LEONHARDI EULERI OPERA OMNIA
SUB AUSPICIIS SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM HELVETICAE
EDENDA CURAVERUNT
F. RUDIO · A. KRAZER · A. SPEISER · L. G. DU PASQUIER
SERIES I · OPERA MATHEMATICA · VOLUMEN VIII

LEONHARDI EULERI

INTRODUCTIO IN ANALYSIN INFINITORUM

TOMUS PRIMUS

EDIDERUNT

ADOLF KRAZER ET FERDINAND RUDIO

LIPSIAE ET BEROLINI
TYPIS ET IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI
MCMXXII

L. Euler

LEONHARDI EULERI
OPERA OMNIA

L. Euler

LEONHARDI EULERI
OPERA OMNIA

LEONHARDI EULERI
OPERA OMNIA

SUB AUSPICIIS
SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM
HELVETICAE

EDENDA CURAVERUNT

FERDINAND RUDIO
ADOLF KRAZER ANDREAS SPEISER
LOUIS GUSTAVE DU PASQUIER

SERIES PRIMA
OPERA MATHEMATICA
VOLUMEN OCTAVUM

LIPSIAE ET BEROLINI
TYPIS ET IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI
MCMXXII

LEONHARDI EULERI

INTRODUCTIO
IN ANALYSIN INFINITORUM

TOMUS PRIMUS

ADIECTA EST EULERI EFFIGIES
AD IMAGINEM AB E. HANDMANN PICTAM EXPRESSA

EDIDERUNT

ADOLF KRAZER ET FERDINAND RUDIO

LIPSIAE ET BEROLINI
TYPIS ET IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI
MCMXXII

VORWORT DER HERAUSGEBER

Viel später, als ursprünglich erwartet war, erscheint nun auch die *Introductio*, wenigstens in ihrem ersten Teile, in der Reihe der *Opera omnia* EULERS. Die Zeitverhältnisse haben die Verspätung verschuldet; sie haben namentlich veranlaßt, daß an Stelle des im Einteilungsplane[1]) genannten Bearbeiters die Unterzeichneten die Herausgabe besorgt haben. Nachdem nun die *Institutiones calculi differentialis* (herausgegeben von G. KOWALEWSKI) und die drei Bände der *Institutiones calculi integralis* (herausgegeben von F. ENGEL und L. SCHLESINGER) schon in den Jahren 1913—1914 in unserer Eulerausgabe in neuer Bearbeitung erschienen sind, ist mit dem jetzt vorliegenden ersten Teile der *Introductio* (der zweite Teil ist der analytischen Geometrie gewidmet und kommt daher hier nicht in Betracht) das herrliche, groß angelegte Werk der Analysis abgeschlossen, das allein ausgereicht hätte, EULERS Namen unsterblich zu machen.[2])

Die *Introductio* erschien 1748[3]) zu Lausanne bei M. M. BOUSQUET. Bei diesem waren 1742 die *Opera omnia* von JOHANN BERNOULLI in vier Bänden herausgekommen. EULER schreibt darüber am 21. Mai 1743 an CHR. GOLDBACH[4]): „Der Verleger, M. BOUSQUET, hat dieselben selbst hierhergebracht und dem Könige ein magnifiq eingebundenes Exemplar praesentirt. Ich habe auch eins von dem Hn. BERNOULLI zum Praesