher sich nur noch zwey veränderliche Größen v und φ befinden. Diese Aequation aber wird auf diese gebracht

$$2ngchdv \cos. \varphi = 4ngchvd\varphi \sin. \varphi + 3vv(h+v)d\varphi.$$

Wenn man ferner aus den beyden obigen Aequationen dv heraus bringt, so findet man

$$v = \frac{-gds \cos. \varphi}{2d\varphi}.$$

Könnte man also aus der obigen Aequation v aus dem Winkel φ bestimmen, so wäre

$$ds = \frac{-2vd\varphi}{g \cos. \varphi}$$

und ferner

$$dx = \frac{-2vd\varphi}{g} \quad \text{und} \quad dy = \frac{-2vd\varphi \tan. \varphi}{g}.$$

Will man aber eine Aequation zwischen x und y haben, so addire man die ersten zwey Aequationen zusammen, so hat man

$$dv = -gdy - \frac{3v(h+v)ds}{4nch}.$$

Man setze $dy = p dx$, so ist

$$ds = dx \sqrt{1+pp},$$

und

$$\sin. \varphi = \frac{p}{\sqrt{1+pp}} \quad \text{und} \quad \cos. \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+pp}}.$$

Dieses differenzirt giebt

$$d\varphi \sin. \varphi = \frac{p dp}{(1+pp)\sqrt{1+pp}},$$

und folglich

$$d\varphi = \frac{dp}{1+pp}.$$

Also wird

$$v = \frac{-gdx(1+pp)}{2dp}.$$

Man setze ferner $dp = q dx$, so ist

$$v = \frac{-(1+pp)g}{2q}$$

und

$$dv = \frac{-gpdp}{q} + \frac{gdq(1+pp)}{2qq} = -gdy + \frac{gdq(1+pp)}{2qq}.$$

Folglich wird

$$\frac{4}{3}nchdq = hdp\sqrt{1+pp} - \frac{g(1+pp)^{\frac{3}{2}}dp}{2q}$$

oder

$$\frac{4}{3}ncdq = dp\sqrt{1+pp} - \frac{gdp(1+pp)\sqrt{1+pp}}{2hq}.$$

Die nöthigen Bestimmungen zur Integration dieser Vergleichung sind, daß im Anfang E werden muß:

$$\text{I. } x=0, \quad \text{II. } y=0, \quad \text{III. } p=\tan. \theta \quad \text{und} \quad \text{IV. } q=\frac{-g}{2b \cos. \theta^2}.$$

Hat man aber q durch p ausgedruckt, so wird

$$x = \int \frac{dp}{q} \quad \text{und} \quad y = \int \frac{p dp}{q}.$$

Weil aber die Aequation zwischen p und q nicht integrirt werden kann, so



muß man trachten, solches durch eine bequeme Näherung zu verrichten. Zu diesem Ende setze man

$$\frac{4}{3}nc = k, \quad \frac{2h}{g} = f, \quad p = \frac{u}{V(1-uu)} \quad \text{und} \quad g = \frac{1}{r},$$

so wird die obige Aequation in diese verwandelt:

$$k(1-uu)^3 dr + r r du(1-uu) - \frac{1}{f} r^2 du = 0.$$

Nun setze man

$$r = a + Au + Bu^2 + Cu^3 + \text{etc.},$$

so wird man finden:

$$A = \frac{a^2(a-f)}{kf}, \quad B = \frac{a^2(a-f)(3a-2f)}{2k k f f},$$

$$C = \frac{a^2(3a-2f)}{3k f} + \frac{a^4(a-f)(15aa-20af+6ff)}{6k^2 f^2}$$

etc.

Vom Anfang in dem Punct E wird also

$$u = \sin. \theta, \quad V(1-uu) = \cos. \theta \quad \text{und} \quad r = \frac{-2b \cos. \theta^2}{g}.$$

Da nun

$$dp = \frac{du}{(1-uu)^{3/2}} \quad \text{und} \quad p dp = \frac{u du}{(1-uu)^{3/2}},$$

so bekommt man

$$x = \int \frac{du(a + Au + Bu^2 + Cu^3 + \text{etc.})}{(1-uu)^{3/2}},$$

$$y = \int \frac{u du(a + Au + Bu^2 + Cu^3 + \text{etc.})}{(1-uu)^{3/2}}.$$

Es ist aber

$$\int \frac{du}{(1-uu)^{3/2}} = \frac{u}{V(1-uu)},$$

$$\int \frac{u du}{(1-uu)^{3/2}} = \frac{1}{V(1-uu)},$$

$$\int \frac{uu du}{(1-uu)^{3/2}} = \frac{u}{V(1-uu)} - A \sin. u,$$

$$\int \frac{u^3 du}{(1-uu)^{3/2}} = \frac{2-uu}{V(1-uu)}$$

etc.

$$\int \frac{u du}{(1-uu)^2} = \frac{1}{2(1-uu)},$$

$$\int \frac{uu du}{(1-uu)^2} = \frac{u}{2(1-uu)} - \frac{1}{4} l \frac{1+u}{1-u},$$

$$\int \frac{u^3 du}{(1-uu)^2} = \frac{1}{2(1-uu)} + \frac{1}{2} l(1-uu),$$

$$\int \frac{u^4 du}{(1-uu)^2} = \frac{3u-2u^3}{2(1-uu)} - \frac{3}{4} l \frac{1+u}{1-u}$$

etc.

Also wird

$$x = E + \frac{au}{V(1-uu)} + \frac{A}{V(1-uu)} + \frac{Bu}{V(1-uu)} + \frac{C(2-uu)}{V(1-uu)} + \text{etc.}$$

$- B A \sin. u - \text{etc.},$

$$y = F + \frac{a}{2(1-uu)} + \frac{Au}{2(1-uu)} + \frac{B}{2(1-uu)} + \frac{C(3u-2u^3)}{2(1-uu)} + \text{etc.}$$

$-\frac{A}{4} l \frac{1+u}{1-u} + \frac{B}{2} l(1-uu) - \frac{3C}{4} l \frac{1+u}{1-u} + \text{etc.}$

Um aber die Buchstaben a , E und F zu bestimmen, so hat man auf den Anfang zu sehen, da wird

$$\frac{-2b \cos. \theta^2}{g} = a + A \sin. \theta + B \sin. \theta^2 + C \sin. \theta^3 + \text{etc.},$$

$$-E = \frac{a \sin. \theta}{\cos. \theta} + \frac{A}{\cos. \theta} + \frac{B \sin. \theta}{\cos. \theta} + \frac{C(1+\cos. \theta^2)}{\cos. \theta} + \text{etc.}$$

$- B \theta - \text{etc.},$

$$-F = \frac{a}{2 \cos. \theta^2} + \frac{A \sin. \theta}{2 \cos. \theta^2} + \frac{B}{2 \cos. \theta^2} + \frac{C(3 \sin. \theta - 2 \sin. \theta^3)}{2 \cos. \theta^2} + \text{etc.}$$

$-\frac{A}{4} l \frac{1+\sin. \theta}{1-\sin. \theta} + B l \cos. \theta - \frac{3C}{4} l \frac{1+\sin. \theta}{1-\sin. \theta} + \text{etc.}$

Weil wir aber den Winkel $mMr = q$ gesetzt haben, so ist $p = \tan. q$ und $u = \sin. q$ und $V(1-uu) = \cos. q$. Folglich hat man:



$$x = \begin{cases} a \operatorname{tang.} \varphi + \frac{A}{\cos. \varphi} + B \operatorname{tang.} \varphi + \frac{C(1 + \cos. \varphi^2)}{\cos. \varphi} + \text{etc.} \\ - B \varphi - \text{etc.} \\ - a \operatorname{tang.} \theta - \frac{A}{\cos. \theta} - B \operatorname{tang.} \theta - \frac{C(1 + \cos. \theta^2)}{\cos. \theta} - \text{etc.} \\ + B \theta + \text{etc.} \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} \frac{a}{2 \cos. \varphi^2} + \frac{A \sin. \varphi}{2 \cos. \varphi^2} + \frac{B}{2 \cos. \varphi^2} + \frac{C(3 \sin. \varphi - 2 \sin. \varphi^3)}{2 \cos. \varphi^2} + \text{etc.} \\ - \frac{A}{4} \frac{1 + \sin. \varphi}{1 - \sin. \varphi} + B l \cos. \varphi - \frac{3C}{4} l \frac{1 + \sin. \varphi}{1 - \sin. \varphi} + \text{etc.} \\ - \frac{a}{2 \cos. \theta^2} - \frac{A \sin. \theta}{2 \cos. \theta^2} - \frac{B}{2 \cos. \theta^2} - \frac{C(3 \sin. \theta - 2 \sin. \theta^3)}{2 \cos. \theta^2} - \text{etc.} \\ + \frac{A}{4} l \frac{1 + \sin. \theta}{1 - \sin. \theta} - B l \cos. \theta + \frac{3C}{4} l \frac{1 + \sin. \theta}{1 - \sin. \theta} - \text{etc.} \end{cases}$$

Wenn k eine sehr grosse Zahl ist, so sollten die Werthe der Buchstaben A , B , C etc. immer abnehmen. Wir sehen aber, daß bey dieser Näherung C nicht kleiner werde, als A . Um derohalben eine zu diesem Ende bequemere Näherung zu finden, so wollen wir in der Differential-Aequation sogleich den Winkel φ an statt des Buchstabens u hinein bringen, da denn kommt:

$$kdr \cos. \varphi^5 + rrd \varphi \cos. \varphi^3 = \frac{1}{f} r^3 d\varphi.$$

Man setze nun

$$r = a + P + Q + \text{etc.}$$

und vergleiche die ähnlichen Terminos mit einander, so kommt

$$P = -\frac{aa}{k} \int \frac{d\varphi}{\cos. \varphi^3} + \frac{a^2}{fk} \int \frac{d\varphi}{\cos. \varphi^5},$$

$$Q = -\frac{2a}{k} \int \frac{Pd\varphi}{\cos. \varphi^3} + \frac{3a^2}{fk} \int \frac{Pd\varphi}{\cos. \varphi^5} \\ \text{etc.}$$

Wobey zu merken, daß im Anfange, wo $\varphi = \theta$, werden muß $r = -\frac{2b \cos. \theta^2}{g}$.
Hernach wird

$$x = \int \frac{rd\varphi}{\cos. \varphi^2} = \frac{r \sin. \varphi}{\cos. \varphi} - \int \frac{dr \sin. \varphi}{\cos. \varphi}$$

und

$$y = \int \frac{rd\varphi \sin. \varphi}{\cos. \varphi^3} = \frac{r}{2 \cos. \varphi^2} - \frac{1}{2} \int \frac{dr}{\cos. \varphi^2}.$$

Um diese Werthe zu finden, so setze man Kürze halber

$$\int \frac{d\varphi}{\cos. \varphi} = \omega,$$

und ist also

$$\omega = \frac{1}{2} l \frac{1 + \sin. \varphi}{1 - \sin. \varphi} = l \operatorname{tang.} (45^\circ + \frac{1}{2} \varphi);$$

oder ω ist der Logarithmus hyperbolicus des Tangentis des Winkels $45^\circ + \frac{1}{2} \varphi$, wenn der Radius = 1 gesetzt wird. Ferner wird gefunden

$$\int \frac{d\varphi}{\cos. \varphi^2} = \frac{\sin. \varphi}{2 \cos. \varphi^2} + \frac{\omega}{2},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\cos. \varphi^3} = \frac{\sin. \varphi}{4 \cos. \varphi^4} + \frac{3 \sin. \varphi}{4 \cdot 2 \cos. \varphi^2} + \frac{3\omega}{4 \cdot 2},$$

$$\int \frac{d\varphi}{\cos. \varphi^4} = \frac{\sin. \varphi}{6 \cos. \varphi^5} + \frac{5 \sin. \varphi}{6 \cdot 4 \cdot \cos. \varphi^3} + \frac{5 \cdot 3 \sin. \varphi}{6 \cdot 4 \cdot 2 \cos. \varphi} + \frac{5 \cdot 3 \omega}{6 \cdot 4 \cdot 2}$$

und so weiter.

Hernach um den Werth von Q zu finden, so ist

$$\int \frac{d\varphi}{\cos. \varphi^3} \int \frac{d\varphi}{\cos. \varphi^2} = \frac{1}{8} \left(\frac{\sin. \varphi}{\cos. \varphi^2} + \omega \right)^2,$$

$$\int \frac{d\varphi}{\cos. \varphi^3} \int \frac{d\varphi}{\cos. \varphi^5} = \frac{1}{24 \cos. \varphi^6} + \frac{3}{32} \left(\frac{\sin. \varphi}{\cos. \varphi^2} + \omega \right)^2,$$

$$\int \frac{d\varphi}{\cos. \varphi^5} \int \frac{d\varphi}{\cos. \varphi^3} = \frac{1}{32} \left(\frac{\sin. \varphi}{\cos. \varphi^4} + \frac{3 \sin. \varphi}{2 \cos. \varphi^2} + \frac{3\omega}{2} \right)^2,$$

$$\int \frac{d\varphi}{\cos. \varphi^5} \int \frac{d\varphi}{\cos. \varphi^5} = -\frac{1}{24 \cos. \varphi^6} + \frac{1}{24} \left(\frac{\sin. \varphi}{\cos. \varphi^4} + \frac{3 \sin. \varphi}{2 \cos. \varphi^2} + \frac{3\omega}{2} \right)^2.$$

Hieraus bekommt man

$$P = -\frac{aa}{2k} \left(\frac{\sin. \varphi}{\cos. \varphi^2} + \omega \right) + \frac{a^2}{4fk} \left(\frac{\sin. \varphi}{\cos. \varphi^4} + \frac{3 \sin. \varphi}{2 \cos. \varphi^2} + \frac{3\omega}{2} \right),$$

$$Q = \frac{2a^2}{8k^2} \left(\frac{\sin. \varphi}{\cos. \varphi^2} + \omega \right)^2 - \frac{a^4}{3fkk \cos. \varphi^6}$$

$$- \frac{3a^4}{32fkk} \left(\frac{1}{\cos. \varphi^4} - \frac{5}{\cos. \varphi^2} + \frac{4\omega \sin. \varphi}{\cos. \varphi^4} + \frac{10\omega \sin. \varphi}{\cos. \varphi^2} + 5\omega^2 \right)$$

$$+ \frac{3a^5}{32fkk} \left(\frac{\sin. \varphi}{\cos. \varphi^4} + \frac{3 \sin. \varphi}{2 \cos. \varphi^2} + \frac{3\omega}{2} \right)^2.$$



Wenn gar kein Widerstand vorhanden wäre, so würde seyn $r = a$, und die krumme Linie eine Parabel. Wenn demnach der Widerstand nicht sehr groß, so ist genug diese Aequation zu gebrauchen, $r = a + P$. Hieraus bekommt man

$$x = E + \frac{a \sin. \varphi}{\cos. \varphi} + \frac{P \sin. \varphi}{\cos. \varphi} - \int \frac{dP \sin. \varphi}{\cos. \varphi},$$

$$y = F + \frac{a}{2 \cos. \varphi^2} + \frac{P}{2 \cos. \varphi^2} - \frac{1}{2} \int \frac{dP}{\cos. \varphi^2},$$

wo

$$dP = \frac{-a d\varphi}{k \cos. \varphi^3} + \frac{a^3 d\varphi}{fk \cos. \varphi^5};$$

folglich wird

$$\int \frac{dP \sin. \varphi}{\cos. \varphi} = \frac{-aa}{3k \cos. \varphi^3} + \frac{a^3}{5fk \cos. \varphi^5}$$

und

$$\int \frac{dP}{\cos. \varphi^2} = \frac{-aa}{4k} \left(\frac{\sin. \varphi}{\cos. \varphi^4} + \frac{3 \sin. \varphi}{2 \cos. \varphi^2} + \frac{3\omega}{2} \right) + \frac{a^3}{6fk} \left(\frac{\sin. \varphi}{\cos. \varphi^6} + \frac{5 \sin. \varphi}{4 \cos. \varphi^4} + \frac{15 \sin. \varphi}{8 \cos. \varphi^2} + \frac{15\omega}{8} \right).$$

Wenn wir nun diese Werthe für P und dP setzen, so kommt

$$x = E + a \tan. \varphi - \frac{aa}{k} \left(\frac{1}{6 \cos. \varphi^3} - \frac{1}{2 \cos. \varphi} + \frac{1}{2} \omega \tan. \varphi \right) + \frac{a^3}{fk} \left(\frac{1}{20 \cos. \varphi^5} + \frac{1}{8 \cos. \varphi^3} - \frac{3}{8 \cos. \varphi} + \frac{3}{8} \omega \tan. \varphi \right),$$

$$y = F + \frac{a}{2 \cos. \varphi^2} - \frac{aa}{4k} \left(\frac{\sin. \varphi}{2 \cos. \varphi^4} - \frac{3 \sin. \varphi}{4 \cos. \varphi^2} - \frac{3}{4} \omega + \frac{\omega}{\cos. \varphi^2} \right) + \frac{a^3}{4fk} \left(\frac{\sin. \varphi}{6 \cos. \varphi^6} + \frac{\sin. \varphi}{3 \cos. \varphi^4} - \frac{5 \sin. \varphi}{8 \cos. \varphi^2} - \frac{5}{8} \omega + \frac{3\omega}{4 \cos. \varphi^2} \right).$$

Es ist aber

$$\frac{-2b \cos. \theta^2}{g} = a - \frac{aa}{2k} \left(\frac{\sin. \theta}{\cos. \theta^2} + l \tan. \left(45^\circ + \frac{1}{2} \theta \right) \right) + \frac{a^3}{4fk} \left(\frac{\sin. \theta}{\cos. \theta^4} + \frac{3 \sin. \theta}{2 \cos. \theta^2} + \frac{3}{2} l \tan. \left(45^\circ + \frac{1}{2} \theta \right) \right),$$

und E und F müssen so beschaffen sein, daß, wenn $\varphi = \theta$ gesetzt wird, sowohl x als y verschwinden. Also ist bey nahe

$$a = \frac{-2b \cos. \theta^2}{g} + \frac{2bb}{ggk} \left(\sin. \theta \cos. \theta^2 + \cos. \theta^4 l \tan. \left(45^\circ + \frac{1}{2} \theta \right) \right) + \frac{2b^3}{g^3fk} \left(\sin. \theta \cos. \theta^2 + \frac{3}{2} \sin. \theta \cos. \theta^4 + \frac{3}{2} \cos. \theta^6 l \tan. \left(45^\circ + \frac{1}{2} \theta \right) \right)^1),$$

woraus der Werth für a gefunden wird.

Will man hieraus die Weite des Schusses EF finden, so muß man $y = 0$ setzen, woraus ausser dem Werth $\varphi = \theta$ noch ein anderer gefunden wird, welcher das Zeichen — vor sich haben wird. Die Aequation wird aber so verwirrt, daß man die Erfindung dieses Winkels nicht anders, als durch Näherung, und zwar durch die weitläufigsten Rechnungen finden kann. Hat man aber diesen Winkel φ gefunden, so muß man denselben in dem Werth für x substituiren; und alsdenn wird der heraus kommende Werth von x die gesuchte Schuß-Weite EF anzeigen.

Man kann aber auch durch eine andere Näherung eine Aequation zwischen x und y finden, welche also beschaffen seyn wird:

$$y = x \tan. \theta - \frac{gx^2}{4b \cos. \theta^2} - \frac{gx^3}{12bk \cos. \theta^3} + \frac{ggx^4 \sin. \theta}{96bbk \cos. \theta^4} - \frac{x^3}{6fk \cos. \theta^3} + \frac{gx^4 \sin. \theta}{16bfk \cos. \theta^4} - \frac{gx^4}{48bbk \cos. \theta^4} - \frac{x^4}{24fkk \cos. \theta^4} \pm \text{etc.}^2)$$

Wenn der Widerstand sehr klein ist, so wird diese Aequation ziemlich genau

1) Hierzu kommt noch das Glied

$$-\frac{4b^3}{g^3fk} \left(\sin. \theta \cos. \theta + \cos. \theta^3 l \tan. \left(45^\circ + \frac{\theta}{2} \right) \right)^2. \quad \text{F. R. S.}$$

2) Diese Gleichung ergibt sich durch die Entwicklung von y nach der MACLAURIN'SCHEN Reihe, indem man x als Funktion von φ betrachtet und berücksichtigt, daß nach p. 383 und 384

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{r},$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r^3}{fk \cos. \varphi^3} - \frac{r^2}{k \cos. \varphi^3}$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{r}{\cos. \varphi^2}$$

nach p. 386

und

ist.

F. R. S.



die Natur der krummen Linie anzeigen. Die Schuß-Weite EF wird demnach durch den Werth der Wurzel x aus dieser Aequation gefunden werden:

$$0 = \sin. \theta - \frac{gx}{4b \cos. \theta} - \frac{gxx}{12bk \cos. \theta^2} - \frac{x^2}{6fk \cos. \theta^2} \pm \text{etc.};$$

hieraus bekommt man die Schuß-Weite

$$EF = \frac{4b \sin. \theta \cos. \theta}{g} - \frac{16bb \sin. \theta^2 \cos. \theta}{3gk} - \frac{32b^2 \sin. \theta^2 \cos. \theta}{3g^2fk}$$

Weil in diesem Fall g nicht merklich von 1 unterschieden ist, so wird seyn

$$EF = 2b \sin. 2\theta \left(1 - \frac{4b \sin. \theta}{3k} - \frac{8bb \sin. \theta}{3fk} \right),$$

wo, wie oben¹⁾ angenommen worden, $k = \frac{4}{3}nc$ und $f = 2h$. Dahero seyn wird

$$EF = 2b \sin. 2\theta \left(1 - \frac{b(b+h) \sin. \theta}{nch} \right),$$

wo $2b \sin. 2\theta$ die Weite des Schusses anzeigt, wenn kein Widerstand vorhanden wäre. Dahero sich die Schuß-Weite in einem Luft-leeren Raum zur Schuß-Weite in der Luft verhalten wird,

$$\text{wie } 1 \text{ zu } 1 - \frac{b(b+h) \sin. \theta}{nch}$$

Je grösser also der Winkel θ , unter welchem die Canone abgeschossen wird, ist, um so vielmehr wird auch die Schuß-Weite kleiner seyn, als wenn gar keine Resistenz vorhanden wäre.

Die größte Weite des Schusses wird auch nicht geschehen, wenn die Direction der Canone mit dem Horizont einen Winkel von 45° macht, sondern dieser Winkel muß wegen des Widerstands etwas kleiner angenommen werden. Wenn man diesen Winkel θ , unter welchem die Kugel auf eine Horizontal-Fläche am weitesten gehen soll, nach der gewöhnlichen Art suchet, so findet man beynahe

$$\sin. \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{b(b+h)}{8nch}$$

1) Siehe p. 384. F. R. S.

Diese Formeln können aber nicht gebraucht werden, als wenn nc weit grösser ist, als b . In allen von dem Autore angeführten Versuchen aber ist b weit grösser, als nc , dahero die hier gemachte Näherung bey keinem Exempel, so bey dem Autore vorkommt, angebracht werden kann. Derowegen sind wir gezwungen, diese Untersuchung allhier abzubrechen, und wollen wir dem Autori die völlige Ausführung dieser Materie überlassen, als welche er uns in einer besondern Schrift nächstens zu liefern versprochen hat.

SIEBENTER SATZ

Ausser dem, daß die Kugeln in ihrem Flug durch die Kraft der Schwere abwärts gezogen werden, so werden dieselben auch öfters von einer andern Kraft seitwärts entweder zur rechten oder zur linken getrieben.

Wenn es wahr wäre, daß die Kugeln in ihrer Bewegung nur allein von der Kraft der Schwere verrücket würden, so müßten sich die Abweichungen derselben von dem Ziel, nach welchem die Schüsse gethan werden, in soferne dieselben seitwärts, entweder zur rechten oder zur linken gehen, unter sich verhalten, wie die Entfernung des Stücks von dem Ziel. Dieses streitet aber mit der täglichen Erfahrung. Denn wenn in einer Entfernung von 30 Schuhen die Kugel nicht mehr als einen Zoll von dem Ziel abweicht, so findet man nicht, daß dieselbe in einer Entfernung von 300 Schuhen nur um 10 Zoll, und viel weniger in einer Entfernung von 900 Schuhen nur um 30 Zoll von dem Ziel seitwärts abweiche. Diese Vermehrung der Ungewißheit der Schüsse in grossen Entfernungen muß nothwendig von allen, welche sich nur einige Zeit im Schiessen geübet haben, beobachtet worden seyn. Hiervon kan nun keine andere Ursache gefunden werden, als daß die Bahn der Kugeln eben sowohl seitwärts, als abwärts gekrümmt sey; denn auf diese Weise wird die Abweichung der Bahn der Kugel von dem Ziel nach einer grösseren Verhältniß vermehret, als die Entfernungen des Stücks von demselben. Wenn man nemlich die Bahn der Kugel mit der graden Linie, nach welcher das Stück gerichtet worden, gegen einander hält, so berühren diese beyden Linien einander bey der Mündung des Stücks, nachgehends aber entfernen sie sich je länger



je mehr von einander, wie bey allen krummen Linien, so von einer geraden berührt werden, zu geschehen pflegt.

Damit aber auch diejenigen, welche hiervon keine eigene Erfahrung haben, von der Wahrheit dieses Satzes überführt werden, so will ich einige Versuche anführen, welche alle fernere Zweifel zu heben vermögend sind.

Ich nahm einen Mußketen-Lauf, welcher eine Kugel von $\frac{3}{4}$ Zoll im Diameter schoß, und befestigte denselben auf ein schweres Gestell, damit derselbe beständig einerley Lage und Richtung behielte. Um aber von der Festigkeit desselben völlig gewiß zu seyn, so schoß ich damit 16 mahl nach einander gegen ein Brett, welches $1\frac{1}{2}$ Schuhe ins gevierte und in einer Weite von 180 Schuhen aufgesetzt war, und fand, daß die Kugel nur einmahl des Bretts verfehlet hatte. Hierauf ließ ich den Lauf auf eben diesem Gestell befestiget, verminderte aber die Ladung an Pulver, damit die Erschütterung und die daher rührende Veränderung in der Lage des Laufs um so viel geringer würde, und schoß damit nach einem Ziel, welches 2260 Schuh weit entfernt war. Bey diesen Schüssen befand ich nun, daß die Kugel bißweilen auf 300 Schuh, bald zur rechten bald zur linken des Ziels verfehlete. In dieser Entfernung war auch die Bewegung nach der Vertical-Fläche nicht weniger ungewiß. Denn einige mahl fiel dieselbe bey 600 Schuh weiter oder näher zu Boden, ungeachtet ich nach einer sorgfältigen Untersuchung nicht befinden konnte, daß die Lage und die Richtung des Laufs nach einem jeden Schuß im geringsten wäre verändert worden.

Dieses beweiset also auf eine ganz unstreitige Weise die Wahrheit unsers Satzes, indem die Bewegung der Kugel unmöglich so unbeständig und veränderlich hätte seyn können, wenn nicht ihre Bahn eben sowohl seitwärts entweder zur rechten oder zur linken gekrümmet gewesen wäre, als abwärts.

ZUSATZ

Da nun die Wirklichkeit dieser doppelten Krümmung der Bahn einer Kugel unwidersprechlich dargethan worden, so wird man ohne Zweifel fragen: was wohl die Ursache von dieser so ganz verschiedenen Bewegung, als wir dieselbe bisher angesehen haben, seyn möchte? Hierauf antworte ich nun, daß diese Abweichung nothwendig von einer Gewalt, welche auf die Bewegung der Kugel schief wücket, herkomme, und daß diese Gewalt in nichts anders, als dem Widerstand der Luft, gesucht werden könne. Fragt man ferner, wie die Wä-

1) Im englischen Original steht $1\frac{1}{2}$. F. R. S.

kung des Widerstands der Luft jemahlen auf die Bewegung der Kugel schief fallen könne? so antworte ich wiederum, daß solches vielleicht bißweilen von der ungleichen Figur der Kugel herrühren könne; insonderheit aber, daß eine Wirbel-förmige Bewegung der Kugel um sich selbst davon insgemein die Ursache sey. Denn, wenn eine solche Bewegung mit der fortgehenden Bewegung der Kugel vergesellschaftet ist, so muß ein jeglicher Theil des Umfangs der Kugel nach einer ganz andern Richtung auf die Luft stossen, als geschehen würde, wenn keine solche Wirbel-förmige Bewegung vorhanden wäre. Die von dieser Ursache herrührende Schiefe des Widerstands der Luft wird um so viel grösser seyn, je geschwinder sich die Kugel um sich selbst, oder um eine durch ihr Centrum gehende Axe, in Ansehung der fortgehenden Bewegung, herum-drehet.

Hiermit habe ich alles dasjenige, was ich mir in dieser Schrift auszuführen vorgenommen hatte, zu Ende gebracht, was nemlich sowohl die Gewalt des Pulvers, als den Widerstand der Luft, betrifft. Da aber die Erkenntniß des Widerstands harter Körper, in Ansehung des Hineindringens der Kugel, in der Artillerie, und absonderlich bei dem Breche-Schiessen von der größten Wichtigkeit ist, so will ich diese Abhandlung mit einem dahin abzielenden Satze endigen, welcher hier noch Platz finden soll.

ERSTE ANMERKUNG

In einem jeglichen harten Körper kann eine doppelte Bewegung Platz finden: eine wodurch der ganze Körper von einem Ort zu einem andern gebracht wird, und diese wird die fortgehende Bewegung des Körpers genennet. Die andere ist eine drehende Bewegung, wodurch sich der Körper um sich selbst, oder um eine durch sein Mittelpunkt gehende Axe, herum drehet. Hier ist nur von harten Körpern die Rede; denn weiche, oder biegsame, oder gar flüssige Körper können ausser diesen beyden noch unendlich vielerley andere Bewegungen haben. Ein harter Körper hat nun entweder eine fortgehende, oder drehende Bewegung allein, oder beyde Bewegungen beysammen. Wenn sich in einem solchen Körper nur allein eine fortgehende Bewegung befindet, so gehen alle Theile desselben nicht nur gleich geschwind, sondern die Directionen aller Theile sind auch unter sich parallel. Von dieser Bewegung gilt



auch derjenige erste Grundsatz der Mechanic, wodurch behauptet wird, daß ein jeglicher in eine solche Bewegung gesetzter Körper immerfort mit einerley Geschwindigkeit und nach einerley Richtung fortgehe, wofern keine äusserliche Kräfte auf denselben wirken, und seinen Zustand verändern. Woraus denn hinwiederum folget, daß, so oft entweder die Geschwindigkeit oder die Richtung eines Körpers verändert wird, auf denselben nothwendig eine äusserliche Kraft gewürket haben müsse.

Ein Körper kann ferner, ohne seine Stelle zu verändern, eine drehende Bewegung haben, wodurch derselbe um eine Axe herumdrehet wird. In dieser Bewegung bleibt die Axe unbeweglich, und alle Theilchen des Körpers gehen um dieselbe herum, deren Geschwindigkeit um so viel grösser ist, je weiter dieselben von der Axe entfernt sind. Wenn diese Axe befestigt ist, so kann man sich eine solche Bewegung am füglichsten an einer Drechsel-Bank vorstellen; es kann sich aber ein Körper auch um eine Axe, so nirgend befestigt ist, bewegen. Hiezu werden aber zwey Stücke erfordert: erstlich, daß die Axe durch das Centrum gravitatis des Körpers durchgehe, und zweytens, daß die Schwingungs-Kräfte (*Vires centrifugae*) aller Theilchen einander im Gleichgewichte halten. Wo diese beyden Bedingungen Platz finden, da gilt auch die oben erwähnte Regel, daß eine solche Bewegung immerfort gleichförmig fortdauret, und keine Veränderung leidet, wenn keine äusserliche Kräfte dazu kommen. Halten aber die *Vires centrifugae* einander nicht im Gleichgewicht, so wird zwar die Bewegung des Körpers fortdauern, allein die Axe, um welche dieselbe geschieht, wird selbst beweglich, und die Herumdrehung geht beständig um eine andere Axe. Wenn eine Kugel aus einer allenthalben gleich dichten Materie gemacht ist, so sind die *Vires centrifugae* immer im Gleichgewichte, wenn nur die Axe der Kugel durch ihr Mittelpunkt gehet, und also kann eine solche Kugel eine beständig gleich geschwind fortdauernde Bewegung um eine jegliche Linie, so durch ihr Mittelpunkt gehet, haben.

Diese beyden Bewegungen, nemlich die fortgehende und herumdrehende, sind nun von einander dergestalt unterschieden, daß sich beyde in einem Körper zugleich befinden können, ohne, daß eine von der andern im geringsten gestört würde; eine jede kann auch von äusserlichen Kräften ganz allein verändert werden, ohne daß die andere dadurch die geringste Veränderung leidet. Ein Exempel einer solchen doppelten Bewegung in einem Körper stellt uns die Erd-Kugel dar, als welche sich erstlich nach ihrer fortgehenden Bewegung in einem Jahr um die Sonne herum bewegt, und sich inzwischen beständig um ihre Axe in 24 Stunden herum drehet. In der Erde ist auch noch die Ver-

änderlichkeit ihrer Axe zu bemerken, als welche sich jährlich um 50 Secunden rückwärts lenket.

Wenn also einem Körper, außer der fortgehenden Bewegung, auch eine Bewegung um eine Axe, so durch das Centrum gravitatis desselben gehet, und welche also beschaffen ist, daß sich alle *Vires centrifugae* im Gleichgewichte halten, eingedrückt worden, so werden darinne beyde zugleich beständig fortdauern, und wenn keine äusserliche Kräfte darauf wirken, keine Veränderung leiden.

Die Haupt-Sache beruhet nun darauf, was für Kräfte einem Körper entweder nur eine fortgehende Bewegung, oder nur eine herumdrehende, oder beyde zugleich einzudrücken vermögend sind.

Wenn die Direction der Kraft durch das Centrum gravitatis des Körpers gehet, so würket dieselbe nur eine fortgehende Bewegung. Wenn nemlich der Körper vorher still gestanden, so wird demselben eine Bewegung nach eben derjenigen Direction, nach welcher die Kraft gerichtet ist, eingedrückt; und wenn der Körper schon vorher eine fortgehende Bewegung gehabt, so wird dieselbe entweder schneller oder langsamer, oder es wird auch die Direction derselben verändert, je nach dem die Direction der Kraft entweder vorwärts oder rückwärts, oder schief auf die Direction der Bewegung würket. Wenn aber der Körper außer der fortgehenden Bewegung noch eine herumdrehende schon hat, so bleibt dieselbe von einer solchen Kraft, welche durch das Centrum gravitatis des Körpers gehet, völlig unverändert.

Wenn die Direction der Kraft nicht durch das Centrum gravitatis des Körpers gehet, so wird dadurch erstlich die fortgehende Bewegung gleicher maaßen verändert, als wenn eben dieselbe Kraft nach einer parallelen Direction durch das Centrum gravitatis gieng. Ueber dieses aber wird dem Körper von einer solchen Kraft eine herumdrehende Bewegung um eine Axe, welche durch sein Centrum gravitatis gehet, und auf die Fläche, so durch dieses Centrum und die Direction der Kraft gezogen wird, perpendicular aufstehet, eingedrückt. Hat aber der Körper schon vorher eine herumdrehende Bewegung, entweder um eben diese Axe, oder um eine andere gehabt, so wird dieselbe entweder geschwinder oder langsamer, in dem letztern Fall aber wird auch die Axe selbst verändert.

Wenn aber zwey oder mehr Kräfte zugleich auf den Körper wirken, so findet man folgender Gestalt, was daher für Bewegungen und Veränderungen in dem Körper entstehen müssen. Erstlich stellt man sich vor, als wenn alle diese Kräfte nach Parallel-Directionen durch das Centrum gravitatis giengen,



und verwandelt dieselben in eine einzige Kraft, aus welcher die Erzeugung und Veränderung der fortgehenden Bewegung bestimmt wird. Wenn es also geschieht, daß alle diese Kräfte einander aufheben, so leidet die fortgehende Bewegung davon gar keine Veränderung. Was aber hernach die herumdrehende Bewegung anlangt, so sucht man von allen diesen Kräften nach ihren wirklichen Directionen die Momenta, indem man dieselben durch ihre Entfernungen von dem Centro gravitatis multipliciret; und indem man dieselben gegen einander hält, so findet man, um was für eine Axe, und wie stark der Körper herum getrieben werden müsse. Hieraus läßt sich folglich entweder die Erzeugung einer herumdrehenden Bewegung, wenn der Körper vorher noch keine gehabt, oder die Veränderung derselben, wenn schon eine vorhanden gewesen, bestimmen.

Nach diesen Grund-Sätzen wollen wir nun genauer untersuchen, was für eine Bewegung einer Kugel, welche aus einer Canone geschossen wird, von der Gewalt des Pulvers eingedrückt, und wie dieselbe nachgehends durch den Widerstand der Luft verändert werde. Wir wollen erstlich annehmen, die Kugel sey vollkommen rund, und ihr Centrum gravitatis sey mit ihrem Mittelpunkt einerley. In diesem Fall geht die fortreibende Gewalt des Pulvers nicht nur durch das Centrum gravitatis der Kugel, sondern ihre Direction ist auch mit der Axe des Laufs einerley; dahero der Kugel nur allein eine fortgehende Bewegung nach der Axe des Laufs eingedrückt wird. Die Kugel bekommt also eben diejenige Bewegung, welche wir oben mit dem Autore für dieselbe herausgebracht haben, und erhält folglich von der Gewalt des Pulvers keine herumdrehende Bewegung. Weil aber die Kugel auf der innern Höhlung der Canone fortgeht, und daher eine Friction leidet, deren Direction nicht durch das Centrum der Kugel gehet, sondern dieselbe von aussen berührt, so müßte dadurch der Kugel eine drehende oder rollende Bewegung eingedrückt werden, woferne solche durch den Pfropf nicht verhindert würde. Denn da der Pfropf die Kugel sehr gedrängt einzuschließen pflegt, so ist die Friction zu schwach, um der Kugel eine solche rollende Bewegung einzudrücken. Also fährt die Kugel bloß allein mit einer fortgehenden Bewegung in die Luft, wo dieselbe theils der Kraft der Schwebre, theils dem Widerstand ausgesetzt ist. Die erstere Kraft geht immer durch das Centrum gravitatis, und würket also nur auf die fortgehende Bewegung, als welche dadurch abwärts gekrümmt wird. Die Kraft des Widerstands gehet in diesem Fall auch durch das Centrum gravitatis der Kugel, und bringt also gleichfalls keine herumdrehende Bewegung hervor. Und weil dieselbe mit der Direction der Kugel übereinstimmt,

so wird dadurch auch der Körper nicht aus derjenigen Vertical-Fläche, in welcher die Bewegung angefangen, gezogen. Woraus erhellet, daß, wenn die Kugel vollkommen rund, und ihr Centrum gravitatis in ihrem Mittelpunkt befindlich ist, die Bewegung derselben eben so beschaffen seyn müsse, als die Theorie erfordert. Die Kugel wird sich nemlich in einer Vertical-Fläche bewegen, und von derselben weder zur rechten noch zur linken ausweichen.

Wenn sich also das Ziel, nach welchem man schießen will, in eben dieser Vertical-Fläche befindet, so kann der Schuß nicht anders fehlen, als daß derselbe entweder zu hoch, oder zu niedrig gehet. Wenn aber die Vertical-Fläche, worinnen sich die Kugel bewegt, nicht durch das Ziel gehet, so muß der Schuß auch seitwärts fehlen, und das um so viel mehr, je weiter das Ziel von der Canone entfernt ist; wenn nemlich der Winkel, welchen die gerade Linie, so von dem Stück zum Ziel gezogen wird, mit der gemeldten Vertical-Fläche einerley Winkel macht. Wenn dahero die Kugel einmahl zum Exempel zur Rechten von dem Ziel abgewichen, so müssen auch alle Schüsse, welche ohne die Richtung der Canone zu verändern gethan werden, gleich weit zur Rechten des Ziels verfehlen, wenn auch gleich die Ladung vermehrt oder vermindert worden. Wenn also bey vielen Schüssen, welche aus einem befestigten Lauf, dessen Richtung nicht verändert werden kann, der Fehler bald zur rechten bald zur linken vom Ziel abweicht, und auch in grössern Entfernungen, nach einer grössern Verhältniß wächst, als die Entfernung selbst, so schliesst der Autor richtig, daß die Bahn der Kugel in keiner Vertical-Fläche gewesen, und daß dieselbe folglich eine doppelte Krümmung gehabt haben müsse.

Nun wollen wir eine Kugel betrachten, welche zwar vollkommen rund, deren Centrum gravitatis aber ausser ihrem Mittelpunkt befindlich ist. So lange diese Kugel der Gewalt des Pulvers in dem Lauf der Canone ausgesetzt ist, so gehet die Direction dieser Gewalt durch das Mittelpunkt der Kugel, und ist der Axe der Canone parallel, folglich bekommt dieselbe eben diejenige fortgehende Bewegung, als in dem vorigen Fall; und wenn diese Direction zugleich durch das Centrum gravitatis gehet, so wird davon auch keine drehende Bewegung hervorgebracht. Wenn aber das Centrum gravitatis der Kugel ausser dieser Linie, nach welcher die Kraft des Pulvers würket, zu liegen kommt, so wird der Kugel zugleich eine drehende Bewegung um das Centrum gravitatis eingedrückt. Da aber durch eben diese Bewegung das Mittelpunkt der Kugel bald auf die entgegengesetzte Seite des Centri gravitatis gebracht wird, so wird durch diese Kraft die vorige drehende Bewegung der Kugel wiederum zernichtet, dergestalt, daß keine beständige herumdrehende Bewegung in der



Kugel hervorgebracht werden kan. Eine gleiche Bewandniß hat es auch, wenn die Kugel schon aus dem Lauf heraus geschossen worden; denn die Direction des Widerstands geht alsdenn durch das Mittelpunkt der Kugel, und da dieselbe der Bewegung der Kugel schnurgerade entgegen ist, so wird dadurch die fortgehende Bewegung der Kugel eben wie im vorigen Fall verändert. Ueber dieses aber bekommt die Kugel eine drehende Bewegung um das Centrum gravitatis, wodurch das Mittelpunkt rückwärts getrieben wird. So bald aber das Mittelpunkt beginnt wiederum vorwärts zu kommen, so wird die Kraft des Widerstands der vorigen zuwider, und vermindert also die schon erzeugte drehende Bewegung, wodurch dieselbe endlich gänzlich gehemmet und die Kugel also fortgehen wird, daß das Mittelpunkt hinter dem Centro gravitatis beständig bleibt. Hieraus folget, daß endlich die schwereere Hälfte der Kugel, in welcher das Centrum gravitatis befindlich ist, beständig voraus gehet, und die leichtere nachfolget, welcher Umstand auch jederzeit in der That wahrgenommen wird. In diesem Fall wird also auch nicht die Kugel aus der Vertical-Fläche, in welcher die Bewegung angefangen, ausweichen. Daher diese Ausweichung von keiner andern Ursache herrühren kan, als von dem Mangel einer vollkommenen Ründung.

Wenn die Kugel nicht vollkommen rund ist, so kan es geschehen, daß die Direction der Gewalt des Pulvers nicht nur nicht durch das Centrum gravitatis der Kugel gehet, sondern daß dieselbe auch nicht einmahl der Axe der Canone parallel läuft. Im ersten Fall würde der Kugel eine herumdrehende Bewegung eingedruckt werden, welche aber, wie in dem vorigen Fall gewiesen worden, bald wiederum aufhören müßte. Der letztere Fall aber ist bey den von dem Autore angeführten Umständen insonderheit merkwürdig; denn da wird die Kugel nicht nach der Axe der Canone fortgetrieben, sondern nach der Direction der fortreibenden Gewalt. Also wird die Kugel gegen die inneren Wände der Canone gestossen, von welchen sie wiederum zurück prallet, und daher keine geringe Kraft auf die Canone ausübet. Dieses ist der Fall, dessen wir oben erwehnet haben, da eine Canone, wenn dieselbe gleich vollkommen gerade gebohret ist, dennoch von der Gewalt der Kugel allein zersprengt werden kan, woraus die Nothwendigkeit der vollkommenen Ründung der Canonen-Kugeln um so viel deutlicher erhellet.

Wenn aber eine solche Kugel, welche nicht völlig rund ist, aus der Canone herausgefahren, so wird ausser dem, daß ihre Direction schon etwas von der Axe des Stückes abweicht, noch ihre Bewegung durch den Widerstand der Luft ganz anders verändert, als wenn die Kugel vollkommen rund wäre. Denn

da sich der Widerstand der Luft nach der äußern Figur der Kugel richtet, so ist es nicht nur möglich, daß die Direction des Widerstands von der Direction der Bewegung unterschieden sey, sondern es würde auch ein sehr seltener Zufall seyn, wenn diese beyden Directionen mit einander übereinstimmen sollten. Es kann also geschehen, daß erstlich die Kugel von dem Widerstand entweder mehr aufwärts oder abwärts, als sonst geschehen würde, getrieben werde. Und hieraus begreift man ganz deutlich, wie bißweilen eine Kugel etliche hundert Schritt weiter oder näher zu Boden fallen könne, als eine andere, wenn gleich beyde aus einem Lauf, unter einerley Richtung, und mit gleicher Ladung sind heraus geschossen worden. Wenn aber die Direction des Widerstands nicht in die Vertical-Fläche, in welcher die Bewegung angefangen, fällt, so wird dadurch die Kugel seitwärts, entweder zur rechten oder zur linken, getrieben. Und wenn sich die Kugel nicht herum drehet, so weicht diese Kraft beständig von gemeldter Vertical-Fläche gleich viel ab; folglich wird dadurch die Kugel je länger je mehr seitwärts abgetrieben, dergestalt, daß je weiter die Kugel geschossen wird, die Abweichung derselben von dem Ziel um so viel grösser seyn wird. In einer doppelten Entfernung wird nemlich die Abweichung der Kugel von dem Ziel nicht nur zweymahl, ja, nicht nur dreymahl so groß seyn, als welches geschehen würde, wenn die Kugel, nachdem sie die erste Hälfte des Wegs durchlaufen, nicht mehr seitwärts getrieben werden sollte; sondern die Abweichung müßte vier mahl so groß werden, wenn die seitwärts treibende Kraft der Kugel immer gleich groß bliebe. Da aber dieselbe mit der Geschwindigkeit der Kugel abnimmt, so wird die Abweichung zwar etwas kleiner als 4 mahl so groß, immer aber mehr als dreymahl so groß seyn. Die wahre Ursache also der Ungewißheit der Schüsse bestehet ganz allein in dem Mangel der runden Figur der Kugel, und es kann eine drehende Bewegung der Kugel dazu nichts merkliches beytragen, wie der Autor vermeynet. Im Gegentheil, wenn sich die Kugel in ihrem Flug herum drehen sollte, so müßte die Kraft des Widerstands bald zur Rechten, bald zur Linken gerichtet seyn, und könnten also die Schüsse in grössern Entfernungen nicht ungewisser werden, als in kleinern. So groß aber auch die Ungewißheit der Schüsse, welche der Autor anführet, zu seyn scheint, so ist nicht zu vermuthen, daß dieselbe bey Canonen-Kugeln so groß seyn sollte. Denn der Autor hat mit bleyernen Kugeln seine Versuche angestellt, welche nicht nur sehr merklich von einer runden Figur abzugehen pflegen, sondern auch in dem Lauf noch viel mehr verändert werden können. Die Canonen-Kugeln hingegen scheinen gemeinlich eine vollkommenere Ründung zu haben,



und da dieselben von Eisen, so kan ihre Figur auch nicht so leicht in dem Lauf der Canonen verändert werden. Aus dieser Ursache müssen also die Canonen-Schüsse in ihrer Art weit gewisser seyn, als die Mußketen-Schüsse, welche mit bleyernen Kugeln gethan werden. Hiervon müssen aber, allem Ansehen nach, die Schüsse, welche aus gezogenen Röhren geschehen, angenommen werden, und das aus eben derjenigen Ursache, welche der Autor von der Unrichtigkeit der Schüsse überhaupt angeben will. Denn weil die Kugeln aus gezogenen Röhren eine drehende Bewegung bekommen, welche mit der fortgehenden immer fortdauert, so wird beständig eine jede Kraft des Widerstands, wodurch die Kugel immer entweder aufwärts, oder seitwärts getrieben wird, gleichsam in einem Augenblick, indem sich die Kugel herum drehet, in eine entgegen gesetzte verwandelt, dahero von der unrichtigen Figur der Kugel in diesem Fall keine so grosse Ungewißheit entstehen kann, als wenn die Kugel mit keiner drehenden Bewegung begabet ist.

ZWEYTE ANMERKUNG

Wir haben also die wahre Ungewißheit der Schüsse, welche der Autor in diesem Satz anführet und sehr zweifelhaft erkläret, unstreitig entdeckt, indem wir gewiesen, daß dieselbe ganz allein auf der Figur der Kugel beruhe. Denn, wenn die Kugel vollkommen rund ist, wenn auch gleich ihr Centrum gravitatis von dem Mittelpunkt verschieden wäre, so kan die Abweichung der Kugel von dem Ziele seitwärts nicht merklich seyn. Und wenn in diesem Fall die Kugel des Ziels seitwärts verfehlen sollte, so würde dieses ein sicheres Zeichen seyn, daß sich das Ziel nicht in derjenigen Vertical-Fläche, nach welcher die Axe des Stücks oder Schieß-Gewehrs gerichtet ist, befände. Wenn aber die Kugel nicht völlig rund ist, so haben wir gewiesen, daß dieselbe meistens von ihrer Richtung seitwärts abweichen, und bey dem Ziel um so viel weiter seitwärts vorbeigehen müsse, je weiter das Ziel von dem Schieß-Gewehr entfernt ist. Diese Abweichung wird auch durch die herum-drehende Bewegung der Kugel nicht nur nicht vermehret, sondern wenn die Kugel eine solche Bewegung hätte, so würde die Ungewißheit des Schusses bey weitem nicht so groß seyn.

Der Autor scheint zwar das Gegentheil zu behaupten, allein ausser dem, was vorher angeführet worden, so können wir auch beweisen, daß die

Kraft des Widerstands nicht merklich von einer drehenden Bewegung der Kugel verändert werde, und derselben ungeachtet beynahe allezeit eben so groß sey, als wenn die Kugel keine herumdrehende Bewegung hätte. Es ist zwar wahr, wie der Autor bemerkt, daß durch eine solche drehende Bewegung sowohl die Geschwindigkeit, mit welcher ein jegliches Punkt der Kugel auf die Luft stößt, als auch der Winkel, unter welchem dieser Stoß geschieht, verändert werde. Allein es bleibt erstlich die Direction der Kraft des Stosses immer perpendicular auf die Oberfläche der Kugel. Hernach da die Kraft des Stosses selbst sich beständig verhält, wie das Quadrat der Geschwindigkeit multiplicirt durch das Quadrat des Sinus des Winkels, unter welchem der Stoß geschieht, so wird fast immer der Sinus dieses Winkels um eben so viel grösser oder kleiner, als die Geschwindigkeit vermindert oder vermehret wird, dahero auch die Stärke des Stosses beynahe einerley bleibet, die Kugel mag eine drehende Bewegung haben oder nicht. Diese Gleichheit trifft beynahe zu, wenn die Figur der Kugel nicht merklich von einer vollkommenen Ründung unterschieden ist, und wenn die Axe, um welche die drehende Bewegung geschieht, beynahe durch das Mittelpunkt derselben geht. Wenn aber die Kugel vollkommen rund ist, und sich um eine Axe, welche durch ihr Mittelpunkt gehet, herum drehet, alsdenn ist so gar die Wirkung des Widerstands vollkommen einerley, die Kugel mag eine solche drehende Bewegung haben oder nicht.

Wir haben also nur nöthig, diesen letztern Fall zu beweisen; indem aus der Wahrheit desselben von selbst folgt, daß wenn die Figur der Kugel nicht viel von einer völligen Ründung abweicht, und die Axe der Herumdrehung beynahe durch das Mittelpunkt desselben gehet, die Ungleichheit des Widerstands, wenn dieselbe nicht gar wie im erstern Fall verschwindet, dennoch nicht merklich seyn könne. Um also dieses deutlich darzuthun, so wollen wir eine vollkommen runde Kugel betrachten, welche ausser ihrer fortgehenden Bewegung sich um eine durch ihr Mittelpunkt gehende Axe herum drehe; es ist auch gleich viel, ob diese Axe beständig oder unbeständig angenommen werde. Hierbey ist nun erstlich zu merken, daß wenn die Kugel gar keine fortgehende Bewegung hätte, dieselbe auch von der Luft keinen andern Widerstand leiden würde, als welcher etwa von dem Reiben der Theilchen entstehen möchte, welcher aber so geringe ist, daß man denselben leicht aus der Acht lassen kann. Denn wenn die Kugel keine fortgehende Bewegung hat, so stehet ihr Mittelpunkt völlig still, und da alle Theilchen der Oberfläche immer gleich weit von dem Mittel-



punkt entfernt bleiben, so können dieselben keine solche Bewegung haben, wodurch gegen die Theilchen der Luft ein wirklicher Stoß entsteht. In diesem Fall werden nemlich die Theilchen der Luft in keine andere Bewegung gesetzt, als in so ferne dieselben durch die schwache Friction mit fortgezogen werden, und daher können dieselben auch keine Gewalt auf die drehende Bewegung der Kugel ausüben. Wenn aber die Kugel eine fortgehende Bewegung hat, so kan man sich die Sache, wie oben gewiesen worden, immer so vorstellen, als wenn die Kugel gar keine fortgehende Bewegung hätte, hingegen aber die Luft mit einer gleichen Geschwindigkeit darauf stiesse; denn in beyden Fällen muß die aus dem Anstossen der Lufttheilchen entstehende Gewalt einerley seyn.

Wir wollen uns also eine Kugel vorstellen, deren Mittelpunkt unbeweglich seyn soll, um welches sich die Kugel herum drehe, und wollen setzen,

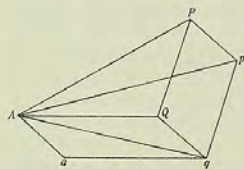


Fig. 26.

daß die Luft mit einer gegebenen Geschwindigkeit auf diese Kugel bewegt werde. In der Figur 26 soll die Fläche des Papiers die Kugel in dem Punkt A berühren, und die Luft nach der Direction PA auf dieses Punkt der Kugel A stossen. Man stelle sich die Geschwindigkeit der Luft durch die Linie PA vor, und lasse aus dem Punkt P auf die berührende Fläche einen Perpendicular PQ herab fallen, und ziehe die Linie AQ. Wenn nun die Kugel keine herum drehende Bewegung hätte, so würde die Stärke des Stoßes der Luft seyn wie das Quadrat der Linie PA, wodurch die Geschwindigkeit der Luft angedeutet wird, multipliciret durch das Quadrat des Sinus des Winkels PAQ, welchen die Direction der Bewegung der Luft PA in diesem Punkt A mit der Oberfläche der Kugel macht. Weil nun der Sinus des Winkels PAQ durch $\frac{PQ}{PA}$ ausgedrückt wird, so wird die Kraft der Luft auf das Punkt A seyn, wie $PA^2 \cdot \frac{PQ}{PA}$, das ist, wie PQ^2 .

Wenn aber die Kugel eine drehende Bewegung hat, und dabey ihr Mittelpunkt stille steht, so kann das Punkt A keine andere Bewegung haben, als nach einer Direction, welche in der berührenden Fläche der Kugel, so durch die Fläche der Kupfer-Platte vorgestellt wird, liegt. Es sey also Aa die Direction, nach welcher sich das Punkt A bewegt, und man nehme Aa so groß, daß sich verhalte PA zu Aa, wie die Geschwindigkeit der Luft zur Geschwin-

digkeit des Punkts A. Um nun die Wirkung zu bestimmen, welche die nach der Direction PA bewegte Luft auf das nach der Direction Aa bewegte Punkt A ausübet, so darf man nur die Bewegung des Punkts A in den Gedanken der Luft mittheilen, welches geschieht, wenn wir Pp der Linie Aa parallel und gleich groß ziehen. Denn da wird die Wirkung der Luft auf das Punkt A eben so groß seyn, als wenn dasselbe still stünde, die Luft aber darauf nach der Direction der Linie pA mit einer Geschwindigkeit, welche durch die Linie pA vorgestellt wird, stiesse. Folglich muß man das Quadrat dieser Geschwindigkeit oder Linie pA mit dem Quadrat des Sinus des Winkels, welchen diese Linie pA mit der berührenden Fläche machet, multipliciren. Um nun diesen Winkel zu finden, so ziehe man aus dem Punkt p auf die berührende Fläche die Perpendicular-Linie pq, welches geschieht, wenn man Qq der Linie Aa gleich und parallel setzt. Weil also auch Qq der Linie Pp gleich und parallel, und die Linie pq der Linie PQ gleichfals parallel ist, so muß

$$pq = PQ,$$

und der Bruch $\frac{pq}{pA}$ wird den Sinus des Winkels pAq ausdrücken, unter welchem die Luft auf das bewegte Punkt A stößt. Derowegen wird die Kraft dieses Stosses seyn wie $pA^2 \cdot \frac{pq^2}{pA^2}$, das ist, wie pq^2 . Da nun $pq = PQ$, so wird die Kraft der Luft auf das bewegte Punkt A eben so groß seyn, als wenn dieses Punkt A gar keine Bewegung hätte. Ob also gleich durch die Bewegung des Punkts A sowohl die Geschwindigkeit der darauf stossenden Luft pA, als der Winkel pAq, unter welchem der Stoß geschieht, verändert wird, so sind doch diese beyden Veränderungen so beschaffen, daß daraus einerley Kraft entspringt. Was aber hier von einem Punkt A der Oberfläche der Kugel erwiesen worden, dasselbe gilt gleichergestalt von allen andern Punkten derselben; und hierdurch wird also unser Satz unwidersprechlich bestätigt, daß eine vollkommen runde Kugel, welche sich ausser ihrer fortgehenden Bewegung um ihr Mittelpunkt herum drehet, eben denselben Widerstand von der Luft leide, als wenn dieselbe gar keine herumdrehende Bewegung hätte.

Wenn also eine solche Kugel je in der Canone, aus welcher dieselbe geschossen wird, ausser der fortgehenden Bewegung noch eine herumdrehende Bewegung um ihr Mittelpunkt bekäme, so würde dieselbe doch in der Luft ihre Bewegung eben so fortsetzen, als wenn sie keine herumdrehende Bewegung erhalten hätte. Und da bey einer vollkommen runden Kugel die fortgehende Bewegung durch eine drehende Bewegung keinesweges verändert



wird, so ist hieraus klar, daß wenn bey einer Kugel, so nicht völlig rund ist, je eine Veränderung in dem Widerstand der Luft von der herumdrehenden Bewegung verursacht würde, dieselbe doch nicht merklich seyn könnte, sondern daß die Kugel fast eben so bewegt werden würde, als wenn gar keine herum drehende Bewegung darinn befindlich wäre. Dahero in keinem Fall die fortgehende Bewegung der Kugel durch eine herumdrehende Bewegung merklich verändert werden kann.

ACHTER SATZ

Wenn gleich grosse und gleich schwehre Kugeln auf eben denselben harten Körper mit verschiedenen Geschwindigkeiten stossen, und in denselben hinein dringen, so werden sich die verschiedenen Tiefen, auf welche die Kugeln hinein gedrungen, beynahe verhalten, wie die Quadrate ihrer Geschwindigkeiten. Und der Widerstand solcher harten Körper wird, in Ansehung des Hineindringens der Kugel, immer gleich groß seyn.

Den ersten Theil dieses Satzes habe ich durch sehr viele Versuche immer richtig befunden. Denn als ich eine bleyerne Kugel von $\frac{3}{4}$ Zoll im Diameter gegen einen Ulmenbäumen-Bloch mit einer Geschwindigkeit von ungefähr 1700 Schuhen in einer Secunde geschossen, so habe ich durch eine grosse Anzahl Versuche befunden, daß dieselbe von $4\frac{1}{2}$ biß $5\frac{1}{2}$ Zoll tief hinein gedrungen. Als ich aber eine gleiche Kugel gegen eben dasselbe Bloch mit einer Geschwindigkeit von ungefähr 730 Schuhen in einer Secunde geschossen, so gieng die äußere Fläche der Kugel beynahe $\frac{1}{4}$ Zoll tief in das Wesen des Holzes, so daß das Hineindringen in diesem Fall nach einem Mittel ungefähr einen Zoll betrug. Wenn man aber die ganze Höhlung des Lochs betrachtet, und dieselbe in einen Cylinder verwandelt, so wird derselbe ungefähr $\frac{7}{8}$ eines Zolls lang. Wenn aber die Geschwindigkeit der Kugel in einer Secunde mehr nicht, als von 400 Schuhen gewesen: so drung gemeinlich nur ungefähr die Helfte der Kugel in das Holz hinein, welches nach einem Cylinder den vierten Theil eines Zolls in der Tiefe austrägt.

Die Quadrate dieser drey verschiedenen Geschwindigkeiten verhalten sich ungefähr wie diese Zahlen 55, 10 und 3. Wenn wir nun für die größte Tiefe, welche von der größten Geschwindigkeit verursacht worden, 5 Zoll rechnen, so findet man nach dieser Verhältniß der Quadraten, daß die Tiefen, welche durch die beyden geringern Grade der Geschwindigkeit sind verursacht worden, hätten $\frac{10}{11}$ und $\frac{3}{11}$ eines Zolls betragen müssen: welche Zahlen von den durch die Erfahrung gefundenen $\frac{7}{8}$ und $\frac{1}{4}$ nicht merklich unterschieden sind. Eine genauere Uebereinstimmung dergleichen Versuche mit der Theorie kann man nicht erwarten, wenn man die ungleiche Verbindung der Theilchen eines Stacks Holzes, und die durch den Stoß verursachte Veränderung in der Figur der Kugel in Erwägung zieht.

Da nun die Tiefe der Löcher mit den Quadraten der Geschwindigkeit des anstossenden Körpers in einerley Verhältniß ist, so wird daher der gleichförmige Widerstand des Holzes aus eben denjenigen Gründen leicht erwiesen, durch welche man die gleichförmige Wirkung der Kraft der Schwere aus der Eigenschaft der Geschwindigkeiten, deren Quadrate mit den Höhen, aus welchen ein Körper herunter gefallen, einerley Verhältniß haben, zu beweisen pflegt. Dieses erhellet auch aus dem Aufsteigen der Körper, welche gerade aufwärts geworfen werden; denn in diesem Fall verhält sich auch immer die Höhe, zu welcher der Körper gelanget, wie das Quadrat der Geschwindigkeit, mit welcher der Körper im Anfang ist hinauf geworfen worden.

ANMERKUNG

Wenn ein Körper gegen eine unbewegliche Wand, oder einen Wall geworfen wird, so prellt derselbe entweder zurück, oder dringet hinein, so lange, bis seine ganze Geschwindigkeit durch den Widerstand zernichtet worden. Das Zurückprellen geschieht, wenn sowohl der anstossende Körper, als der Wall vollkommen elastisch, oder mit einer Kraft begabet sind, sich, nachdem in ihrer Figur eine Aenderung vorgegangen, wiederum in ihre vorige Form herzustellen. Wo sich diese Kraft nicht befindet, da dringet die Kugel so tief hinein, bis sie alle Bewegung verlohren, und bleibt alsdenn still stehen. In beyden Fällen machet nemlich die Kugel einen Eindruck: im erstern Fall wird derselbe wiederum hergestellt, im letztern aber



dauret der Eindruck noch nach dem Stoß fort; und hieraus entsteht der Unterscheid zwischen den elastischen und nicht elastischen Körpern. Zwischen diesen zwey Arten der Körper giebt es aber noch unendlich viel verschiedene Mittel-Arten, je nachdem die Wiederherstellungs-Kraft in denselben grösser oder kleiner ist: ja man kann fast mit Gewißheit behaupten, daß sich in der ganzen Welt weder ein vollkommen elastischer Körper befinde, noch ein solcher, welcher von aller Elasticität gänzlich entblösset wäre. Denn ein Körper mag so vollkommen elastisch scheinen, als immer möglich ist, so bleibt doch allezeit von einem jeglichen darinn gemachten Eindruck ein geringes Merckmahl zurück: und man hat auch noch keinen Körper angetroffen, welcher, nachdem er einen Eindruck empfangen, sich nicht einiger Maassen wieder herstellen sollte. Wir haben aber zur Erläuterung des gegenwärtigen Satzes nur allein auf den Eindruck zu sehen, welcher entsteht, wenn zwey Körper auf einander stossen, und welcher allezeit entsteht, die Körper mögen elastisch seyn oder nicht: und in dieser Absicht gilt es gleich viel, ob dieser Eindruck entweder unverändert fortdauret, oder gänzlich oder auch nur zum Theil wiederum hergestellt wird. Unterdessen ist doch so viel aus der Erfahrung bekant, daß wenn eine Kugel in einen Wall, oder in eine hölzerne Wand hinein geschossen wird, die Kugel darinn stecken bleibe, und nicht merklich wiederum zurück getrieben werde. Dahero wenn diese Körper je mit einer elastischen Kraft begabet sind, so kann dieselbe sicher aus der Acht gelassen werden.

Wenn nun eine Kugel gegen einen solchen Körper geschossen wird, so machet dieselbe nicht nur einen Eindruck, sondern dringet auch auf eine gewisse Tiefe hinein; und da solches ohne einen grossen Widerstand nicht geschehen kann, so wird dadurch die Bewegung der Kugel nach und nach vermindert, und endlich gar zernichtet. Um also die Tiefe zu finden, auf welche eine Kugel hinein zu dringen vermögend ist, so muß man den Widerstand bestimmen können, welchen die Kugel, indem sie hineindringet, leidet. Wenn die Wand oder der Wall, von Holz oder Erden ist, so sieht man wohl, daß, um darinn einen Eindruck zu verursachen, eine um so viel grössere Kraft erfordert werde, je grösser die Höhlung ist, welche darinn gemacht werden soll. Denn da die Elasticität in diesen Fällen nicht merklich ist, so findet die Kugel, nachdem sie schon auf eine gewisse Tiefe hineingedrungen, einen eben so grossen Widerstand, als anfänglich. Derothalben ist dieser Widerstand eine beständige oder gleichförmige Kraft, welche nicht auf der Geschwindigkeit der Kugel beruhet, und ist also in diesem Stück der Kraft der

Schwehre ähnlich, durch welche ein aufwärts geworfener Körper in gleichen Zeiten immer gleich viel von seiner Geschwindigkeit verliert, dieselbe mag groß oder klein seyn. Die Grösse dieser Kraft beruhet nun erstlich auf der Festigkeit der Materie der Wand oder des Walles, hernach aber auch auf der Weite des Lochs, welches die Kugel darinne macht, und welches dem Quadrat des Diameters der Kugel proportional ist.

Wenn also der Diameter der Kugel $= c$ gesetzt, und die Festigkeit des Walls durch f angedeutet wird, so wird der Widerstand dieser Formel ccf proportional seyn. Wir wollen also setzen, diese Kraft des Widerstands sey gleich dem Gewicht einer Wasser-Saule, deren Höhe $= f$, und welche mit der Kugel gleich dick ist, indem es uns frey steht, diese Gewalt nach Belieben zu bestimmen, wenn nur in allen verschiedenen Fällen die wahren Verhältnisse der Grösse f beobachtet werden. Ferner wollen wir setzen, die Schwehre der Materie, woraus die Kugel besteht, verhalte sich zur Schwehre des Wassers wie n zu 1. Nun soll b die Höhe anzeigen, aus welcher durch den Fall eben diejenige Geschwindigkeit erzeugt wird, mit welcher die Kugel anfänglich auf den Wall stößt; nachdem dieselbe aber schon auf eine Tiefe $= x$ hineingedrungen, so soll die Geschwindigkeit der Kugel durch $\sqrt{v}$ angedeutet werden. Da nun die Kugel einem gleich dicken Cylinder Wasser gleicht, dessen Höhe $= \frac{2}{3}nc$, so wird sich der Widerstand zum Gewichte der Kugel verhalten, wie f zu $\frac{2}{3}nc$, das ist, wie $\frac{3f}{2nc}$ zu 1. Hieraus bekommt man, indem die Kugel durch den unendlich kleinen Raum dx weiter hinein dringt, diese Aequation

$$dv = -\frac{3fdx}{2nc}$$

und also

$$v = b - \frac{3fx}{2nc}$$

Die Kugel fährt aber so lange fort, weiter hinein zu dringen, bis sie ihre Bewegung gänzlich verlohren, das ist, bis $v = 0$. Wenn dahero die Tiefe des Lochs, welches die Kugel durch ihre Bewegung in dem Wall zu verursachen vermögend ist, gesetzt wird $= a$, so bekommt man diese Vergleichung

$$b = \frac{3af}{2nc} \quad \text{oder} \quad a = \frac{2ncb}{3f}$$

Diese Tiefe ist also wie das Gewicht der Kugel und das Quadrat ihrer Ge-



schwindigkeit mit einander multipliciret, und durch das Quadrat des Diameters der Kugel nebst der Festigkeit des Walls dividirt. Wenn also gleiche Kugeln in eben denselben Wall geschossen werden, so verhält sich die Tiefe der Löcher, wie die Quadrate ihrer Geschwindigkeit. Da nun dieses durch die Erfahrung bestätigt worden, so folgt daraus, daß auch unsere Gründe, woraus dieser Schluß gemacht worden, richtig seyn müssen. Wir sehen aber daraus ferner, daß wenn ungleich grosse Kugeln, welche jedoch aus einerley Materie bestehen, mit gleicher Geschwindigkeit gegen eben denselben Wall geschossen werden, die Tiefe der Löcher dem Diameter der Kugel proportional seyn müsse. Also daß grössere Kugeln unter einerley Umständen in dem Wall nicht nur grössere Oefnungen machen, sondern auch tiefer hineindringen werden. Wenn aber hinwiederum aus der Erfahrung die Tiefe, auf welche eine gegebene Kugel mit einer bekannten Geschwindigkeit in einen Wall hinein gedrunge, gefunden worden, so kann man daraus die Grösse f , wodurch die Festigkeit der Materie des Walls angezeigt wird, bestimmen, und solchergestalt kann man durch die Erfahrung die Festigkeit aller verschiedenen Materialien, woraus die Wälle immer bestehen mögen, untereinander vergleichen.

Der Autor hat seine Kugeln gegen einen Bloch aus Ulmenbäumen-Holtz geschossen, und daher können wir den Werth des Buchstabens f für Ulmenbäumen-Holtz bestimmen. Die Kugel hielt $\frac{3}{4}$ Zoll im Diameter, daher war $c = 0,0625$ Engl. Schuh, und da die Kugel von Bley gewesen, so war $n = 11,35$. Hernach hatte die Kugel eine Geschwindigkeit von 1700 Schuhen in einer Secunde, daher wird $b = 44900$ Engl. Schuh, und endlich drung die Kugel 5 Zoll tief, das ist 0,4166 Schuh, in das Holz hinein. Hieraus findet man aus der Aequation

$$f = \frac{2ncb}{3a}$$

diesen Werth:

$$f = \frac{22,7 \cdot 0,0625 \cdot 44900}{1,25} = 50960.$$

Dieses ist also der Werth des Buchstabens f für Ulmenbäumen-Holz, aus welchem man in allen Fällen, wie tief eine jede Kugel hinein zu dringen vermögend ist, bestimmen kann. Damit man aber die Festigkeit dieses Holzes mit der Festigkeit eines erdenen Walls vergleichen könne, so wollen wir setzen, daß eine halbe Carthaunen-Kugel mit voller Ladung in einen solchen Wall 15 Schuh tief hinein dringe. Weil diese Kugel von Eisen, so ist $n = 7,82$, und der Diameter der Kugel ist $c = 0,46$ engl. Schuh. Die Geschwindigkeit

dieser Kugel, womit dieselbe den Wall erreicht, mag ungefähr 1300 Schuh in einer Secunde austragen, und da wird $b = 27040^1)$. Weil nun $a = 15$ Schuh, so wird $f = 4323^2)$. Folglich verhält sich die Festigkeit des Ulmenbäumen-Holzes zur Festigkeit eines erdenen Walls ungefähr wie 11,8³⁾ zu 1. Und auf diese Art könnte man die Festigkeit aller andern Materialien mit einander vergleichen, wenn darüber solche Versuche angestellt würden.

1) Im Original 27800. 2) Im Original 4441. 3) Im Original 11.

Unter der Voraussetzung, daß die obigen Angaben, betreffend die Geschwindigkeit und Eindringungstiefe des Geschosses einer halben Carthaune, sich auf rheinländisches Maß beziehen, berichtigt von F. R. S.



II

BALLISTISCHE ABHANDLUNGEN



RECHERCHES SUR LA VERITABLE COURBE
QUE DECRIVENT LES CORPS JETTES DANS L'AIR
OU DANS UN AUTRE FLUIDE QUELCONQUE

Commentatio 217 indicis ENESTROMIANI
Mémoires de l'académie des sciences de Berlin [9] (1753), 1755, p. 321—352

1. Après la découverte de GALILÉE, que les corps jettés obliquement dans un espace vuide décrivent toujours une parabole, on s'est bien aperçu, qu'on n'en sauroit faire l'application pour déterminer le mouvement d'une bombe, ou d'un boulet de canon. Car, puisque la vitesse, dont ces corps traversent l'air, est si rapide, la résistance de l'air devient si grande par rapport à la pesanteur, que son effet détourne très considérablement ces corps d'une route parabolique; de sorte que les calculs fondés sur la nature de la parabole ne sont plus d'aucun usage dans ces occasions. C'est dequoi il ne faut pas être surpris, puisque GALILÉE dans sa recherche n'a tenu compte d'autres forces qui agissent sur les corps, que de la seule force de gravité, n'ayant fait aucune attention à la résistance que les corps éprouvent de la part de l'air.

2. Il y a donc en effet deux forces, à l'action desquelles un corps qui se meut dans un fluide, est assujéti. L'une est la force de gravité, ou la pesanteur du corps, sur laquelle il faut pourtant remarquer, qu'elle est moindre que la pesanteur naturelle du corps, étant diminuée du poids d'un égal volume du fluide, dans lequel le mouvement se fait. L'autre force est celle de la résistance, qu'on sait être proportionnelle aux quarrés de la vitesse du corps; et quand le corps est un globe, comme on le suppose ordinairement, la direction de cette force est diamétralement opposée à celle du mouvement du corps. Cette force change donc continuellement tant de quantité que de



direction, au lieu que la première demeure toujours la même. Il s'agit donc de déterminer la courbe, qu'un corps jetté obliquement doit décrire, étant sollicité par ces deux forces, dont je viens de parler.

3. Quoique cette question se réduise aisément à un problème purement analytique, le grand NEWTON y a inutilement travaillé malgré des recherches très ingénieuses pour arriver à sa solution. Il étoit même le premier qui l'eût entreprise; et ayant si bien réussi dans la supposition, que la résistance soit proportionnelle à la vitesse même, il est presque inconcevable, qu'il ne soit pas venu à bout, lorsque la résistance est supposée proportionnelle aux quarrés de la vitesse, après avoir résolu quantité de questions incomparablement plus difficiles. C'est donc feu M. JEAN BERNOULLI¹⁾, qui a donné le premier la solution de ce problème, d'où il a même tiré une construction de la courbe par le moyen des quadratures de quelques courbes transcendentes, dont la description n'est cependant pas fort difficile.

4. Voilà donc ce grand problème résolu, et même très bien résolu, il y a longtemps. Cependant la solution, quelque bonne qu'elle soit dans la théorie, est pourtant telle, qu'on n'en a pu tirer jusqu'ici le moindre secours pour la pratique, et pour en corriger la fausse théorie fondée sur la parabole, à laquelle les Artilleristes sont encore obligés de s'en tenir, quoiqu'ils n'en connaissent que trop l'insuffisance. Ainsi il est certain que cette solution n'a apporté aucun avantage réel à l'avancement de l'Artillerie, et il semble qu'elle n'a servi qu'à mieux assurer les gens du métier de la fausseté de leurs principes tirés de la nature de la parabole, auxquels ils ne laissent pas d'être réduits encore. C'est bien quelque chose que de savoir, que les règles ordinaires trompent; mais à moins qu'on ne sache assés précisément, de combien elles trompent en chaque cas, l'avantage sa réduit à fort peu de chose.

5. Il semble, aussi d'abord, que ce seroit un ouvrage sans fin que d'entreprendre d'établir de nouvelles règles pour le jet des bombes et des boulets de canon, qui soient conformes à la véritable courbe que ces corps décrivent

1) JOH. BERNOULLI, *Responsio ad nonneminis provocationem, eiusque solutio questionis ipsi ab eodem propositae de inveniendi linea curva, quam describit projectile in medio resistente*, Acta erud. 1721, p. 216; *Opera omnia*, Lausannae et Genevae 1742, t. II, p. 393-402. F. R. S.

dans l'air. Car comme l'hypothèse de GALILÉE ne demande que l'élévation du mortier avec la vitesse dont la bombe en sort, il n'a pas été difficile de calculer des Tables, qui marquent pour tous les cas possibles, tant la hauteur à laquelle la bombe arrive, que le point où elle doit retomber en terre. Mais, si l'on vouloit faire de semblables Tables, qui soient d'accord avec la vérité, il faudroit outre les deux élémens mentionnés encore avoir égard, tant au diamètre de la bombe ou boulet, qu'à son poids; et partant on seroit dans la nécessité de calculer de telles tables pour chaque diamètre, et tous les poids qui lui pourroient convenir: ce qui rendroit sans doute impraticable l'exécution d'un tel ouvrage.

6. Cependant ayant bien pesé toutes ces difficultés, je ne les trouve pas tout à fait insurmontables; car j'ai remarqué qu'une infinité de cas, qui semblent différens, peuvent être compris dans une même Table; et quoique, ce nonobstant, le nombre des cas ne laisse pas d'être encore infini, comme ils tiennent un certain ordre entr'eux, il suffira d'en calculer un certain nombre, pour en pouvoir tirer ensuite tous les autres par la voye d'interpolation. Tout l'ouvrage sera donc réduit à un certain nombre de Tables calculées, et à une instruction, qui en enseigne l'usage; et cela sera suffisant pour calculer tous les cas qui se peuvent présenter dans l'Artillerie, et on sera en état de les expédier presque aussi promptement, que dans l'hypothèse vulgaire de GALILÉE.

7. Pour mieux expliquer mes idées, je commencerai par tirer la solution de cette question des premiers principes de la Mécanique. D'abord donc je considère le vrai poids du globe dont il s'agit de déterminer le mouvement; et posant ce poids = P , soit Π le poids d'un volume égal de l'air, ou du fluide, dans lequel le mouvement se fait; cela posé, on sait que le poids de ce globe dans le fluide sera $-P - \Pi$; ce qui étant la force qui sollicite le globe actuellement en bas, la force accélératrice de la gravité, qui agit sur ce globe, sera

$$= \frac{P - \Pi}{P} = 1 - \frac{\Pi}{P}.$$

Cette force accélératrice se trouvera donc en retranchant de l'unité la fraction $\frac{\Pi}{P}$, qui marque le rapport de la gravité spécifique du fluide à celle du globe. Donc, lorsque le mouvement se fait dans l'air, à moins que le globe



ne soit d'une matière extrêmement légère, on voit bien, qu'on pourra supposer sans erreur cette force accélératrice $= 1$; cependant pour rendre mes recherches générales, j'exprimerai par α dans la suite cette force accélératrice de la gravité, de sorte que

$$\alpha = 1 - \frac{\Pi}{P}.$$

8. Pour découvrir la résistance de ce globe, soit d son diamètre, et v la hauteur d'où un corps grave dans le vuide acquiert en tombant la même vitesse, dont nous supposons, que le globe se meut dans le fluide. Posant donc le rapport du diamètre à la circonférence $= 1:\pi$, l'aire du plus grand cercle de ce globe sera $= \frac{1}{4}\pi dd$; donc sa surface $= \pi dd$, et la solidité du globe même $= \frac{1}{6}\pi d^3$, qui exprimera donc le volume d'une masse du fluide, dont le poids est $= \Pi$; ainsi que nous venons de supposer. Ensuite, si un plan égal au grand cercle $\frac{1}{4}\pi dd$ se mouvoit directement dans le fluide avec la vitesse du globe, on sait que la résistance seroit égale au poids d'un cylindre du fluide, dont la base seroit $= \frac{1}{4}\pi dd$, et la hauteur $= v$, et la solidité par conséquent $= \frac{1}{4}\pi ddv$. Or on sait aussi que la résistance du globe ne vaut que la moitié de celle du grand cercle; donc la résistance du globe sera égale au poids d'une masse du fluide, dont le volume

$$= \frac{1}{8}\pi ddv.$$

9. Or le poids d'un volume de ce fluide $\frac{1}{6}\pi d^3$ étant $= \Pi$, le poids du volume que nous venons de trouver $\frac{1}{8}\pi ddv$ sera $= \frac{3v}{4d}\Pi$; qui exprime la force de la résistance, et si nous la divisons par la masse, ou le poids du globe P , nous aurons la force retardatrice, qui résulte de la résistance,

$$= \frac{3v}{4d} \cdot \frac{\Pi}{P},$$

et dont la direction est contraire au mouvement du globe. Or, puisque tant le diamètre du globe d , que le rapport de sa gravité spécifique à celle du fluide, ou P à Π , est supposé être connu, je poserai pour abrégé

$$\frac{4d}{3} \cdot \frac{P}{\Pi} = c,$$

pour avoir la force retardatrice de la résistance $= \frac{v}{c}$. Or l'on voit que pour l'air, la valeur de la fraction $\frac{P}{\Pi}$ sera toujours un nombre très grand; car si le globe n'étoit pas plus pesant qu'un égal volume d'eau, il y auroit $\frac{P}{\Pi} = 850$ ou environ.

10. Le rapport de la gravité spécifique du globe et du fluide se trouve le plus aisément par le moyen de l'eau; car sachant le poids P du globe, on aura d'abord le volume d'une masse d'eau, dont le poids est aussi $= P$, puisqu'on connoit le poids d'un pied cubique d'eau. Soit donc e^3 le volume de cette masse d'eau dont le poids $= P$, et que la gravité spécifique de l'eau soit à celle du fluide, dans lequel se fait le mouvement, comme 1 à μ , et $\frac{1}{\mu}e^3$ sera le volume de ce fluide, dont le poids est $= P$. Or Π marque le poids d'une masse du même fluide, dont le volume est $= \frac{1}{6}\pi d^3$, d'où nous tirons

$$P:\Pi = \frac{1}{\mu}e^3 : \frac{1}{6}\pi d^3,$$

ou

$$\frac{P}{\Pi} = \frac{6e^3}{\mu\pi d^3};$$

donc nous aurons

$$c = \frac{8e^3}{\mu\pi dd}.$$

Et partant si le mouvement se faisoit dans l'eau, à cause de $\mu = 1$, on auroit

$$c = \frac{8e^3}{\pi dd};$$

or, lorsque le mouvement se fait dans l'air, on aura à peu près

$$c = \frac{6666e^3}{\pi dd},$$

ou

$$c = \frac{2133e^3}{dd}.$$

11. Cette formule aura lieu, lorsque le mouvement du globe n'est pas trop vite, pour que l'air puisse aussitôt librement remplir l'espace, que le globe vient de quitter. Mais si le mouvement est si rapide, que l'air ne



sauroit occuper dans le même instant l'espace, que le globe laisse après soi, de sorte que cet espace demeure vuide, du moins pour un instant, alors le globe soutenant sur sa partie d'avant toute la pression de l'atmosphère, qui n'étant pas contrebalancée par une pression égale de derrière, il est clair que la résistance sera augmentée de toute la pression de l'atmosphère sur la partie antérieure du globe. Donc, posant k pour la hauteur d'une colonne d'eau, qui est en équilibre avec l'atmosphère, cette pression sera égale au poids d'une masse d'eau, dont le volume $= \frac{1}{4} \pi d d k$, et partant au poids d'une masse d'air dont le volume $= 213 \pi d d k = 669 d d k$ à peu près.

12. La résistance entière du globe dans l'air sera donc dans ce cas égale au poids d'une masse d'air, dont le volume

$$= \frac{1}{8} \pi d d v + 213 \pi d d k.$$

Donc le poids du globe étant égal au poids d'un volume d'air $= 850 e^3$, la force retardatrice de la résistance sera

$$= \frac{\pi d d v}{6666 e^3} + \frac{\pi d d k}{4 e^3}.$$

Or nous venons de poser

$$c = \frac{6666 e^3}{\pi d d},$$

ou bien

$$\pi d d = \frac{6666 e^3}{c};$$

donc la force retardatrice de la résistance sera

$$= \frac{v}{c} + \frac{6666 k}{4 c} = \frac{v + 1666 k}{c}.$$

13. Cette force aura donc lieu, lorsque la vitesse du globe est plus grande que celle dont l'air en vertu de son ressort entreroit dans un espace vuide. Or le ressort étant égal au poids d'une colonne de même air, dont la hauteur $= 850 k$, la vitesse dont l'air entrera dans un espace vuide sera due à la hauteur $850 k$; donc, toutes les fois que $v > 850 k$, la force retardatrice de la résistance de l'air sera

$$= \frac{v + 1666 k}{c}.$$

Or pour l'état ordinaire de l'air, on sait qu'il est environ $k = 33$ pieds; de sorte que ce cas aura lieu, lorsque $v > 28050$ pieds, ou que le globe parcourt dans une seconde un espace plus grand que de 1325 pieds.

14. De là on comprend aisément, que quand même v sera plus petit que $850 k$, la force retardatrice de la résistance ne sera pas subitement réduite à $\frac{v}{c}$; et que la pression de l'atmosphère sera toujours plus petite sur la partie de derrière du globe que sur celle d'avant: d'où résultera une augmentation de la résistance. Ainsi s'il étoit $v = \frac{1}{2} \cdot 850 k$, la force retardatrice de la résistance sera

$$= \frac{v + \frac{1}{2} \cdot 1666 k}{c};$$

et en général lorsque $v = \frac{1}{n} \cdot 850 k$, cette force deviendra à peu près

$$= \frac{v + \frac{1}{n} \cdot 1666 k}{c},$$

ou bien

$$= \frac{3 v}{c}.$$

Cependant il s'en faut bien, que cette détermination soit assés exacte, vu qu'elle dépend de la pression de l'atmosphère sur le derrière du globe. Or il faut aussi remarquer que cette recherche n'est pas susceptible d'une entière rigueur de Geometrie, et qu'il faut se contenter d'une approximation convenable.

15. Par cette raison nous ne nous tromperons gueres, quand nous supposons la force retardatrice de la résistance $= \frac{3 v}{c}$, quoiqu'elle devienne fausse, lorsque $v > 850 k$. Car, puisque cela ne sauroit arriver que dans les mouvemens les plus rapides, et que ceux-ci sont bientôt réduits à une valeur de v au dessous de $850 k$, l'erreur qui en résulte ne sera pas considérable. Donc, au lieu de $c = \frac{6666 e^3}{\pi d d}$, si nous supposons $c = \frac{2222 e^3}{\pi d d}$, ou bien $c = 707 \cdot \frac{e^3}{d d}$, la force retardatrice de la résistance sera $= \frac{v}{c}$; et nous nous servirons de cette formule à l'avenir pour la commodité du calcul, où il faut se souvenir, que d marque le diamètre du globe, et e^3 le volume d'eau dont le poids est égal à celui du globe.



16. Donc, pour déterminer le mouvement d'un globe lancé dans l'air, il faut commencer par mesurer exactement tant son diamètre d que son poids, auquel on cherchera un volume d'eau également pesant, qui soit $= c^3$; et alors on en tirera la valeur de $c = 707 \cdot \frac{c^3}{d^3}$, sur laquelle le calcul doit être fondé. D'où l'on voit déjà que le calcul sera le même pour tous les globes dont le poids aura au carré de leur diamètre le même rapport. Cependant on ne sauroit nier, que le nombre 707 n'est pas trop bien constaté, et qu'il est même variable à cause de la diverse température de l'air. Mais ce sera une affaire à laquelle il faut avoir égard dans l'application du calcul aux expériences; et dans le calcul même on regardera la quantité c comme connue, sans se soucier, comment elle dépend de la grandeur et du poids du globe. Quand on passe ensuite à la pratique, on cherchera par quelque expérience, quelle valeur doit être donnée à la quantité c pour chaque globe proposé et pour chaque état de l'air.

17. Soit donc $CNAMH$ (Fig. 1) la courbe décrite par un globe dans un fluide quelconque, que α marque la force accélératrice de la gravité, et que c soit la quantité mentionnée, d'où dépend la résistance. Soit A le point le plus haut de cette courbe, et la horizontale BAE la tangente à ce point; CNA sera donc la partie de cette courbe, par laquelle le globe est monté, et AMH celle, par laquelle il descend. Considérons séparément le mouvement de la montée et de la descente, et soit pour celle-ci une abscisse quelconque prise sur la horizontale $AP = x$, l'appliquée verticale qui y répond $PM = y$;

et que v soit la hauteur due à la vitesse du globe en M ; de sorte que la force retardatrice de la résistance y sera $= \frac{v}{c}$.

18. Décomposant le mouvement du corps selon les directions horizontale AP et la verticale PM , celui-ci sera premièrement accéléré par la force accélératrice de la gravité $= \alpha$. Ensuite la force retardatrice de la résistance $\frac{v}{c}$ agissant selon la direction de la tangente MT , si nous posons l'élément

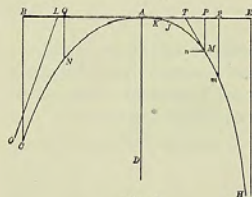


Fig. 1.

de la courbe $Mm = ds$, il en résultera une force qui s'oppose au mouvement horizontal,

$$= \frac{v dx}{cds},$$

et une qui s'oppose au mouvement vertical,

$$= \frac{v dy}{cds}.$$

Donc si nous posons l'élément du tems $= dt$, de sorte que $dt = \frac{ds}{V}$, et que nous prenions cet élément dt pour constant, les principes mécaniques de l'accélération nous fourniront ces deux égalités:

$$\frac{2 ddx}{dt^2} = - \frac{v dx}{cds}$$

et

$$\frac{2 ddy}{dt^2} = \alpha - \frac{v dy}{cds}.$$

19. Puisque $dt = \frac{ds}{V}$, nous aurons $v = \frac{ds}{dt}$, d'où nos deux équations deviendront

$$\frac{2 ddx}{dt^2} = - \frac{dx ds}{cdt^2}$$

et

$$\frac{2 ddy}{dt^2} = \alpha - \frac{dy ds}{cdt^2}.$$

Supposons de plus

$$dy = p dx,$$

de sorte que p exprime la tangente de l'angle PTM , ou de l'inclinaison du mouvement du corps à l'horizon, et à cause de

$$ds = dx \sqrt{1 + pp}$$

et de

$$ddy = p ddx + dx dp,$$

nous aurons ces deux équations:

$$\frac{2ddx}{dt^2} = -\frac{dx^2V(1+pp)}{cdt^2}$$

et

$$\frac{2pddx}{dt^2} + \frac{2dx dp}{dt^2} = \alpha - \frac{pdx^2V(1+pp)}{cdt^2},$$

et si nous retranchons de celle-ci la première multipliée par p , il restera

$$\frac{2dx dp}{dt^2} = \alpha,$$

ou bien

$$\alpha dt^2 = 2dx dp;$$

or la première donne

$$-\frac{2ddx}{dx^2} = \frac{V(1+pp)}{c}.$$

Enfin on aura

$$v = \frac{dx^2(1+pp)}{dt^2} = \frac{\alpha dx(1+pp)}{2dp}.$$

20. Parce que $2dp = \frac{\alpha dt^2}{dx}$, l'autre équation

$$-\frac{2ddx}{dx^2} = \frac{V(1+pp)}{c}$$

multipliée par dp se réduira à celle-ci

$$-\frac{2\alpha dt^2 ddx}{dx^2} = \frac{2dpV(1+pp)}{c},$$

dont l'intégrale à cause de l'élément dt constant est

$$\frac{\alpha dt^2}{dx^2} = \frac{2dp}{dx} - 2C + \frac{2}{c} \int dpV(1+pp).$$

d'où nous tirons

$$dx = \frac{dp}{C + \frac{1}{c} \int dpV(1+pp)}$$

et

$$dy = \frac{pdp}{C + \frac{1}{c} \int dpV(1+pp)},$$

donc

$$ds = dxV(1+pp) = \frac{dpV(1+pp)}{C + \frac{1}{c} \int dpV(1+pp)}.$$

Ensuite à cause de $\alpha dt^2 = 2dx dp$, nous obtiendrons

$$\frac{1}{2} \alpha dt^2 = \frac{dp^2}{C + \frac{1}{c} \int dpV(1+pp)}$$

et

$$dt \sqrt{\frac{1}{2} \alpha} = \frac{dp}{V(C + \frac{1}{c} \int dpV(1+pp))},$$

et enfin pour la vitesse du corps nous aurons:

$$v = \frac{\frac{1}{2} \alpha (1+pp)}{C + \frac{1}{c} \int dpV(1+pp)}.$$

21. Pour la formule intégrale $\int dpV(1+pp)$, qui entre dans ces expressions, il est évident qu'elle exprime un arc parabolique; ou bien on le pourra assigner par les logarithmes, puisque

$$\int dpV(1+pp) = \frac{1}{2} pV(1+pp) + \frac{1}{2} l(p + V(1+pp));$$

prenant l'intégrale en sorte qu'elle évanouisse au cas de $p=0$, ce qui arrive au sommet A de la courbe, où la tangente est horizontale. Ainsi regardant l'inclinaison du mouvement du corps à l'horizon, dont la tangente est $-p$, comme connu, pour l'endroit M , où cela arrive, nous pourrions déterminer l'abscisse $AP=x$, l'appliquée $PM=y$, l'arc $AM=s$, la hauteur due à la vitesse en M , et enfin le tems, que le corps a mis à parcourir l'arc AM .

22. Posons pour la constante C , qui a été introduite par l'intégration, cette fraction $\frac{n}{c}$, et il est clair que n désignera un nombre absolu. Ensuite mettons pour abrégé

$$\int dpV(1+pp) = P,$$



vu que pour chaque valeur de p on peut aisément trouver celle de P ; et pour la branche AMH , par laquelle le corps descend, nous aurons les formules suivantes:

$$x = c \int \frac{dp}{n+P}, \quad y = c \int \frac{p dp}{n+P}, \quad s = c \int \frac{dp \sqrt{(1+pp)}}{n+P},$$

$$dt \sqrt{\frac{1}{2} \alpha} = \frac{dp \sqrt{c}}{\sqrt{(n+P)}} \quad \text{ou} \quad t = \frac{\sqrt{2} c}{\sqrt{\alpha}} \int \frac{dp}{\sqrt{(n+P)}}$$

et

$$v = \frac{\frac{1}{2} \alpha c (1+pp)}{n+P}.$$

Ces intégrales doivent être prises en sorte, qu'elles évanouissent dans le cas $p=0$; d'où l'on voit que la hauteur due à la vitesse en A sera

$$= \frac{\alpha c}{2n}.$$

23. Ces mêmes formules servent aussi à exprimer la nature de l'autre branche ANC , que le corps aura décrite en montant; car on n'a qu'à prendre négative la valeur de P . Ainsi, si la direction du mouvement en N fait avec l'horizon un angle dont la tangente $=p$, on aura

$$AQ = c \int \frac{dp}{n-P}, \quad QN = c \int \frac{p dp}{n-P} \quad \text{et} \quad AN = c \int \frac{dp \sqrt{(1+pp)}}{n-P},$$

le tems par l'arc AN

$$= \frac{\sqrt{2} c}{\sqrt{\alpha}} \int \frac{dp}{\sqrt{(n-P)}},$$

la hauteur due à la vitesse en N

$$= \frac{\frac{1}{2} \alpha c (1+pp)}{n-P}.$$

D'où l'on voit que dans la branche ascendante ANC l'inclinaison de ses tangentes à l'horizon ne sauroit nulle part devenir si grande, qu'il fût $P > n$; et là où $P=n$, la vitesse du corps est infinie.

24. Le mouvement du corps, et la courbe qu'il décrit, $CNAMH$ dépend donc de trois constantes α , c et n , dont il faut savoir les valeurs pour chaque cas proposé. La première α est déterminée par la gravité spécifique du fluide à l'égard de celle du globe; et comme elle n'entre pas dans les formules qui déterminent la nature de la courbe, on la connoitra indépendamment de α ; ce n'est que le tems et la vitesse qui en dépendent. La quantité c est déterminée par le diamètre et le poids du globe, et comme elle ne fait que multiplier les formules trouvées, elle ne cause aucun embarras dans le calcul. Or la troisième quantité n , qui dépend de la vitesse imprimée au corps, affecte tellement nos formules, qu'on est obligé d'en calculer les valeurs à part pour toutes les différentes valeurs de n .

25. Pour développer mieux la nature de cette courbe, il sera bon d'avoir aussi égard au rayon de sa développée, qui mesure sa courbure dans chacun de ses points. Or on sait que, posant $dy = p dx$, le rayon de courbure est

$$= \frac{dx (1+pp) \sqrt{(1+pp)}}{dp}.$$

Donc, puisque $\frac{dx}{dp} = \frac{c}{n+P}$ pour la branche descendante, le rayon de courbure en M sera

$$= \frac{c (1+pp) \sqrt{(1+pp)}}{n+P}.$$

Or pour la branche ascendante en N , où est aussi $dy = p dx$, le rayon de courbure sera

$$= \frac{c (1+pp) \sqrt{(1+pp)}}{n-P}.$$

Ainsi là où $P=n$, et la vitesse du corps est infinie, le rayon de courbure devient aussi infiniment grand; et l'on voit que dans les deux branches, où leurs tangentes sont également inclinées à l'horizon, le rayon de courbure, de même que les autres quantités, x , y , s , t et v , sont plus grandes dans la branche ascendante que dans la descendante.

26. Donc dans un milieu résistant, les deux branches de la courbe décrite par un corps, sont dissemblables, en sorte que la branche descendante est plus courbée que l'ascendante, et le mouvement par celle-ci plus rapide



que par celle-là. Or dans le vuide les deux branches sont, comme on sait, égales et semblables, et le mouvement aussi le même: ce que nos formules déclarent aussi évidemment; car pour le vuide la quantité c devient infinie, de même que le nombre n , puisque $\frac{cc}{2n}$ marque la hauteur due à la vitesse en A . Donc P évanouit par rapport à n , et puisque $\alpha = 1$, si nous posons

$$\frac{c}{2n} = b,$$

nous aurons pour le vuide:

$$x = 2bp, \quad y = bpp, \quad s = 2b \int dp \sqrt{1+pp},$$

$$t = 2bp \quad \text{et} \quad v = b(1+pp),$$

et le rayon de courbure

$$= 2b(1+pp)^{\frac{3}{2}},$$

d'où il est évident, que la courbe est une parabole, et le mouvement tel, qu'il est connu.

27. C'est donc de la quantité $P = \int dp \sqrt{1+pp}$, que résulte la différence entre les trajectoires dans le vuide et dans un fluide; et l'on voit que cette différence sera d'autant plus grande, plus sera grande la quantité P par rapport au nombre n . Or la quantité P évanouit au sommet A ; et de là de part et d'autre elle croît avec l'angle MTP , que la tangente de la courbe fait avec l'horizon; en sorte que lorsque cet angle devient droit, la quantité P sera même infinie. Par conséquent quelque petite que soit la résistance, la courbe $CNAMH$ s'écarte enfin à l'infini de la parabole; puisqu'en continuant ses branches il doit arriver nécessairement, que la quantité P devienne enfin égale au nombre n , quelque grand qu'il soit, et qu'elle le surpasse même infiniment.

28. Mais, lorsqu'on veut seulement connoître une telle partie de la courbe comme NAM , que l'inclinaison des tangentes à ses extrémités M et N soit si petite, que la quantité P qui en résulte, soit fort petite par rapport au nombre n , alors on pourra trouver des approximations assez commodes pour décrire cette portion de la courbe. Car, puisque P est fort petite par rapport à n , on aura

$$\frac{1}{n+P} = \frac{1}{n} - \frac{P}{nn} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n-P} = \frac{1}{n} + \frac{P}{nn};$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{n+P}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{P}{2n\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{n-P}} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{P}{2n\sqrt{n}}.$$

Donc pour la branche descendante AM nous aurons

$$AP = x = \frac{c}{n} \left(p - \frac{1}{n} \int P dp \right) = \frac{c}{n} \left(p - \frac{1}{n} Pp + \frac{1}{3n} (1+Pp)^{\frac{3}{2}} - 1 \right),$$

$$PM = y = \frac{c}{n} \left(\frac{1}{2} Pp - \frac{1}{n} \int Pp dp \right) = \frac{c}{n} \left(\frac{1}{2} Pp - \frac{1}{2n} Ppp - \frac{1}{8n} P + \frac{1}{8n} p(1+Pp)^{\frac{3}{2}} \right),$$

$$AM = s = \frac{c}{n} \left(P - \frac{1}{n} \int P dp \sqrt{1+pp} \right) = \frac{c}{n} \left(P - \frac{1}{2n} Pp \right),$$

le tems par AM

$$t = \frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{an}} \left(p - \frac{1}{2n} Pp + \frac{1}{6n} (1+Pp)^{\frac{3}{2}} - 1 \right),$$

la hauteur due à la vitesse en M

$$v = \frac{ac(1+Pp)}{2n} \left(1 - \frac{P}{n} \right).$$

Et prenant p et P négatifs ces mêmes expressions serviront pour la branche ascendante AN .

29. Or ces approximations n'auront lieu, que tandis que la quantité P demeure extrêmement petite par rapport au nombre n . Donc, plus le nombre n sera grand, plus sera aussi grande la portion de la courbe MAN , qu'on connoitra au juste par le moyen de ces formules. Mais, dès qu'on en veut connoître une plus grande portion, ces approximations ne sont plus d'aucun usage; et alors, puisqu'il n'y a pas moyen d'intégrer les formules trouvées pour x , y et le tems t , on sera réduit à en chercher la valeur par la voye des quadratures. Or, avant que d'entreprendre cet ouvrage, il sera bon de remarquer quelques phénomènes, que nous découvrons la considération de cette courbe.



30. Et d'abord je remarque, que l'arc de la courbe $AM = s$ se peut exprimer par un logarithme; car, puisque $dpV(1+pp) = dP$, on aura

$$s = c \int \frac{dP}{n+P}$$

et partant

$$s = cl \frac{n+P}{n},$$

puisque en A , où $s=0$, il est $P=0$; et cette formule est déjà fort commode pour décrire la courbe; car calculant pour un grand nombre de valeurs de p celle de s , on trouvera autant de portions de la courbe, et sachant de chacune l'inclinaison à l'horizon, on en tirera aisément les portions de l'abscisse et de l'appliquée, qui leur conviennent; lesquelles étant ajoutées ensemble donneront tant l'abscisse que l'appliquée entière, qui répondent à chaque point de la courbe. Ensuite, ayant la vitesse à chaque point de la courbe par la formule

$$v = \frac{\frac{1}{2}ac(1+pp)}{n+P},$$

chaque particule de la courbe divisée par Vv donnera le tems, que le corps met à la parcourir; et pourvu qu'on prenne les particules de la courbe assés petites, on obtiendra assés exactement tant la figure de la courbe, que le mouvement du corps.

31. Puisque pour la branche descendante nous venons de trouver

$$s = cl \frac{n+P}{n},$$

nous voyons que cette courbe approche de plus en plus de la direction verticale, qu'elle n'atteint pourtant qu'à l'infini. Car l'arc s ne devient infini, que lorsque P est infini, ce qui arrive, quand p est pris infini, ou que la tangente de la courbe devient verticale. Or pour la branche ascendante ANC , nous aurons l'arc AN

$$= -cl \frac{n-P}{n} = cl \frac{n}{n-P};$$

donc cet arc sera infini, lorsque $P=n$; de là on obtiendra une certaine valeur pour p , d'où l'on connoitra l'inclinaison de la tangente de cette courbe à l'infini, qui sera son asymptote.

32. Ayant pour la branche ascendante

$$v = \frac{\frac{1}{2}ac(1+pp)}{n-P}$$

nous voyons qu'à l'infini, où $P=n$, la vitesse du corps est infinie, et qu'en montant jusqu'en A elle devient continuellement plus petite; car en diminuant p , le numérateur $\frac{1}{2}ac(1+pp)$ en devient plus petit, et le dénominateur $n-P$ plus grand; l'un et l'autre contribuant à diminuer la vitesse. Or pour la branche descendante ayant

$$v = \frac{\frac{1}{2}ac(1+pp)}{n+P},$$

on aura pour le sommet A

$$v = \frac{ac}{2n};$$

or de là il ne s'ensuit pas, que plus le corps descend, plus aussi son mouvement sera accéléré; mais plutôt après que le corps aura passé par le sommet A , son mouvement ne laissera pas de souffrir encore quelque diminution, jusqu'à ce qu'il parvienne à un certain point J , où sa vitesse sera la plus petite.

33. Ce point J , où le corps aura la moindre vitesse, se trouvera donc en supposant le différentiel de $\frac{1+pp}{n+P}$ égal à zéro; d'où l'on aura

$$2p(n+P) = (1+pp)V(1+pp).$$

Or ayant

$$P = \frac{1}{2}pV(1+pp) + \frac{1}{2}l(p+V(1+pp)),$$

nous aurons

$$2np + pl(p+V(1+pp)) = V(1+pp).$$

Comme cela arrive ordinairement fort près du point A , la valeur de p sera fort petite, et partant à peu près

$$P = p + \frac{1}{6}p^3 \quad \text{et} \quad (1+pp)V(1+pp) = 1 + \frac{3}{2}pp + \frac{3}{8}p^4$$



donc

$$2np + 2pp + \frac{1}{3}p^4 = 1 + \frac{3}{2}pp + \frac{3}{8}p^4,$$

ou

$$2np - 1 - \frac{1}{2}pp + \frac{1}{24}p^4,$$

d'où, à moins que le nombre n ne soit très petit, on tirera

$$p = \frac{1}{2n} - \frac{1}{16n^3}$$

pour le point J ; et partant la hauteur due à la plus petite vitesse en J sera à peu près

$$v = \frac{ac}{2n} \left(\frac{4nn+1}{4nn+2} \right),$$

ou

$$v = \frac{ac}{2n} \left(1 - \frac{1}{4nn} \right).$$

34. Depuis ce point J le mouvement du corps sera de nouveau accéléré; mais quoique l'accélération continué à l'infini, la vitesse ne surpassera jamais une certaine limite; car à l'infini de cette courbe où $p = \infty$, on aura

$$v = \frac{\frac{1}{2}acpp}{P},$$

puisque n évanouit par rapport à P , dont la valeur sera aussi infinie. Mais à cause de $p = \infty$, le nombre $l(p + V(1 + pp))$, quoiqu'infini, évanouit par rapport à $pV(1 + pp)$, de sorte que dans ce cas

$$P = \frac{1}{2}pp,$$

et partant

$$v = ac;$$

qui sera donc la hauteur due à la vitesse, de laquelle le corps en descendant par l'arc JMH approche de plus en plus, et qu'il n'atteint qu'à l'infini.

35. Il est aussi à remarquer, que le rayon de courbure en M étant

$$= \frac{c(1 + pp)^{\frac{3}{2}}}{n + P},$$

la plus grande courbure ne se trouvera pas au sommet même A , mais à un autre point K dans l'arc descendant, qu'on trouvera par la résolution de cette équation

$$3p(n + P) = (1 + pp)V(1 + pp)$$

ou bien

$$3np + \frac{1}{2}ppV(1 + pp) + \frac{3}{2}pl(p + V(1 + pp)) = V(1 + pp).$$

Donc, à moins que le nombre n ne soit très petit, il y aura à peu près $p = \frac{1}{3n}$; d'où l'on voit que ce point K sera plus près du sommet A , que le point J , où la vitesse du corps est la plus petite.

36. Mais pour la nature de la branche descendante AMH , c'est encore une question bien importante, si elle a une asymptote verticale comme EF , ou non? c'est à dire, si en faisant $p = \infty$ l'abscisse x devient infinie, ou si elle obtient une valeur finie comme AE , qui donneroit par conséquent l'asymptote EF . Il s'agit donc de chercher la valeur de la formule intégrale $\int \frac{dp}{n + P}$ au cas de $p = \infty$; car pour la valeur de l'appliquée $c \int \frac{p dp}{n + P}$, il n'y a aucun doute, qu'elle ne devienne infinie en posant $p = \infty$. Mais aucune des méthodes, qui seroient assés propres pour nous marquer ces valeurs, tandis que P est plus petit que n , ne sauroit être employée ici avec succès.

37. Je crois donc, que le plus seur moyen sera de recourir à des limites, en donnant à P successivement deux telles valeurs, dont l'une seroit trop grande et l'autre trop petite; en sorte qu'on puisse pour l'un et l'autre cas exprimer l'intégrale $\int \frac{dp}{n + P}$. Or il est évident que $\int dpV(1 + pp)$, ou P , est toujours plus petit que $pV(1 + pp)$; et certainement plus grand que p ou $pV(1 + 0pp)$. Posons donc pour avoir des limites plus proches:

$$P = \int dpV(1 + pp) = pV(1 + \delta pp)$$

et prenant les différentiels nous aurons

$$V(1 + pp)(1 + \delta pp) - 1 + 2\delta pp,$$

ou bien

$$(1 - 3\delta)pp + \delta(1 - 4\delta)p^4 = 0,$$

d'où l'on voit, que si $\delta = \frac{1}{3}$, cette formule est < 0 , et si $\delta = \frac{1}{4}$, elle est > 0 .

Donc nous aurons ces deux limites assés approchantes

$$P < p\sqrt{1 + \frac{1}{3}pp} \quad \text{et} \quad P > p\sqrt{1 + \frac{1}{4}pp}.$$

38. Par là nous sommes assurés, que dans la branche descendante il y aura toujours:

$$x > c \int \frac{dp}{n+p\sqrt{1+\frac{1}{3}pp}}$$

et

$$x < c \int \frac{dp}{n+p\sqrt{1+\frac{1}{4}pp}}.$$

Dévelopons donc ces deux limites, et pour qu'une seule opération y suffise, posons

$$x = c \int \frac{dp}{n+p\sqrt{1+\delta pp}},$$

et soit pour dégager l'irrationalité

$$\sqrt{1+\delta pp} = p\sqrt{\delta} + q,$$

et nous aurons

$$p = \frac{1-qq}{2q\sqrt{\delta}},$$

$$\sqrt{1+\delta pp} = \frac{1+qq}{2q},$$

et

$$p\sqrt{1+\delta pp} = \frac{1-q^4}{4qq\sqrt{\delta}},$$

de plus

$$dp = -\frac{dq(1+qq)}{2qq\sqrt{\delta}},$$

et partant

$$x = -2c \int \frac{dq(1+qq)}{1+4nqq\sqrt{\delta}-q^4}.$$

39. Ce dénominateur ayant deux facteurs réels, posons les $ff+qq$ et $gg-qq$; et on aura

$$ffgg = 1 \quad \text{et} \quad gg - ff = 4n\sqrt{\delta}$$

ou bien

$$ff = \frac{1}{gg} \quad \text{et} \quad 4n\sqrt{\delta} = \frac{g^4-1}{gg}.$$

De là notre expression deviendra

$$x = -2c \left(\frac{1-ff}{ff+gg} \int \frac{dq}{ff+qq} + \frac{1+gg}{ff+gg} \int \frac{dq}{gg-qq} \right)$$

et prenant les intégrales

$$x = \frac{-2c(1-ff)}{f(ff+gg)} \text{A. tang. } \frac{q}{f} - \frac{c(1+gg)}{g(ff+gg)} \text{I} \frac{g+q}{g-q} + \text{Const.}$$

Or puisque $x=0$, lorsque $p=0$ et partant $q=1$, nous aurons

$$x = \frac{2c(1-ff)}{f(ff+gg)} \left(\text{A. tang. } \frac{1}{f} - \text{A. tang. } \frac{q}{f} \right) + \frac{c(1+gg)}{g(ff+gg)} \text{I} \frac{(g+1)(g-q)}{(g-1)(g+q)}$$

ou bien à cause de $f = \frac{1}{g}$

$$x = \frac{2cg(gg-1)}{1+g^4} (\text{A. tang. } g - \text{A. tang. } gg) + \frac{cg(1+gg)}{1+g^4} \text{I} \frac{(g+1)(g-q)}{(g-1)(g+q)}.$$

40. Maintenant on n'a qu'à poser $q=0$, pour avoir le cas de $p=\infty$; et l'abscisse qui répond à l'arc infini AMH sera

$$AE = \frac{2cg(gg-1)}{1+g^4} \text{A. tang. } g + \frac{cg(1+gg)}{1+g^4} \text{I} \frac{g+1}{g-1},$$

où il faut remarquer que

$$gg = 2n\sqrt{\delta} + \sqrt{1+4\delta nn}.$$

Donc prenant $\delta = \frac{1}{3}$, nous aurons

$$gg = 2n\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{1+\frac{4}{3}nn}$$

et partant l'intervalle AE sera ou plus grand ou plus petit que cette expression

$$\frac{2cg(gg-1)}{1+g^4} \text{A. tang. } g + \frac{cg(1+gg)}{1+g^4} \text{I} \frac{g+1}{g-1},$$

selon qu'on prenne ou

$$gg = 2n\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{1+\frac{4}{3}nn}$$

ou

$$gg = n + \sqrt{1+nn}.$$



41. Lorsque n est un nombre très grand, g en sera un aussi, et $A. \text{tang. } g$ deviendra $= \frac{\pi}{2}$, prenant π pour la mesure de deux angles droits; donc à cause de

$$\frac{g+1}{g-1} = \frac{2}{g},$$

notre formule sera

$$\frac{\pi c}{g} + \frac{2c}{gg}.$$

Donc, ayant ou $gg = 4n\sqrt{\frac{1}{3}}$ ou $gg = 2n$, les limites entre lesquels l'intervalle AE est compris, seront

$$\frac{\pi c\sqrt{1/3}}{2\sqrt{n}} + \frac{c\sqrt{1/3}}{2n} \quad \text{et} \quad \frac{\pi c\sqrt{2}}{2\sqrt{n}} + \frac{c}{n}.$$

Mais, lorsque n est une fraction très petite, nous aurons ou

$$gg = 1 + 2n\sqrt{\frac{1}{3}}, \quad \text{ou} \quad gg = 1 + n;$$

donc à cause de $A. \text{tang. } 1 = \frac{\pi}{4}$ les limites de l'intervalle AE seront

$$\frac{\pi nc}{2\sqrt{3}} + cl\frac{2\sqrt{3}}{n} \quad \text{et} \quad \frac{\pi nc}{4} + cl\frac{4}{n}.$$

42. La courbe trajectoire donc dans un fluide aura deux asymptotes, l'une verticale, qui est convergente avec la branche descendante, et l'autre inclinée à l'horizon, pour la branche ascendante, et qui sera tellement inclinée à l'horizon, que posant la tangente de l'inclinaison $= p$, on aura $P = n$, ou

$$n = \frac{1}{2} pV(1+pp) + \frac{1}{2} l(p + V(1+pp)).$$

Pour le cas du vuide cette dernière asymptote devient aussi verticale, de même que la première, et l'une et l'autre sera infiniment éloignée du sommet A . Or pour trouver le point L , où l'asymptote de la branche ascendante coupe la ligne horizontale BAE , posant $P = n$, on aura

$$AL = x - \frac{ydx}{dy} = c \left(\int \frac{dp}{n-P} - \frac{1}{p} \int \frac{pdp}{n-P} \right).$$

43. Après ces remarques générales, venons au fait pour voir, comment on pourroit tirer quelque fruit des formules trouvées pour la pratique. Et d'abord il est évident qu'on ne sauroit se passer d'une Table, qui représente pour chaque valeur de p celle de P . Donc, puisque p exprime la tangente de l'angle d'inclinaison de la courbe à l'horizon, posons cet angle $= \varphi$, de sorte que $p = \text{tang. } \varphi$; et à cause de $V(1+pp) = \sec. \varphi$, nous aurons

$$P = \frac{1}{2} \text{tang. } \varphi \cdot \sec. \varphi + \frac{1}{2} l(\text{tang. } \varphi + \sec. \varphi),$$

ou bien

$$P = \frac{1}{2} \text{tang. } \varphi \cdot \sec. \varphi + \frac{1}{2} l \text{ tang. } (45^\circ + \frac{1}{2} \varphi),$$

où il faut prendre les logarithmes hyperboliques de la tangente des angles $45^\circ + \frac{1}{2} \varphi$, qu'on trouve dans l'Ouvrage de NEPER¹⁾ sur les logarithmes.

44. C'est donc le contenu de la Table première [p. 442], où la première colonne renferme tous les angles d'inclinaison à l'horizon de degré en degré depuis 0° jusqu'à 90° ; la seconde colonne en contient les tangentes, qui sont les valeurs de la lettre p . La troisième colonne fournit les valeurs de la formule $\text{tang. } \varphi \cdot \sec. \varphi$ ou de $pV(1+pp)$, et la quatrième celles de la formule $l \text{ tang. } (45^\circ + \frac{1}{2} \varphi)$ ou de $l(p + V(1+pp))$; qui est la même que la Table des degrés des latitudes croissantes dans l'Hydrographie. Enfin la cinquième colonne contient les valeurs correspondantes de la formule intégrale $P = \int dpV(1+pp)$, dont nous avons besoin dans nos expressions.

45. Or, pour connoître les courbes qu'un corps peut décrire dans un fluide, il faut remarquer, qu'il y en a une infinité d'espèces différentes, qui sont déterminées par les diverses valeurs du nombre n . Car, tandis que le nombre n demeure le même, les courbes seront toujours semblables entr'elles, ou bien de la même espèce, quelle que soit la différence entre les quantités α et c ; puisque celles-ci n'entrent dans le calcul, que pour déterminer la grandeur de la courbe, sans en changer l'espèce, et outre cela le mouvement même du corps.

¹⁾ J. NAPIER (NEPER) (1550-1617), *Mirifici logarithmorum canonis descriptio etc.*, Edinburgi 1614. F. R. S.



46. Le caractère de ces diverses especes sera l'angle OLB , dont l'asymptote de la branche ascendante est inclinée à l'horizon. Pour connoître cet angle, on n'a qu'à chercher la valeur du nombre n dans la cinquième colonne de notre table, et la première colonne indiquera cet angle. Ainsi, si $n = 0$, l'angle OLB évanouira, ou bien l'asymptote OL sera horizontale; et le sommet A se trouvera à l'infini. Dans ce cas donc la branche ascendante de la courbe évanouit, et le corps descendra toujours (Fig. 2), en approchant de plus en plus de l'autre asymptote verticale EF : ce sera donc la première espèce des trajectoires décrites dans un fluide.

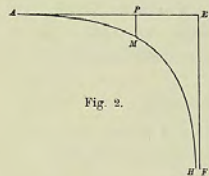


Fig. 2.

47. Pour les autres especes, on les aura en donnant à n des valeurs affirmatives. Or, quoique le nombre soit infini, il sera bon pour la pratique d'en fixer un certain nombre en donnant à l'angle OLB (Fig. 1) des valeurs, qui croissent de 5 à 5 degrés. Ainsi la seconde espèce sera, si $n = 0,0876001$, où l'angle OLB devient de 5 degrés. Voilà donc les diverses especes, qu'on pourroit établir.

Especie	L'angle OLB	Valeur du nombre n	Especie	L'angle OLB	Valeur du nombre n
1	0°	0,0000000	10	45°	1,1477934
2	5	0,0876001	11	50	1,432361
3	10	0,1772365	12	55	1,822067
4	15	0,2711218	13	60	2,390530 ¹⁾
5	20	0,3718537	14	65	3,290396
6	25	0,4826944	15	70	4,884250
7	30	0,6079863	16	75	8,223564 ²⁾
8	35	0,7538161	17	80	17,54793
9	40	0,9291380	18	85	67,13822 ³⁾

L'espece suivante ou la dix-neuvième renfermeroit les cas, où le globe est lancé verticalement en haut; or, puisque ces cas sont suffisamment expliqués ailleurs, je n'en tiendrai pas compte ici.

1) En original 2,390330. 2) En original 8,223570. 3) En original 67,12291.
Corrigé par F. R. S.

48. On pourroit encore établir autant d'especes, en donnant à n les mêmes valeurs, mais prises négativement; mais, puisque dans ces cas les courbes sont destituées de la branche ascendante, elles ne sauroient avoir lieu, que lorsque le globe seroit d'abord lancé en bas. Or, comme dans l'Artillerie il n'arrive guères souvent, qu'on baisse les canons ou les mortiers au dessous de l'horizon, il seroit superflu de calculer ces especes; et puisque la direction des canons et mortiers est toujours, ou horizontale, ou élevée au dessus de l'horizon, on peut même se passer de la première espèce, vu qu'elle n'a jamais lieu dans la pratique.

49. Le plus sur moyen de calculer chacune de ces especes sera de partager toute la courbe en plusieurs morceaux, et d'en calculer chacun à part: car alors on n'aura qu'à rassembler les calculs de tous ces morceaux. Soit donc Mm [Fig. 1] un tel morceau de la courbe, et soit la tangente de l'inclinaison en $M = p$ et en $m = q$, et posant $\int dq \sqrt{1+qq} = Q$, de même que $\int dp \sqrt{1+pp} = P$, on aura

$$AM = cl^{\frac{n+P}{n}} \quad \text{et} \quad Am = cl^{\frac{n+Q}{n}};$$

donc la portion de l'arc Mm sera

$$= cl^{\frac{n+Q}{n+P}}.$$

Ensuite prenant un milieu entre les inclinaisons en M et m , qui soit $-\eta$, on aura pour la portion de l'abscisse qui répond à cet arc

$$Pp = c \cos. \eta l^{\frac{n+Q}{n+P}},$$

et pour la portion de l'appliquée

$$pm - PM = c \sin. \eta l^{\frac{n+Q}{n+P}};$$

pourvu que la différence entre p et q soit assés petite.



50. Ensuite pour le mouvement même du corps, la hauteur due à la vitesse en M sera

$$= \frac{\frac{1}{2}ac(1+pp)}{n+P}$$

et en m

$$= \frac{\frac{1}{2}ac(1+qq)}{n+Q}$$

Prenant donc un milieu entre les vitesses, qu'on tire de ces formules, qui soit $=\sqrt{u}$, le tems que le corps employe à parcourir l'espace Mm sera $-\frac{Mm}{\sqrt{u}}$. Ou bien on prendra un milieu entre les valeurs

$$\frac{V(1+pp)}{V(n+P)} \quad \text{et} \quad \frac{V(1+qq)}{V(n+Q)},$$

qui soit $=\mu$, et à cause de $\sqrt{u} = \mu \sqrt{\frac{1}{2}ac}$, le tems par l'arc Mm sera

$$= \frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{n+Q}{n+P}$$

Et pour avoir ce tems exprimé en minutes secondes, soit g la hauteur par laquelle un corps tombe dans une seconde¹⁾, et le nombre des secondes sera

$$= \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2ag}} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{n+Q}{n+P}$$

On pourra de la même manière exprimer les vitesses par l'espace, qu'elles sont capables de parcourir dans une seconde, et sur ce pied la vitesse en M est

$$= \sqrt{2acg} \frac{V(1+pp)}{V(n+P)}$$

51. Quoiqu'on dût ici prendre les logarithmes hyperboliques, on peut pourtant se servir des logarithmes communs, pourvu qu'on multiplie ensuite les coefficients de ces termes par le nombre 2,302585092994, dont le logarithme

1) Donc la vitesse par seconde correspondante à la hauteur u est $\sqrt{4gu} = 2\sqrt{g}\sqrt{u}$.

F. R. S.

commun est $=0,3622156$. Ainsi, en se servant des logarithmes communs, un arc quelconque de la courbe sera

$$2,302585 c l^{\frac{n+Q}{n+P}},$$

et ce coefficient conviendra aussi aux abscisses et appliquées. Ensuite la vitesse en M sera exprimée par l'espace

$$\sqrt{2acg} \frac{V(1+pp)}{V(n+P)},$$

qui se parcourt dans une seconde avec cette vitesse; et le tems par l'arc Mm sera de

$$\frac{2,302585 \sqrt{c}}{\sqrt{2ag}} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{n+Q}{n+P}$$

secondes, où μ est la valeur moyenne entre

$$\frac{V(1+pp)}{V(n+P)} \quad \text{et} \quad \frac{V(1+qq)}{V(n+Q)}$$

et g marque la hauteur, d'où un corps tombe dans une seconde dans le vuide, et on sait que $g = 15,625$ pieds de Rhin.

52. Sur ce pied je calculerai une Table pour l'espece douzième où $n = 1,822067$, qui contiendra deux parties, l'une pour la branche ascendante ANC , l'autre pour la branche descendante AMH ; elle pourra servir de modele pour calculer pareillement des Tables semblables pour les autres especes; et à l'aide de 18 Tables de cette forme on sera en état de résoudre toutes les questions, qui peuvent se rencontrer dans l'Artillerie.

53. Par le moyen de cette Table, qui est calculée de 5 à 5 degrés, on construira aisément la forme de la trajectoire de la douzième espece, comme elle est exprimée dans la troisième figure. Et lorsqu'on sait la valeur de la quantité c et de a , on connoitra par cette Tabelle la vitesse du corps dans chaque point de la courbe, et encore le tems par chaque partie de la courbe. Ainsi, si la direction ou l'élévation du canon ou du mortier est donnée, d'où



l'on tire le globe, on cherchera l'élévation dans la première colonne de la table pour la branche ascendante, et la colonne V^{me} montrera la vitesse, qui

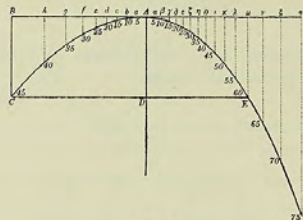


Fig. 3.

doit être imprimée au globe, pour qu'il décrive une trajectoire de la douzième espèce.

54. Prenons pour exemple une bombe, dont le diamètre soit $\frac{1}{2}$ pied, et le poids de 64 livres, ou bien égal au poids de $\frac{9}{10}$ pied cubique d'eau. Ayant donc $d = \frac{1}{2}$ et $e^3 = \frac{9}{10}$, nous aurons (§ 15) $c = 707 \cdot \frac{18}{5} = 2545,2$ pieds; et pour a nous prendrons l'unité. Que cette bombe soit jettée sous une élévation de 45° en C , et pour qu'elle décrive une trajectoire de la XII^{me} espèce, il faut que sa vitesse en C soit de $1,7222525 \cdot \sqrt{2} agc$ pieds par seconde, ou qu'elle soit capable de parcourir avec cette vitesse un espace de $485 \frac{7}{10}$ pieds par seconde. Quand sa vitesse seroit plus grande, la trajectoire appartiendrait à une espèce antérieure; mais, si elle étoit plus petite, à une espèce suivante; et dans ces cas il faudroit avoir calculées les Tables de ces autres espèces.

55. Supposons donc que la vitesse initiale de la bombe en C (Fig. 3) soit de $434 \frac{9}{10}$ pieds¹⁾ par seconde, et qu'elle soit jettée sur une plaine horizontale, où elle retombe en E . Soit le sommet en A , d'où l'on baisse la perpendicu-

1) En original $434 \frac{9}{10}$. Corrigé par F. R. S.

2) Voir cependant la note précédente. F. R. S.

laire AD , et la Table pour la branche ascendante nous donnera l'intervalle $CD = AB$

$$= 2139,2 \text{ pieds,}$$

la hauteur AD

$$= 1234,8 \text{ pieds,}$$

la courbe même CA

$$= 2529,0 \text{ pieds,}$$

la vitesse au sommet A

$$= 208 \frac{8}{9} \text{ pieds par seconde,}$$

le tems de la montée par CA

$$= 8,18 \text{ secondes.}$$

56. Pour la branche descendante il faut chercher par interpolation le point où l'appliquée est $= 0,2108126$, dans la Table pour cette branche, et on voit que cela arrive entre 60° et 65° , et précisément à $60^\circ, 13'$. Ainsi la bombe tombera en E sur l'horizon sous un angle de $60^\circ, 13'$. Or de là on trouvera l'intervalle DE

$$= 1640,1 \text{ pieds,}$$

la courbe AE

$$= 2153,6 \text{ pieds,}$$

la vitesse en E

$$= 275 \frac{2}{3} \text{ pieds par seconde,}$$

le tems de la descente par AE

$$= 9,50 \text{ secondes.}$$

Ainsi la bombe restera dans l'air pendant $17,68$ ou $17 \frac{2}{3}$ secondes, et l'amplitude du jet sera

$$CE = 3779 \frac{1}{3} \text{ pieds.}$$

Cet exemple sera suffisant à montrer l'usage de ces Tables dans la résolution de toute sorte de problèmes qu'on propose ordinairement dans l'Artillerie.

TABLE SUBSIDIAIRE¹⁾

ang. φ	$p = \tan \varphi$	$\tan \varphi \sec \varphi$	$l \tan \varphi (45^\circ + \frac{1}{2} \varphi)$	P
0°	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000
1	0,0174551	0,0174577	0,0174541	0,0174559
2	0,0349208	0,0349420	0,0349136	0,0349278
3	0,0524078	0,0524797	0,0523838	0,0524318
4	0,0699268	0,0700976	0,0698698	0,0699837
5	0,0874887	0,0878229	0,0873773	0,0876001
6	0,1051042	0,1056832	0,1049116	0,1052974
7	0,1227846	0,1237068	0,1224783	0,1230926
8	0,1405408	0,1419220	0,1400823	0,1410022
9	0,1583844	0,1603587	0,1577296	0,1590442
10	0,1763270	0,1790471	0,1754259	0,1772365
11	0,1943803	0,1980185	0,1931766	0,1955976
12	0,2125566	0,2173052	0,2109876	0,2141464
13	0,2308682	0,2369410	0,2288650	0,2329030
14	0,2493280	0,2569609	0,2468144	0,2518877
15	0,2679492	0,2774014	0,2648421	0,2711218
16	0,2867454	0,2983010	0,2829544	0,2906277
17	0,3057307	0,3197000	0,3011576	0,3104288
18	0,3249197	0,3416408	0,3194582	0,3305495
19	0,3443276	0,3641680	0,3378626	0,3510153
20	0,3639702	0,3873290	0,3563784	0,3718537
21	0,3838640	0,4111741	0,3750122	0,3930932
22	0,4040262	0,4357564	0,3937709	0,4147637
23	0,4244748	0,4611325	0,4126623	0,4368974
24	0,4452287	0,4873633	0,4316947	0,4595290
25	0,4663077	0,5145136	0,4508752	0,4826944
26	0,4877326	0,5426522	0,4702126	0,5064324
27	0,5095254	0,5718538	0,4897151	0,5307845
28	0,5317094 ²⁾	0,6021983	0,5093921	0,5557952
29	0,5543091	0,6337714	0,5292525	0,5815120
30	0,5773503	0,6666666	0,5493059	0,6079863

1) Aux nombres des trois dernières colonnes de cette table les six premiers chiffres seuls sont exactes. F. R. S.

2) En original 0,5417094. Corrigé par F. R. S.

ang. φ	$p = \tan \varphi$	$\tan \varphi \sec \varphi$	$l \tan \varphi (45^\circ + \frac{1}{2} \varphi)$	P
31°	0,6008606	0,7009840	0,5695625	0,6352732
32	0,6248694	0,7368323	0,5900326	0,6634325
33	0,6494076	0,7743300	0,6107273	0,6925287
34	0,6745085	0,8136044	0,6316578	0,7226311
35	0,7002075	0,8547958	0,6528363	0,7538161
36	0,7265425	0,8980560	0,6742752	0,7861656
37	0,7535541	0,9435520	0,6959879	0,8197699
38	0,7812856	0,9914657	0,7179875	0,8547266
39	0,8097840	1,0419980	0,7402898	0,8911439
40	0,8390996	1,0953666	0,7629093	0,9291380
41	0,8692867	1,1518160	0,7858627	0,9688394
42	0,9004040	1,2116130	0,8091670	1,0103900
43	0,9325151	1,2750535	0,8328403	1,0539469
44	0,9656888	1,3424655	0,8569026	1,0996840
45	1,0000000	1,4142136	0,8813732	1,1477934
46	1,0355303	1,4907040	0,9062752	1,1984896
47	1,0723687	1,5723920	0,9316313	1,2520116
48	1,1106125	1,6597842	0,9574664	1,3086253
49	1,1503684	1,7534530	0,9838076	1,3686303
50	1,1917536	1,8540400	1,0106827	1,4323614
51	1,2348972	1,9622710	1,0381231	1,5001970
52	1,2799416	2,0789700	1,0661613	1,5725657
53	1,3270448	2,2050705	1,0948332	1,6499519
54	1,3763819	2,3416410	1,1241768	1,7329089
55	1,4281480	2,4899000	1,1542341	1,8220670
56	1,4825610	2,6512920	1,1850503	1,9181512
57	1,5398650	2,8273130	1,2166746	2,0219938
58	1,6003345	3,0199590	1,2491603	2,1345596
59	1,6642795	3,2313720	1,2825662	2,2569691
60	1,7320508	3,4641020	1,3169578 ¹⁾	2,3905299 ²⁾
61	1,8040478	3,7211147	1,3524042	2,5367776
62	1,8807265	4,0060500	1,3889854	2,697518
63	1,9626105	4,323021	1,4267876	2,874904
64	2,0503038	4,677095	1,4659075	3,071501
65	2,1445069	5,074337	1,5064535	3,290396

1) En original 1,3165572. 2) En original 2,3903296. Corrigé par F. R. S.



ang. φ	$p = \text{tang. } \varphi$	$\text{tang. } \varphi \text{ sec. } \varphi$	$l \text{ tang. } (45^\circ + \frac{1}{2} \varphi)$	P
66°	2,2460368	5,522093	1,5485467	3,535320
67	2,3558524	6,029344	1,5923233	3,810834
68	2,4750869	6,607161	1,6379381	4,122549
69	2,6050891	7,269313	1,6855678	4,477441
70	2,7474774	8,033085	1,7354146	4,884250
71	2,9042109	8,920438	1,7877114	5,354075
72	3,0776895	9,959592	1,8427293	5,901161
73	3,2708526	11,187310	1,9007861	6,544048
74	3,4874144	12,652184	1,9622566	7,307220
75	3,7320508	14,419540	2,0275887	8,223564 ¹⁾
76	4,0107809	16,578823	2,0973231	9,338073
77	4,3314759	19,255193	2,1721209	10,713657
78	4,7046301	22,628020	2,2528019	12,440411
79	5,1445540	26,961800	2,3403999	14,651100
80	5,6712818	32,65962	2,4362452	17,54793
81	6,3137515	40,36036	2,5420894	21,45123
82	7,1153697	51,12605	2,6603032	26,89318
83	8,1443464	66,82850	2,7942178	34,81136
84	9,5143645	91,02174	2,9486992	46,98522
85	11,4300522 ²⁾	131,14514 ³⁾	3,1313001	67,13822 ⁴⁾
86	14,300666	205,0084	3,3546723	104,1815
87	19,081137	364,5893	3,6425320	184,1162
88	28,636253	820,5348	4,0481241	412,2915
89	57,289962	3282,639	4,7413471	1643,690
89° 30'	114,58865	13131,06	5,4345129	6568,250
89° 44'	214,85762	46164,31	6,0631256	23085,19
89° 52'	429,71757	184657,7	6,7562739	92332,23 ⁵⁾
89° 56'	859,43630	738631,4	7,4494211	369319,4
89° 58'	1718,8732	2954526	8,1425680	1477287

1) En original 8,223570. 2) En original 11,4300520. 3) En original 131,11452.
4) En original 67,12291. 5) En original 92332,30. Corrigé par F. R. S.

ESPECE XII.

POUR LA BRANCHE ASCENDANTE¹⁾

Inclin. en N	L'arc AN $= 2,302585c$ mult. par	L'abscisse AQ $= 2,302585c$ mult. par	L'appliquée QN $= 2,302585c$ mult. par	La vitesse en N $= \sqrt{2agc}$ mult. par	Le tems par AN $= \frac{2,302585\sqrt{c}}{\sqrt{2ag}}$ mult. par
0°	0,0000000 213983	0,0000000 213779	0,0000000 9334	0,7408247 213820	0,0000000" 284763
5	0,0213983 230448	0,0213779 228477	0,0009334 30080	0,7622067 295427	0,0284763 296594
10	0,0444431 255349	0,0442256 249296	0,0039414 55268	0,7917494 395510	0,0581357 314747
15	0,0699780 291646	0,0691552 278148	0,0094682 87699	0,8313004 523866	0,0896104 340273
20	0,0991426 345303	0,0969700 319018	0,0182381 132142	0,8836870 697094	0,1236377 376196
25	0,1336729 426536	0,1288718 377472	0,0314523 196952	0,9533964 945651	0,1612573 426723
30	0,1763265 555745	0,1666190 468711	0,0511475 298602	1,0479615 1331725	0,2039296 499521
35	0,2319010 778564	0,2134901 617676	0,0810077 473960	1,1811330 2003240	0,2538817 609504
40	0,3097574 1219806	0,2752577 899335	0,1284037 824089	1,3814570 3407955	0,3148321 790812
45	0,4317380 2381005	0,3651912 1608581	0,2108126 1755460	1,7222525 7698425	0,3939133 1149287
50	0,6698385	0,5260493	0,3863586	2,4920950	0,5088420

1) Les deux tables pour la douzième espèce n'ont pas été vérifiées. F. R. S.



ESPECE XII.

POUR LA BRANCHE DESCENDANTE

Inclin. en M	L'arc AM $= 2,302585c$ mult. par	L'abscisse AP $= 2,302585c$ mult. par	L'appliquée PM $= 2,302585c$ mult. par	La vitesse en M $= \sqrt{2ag}$ mult. par	Le tems par AM $= \frac{2,302585 \sqrt{c}}{\sqrt{2ag}}$ mult. par
0°	0,0000000 203933	0,0000000 203739	0,0000000 8895	0,7408247 — 144229	0,0000000 277997
5	0,0203933 199209	0,0203739 197505	0,0008895 26002	0,7264018 — 82616	0,0277997 275814
10	0,0403142 199299	0,0401244 194575	0,0034897 43136	0,7181402 — 25702	0,0553811 278019
15	0,0602441 204125	0,0595819 194677	0,0078033 61380	0,7155700 + 28920	0,0831830 284687
20	0,0806566 214049	0,0790496 197755	0,0139414 81913	0,7184620 83320	0,1116517 296214
25	0,1020615 229898	0,0988251 203922	0,0221327 106155	0,7267940 139390	0,1412731 313328
30	0,1250513 253104	0,1192173 213465	0,0327482 135993	0,7407330 198950	0,1726059 337196
35	0,1503617 285969	0,1405638 226875	0,0463475 174086	0,7606280 263895	0,2063255 369608
40	0,1789586 332130	0,1632513 244872	0,0637561 224384	0,7870175 336125	0,2432863 413278
45	0,2121716 397389	0,1877385 268470	0,0861945 292985	0,8206300 417430	0,2846141 472492
50	0,2519105 491194	0,2145855 299018	0,1154930 389688	0,8623730 509230	0,3318633 553474
55	0,3010299 629347	0,2444873 338148	0,1544618 530786	0,9132960 611670	0,3872107 667116
60	0,3639646 841010	0,2783021 388335	0,2075404 745985	0,9744680 720310	0,4539223 832818
65	0,4480656 1178537	0,3171356 451007	0,2821389 1088830	1,0464940 825390	0,5372041 1084230
70	0,5659193 1754921	0,3622363 527715	0,3910219 1673697	1,1290330 900010	0,6456271 1495880

Inclin. en M	L'arc AM $= 2,302585c$ mult. par	L'abscisse AP $= 2,302585c$ mult. par	L'appliquée PM $= 2,302585c$ mult. par	La vitesse en M $= \sqrt{2ag}$ mult. par	Le tems par AM $= \frac{2,302585 \sqrt{c}}{\sqrt{2ag}}$ mult. par
75°	0,7414114 2851538	0,4150078 617186	0,5583916 2783950	1,2190340 894400	0,7952151 2257818
80	1,0265652 5513732	0,4767264 719686	0,8367866 5466560	1,3084740 733500	1,0209969 4100500
85	1,5779384	0,5486950	1,3834426	1,3818240	1,4310469



DE ICTU GLANDIUM CONTRA TABULAM EXPLOSARUM¹⁾

Commentatio 411 indicis ENESTROEMIANI

Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 15 (1770), 1771, p. 414—436

Summarium ibidem p. 34—36

SUMMARIVM

In doctrina de percussione corporum eiusmodi saepe occurrunt phaenomena, quae primo intuitu laud parum paradoxa et rationi contraria videntur, attentius autem examinata cum legibus naturae optime consentire deprehenduntur. Horum in numero sequens omnino memorabile est: si ianua aperta lapide percutiatur, motu in ipsa generato clauditur, sin vero sclopetum contra eam explodatur, immota persistit glande explosa eam penitus penetrante. Huius igitur phaenomeni rationem expositurus Illustr. huius dissertationis Auctor ictum glandium contra tabulam explosarum accuratius exponere constituit, ubi quidem duos casus a se invicem distinguendos seorsim considerat, primum, quo tabula immobilis concipitur, alterum, quo super plano horizontali libere est mobilis. Quod vero primum attinet casum, si celeritas glandis ante ictum designetur per c , altitudo, ex qua grave uno min. sec. libere cadit, per g , resistentia tabulae per R et massa glandis per M , tumque statuatur $\int_M^{Rdx} = f$, posito $x = a$, toti scilicet crassitiei tabulae, observat Illustr. Auctor glandem

1) Confer hac cum dissertatione EULERI Commentationes 22, 69, 82, 434, 435 (indicis ENESTROEMIANI): *De communicatione motus in collisione corporum*, Comment. acad. sc. Petrop. 5 (1730/31), 1738, p. 159, *De communicatione motus in collisione corporum sese non directe percussione*, Comment. acad. sc. Petrop. 9 (1737), 1744, p. 50, *De la force de percussion et de sa véritable mesure*, Mém. de l'acad. d. sc. de Berlin [I] (1745), 1746, p. 21, *De collisione corporum gyranium*, Novi comment. acad. sc. Petrop. 17 (1772), 1773, p. 272, *De collisione corporum pendulorum, tam obliqua, quam motu gyatorio perturbata*, ibidem p. 315; LEONHARDI EULERI Opera omnia, series II, vol. 7. F. R. S.

penitus per tabulam penetrare, si fuerit $c > 2\sqrt{gf}$, sin autem sit $c < 2\sqrt{gf}$, glandem per tabulam perrumpere non posse. Pro casu secundo, si retentis reliquis denominationibus massa tabulae exprimatur per N , ostenditur glandem per tabulam penitus perrumpere, si fuerit $cc > 4gf \frac{M+N}{N}$, quae conditio in eam pro primo casu manifesto abit posito $N = \infty$. Hinc itaque intelligitur eo maiori glandis celeritate opus esse, ut perrumpat, quo levior ipsa est tabula; deinde et hinc quoque perspicitur celeritatem tabulae post ictum eo fore minorem, quo maior fuerit celeritas glandis ante ictum, quod, uti iam supra monuimus, primo intuitu omnino absonum videri potuisset. Ulterius, quo solutiones allatas Illustr. Auctor magis illustraret, eas ad notiones communes, conservationis scilicet quantitatis motus et virium vivarum, revocare Ipsi placuit, ubi quidem observat vires vivas non penitus conservari, sed aliquam diminutionem pati, tantam scilicet, quantam tabulae perforatio requirit. Quum autem in prioribus solutionibus resistentia tabulae tamquam unice pendens a quantitate x , profunditate scilicet penetrationis, sit considerata, eiusmodi autem saepe occurrere possint casus, ubi haec resistentia non tantum variabilem x , sed aliam quoque veluti celeritatem implicet, necessum fuit ostendere, quomodo solutiones pro huiusmodi casibus adornandae sint. Si enim tabula fluidi proprietate concipiatur praedita, tum nullum omnino est dubium, quin resistentia non a variabili x pendeat, sed quadrato celeritatis sit proportionalis; quoniam igitur tabulae non solum motus imprimendus est, sed etiam eius particulae a se invicem divellendae, evidens est resistentiam duplicis generis haec considerari debere adeoque totam resistentiam ex duabus partibus componi, quarum prior functioni ipsius x sit proportionalis, altera vero ipso quadrato celeritatis.

CASUS PRIMUS QUO TABULA EST IMMOBILIS

1. Assumimus hic primo tabulam esse immobilem, quo analysis ex principiis motus petenda evadat faciliior. Quod nunc ad glandem attinet, duae res potissimum considerandae veniunt; prima est eius celeritas, qua in tabulam impingit, quam metimur spatio, quod hac celeritate uno minuto secundo percurretur; sit igitur haec celeritas $= c$ ac denotet g altitudinem, ex qua grave libere cadit tempore unius minuti secundi, ita ut, si celeritas glandis tanta fuerit, quanta ex altitudine g acquiritur, tum sit $c = 2g$, sin autem illa celeritas tanta sit, quanta ex altitudine nng acquiritur, tum sit $c = 2ng$, unde sequitur posito $c = 2ng$ fore $n = \frac{c}{2g}$ ideoque altitudinem, ex qua haec celeritas c generatur, fore $nng = \frac{cc}{4g}$. Deinde vero in computum



venit massa huius glandis, quam littera M designemus, ubi secundum principia mechanica M mensuratur pondere eiusdem glandis. Quod autem ad figuram glandis attinet, eius ratio hic vix habetur, dummodo eandem figuram retineat.

2. Statim atque glans tabulam ferire incipit, hoc erit initium ictus, a quo tempora computabimus. Ponamus ergo ab hoc initio iam elapsum esse t minut. secund. quaeriturque, quousque nunc glans in tabulam penetraverit; ponamus ergo glandem ad profunditatem $= x$ penetrasse, et quum hoc sit spatium a glande tempore t percursum, erit celeritas glandis hoc momento $\frac{dx}{dt}$ eiusque acceleratio $= \frac{Mddx}{2gdt^2}$ sumpto elemento dt constante, cui vis resistens negative sumpta debet esse aequalis. Animum autem hic abstrahimus a gravitate glandis, qua eius motus incurvatur, quippe qui effectus in hoc phaenomeno nullus est momenti.

3. Quum nunc glans ad profunditatem $= x$ in tabulam penetraverit, quam quidem hic minorem ipsa crassitie tabulae assumimus (posita enim crassitie tabulae $= a$, simul ac fit $x = a$, glans per tabulam penitus transiisse consensus est), nunc igitur dum in profunditate $= x$ versatur, certam atque insignem offendet resistantiam, quae eius motui se opponit et quam littera R denotemus; cuius valorem cum vix ullo casu accurate definire liceat, hic tantum observemus eam cum a magnitudine glandis tum vero etiam a duritie ipsius tabulae atque ab ipsa profunditate penetrationis x pendere; quare, quum duo priora momenta eadem maneant pro eadem glande et tabula, vis resistantiae spectari poterit tamquam functio ipsius x , quae evanescat tam posito $x = 0$ quam $x = a$, quandoquidem tam ante impulsus quam post eruptionem nullam patitur resistantiam.

4. Constituta igitur hac resistantia R habebimus statim istam aequationem

$$\frac{ddx}{2gdt^2} = -\frac{R}{M}$$

quae per dx multiplicata et integrata praebet

$$\frac{dx^2}{4gdt^2} = C - \int \frac{Rdx}{M}$$

ubi integrale $\int \frac{Rdx}{M}$ ita capi sumamus, ut ipso initio, ubi $x = 0$, evanescat. Hinc constantem C ita definiri oportet, ut posito $x = 0$ celeritas glandis, quae est $\frac{dx}{dt}$, fiat $= c$, unde colligitur $C = \frac{cc}{4g}$, ita ut habeamus

$$\frac{dx^2}{dt^2} = cc - 4g \int \frac{Rdx}{M}$$

hincque ipsa celeritas glandis

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\left(cc - 4g \int \frac{Rdx}{M}\right)}$$

unde porro pro tempore cognoscendo deducitur ista aequatio

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\left(cc - 4g \int \frac{Rdx}{M}\right)}}$$

5. Parum autem solliciti de tempore ex aequatione pro celeritate inventa facile iudicare poterimus, utrum glans penitus per tabulam perrumpat, an vero in ipsa tabula sit haesura omni scilicet motu amisso. Hic praecipue ad ipsam resistantiam R indeque formatum integrale $\int Rdx$ est respiciendum, cuius valor crescente x continuo augetur; ponamus igitur posito $x = a$ fieri

$$\int \frac{Rdx}{M} = f$$

atque nunc perspicuum est glandem per tabulam perrumpere non posse, quamdiu cc minus est quam $4gf$, atque hinc sequentes casus distingui oportet.

1°. Si fuerit celeritas glandis $c < 2\sqrt{gf}$, glans non penitus per tabulam perrumpet, sed alicubi haerebit, ubi scilicet fit

$$\int \frac{Rdx}{M} = \frac{cc}{4g}$$

unde profunditas penetrationis intelligi poterit.

2°. Sin autem fuerit celeritas glandis $c > 2\sqrt{gf}$, tum glans non solum penitus per tabulam transvibrabit, sed etiam adhuc celeritatem quandam conservabit, quae erit

$$= \sqrt{cc - 4gf}.$$



CASUS SECUNDUS

QUO TABULA SUPER PLANO HORIZONTALI LIBERE EST MOBILIS

6. Manentibus iis, quae circa glandem eiusque celeritatem ante sunt constituta, nunc etiam massa tabulae in computum est ducenda, quae sit $= N$, atque ne tabula motum obliquum recipiat, glandis ictum ponamus fieri in ipso tabulae centro inertiae motumque glandis esse horizontalem. Sit porro adhuc crassities tabulae in loco ictus $= a$.

7. Elapso tempore $= t$ secund. a primo ictus initio, ubi ipsa tabula erat in quiete, glans vero celeritate $= c$ ferebatur, ponamus tabulam iam esse promotam per spatium $= y$, glandem autem iam in tabulam penetrasse ad profunditatem $= x$, ubi resistantiam offendat $= R$, uti ante posuimus; quum igitur tabula tempore t promota sit per spatium y , erit eius celeritas $= \frac{dy}{dt}$ et acceleratio more superiori sumpta $= \frac{Ndd y}{2gdt^2}$, glans autem interea confecit spatium $x + y$, unde eius celeritas erit

$$\frac{dx + dy}{dt}$$

et acceleratio

$$= \frac{M(ddx + ddy)}{2gdt^2};$$

notandum autem est ipso initio fuisse $x = 0$ et $y = 0$, at vero celeritas primo tabulae $\frac{dy}{dt} = 0$ et glandis $\frac{dx + dy}{dt} = c$, ita ut tum fuerit $\frac{dx}{dt} = c$.

8. Quod nunc primum ad motum tabulae attinet, evidens est eum accelerari a vi R ; haec enim, dum motui glandis se opponit, aequa vi in tabulam reagit eiusque motum accelerat, unde haec prima aequatio resultat

$$\text{I. } \frac{Ndd y}{2gdt^2} = R \quad \text{sive} \quad \frac{ddy}{dt^2} = \frac{2gR}{N},$$

deinde vero motus glandis ab eadem vi R retardatur, unde oritur haec secunda aequatio

$$\text{II. } \frac{M(ddx + ddy)}{2gdt^2} = -R \quad \text{sive} \quad \frac{ddx + ddy}{dt^2} = -\frac{2gR}{M},$$

ex quibus duabus aequationibus utrumque motum derivari oportet, scilicet spatia x et y , ubi imprimis notasse iuvabit quantitatem R tantum esse functionem ipsius x , ita ut ex priori aequatione sola nihil concludi queat.

9. Hinc igitur primo ddy eliminemus, unde orietur ista aequatio

$$\frac{ddx}{dt^2} = -2g \frac{M+N}{MN} R,$$

quae per dx multiplicata et integrata dat

$$\frac{dx^2}{dt^2} = C - 4g \frac{M+N}{MN} \int R dx,$$

ubi, si $\int R dx$ evanescat facto $x = 0$, aequatio nostra ita determinatur, ut sit

$$\frac{dx^2}{dt^2} = cc - 4g \frac{M+N}{MN} \int R dx.$$

Quodsi ergo ut ante pro tota crassitie tabulae $= a$ statuatur

$$\int \frac{R dx}{M} = f,$$

perspicuum est, ut glans per tabulam penitus perrumpat, necesse esse, ut sit

$$cc > 4fg \frac{M+N}{N},$$

unde intelligitur maiori glandis celeritate opus esse, si tabula fuerit mobilis, quam si esset immobilis, nisi moles tabulae fuerit maxima respectu glandis; at quo levior tabula est, manente quidem eadem crassitie et duritie, eo maior glandis celeritas requiritur, ut perrumpat. Cognita autem massa tabulae N iudicium, utrum glans perrumpat necne, perinde instituitur atque in hypothesis tabulae immotae.

10. Hic autem maxime curiosa est investigatio motus, quem tabula hinc recipit; ad quem inveniendum addamus ambas aequationes prius inventas, ut ipsa quantitas R eliminetur; sic enim prodit haec aequatio

$$\frac{Mddx}{2gdt^2} + \frac{(M+N)ddy}{2gdt^2} = 0,$$



quae semel integrata sponte dat

$$\frac{Mdx}{dt} + \frac{(M+N)dy}{dt} = Mc;$$

quare, quum $\frac{dy}{dt}$ celeritatem tabulae exprimat, habebimus

$$\frac{dy}{dt} = \frac{Mc}{M+N} - \frac{Mdx}{(M+N)dt},$$

ex qua aequatione intelligitur iis casibus, quibus glans non penitus transit per tabulam, sed in certa penetratione arcetur ibique fit $\frac{dx}{dt} = 0$, tabulam motum esse accepturam, cuius celeritas sit $= \frac{Mc}{M+N}$. At si aucta celeritate c glans penitus perrumpat, tum tabula minorem accipiet motum, uti mox patebit, in quo non exiguum paradoxon cernitur.

11. Quamdiu ergo glans non penitus perrumpit tabulaeque infixae manet, quod fit, ubi $\frac{dx}{dt} = 0$, motus determinatio nulla laborat difficultate; tum enim celeritas tabulae, ut modo vidimus, erit

$$\frac{dy}{dt} = \frac{M}{M+N} c.$$

Evolvamus igitur eos casus, quibus glans penitus perrumpit, quod evenit, quando

$$cc > 4fg \frac{M+N}{N} = 4fg \left(1 + \frac{M}{N}\right);$$

ponamus igitur brevitatis gratia

$$4gf \left(1 + \frac{M}{N}\right) = kk,$$

ita ut k eum celeritatis gradum exhibeat, quo tantum non per tabulam penetrare valet; ac si fuerit $c = k$, ob $\frac{dx}{dt} = 0$ erit tabulae celeritas post ictum

$$\frac{dy}{dt} = \frac{M}{M+N} k,$$

glans vero ipsi extremitati tabulae inhaerebit. Nunc autem ponamus $c > k$ et quidem $c = nk$, ut sit $n > 1$, atque post ictum habebimus

$$\frac{dx}{dt} = kV(nn-1),$$

unde fit celeritas tabulae post ictum

$$\frac{dy}{dt} = \frac{M}{M+N} (nk - kV(nn-1)) = \frac{M}{M+N} k(n - V(nn-1)).$$

Quare si n paulisper tantum unitatem excedat, ut sit $n = 1 + \alpha$, erit celeritas tabulae post ictum

$$= \frac{Mk}{M+N} (1 - V2\alpha).$$

spectata scilicet α ut infinite parva, unde patet celeritatem tabulae minorem esse, quam si esset $n = 1$.

12. Sit iam n numerus quicunque maior unitate, et quum sit post ictum

$$\frac{dx}{dt} = kV(nn-1)$$

et

$$\frac{dy}{dt} = \frac{M}{M+N} k(n - V(nn-1)),$$

quae est celeritas tabulae post ictum, erit glandis celeritas post ictum

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = \frac{Mnk}{M+N} + \frac{N}{M+N} kV(nn-1).$$

Hinc ergo evolvamus aliquot casus praecipuos:



Celeritas glandis ante ictum	Celeritas tabulae post ictum	Celeritas glandis post ictum
I. $c = k$	$\frac{M}{M+N} k$	$\frac{kM}{M+N}$
II. $c = 2k$	$\frac{M}{M+N} k(2 - \sqrt{3})$	$\frac{k(2M + N\sqrt{3})}{M+N}$
III. $c = 3k$	$\frac{M}{M+N} k(3 - \sqrt{8})$	$\frac{k(3M + N\sqrt{8})}{M+N}$
IV. $c = 4k$	$\frac{M}{M+N} k(4 - \sqrt{15})$	$\frac{k(4M + N\sqrt{15})}{M+N}$
V. $c = 5k$	$\frac{M}{M+N} k(5 - \sqrt{24})$	$\frac{k(5M + N\sqrt{24})}{M+N}$
VI. $c = 6k$	$\frac{M}{M+N} k(6 - \sqrt{35})$	$\frac{k(6M + N\sqrt{35})}{M+N}$

13. Quodsi ergo n fuerit mediocriter magnus, ut sit proxime

$$\sqrt{n\bar{n} - 1} = n - \frac{1}{2n},$$

tum ergo, si celeritas glandis ante ictum fuerit $c = nk$, prodibit post ictum celeritas tabulae

$$\frac{Mk}{2n(M+N)},$$

celeritas vero glandis

$$= nk - \frac{Nk}{2n(M+N)},$$

unde manifestum est, quo maior fuerit numerus n seu quo maior fuerit celeritas glandis ante ictum, celeritatem tabulae post ictum eo fore minorem, glandis autem celeritatem eo minus defecturam esse a celeritate ante ictum, sive iacturam celeritatis, quam glans patitur, eo fore minorem.

OBSERVATIONES IN SOLUTIONES PRAECEDENTES

14. Problemata haec referenda sunt ad doctrinam de collisione corporum, quae non solum in Mathesi, sed etiam in Philosophia tractari est solita. Totum discrimen in hoc tantum consistit, quod hic corpus impingens in alterum penetret atque adeo sibi transitum aperiat, dum in vulgari doctrina eiusmodi tantum corpora considerantur, quae in conflictu sibi vel nullam impressionem vel saltem quam minimam inducunt.

15. Nostram igitur solutionem ad notiones vulgares revocaturi nomine-
mus, sive durante conflictu sive eo iam finito, celeritatem glandis $= v$ et celeritatem tabulae $= u$, et quum sit

$$v = \frac{dx + dy}{dt} \quad \text{et} \quad u = \frac{dy}{dt},$$

ambae aequationes pro secundo problemate inventae, quae scilicet facta integratione prodierunt, ita se habebunt:

$$(v - u)^2 = cc - 4g \frac{M+N}{MN} \int R dx \quad \text{et} \quad Mv + Nu = Mc,$$

quarum posterior involvit eam notionem, quae vulgo quantitas motus vocari solet, et indicat quantitatem motus sive productum ex massa utriusque corporis in suam celeritatem perpetuo eandem conservari; quia enim ante conflictum tabula quievit, tota quantitas motus erat Mc , durante autem conflictu vel finito quantitas motus est $Mv + Nu$. Ista quantitatis motus conservatio involvit aequabilem progressum communis centri gravitatis.

16. Ut vero etiam priorem aequationem ad notiones receptas perducamus, eam per MN multiplicemus, ut habeamus

$$MN(v - u)^2 = MNvv - 2MNvu + MNuu = MNcc - 4g(M+N) \int R dx;$$

ad hanc addamus quadratum posterioris aequationis, quod est

$$MMvv + 2MNvu + NNuu = MMcc,$$



proditque aggregatum

$$M(M+N)vv + N(M+N)uu = M(M+N)cc - 4g(M+N)\int Rdx,$$

quae per $M+N$ divisa praebet hanc aequationem

$$Mvv + Nuu = Mcc - 4g\int Rdx,$$

quae manifesto continet eas notiones, quae vulgo virium vivarum nomine efferri solent. Est enim Mcc tota vis viva ante conflictum, at Mvv vis viva glandis durante vel finito conflictu atque Nuu vis viva tabulae.

17. Hinc ergo perspicuum est neque durante conflictu neque finito vim vivam totam eandem manere, sed potius diminui et quidem quantitate $4g\int Rdx$, id quod vulgari principio conservationis virium vivarum adversari videtur; verum probe notandum est conservationem virium vivarum tum tantum locum habere, quando de viribus nihil perit. Quum autem nostro casu tabula perforetur atque ad foramen efficiendum non exigua virium quantitas impendi debeat, mirum non est, quod summa virium vivarum hic decrementum patiatur, quin etiam ex ipsa nostra analysi manifestum est formulam integram $4g\int Rdx$ summam virium in foramen impensarum exprimere.

18. Hic non inutile erit ostendere, quomodo immediate ex nostris aequationibus differentialibus secundi gradus ad vires vivas calculum reducere potuissemus. Aequationum enim § 8 inventarum prior ducatur in dy , altera vero in $dx + dy$ eaeque invicem additae dabunt istam aequationem

$$\frac{Ndy \cdot ddy}{2gdt^2} + \frac{M(dx+dy)(ddx+ddy)}{2gdt^2} = -Rdx,$$

quae integrata producit

$$\frac{Ndy^2}{4gdt^2} + \frac{M(dx+dy)^2}{4gdt^2} = \frac{Mcc}{4g} - \int Rdx,$$

sicque introductis litteris v et u statim assecuti sumus hanc aequationem

$$Nuu + Mvv = Mcc - 4g\int Rdx.$$

19. Ex principiis igitur vulgaribus, quae passim in doctrina de collisione corporum exposita reperiuntur, solutionem problematis nostri deducere potuissemus, dummodo perpendissemus in penetrationem glandis intra tabulam certas vires impendi easque iunctim sumptas formula $4g\int Rdx$ comprehendi posse. Tum enim, quia tota vis viva ante conflictum erat $-Mcc$, durante autem conflictu, cum penetratio iam facta est ad profunditatem $= x$, summa virium vivarum sit $Mvv + Nuu$, necesse est, ut fiat

$$Mvv + Nuu = Mcc - 4g\int Rdx;$$

alterum vero principium quantitatis motus sive aequabilis progressus communis centri gravitatis statim suppeditat hanc aequationem

$$Mv + Nu = Mc,$$

quae cum illa coniuncta completam problematis nostri solutionem continet.

20. Hac occasione non abs re erit paucis exponere, quid de notissimis illis notionibus circa quantitatem motus et vires vivas, quibus Philosophi totam motus theoriam superstruere sunt conati, sit iudicandum et quatenus eae cum veris et universalibus Mechanicae principiis conciliari possint. Ac primo quidem de veris Mechanicae principiis tenendum est ea ex unico principio proficisci, quo ratio inter accelerationes et vires sollicitantes continetur et ita latissime patet, ut etiam ad fluida corpora extendatur. At vero hoc principium ita est comparatum, ut semper ad formulas differentiales secundi gradus deducatur, de quibus deinceps videndum est, num integrationem admittant.

21. Dantur autem infiniti casus, quibus huiusmodi integratio locum habet, hocque modo ad formulas differentiales primi gradus pervenitur, quas per celeritates explicare licet, quemadmodum nostro casu $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ celeritates praebuerunt, atque hae ipsae formulae iam integratae eas notiones involvunt, quae vulgo sub quantitatis motus vel vis vivae nomine innotuerunt, de quo quidem iam dudum¹⁾ observatum est nomen vis vivae incongrue adhiberi, quum productum ex massa cuiuspiam corporis per quadratum celeritatis nequitam ad notionem cuiuspiam vis reduci queat.

1) Vide EULERI Commentationem 82 nota 1 p. 448 laudatam.

F. R. S.



22. Talia igitur principia, quae vulgo leges motus continere censentur, non aliter spectari possunt nisi tamquam conclusiones ex unico illo Mechanicae principio deductae, quae, quum semper sub certis tantum conditionibus, quatenus scilicet formulas integrales secundi gradus integrare licuit, locum habeant, tantum pro principiis particularibus sunt habendae, quae etiam principia secundaria vel derivata appellare liceat, dum verum Mechanicae principium est unicum et maxime universale.

EXAMEN ACCURATIUS SUPERIORUM SOLUTIONUM

23. Quoniam vis illa R , quam in solutionem nostram introduximus, nullo modo restringitur aut limitatur, solutio nostra maxime generalis et ad omnes plane casus extendi posset videri; quomocunque enim perforationis effectus promotioni glandis adversetur, semper certam vim concipere licet, quae isti resistentiae foret aequalis et quam adeo sub littera illa R contentam intelligere liceret. Quatenus autem illa quantitas R ut functio variabilis x , qua profunditas penetrationis designatur, a nobis consideratur, quocunque demum modo tam ab ipsa glandinis magnitudine et figura quam ab ipsius tabulae duritie et crassitudine pendeat, siquidem hae res ut quantitates constantes sunt spectandae, eatenus nostra solutio saepius a veritate recedere potest, quum utique eiusmodi dentur casus, ubi vis resistentiae non tantum unicam illam variabilem x , sed aliam praeterea veluti celeritatem implicare possit, id quod clarius explicari necesse est.

24. Ad hoc ostendendum concipiamus tabulam tamquam proprietate fluidi praeditam esse, atque tum nullum foret dubium, quin omnis resistentia a sola celeritate penderet eiusque quadrato proportionalis esset; huiusmodi igitur casu quantitas illa R non foret functio ipsius x , sed potius celeritatis, qua glans in tabulam penetrat et quam formula $\frac{dx}{dt}$ expressimus. Facile autem intelligitur, si resistentia illa R etiam formulam $\frac{dx}{dt}$ involvat, rationem integrationis, qua sumus usi, nequiquam locum habere posse, propterea quod formula Rdx tamquam integrabilis est spectata.

25. Quodsi ergo tabula naturae fluidi particeps esset, ita ut resistentia partim ex functione ipsius x , uti assumpsimus, partim vero etiam ex quadrato celeritatis constaret, solutio nostra nullo modo subsistere posset, unde maxime

necessarium est in eos casus inquirere, quibus talis indoles sese resistentiae tabulae admiscere posset. Verum satis iam est cognitum omnem fluidi resistentiam inde potissimum oriri, quod partes fluidi de loco suo depelli iisque motus imprimi debeat, id quod sine virium dispendio fieri nequit; supra autem littera R tantum eiusmodi vim reluctantem denotavit, quae motum glandis quidem retardaret, ipsa autem in se nullam motus generationem requireret. Duos igitur hos resistentiae casus sollicitate a se invicem distingui oportet.

26. Id resistentiae genus, quod motui corporis directe se opponit et quasi elastrum corpus repellit, vocemus resistentiam absolutam, quorsum pertinet illa ipsa resistentia, quam supra sumus contemplati. Alterum vero resistentiae genus, quod, veluti in fluidis evenit, a generatione novi motus oritur, toto coelo a priori genere discrepat, etiamsi corporis motum quoque retardet; quo discrimine notato, quoniam tabulae nullum foramen induci potest, nisi eius particulae internae non solum a se invicem divellantur, sed etiam de loco suo removeantur, satis perspicuum est resistentiam utriusque generis hic revera locum habere debere.

27. Pro nostro ergo casu veram resistentiam duabus partibus exprimi oportebit; prior scilicet pars continebit resistentiam absolutam et functioni cuiuspiam ipsius x proportionalem, quam littera R ut supra designabimus, altera vero pars a motus generatione oriunda et quadrato celeritatis proportionalis hac formula $A \frac{dx^2}{dt^2}$ exprimatur, ubi $\frac{dx}{dt}$ significat celeritatem, qua glans in tabula ulterius penetrat, A vero est quantitas quaeipiam a densitate materiae et magnitudine foraminis pendens. Hoc modo tota resistentia tali formula repraesentari debet

$$R + A \frac{dx^2}{dt^2}.$$

28. Quod autem posterior pars quadrato celeritatis sit proportionalis, ita plano ratiocinio colligi poterit. Concipiamus massam quampiam $= M$ quiescentem, quae a vi quadam P in motum sollicitetur; elapso tempore $= t$ massa iam sit promota per spatium $= s$, et quum ex principio motus sit

$$\frac{Mds}{2gdt^2} = P,$$



habebimus integrando

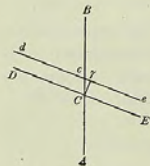
$$\frac{Mds^2}{4gdt^2} = Ps,$$

ubi $\frac{ds}{dt}$ celeritatem massae M impressam denotat. Hinc ergo discimus, ut datae massae quiescenti M , dum per spatium s propellitur, data celeritas $\frac{ds}{dt}$ imprimatur, ad hoc requiri vim sollicitantem

$$P = M \frac{ds^2}{4gsdt^2},$$

quam formulam applicemus ad nostrum casum, quo glans intra tabulam ulterius penetrat per spatium $= dx$, ita ut nobis sit $s = dx$; interea autem necesse est, ut certa portio materiae, quae hoc spatium dx occupabat, de loco suo removeatur; cuius ergo massa proportionalis erit partim ipsi spatulo dx , partim amplitudini glandis nec non densitati materiae, qua tabula constat, ex quo massa removenda ita exprimi poterit, ut sit $= Cdx$, quam loco M scribi convenit; denique huic massae celeritas imprimi debet celeritati glandis aequalis, ut scilicet successioni glandis cedat, sicque haec celeritas erit nostro casu $= \frac{dx}{dt}$ loco $\frac{ds}{dt}$ substituenda. Quocirca ut massae Cdx , dum per spatium $s = dx$ promoveatur, celeritas $= \frac{dx}{dt}$ imprimatur, ad hoc requiritur vis sollicitans $= \frac{C}{4g} \frac{dx^2}{dt^2}$, quam ergo recte per formulam $A \frac{dx^2}{dt^2}$ exprimimus, quam formam adeo ipsum principium motus universale suppeditare est censendum.

29. Hic quidem assumimus glandem non solum directe per tabulam penetrare, sed etiam perpendiculariter in eius particulas illidere; verum si oblique illidat? Sit enim recta AB directio motus et DCE anterior corporis



moti superficies, quae percurso spatiolo $Cc = dx$ perveniat in situm dce , sitque angulus obliquitatis $DCB = \alpha$; iam ducatur Cy ad ambas rectas obliquas normalis atque manifestum est, ut corpus motum prosequi possit, non opus esse, ut particulae obviae per spatium Cc promoveantur, sed tantum per spatium Cy , quod se habet ad illud ut $\sin. \alpha$ ad 1, ex quo etiam sufficit iis celeritatem imprimi $= \frac{dx}{dt} \sin. \alpha$, sicque pro hoc casu obliquitatis resistentia putanda erit

$= \frac{C}{4g} \cdot \frac{dx^2}{dt^2} \sin. \alpha^2$, scilicet praeterea quadrato sinus obliquitatis proportionalis; quia autem $\sin. \alpha^2$ est quantitas constans, commode simul in littera illa C comprehendi potest, ita ut non opus sit huic casui peculiarem locum in nostra analysi tribuere.

EMENDATIO SOLUTIONIS SUPRA DATAE

30. Ut igitur solutionem supra datam a vitio modo memorato liberemus, tantum opus est in ambabus aequationibus ibi inventis loco R scribere

$$R + \frac{Adx^2}{dt^2},$$

quo pacto aequationes illae erunt

$$\frac{Nddy}{2gdt^2} = R + \frac{Adx^2}{dt^2}, \quad \frac{M(dx + ddy)}{2gdt^2} = -R - \frac{Adx^2}{dt^2},$$

quae invicem additae summam praebeant ut ante

$$\frac{Mdx + (M + N)ddy}{2gdt^2} = 0,$$

cuius integrale ergo etiam erit ut ante

$$\frac{Mdx}{dt} + (M + N) \frac{dy}{dt} = Mc.$$

Ad alteram autem aequationem integram inveniendam ex priore valorem

$$\frac{ddy}{2gdt^2} = \frac{R}{N} + \frac{A}{N} \cdot \frac{dx^2}{dt^2},$$

substituamus in posteriore, ut prodeat

$$\frac{ddx}{2gdt^2} = -\frac{M + N}{MN} R - \frac{M + N}{MN} A \frac{dx^2}{dt^2}$$

sive

$$\frac{2ddx}{dt^2} = -4g \frac{M + N}{MN} R - 4gA \frac{M + N}{MN} \cdot \frac{dx^2}{dt^2},$$



ponamus nunc brevitatis gratia

$$\frac{4g(M+N)A}{MN} = 2\alpha,$$

ut habeamus hanc aequationem

$$\frac{2ddx + 2\alpha dx^2}{dt^2} = -4g \frac{M+N}{MN} R,$$

quam videamus, quomodo ad integrabilitatem perducere liceat.

31. Ante omnia igitur observamus formulam $ddx + \alpha dx^2$ integrabilem reddi, si multiplicetur per $e^{\alpha x}$; erit enim

$$e^{\alpha x}(ddx + \alpha dx^2) = d. e^{\alpha x} dx;$$

multiplicemus igitur per $e^{\alpha x}$ et nostra aequatio fiet

$$\frac{2d. e^{\alpha x} dx}{dt^2} = -4g \frac{M+N}{MN} e^{\alpha x} R,$$

quae, ut prorsus integrabilis reddatur, multiplicetur per $e^{\alpha x} dx$, eritque integrale

$$\frac{e^{2\alpha x} dx^2}{dt^2} = C - 4g \frac{M+N}{MN} \int e^{2\alpha x} R dx,$$

ubi, si formula integralis ita capiatur, ut evanescat facto $x=0$, valor constantis C debet esse $=cc$, sicque obtinebimus hanc aequationem integratam

$$\frac{dx^2}{dt^2} = e^{-2\alpha x} \left(cc - 4g \frac{M+N}{MN} \int e^{2\alpha x} R dx \right),$$

quae aequatio iam cum ante inventa

$$\frac{Mdx + (M+N)dy}{dt} = Mc$$

coniuncta veram solutionem nostri secundi problematis suppeditat.

32. Circa hanc solutionem observamus, si exponens $2\alpha x$ evanesceret, ita ut esset $e^{2\alpha x} = 1$, tum hanc solutionem cum praecedente perfecte convenire; eatenus igitur tantum ab ea discrepabit, quatenus $2\alpha x$ non evanescit; quia autem tum formula $e^{2\alpha x}$ eo magis unitatem superat, quo maior fuerit exponens $2\alpha x$, intelligimus formulam $e^{2\alpha x} R dx$ maiorem esse quam casu ante tractato et quidem eo magis, quo maius fuerit spatium penetrationis x ; ex quo intelligitur, quo crassior fuerit tabula, praeterquam quod sola formula $\int R dx$ fit maior posito scilicet $x=a$, ob factorem $e^{2\alpha x}$ multo magis insuper augeri; quare quum supra [§ 11] pro casibus, quibus glans per totam tabulam perrumpit, posuerimus

$$4g \frac{M+N}{MN} \int R dx = kk,$$

si nunc etiam ponamus

$$4g \frac{M+N}{MN} \int e^{2\alpha x} R dx = kk,$$

ista quantitas k maior erit quam casu praecedente ideoque nunc maior glandis celeritas requiritur, ut ea per totam tabulae crassitiem penetret, et quo crassior fuerit tabula, ut glans penetret, eius celeritas tanto maior debet esse quam secundum superiorem solutionem.

33. Cum autem glans per tabulam penitus perruperit, pro eius celeritate in egressu habebimus

$$\frac{dx^2}{dt^2} = e^{-2\alpha a} (cc - kk),$$

quae ergo celeritas ob duplicem causam minor erit quam casu praecedente, pro eadem scilicet celeritate c ante collisionem; primo enim, quia k maior est quam ante, quantitas $cc - kk$ iam est multo magis minor quam ante; deinde, quia ea insuper multiplicatur in $e^{-2\alpha a}$ vel, quod perinde est, dividitur per $e^{2\alpha a}$, quae formula maior est unitate, celeritas $\frac{dx}{dt}$ multo magis diminuitur. Quod denique ad ipsum tabulae motum attinet, quia eius celeritas post perforationem inventa est

$$\frac{dy}{dt} = \frac{M}{M+N} \left(c - \frac{dx}{dt} \right)$$

et quia, ut modo vidimus, $\frac{dx}{dt}$ multo minus est quam casu praecedente, nunc



ipsi tabulae multo maior motus imprimetur quam casu praecedente atque ob hanc rationem celeritas glandis post ictum, quae est $\frac{dx+dy}{dt}$, hinc aliquantillum augebitur; interim tamen, quia ex formula nostra fit

$$\frac{dx+dy}{dt} = \frac{M}{M+N}c + \frac{N}{M+N} \cdot \frac{dx}{dt}$$

et quoniam $\frac{dx}{dt}$ minus est quam casu praecedente, ipsa quoque glandis celeritas minor evadet.

34. Reducamus nunc etiam has formulas ad notiones communes et pro casibus, quibus glans sive penetrat sive secus, ponatur celeritas glandis post ictum = v , celeritas vero tabulae = u , et quia est

$$\frac{dy}{dt} = u \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dt} = v - u,$$

nostrae binae aequationes inventae fient

$$Mv + Nu = Mc$$

et

$$(v-u)^2 = e^{-2ax}cc - 4g \frac{M+N}{MN} e^{-2ax} \int e^{2ax} Rdx,$$

quarum prior, uti iam monuimus, perinde significat conservationem quantitatis motus sive aequabilem progressum communis centri gravitatis. Pro viribus vivis autem eliciendis alteram aequationem per MN multiplicatam evolamus

$$MNe v - 2MNv u + MNu u = MNc c e^{-2ax} - 4g(M+N) e^{-2ax} \int e^{2ax} Rdx$$

ad eamque addamus quadratum prioris, ut prodeat

$$\begin{aligned} & M(M+N)v v + N(M+N)u u \\ &= Mcc(Ne^{-2ax} + M) - 4g(M+N) e^{-2ax} \int e^{2ax} Rdx^1), \end{aligned}$$

1) Editio princeps:

$$M(M+N)v v + N(M+N)u u = Mcc(Me^{-2ax} + N) - 4g(M+N) e^{-2ax} \int e^{2ax} Rdx.$$

Hanc aequationem et aequationes sequentes correxit F. R. S.

quae aequatio per $M+N$ divisa praebet

$$Mv v + Nu u = \frac{Mcc}{M+N} (Ne^{-2ax} + M) - 4ge^{-2ax} \int e^{2ax} Rdx,$$

ex qua intelligitur nunc summam virium vivarum post ictum non amplius tam simpliciter se habere ad vim vivam ante conflictum, quae erat Mcc , quam in casu praecedente; nunc enim erit

$$Mv v + Nu u = Mcc - \frac{MNcc}{M+N} (1 - e^{-2ax}) - 4ge^{-2ax} \int e^{2ax} Rdx,$$

unde patet vim vivam in conflictu deperditam aestimandam esse

$$= \frac{MNcc}{M+N} (1 - e^{-2ax}) + 4ge^{-2ax} \int e^{2ax} Rdx;$$

quoniam autem ratiocinio haec iactura concludi possit, nullo modo perspicitur.



MEDITATIO IN EXPERIMENTA EXPLOSIONE TORMENTORUM NUPER INSTITUTA¹⁾

Commentatio 853 indicis ENESTROEMIANI
Opera postuma 2, 1862, p. 800–804

Circa motum globorum duo in computum veniunt, motus globi in tormento et motus extra tormentum, de quorum motuum quolibet seorsim agendum est. Primum autem excutiendus est motus extra tormentum, qui determinari poterit ex tempore, quo globus in aëre commoratus est, diametro globi et ratione gravitatum specificarum globi et aëris. Ex hisce datis innotescit altitudo, ad quam globus pervenit, et velocitas initialis, qua e tormento erumpit, tempus quoque ascensus et descensus seorsim. Quibus definitis progredi poterimus ad contemplandum motum globi intra tormentum et ex velocitate, qua globus egreditur, cognita innotescet vis pulveris pyrii multaque alia maximi usus in Pyrotechnia. Suppono autem hic directionem tormenti esse verticalem, ut corpus lineam rectam ascensu et descensu describat; motus enim obliquus in linea curva altioris est indaginis.

Designet c diametrum globi in scrupulis pedis Rhenani²⁾, $m:n$ rationem gravitatis specificae globi ad gravitatem specificam aëris seu medi, in quo globus movetur. Sit t tempus durationis globi in aëre, in minutis secundis, sit porro altitudo quaesita, ad quam corpus ascendit, x . Scribatur pro numero, cuius logarithmus est unitas, e^3 , qui est 2,7182818..., cuius logarithmus se-

1) Hac dissertatione permulti errores continentur. Confer praefationem huius voluminis atque imprimis dissertationem Celeb. D. BERNOULLI nota 1 p. 41 laudatam. F. R. S.

2) 1000 scrupula = 1 pes Rhenanus. F. R. S.

3) Vide praefationem huius voluminis. F. R. S.

cundum VLACQUIUM³⁾ est 0,4342944. Indicat porro N numerum graduum arcus, cuius tangens est

$$\sqrt{\frac{3\pi x}{e^{4mc} - 1}}$$

existente sinu toto = 1. Altitudo quaesita x ex hac aequatione erui debet

$$t = \frac{m\sqrt{c}}{447650\sqrt{3n(m-n)}} (125N - 7162l (\sqrt{\frac{3\pi x}{e^{4mc} - 1}} - \sqrt{\frac{3\pi x}{e^{4mc} - 1}})).^2)$$

Vocemus, ut calculus facilius evadat,

$$\sqrt{\frac{3\pi x}{e^{4mc} - 1}} = y;$$

erit N numerus graduum arcus, cuius tangens est y ; erit

$$t = \frac{m\sqrt{c}}{447650\sqrt{3n(m-n)}} (125N - 7162l (\sqrt{yy+1} - y)).$$

Ut logarithmis VLACQUII uti liceat, multiplicari debet logarithmus per 2,7182818.³⁾ Scribatur A loco

$$\frac{447650\sqrt{3n(m-n)}}{m\sqrt{c}},$$

erit

$$At = 125N - 19468 \log. (\sqrt{yy+1} - y);$$

erit ergo

$$N = \frac{At + 19468 \log. (\sqrt{yy+1} - y)}{125} = \frac{8At + 155746 \log. (\sqrt{yy+1} - y)}{1000}.$$

Ex qua aequatione tentando y erui debebit, tandiu alios atque alios substituendo valores loco y , donec resultet aequalitas.

1) A. VLACQ (1600?–1667), *Arithmetica logarithmica etc.* Editio secunda aucta, Goudae 1618. F. R. S.

2) Haec aequatio evadit, si in § 450 tomi primi EULERI libri, qui inscribitur *Mechanica sive motus scientia*, Petropoli 1736, ponatur $g = \frac{m-n}{m}$ et $h = \frac{4mc}{3n}$ atque si § 430 respiciatur; LEONHARDI EULERI Opera omnia, series II, vol. 1, p. 147 atque 140. F. R. S.

3) Cum logarithmus non per $e = 2,7182818$, sed per $l10 = 2,3025851$ multiplicari debeat, omnes rationes inde deductae (insuper etiam alios errores continentes uti exempli gratia formula sequens pro N deducta, ubi legendum est 155744) falsae sunt. Confer tabulam sub finem huius dissertationis adiectam. F. R. S.



EXPERIMENTUM I

factum d. 21. Aug. a. 1727

Globus ferreus diametri 225 scrup. explodebatur verticaliter, tempus durationis in aëre erat 45 minut. secund.

Est ergo

$$c = 225, \quad t = 45, \quad m = 7000 \quad \text{et} \quad n = 1.$$

Erit ergo

$$A = 618, \quad \text{ergo} \quad At = 27816^1) \quad \text{et} \quad 8At = 222530.$$

Erit ergo

$$N = \frac{222530 + 155746 \log.(\sqrt{yy+1}-y)}{1000}$$

Ponatur $y = 2,70$; erit

$$\sqrt{yy+1} = 2,879, \quad \text{ergo} \quad \sqrt{yy+1} - y = 0,179,$$

consequenter $\log.(\sqrt{yy+1}-y) = -0,7471$ et $N = 69\frac{41}{50} = \frac{69683}{1000}$, sed ex aequatione invenitur $N = \frac{106173}{1000}$. Ergo y maior assumi debet.

Sit $y = 3,00$; erit

$$\sqrt{yy+1} = 3,162, \quad \text{ergo} \quad \sqrt{yy+1} - y = 0,162,$$

unde $\log.$ eius est $-0,790$, unde prodit $N = 99^2$.

Sit $y = 4,00$; erit

$$\sqrt{yy+1} = 4,123 \quad \text{et} \quad \sqrt{yy+1} - y = 0,123,$$

cuius $\log.$ est $-0,9100$. Est ergo $N = 80,802$, sed debebat esse $N = 75^2 58'$.

Sit $y = 4,10$; erit

$$\sqrt{yy+1} - y = 0,12,$$

cuius $\log.$ = $-0,9208$. Est ergo $N = 79^2 12'$, sed debebat esse $N = 76^2 18'$.

1) Ob $At = 27810$ et $8At = 222480$ sequentes quoque formulae falsae sunt. Nihil tamen correximus. F. R. S.

Hoc continuando reperitur $y = 4,31$; hoc in casu exacte admodum obtinetur aequatio, ut ne in centesimis erretur. Et erit $N = 76^2 56'$.

Ut inveniat altitudo, ad quam corpus pertigit, erit

$$\sqrt{\frac{3nx}{e^{4mc}}} - 1 = y$$

adeoque

$$\frac{3nx}{e^{4mc}} = 19,5761,$$

ergo

$$\frac{3nx}{4mc} 0,4342944 = 1,2915908$$

seu

$$x = \frac{2100000 \cdot 1,2915908}{0,4342944} = 6245 \text{ ped. Rhen.}$$

Hinc innotescit velocitas initialis seu altitudo, ad quam eodem impetu in vacuo pervenisset; est enim

$$\frac{3nx}{e^{4mc}} = \frac{4c(m-n) + 3nK}{4c(m-n)}$$

denotante K altitudinem in vacuo describendam; erit ergo

$$K = 20997 \cdot 1857,61 \text{ scrup.} = 39004 \text{ ped. Rhen.}$$

Tempus, quod globus in ascensu consumit, est aequale

$$\frac{mN\sqrt{c}}{3581\sqrt{3n(m-n)}} \text{ minut. secund.,}$$

id est (ob $N = 76,93$ et $\sqrt{c} = 15$)

$$= 15\frac{1}{2} \text{ minut. secund.}$$

Tempus ergo descensus est

$$29\frac{1}{2} \text{ minut. secund.,}$$

ut adeo differentia inter tempus ascensus et descensus sit 14 minut. secund.



EXPERIMENTUM II

eodem die institutum

Ex eodem tormento idem globus explodebatur dimidia pulveris quantitate, mansit ille in aëre 34 minut. secund.

Est ergo

$$c = 225, \quad t = 34, \quad m = 7000, \quad n = 1 \quad \text{et} \quad A = 618;$$

erit

$$At = 21012 \quad \text{et} \quad 8At = 168096.$$

Est ergo

$$N = \frac{168096 + 155746 \log(\sqrt{yy+1} - y)}{1000}.$$

Ponatur $y = 2,00$; erit

$$\sqrt{yy+1} - y = 0,236,$$

cuius log. est $-0,6270$; hinc invenitur $N = 70,91$ et deberet esse $63^{\circ}26'$. Hoc modo tentando invenitur tandem sumi debere loco y $2,185$; erit $N = 65^{\circ}25'$; erit ergo

$$\sqrt{\frac{3nx}{4mc}} - 1 = 2,185 \quad \text{et} \quad \frac{3nx}{4mc} = 5,7742.$$

Ergo

$$\frac{3nx}{4mc} = \frac{\log. 5,7742}{0,43429} = \frac{0,76149}{0,43429},$$

unde

$$x = \frac{2100000 \cdot 0,76149}{0,43429} \text{ scrup.} = 3682 \text{ ped. Rhen}$$

Dein altitudo, ad quam in vacuo pervenisset, est $10025,862$ ped. Rhen. Tempus ascensus est

$$13,19 \text{ minut. secund.}$$

Ergo tempus descensus est

$$20,81 \text{ minut. secund.}$$

EXPERIMENTUM III

factum d. 23. Aug. a. 1727

Idem globus diametri 225 scrup. explodebatur verticaliter et tempus erat 2 minut. secund., quantitas pulveris 1 Loth seu $\frac{1}{8}$ pars praecedentis.

Est ergo ut supra

$$c = 225, \quad m = 7000, \quad n = 1, \quad \text{sed} \quad t = 2.$$

Ergo ob $A = 618$ est

$$At = 1236, \quad \text{ergo} \quad 8At = 9888.$$

Consequenter erit

$$N = \frac{9888 + 155746 \log(\sqrt{yy+1} - y)}{1000}.$$

Tentando, quid loco y substituendum sit, reperietur esse $y = 0,075$, unde est $N = 4^{\circ}19'$. Est ergo

$$\sqrt{\frac{3nx}{4mc}} - 1 = 0,075, \quad \text{ergo} \quad \frac{3nx}{4mc} = 1,005625.$$

Ergo

$$\frac{3nx}{4mc} = \frac{0,002300}{0,4343},$$

ergo

$$x = \frac{2100000 \cdot 0,0023}{0,4343} = 11121 \text{ scrup.};$$

pervenit ergo globus ad altitudinem 11 pedum.

Dein est

$$0,005625 = \frac{3nK}{4c(m-n)}.$$

Ergo

$$K = 2099700 \cdot 0,005625 = 11800 \text{ scrup.}$$

Differentia ergo altitudinum in vacuo et aëre est 678 scrup. Tempus autem ascensus est

$$\frac{7000 \cdot 4,32 \cdot 15}{3581 \cdot 144} = 0,88 \text{ minut. secund.},$$



ergo tempus descensus est

1,12 minut. secund.

In his experimentis erat longitudo tormenti 7260 scrupula. In sequentibus autem idem tormentum adhibitum est, sed abbreviatum ut eius longitudo erat saltem 5808 scrupula. In primo experimento erat quantitas pulveris 16 Loth, in secundo 8 Loth, in tertio 1 Loth.

EXPERIMENTUM IV

factum d. 2. Sept. a. 1727

Idem globus diam. 225 scrup. explodebatur verticaliter pulvere 1 Loth et cecidit demum post 8 minut. secund. Est iterum

$$c = 225, \quad m = 7000, \quad n = 1, \quad \text{sed } t = 8.$$

Unde erit

$$N = \frac{39552 + 155746 \log.(Vyy + 1 - y)}{1000}$$

Unde reperitur $y = 0,33$. Erit ergo

$$N = 18^{\circ} 25'.$$

Est ergo

$$\frac{3xz}{e^{4mz}} = 1,1089, \quad \text{ergo } x = \frac{2100000 \cdot 0,04458}{0,4343}$$

Est ergo altitudo, ad quam globus ascendit, 215 ped. 1 dig. 7 lin., altitudo autem, ad quam in vacuo pervenisset, est

$$K = 2099700 \cdot 0,1089 = 228 \text{ ped. } 5 \text{ dig. } 8 \text{ lin.}$$

Tempus autem ascensus est

$$= \frac{7000 \cdot 18,41 \cdot 15}{3581 \cdot 144} = 3,7 \text{ minut. secund.}$$

Ergo tempus descensus erat

$$= 4,3 \text{ minut. secund.}$$

EXPERIMENTUM V

eodem die factum

Idem globus ex eodem tormento pulvere 4 Loth onerato explodebatur et tempus, quo in aëre mansit, fuit 20 minut. secund.

Est ergo

$$c = 225, \quad m = 7000, \quad n = 1, \quad t = 20.$$

Est ergo

$$N = \frac{98860 + 155746 \log.(Vyy + 1 - y)}{1000}$$

Est ergo $y = 0,93$, ergo

$$N = 42^{\circ} 56', \quad \frac{3xz}{e^{4mz}} = 1,8649.$$

Ergo

$$x = \frac{2100000 \cdot 0,27044}{0,43429} = 1307,707 \text{ ped.}$$

Dein

$$K = 2099700 \cdot 0,8694 = 1816,025 \text{ ped.}$$

Tempus autem ascensus est

$$= \frac{7000 \cdot 42,93 \cdot 15}{3581 \cdot 144} = \frac{210 \cdot 4293}{103849} = 8,6 \text{ minut. secund.}$$

Ergo tempus descensus erat

$$= 11,4 \text{ minut. secund.}$$

EXPERIMENTUM VI

eodem die factum

Idem globus ex eodem tormento pulvere 8 Loth onerato explodebatur et tempus, quo in aëre mansit, fuit 28 minut. secund.

Est ergo

$$c = 225, \quad m = 7000, \quad n = 1, \quad t = 28.$$

Ergo

$$N = \frac{138432 + 155746 \log.(Vyy + 1 - y)}{1000}$$



Hinc reperitur $y = 1,52$ et

$$N = 56^{\circ}39', \quad e^{4mc} = 3,3104,$$

unde

$$x = \frac{2100000 \cdot 0,519828}{0,43429} = 2513,621 \text{ ped. Rhen.}$$

At

$$K = 20997 \cdot 31,04 = 4851,150 \text{ ped. Rhen.}$$

Tempus autem ascensus est

$$= \frac{7000 \cdot 56,66 \cdot 15}{3581 \cdot 144} = 11,45 \text{ minut. secund.}$$

Tempus ergo descensus est

$$= 16,55 \text{ minut. secund.}$$

EXPERIMENTUM VII

dicto die institutum

Ex eodem tormento, sed 12 Loth onerato, eiaculabatur globus idem et tempus, donec cecidit, erat 32 minut. secund. Ob

$$c = 225, \quad m = 7000, \quad n = 1, \quad t = 32$$

erit

$$N = \frac{158202 + 155746 \log. (\sqrt{yy+1} - y)}{1000}$$

Unde consequitur esse $y = 1,93$, ergo

$$N = 62^{\circ}27'.$$

Erit

$$e^{4mc} = 4,7249,$$

ergo

$$x = \frac{2100000 \cdot 0,6733099}{0,43429} = 3255,776 \text{ ped. Rhen. seu } 3255776 \text{ scrup.}$$

Sed erit

$$K = 20997 \cdot 372,49 = 7821,172 \text{ ped. Rhen.}$$

Tempus autem ascensus est

$$= \frac{210 \cdot 6261}{103849} = 12,67 \text{ minut. secund.}$$

et tempus descensus erit

$$= 19,33. ^{1)}$$

. 1)

Tabula correctiones huius dissertationis continens

Experi- mentum	Onus pulveris Lot	t	N	x ped. Rhen.	Tempus ascen- sus secundis expressum	Tempus descen- sus secundis expressum	K ped. Rhen.
I	16	45	80°25'	7530	16,27	28,73	73558
II	8	34	69°39'	4436	14,09	19,91	15263
III	1	2	4°56'	15,59	0,998	1,002	15,644
IV	1	8	19°35'	250,3	3,96	4,04	265,74
V	4	20	46°22½'	1559	9,38	10,62	2311,6
VI	8	28	60°58'	3036	12,34	15,66	6813
VII	12	32	66°58½'	3943	13,55	18,45	11625

F. R. S.

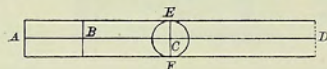


FRAGMENTUM EX ADVERSARIIS MATHEMATICIS DEPROMPTUM¹⁾

Ex manuscriptis academiae scientiarum Petropolitanae nunc primum editum

DE MOTU GLOBI PER TUBUM TORNATUM EXPLOSI

Fuerit initio spatium AB pulvere pyrio repletum, ut sit $AB = a$; qui, simul ac accenditur, aequivalet aëri in spatium n vicibus minus compresso. Pervenerit globus iam in ECF et sit $AC = x$. Sit pondus globi $= A$, radius



$CE = c$, celeritas centri $= V$, celeritas rotatoria puncti $E = mV$. Erit vis viva globi

$$= Av + \frac{2}{5} Ammv.$$

1) In praefatione a NICOLAO FUSS minore *Operibus postumis* praemissa legitur p. IV—V: „Praeter scripta postuma ab EULERO ipso elaborata et maximam partem ipsius manu exarata exstant volumina tria, quibus titulus est *Adversaria mathematica*. His adversariis administri et discipuli EULERI inferre solebant theses quasdam et sententias breves, quas quidem a magistro acceptas ipsi fusius et accuratius explicaverant. Ex his thesibus selectae sunt graviores, quae *Operibus postumis* suo loco insererentur, et primum quidem nonaginta dignae visae sunt, quae typis describerentur. Deinde clarissimus TSCHEBYSCHOFF, perlustratis iterum dictis voluminibus, invenit alias sex theses, quas addendas esse censuit; has tomus prior exhibet sub Numero XXIII, p. 487—493. In hunc praeterea ex adversariis illatae sunt theses geometricae octo, theses analytici argumenti quatuor et duae ad calculum integralem spectantes; ita ut omnino tomo priori 110 theses ex adversariis depromptae contineantur.“

Praeter haec tria volumina in manuscriptis academiae Petropolitanae inveniuntur insuper novem alia, quae a G. ENESTROEM *Notizbücher* appellata sunt. Vide G. ENESTROEM, *Bericht an die*

Sit altitudo atmosphaerae $= f$ et pressio columnae atmosphaerae in basin circulo maximo aequalem $= p$; aequivalet ponderi columnae aëriae $= \pi cc f$. Erit vis sollicitans

$$= \frac{n\pi p}{x} - p,$$

resistentia vero est

$$= \frac{1}{2} \pi cc v.$$

Erit ergo

$$A \left(1 + \frac{2}{5} mm \right) dv = \pi cc \left(\frac{n\pi f dx}{x} - f dx - \frac{1}{2} v dx \right).$$

Sit

$$\frac{A \left(1 + \frac{2}{5} mm \right)}{\pi cc} = b;$$

erit

$$dv + \frac{v dx}{2b} = \frac{n\pi f dx}{bx} - \frac{f dx}{b},$$

ergo

$$e^{\frac{x}{2b}} v = \frac{n\pi f}{b} \int \frac{e^{\frac{x}{2b}} dx}{x} - \frac{f}{b} \int e^{\frac{x}{2b}} dx.$$

Sit $x = a + t$; erit

$$e^{\frac{t}{2b}} v = \frac{n\pi f}{b} \int \frac{e^{\frac{t}{2b}} dt}{a+t} - \frac{f}{b} \int e^{\frac{t}{2b}} dt$$

$$= \frac{f}{b} \int e^{\frac{t}{2b}} dt \left(\frac{(n-1)a-t}{a+t} \right),$$

ergo

$$v = \frac{f e^{-\frac{t}{2b}}}{b} \int e^{\frac{t}{2b}} dt \left(\frac{(n-1)a-t}{a+t} \right);$$

vel

$$2abdv + 2btdv + avdt + vtdt \\ = 2n\pi fadt - 2fadt - 2ftdt$$

Eulerkommission der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft über die EULERSCHEN Manuskripte der Petersburger Akademie, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 22, 1913, Zweite Abt., p. 191, imprimis p. 193—194 et 197—198. Fragmentum De motu globi invenitur in quarto horum novem adversariorum, p. 437, quod secundum G. ENESTROEM (l. c. p. 197) circiter anno 1740 scribi coeptum est. F. R. S.



et

$$v = \frac{(n-1)ft}{b} - \frac{(n-1)ftt}{4bb} + \frac{(n-1)ft^2}{24b^3} - \frac{(n-1)ft^3}{4 \cdot 6 \cdot 8b^4} + \text{etc.}$$

$$- \frac{nftt}{2ab} + \frac{nft^2}{12abb} - \frac{nft^3}{8 \cdot 12ab^3} + \text{etc.}$$

$$+ \frac{nft^2}{3aab} - \frac{nft^3}{8 \cdot 3aabb} + \text{etc.}$$

$$- \frac{nft^3}{4a^3b} + \text{etc.}$$

$$+ \text{etc.},$$

ergo

$$v = -\frac{ft}{b} + \frac{naf}{b} l\left(1 + \frac{t}{a}\right)$$

$$+ \frac{ftt}{4bb} - \frac{naf}{2bb} \left(\left(1 + \frac{t}{a}\right) l\left(1 + \frac{t}{a}\right) - \frac{t}{a} \right)$$

$$- \frac{ft^2}{24b^3} + \frac{naf}{8b^3} \left(\left(1 + \frac{t}{a}\right)^2 l\left(1 + \frac{t}{a}\right) - \frac{t}{a} - \frac{3}{2} \frac{tt}{aa} \right)$$

$$\text{etc.}$$

$$= -2f\left(1 - e^{-\frac{t}{b}}\right) + \frac{naf}{b} e^{-\frac{t}{b}} l\left(1 + \frac{t}{a}\right) + \frac{nft}{b} \left(1 - e^{-\frac{t}{b}}\right) - \text{etc.}^1)$$

Ponatur $2b = g$; erit

$$\int \frac{e^{\frac{t}{b}} dt}{a+t} = e^{-\frac{a}{g}} \left\{ \frac{l\left(1 + \frac{t}{a}\right) + \frac{a}{g} \left(\frac{t}{a}\right) + \frac{aa}{2gg} \left(\frac{t}{a} + \frac{tt}{2aa}\right)}{+ \frac{a^3}{6g^3} \left(\frac{t}{a} + \frac{tt}{aa} + \frac{t^3}{3a^3}\right) + \frac{a^4}{24g^4} \left(\frac{t}{a} + \text{etc.}\right) + \text{etc.}} \right\}^2)$$

Hinc ergo erit

1) Apud EULERUM haec ultima expressio ipsius v ita se habet:

$$= -2f\left(1 - e^{-\frac{t}{b}}\right) + \frac{2naf}{2b+a+t} l\left(1 + \frac{a}{t}\right) + \frac{naf}{2bb+ab}$$

Correxit F. R. S.

2) Apud EULERUM factor ipsius $e^{-\frac{a}{g}}$ ita se habet:

$$l\left(1 + \frac{t}{a}\right) + \frac{a}{g} \left(\frac{t}{a}\right) - \frac{aa}{2gg} \left(\frac{t}{a} - \frac{tt}{2aa}\right) + \frac{a^3}{6g^3} \left(\frac{t}{a} - \frac{tt}{2aa} + \frac{t^3}{3a^3}\right) - \frac{a^4}{24ag^4} \left(\frac{t}{a} \text{ etc.}\right)$$

Correxit F. R. S.

$$v = \frac{2naf}{g} e^{-\frac{t}{g}} \int \frac{e^{\frac{t}{g}} dt}{a+t} - 2f\left(1 - e^{-\frac{t}{g}}\right)$$

$$= \frac{2naf}{g} e^{-\frac{a-t}{g}} l\left(1 + \frac{t}{a}\right) + \frac{2naf}{g} e^{-\frac{t}{g}} \left\{ \frac{\frac{a}{g} \left(\frac{t}{a}\right) - \frac{aa}{2gg} \left(\frac{t}{a} - \frac{tt}{2aa}\right) + \frac{a^3}{6g^3} \left(\frac{t}{a} - \frac{tt}{2aa} + \frac{t^3}{3a^3}\right)}{+ \frac{a^4}{24g^4} \left(\frac{t}{a} - \frac{tt}{2aa} + \frac{t^3}{3a^3} - \frac{t^4}{4a^4}\right) + \text{etc.}} \right\}$$

$$- 2f + 2fe^{-\frac{t}{g}};$$

$$\text{at est}$$

$$g = \frac{2A(1 + \frac{2}{3}mm)}{\pi cc}$$

Primum igitur longitudo tubi definiri potest, ut globus celeritate maxima explodatur; hinc autem fit

$$v = \frac{2naf}{a+t} - 2f.$$

Est vero

$$v = \frac{2(n-1)ft}{g} - \frac{2(n-1)ftt}{1 \cdot 2gg} + \frac{2(n-1)ft^2}{1 \cdot 2 \cdot 3g^3} - \frac{2(n-1)ft^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4g^4} + \frac{2(n-1)ft^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5g^5} - \text{etc.}$$

$$- \frac{1 \cdot 2nftt}{1 \cdot 2ag} + \frac{1 \cdot 2nft^2}{1 \cdot 2 \cdot 3agg} - \frac{1 \cdot 2nft^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4ag^3} + \frac{1 \cdot 2nft^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5ag^4} - \text{etc.}$$

$$+ \frac{1 \cdot 2 \cdot 2nft^2}{1 \cdot 2 \cdot 3aag} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 2nft^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4aagg} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 2nft^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5aag^3} - \text{etc.}$$

$$- \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2nft^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5a^3gg} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2nft^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5a^3gg} - \text{etc.}$$

$$+ \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2nft^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5a^4g} - \text{etc.}$$

$$- \text{etc.}$$

Gravitas specifica globi ad gravitatem specificam aëris ut r ad 1 ; erit

$$A = \frac{4}{3} \pi c^3 r,$$

ergo

$$b = \frac{4}{3} rc \left(1 + \frac{2}{5} mm\right) = \frac{1}{2} g,$$

$$g = \frac{8}{3} rc \left(1 + \frac{2}{5} mm\right).$$



NAMENVERZEICHNIS

- | | |
|---|--|
| ALBA, HERZOG VON, 13 | FERRO, SCIPIONE DAL, 33 |
| ALGHISI DA CARPI, 13 | FOLARD, J. C. DE, 11 |
| ALTEN, G. VON, 18, 20 | FROBENIUS, H. F., 20 |
| ANDERSON, R., 36, 38, 314, 315 | FUSS, N., 478 |
| BACON, ROGER, 24, 26—28 | GALEN, B. VON, 21 |
| BERNOULLI, D., 6, 41, 47, 48, 58, 68, 86,
91, 92, 93, 163, 164, 172, 374—376, 468 | GALEUS, 35 |
| BERNOULLI, JOH., 6, 44, 46, 47, 163, 164, 414 | GALILEI, G., 34, 37—39, 314, 351, 413, 415 |
| BLONDEL, F., 32, 35, 38 | GIDEON, 26 |
| BOUILLON, DUC DE, 12 | GOULON, P. VON, 23, 33 |
| BOURNE, W., 30, 36 | GÜNTHER, 41, 91 |
| BOYLE, R., 51 | GUERINI, R., Graf zu Lynar, 19 |
| BRACHI, J., 47 | GUICCIARDINI, F., 29, 30 |
| BROWN, H., 143 | HALES, ST., 51, 54 |
| BUCKINGHAM, HERZOG VON, (Villiers, G.), 31 | HALLEY, E., 39 |
| BUSCA, G., 32, 34 | HANSAKOB, H., 24 |
| CARDANO, H., 33 | HAUSBEE, F., 49, 50, 61 |
| CARL I VON ENGLAND, 31 | HERMANN, J., 46 |
| CARL V, Deutscher Kaiser, 31 | HUYGENS, CHR., 45 |
| COEHOORN, M. VAN, 21—24 | HUYSEN, H. VON, 19 |
| COLLADO, L., 32, 34, 36 | JÄHNS, M., 11, 13, 18—21, 32, 34 |
| DESHOULIÈRES, 23 | JANITSCHKE, H., 14 |
| EISENSCHMID, J. C., 62 | JEBB, S., 26 |
| ELDRED, W., 36, 37 | KEDÜK-ACHMED, Pascha, 11 |
| ELRIC, D., 35 | KEILL, J., 46 |
| ENESTRÖM, G., 172, 413, 448, 468, 478, 479 | LA HIRE, G. Ph. DE, 43, 47 |
| ERRARD, J., DE BAR-LE-DUC, 19 | LANDSBERG, D. H., der Jüngere, 18 |
| EULER, L., 12, 44, 46 (<i>Mechanica</i> , t. I § 883),
72, 124, 143, 172 (Comment. 7 des ENE-
STRÖMSCHEN Verzeichnisses), 290, 299, 303,
448 (Comment. 22, 69, 82, 434, 435), 459,
469 (<i>Mechanica</i> , t. I § 450), 478, 479, 480 | LA PORTE DU THEIL, 27 |
| | LA TREILLE, B. F. DE, 13 |
| | LYNAR, GRAF ZU, s. GUERINI, R. |
| | MACLAURIN, C., 389 |
| | MAHOMET s. MOHAMMED |
| | MANWAYRING, H., 31 |



- | | |
|--|--|
| MARCHI, F. DE', 13 | REGIOMONTANUS (MÜLLER, JOH.), 34 |
| MARCUS GRAECUS, 27, 28 | RIVALT DE FLEURANCE, D., (RIVALTIUS), 35 |
| MEAD, 27 | ROBINS, B., 46, 47, 62, 88, 89, 92 |
| MEMMINGEN, A. VON, 34 | ROMOCKI, S. J. VON, 20, 24, 26-28 |
| MERSENNE, M., 357 | SAINT-REMY, P. S. DE, 358 |
| METZ, P. C. B. DU, 358 | SANTRECH, D., 34, 35 |
| MOHAMMED II, Sultan, 11, 30 | SCHWARTZ, BARTHOLD, 24-28 |
| MONTECUCCOLI, R. VON, 18, 19 | SIEMIENOWICZ, C., 34, 35 |
| NAPIER, J., 435 | SPECKLE, D., 13-15 |
| NAVARRO, P., (PETRUS DE NAVARRA) 20 | TARTAGLIA, N., (TARTALEA) 12, 28, 30, 33, 34 |
| NEWTON, J., 40, 41, 46, 71, 240-242, 245,
282, 284, 295, 296, 298, 306, 414 | TAYLOR, B., 46 |
| ORANIEN, MORITZ VON, 21 | THULLIER, V., DE, 11 |
| PAAN, L., 21 | TSCHEBYSCHOFF, P. L., 478 |
| PAGAN, B. F. DE, 17 | UFANO, D., 34, 35, 75, 357 |
| PAPIN, D., 47 | ULRICH, 35 |
| PASINO, A. DE, 12-15 | VALLIERE, J. F. DE, 20, 21 |
| PEURBACH, G. VON, 34 | VAUBAN, S. L. DE, 21, 23, 32, 334 |
| PLINIUS, DER ÄLTERE, 26 | VLACQ, A., 469 |
| POLYBIUS, 11, 20 | WILHELM III VON ORANIEN, König von Groß-
britannien, 22 |
| QUINCY, MARQUIS DE, 20 | ZISKA, J., 11 |

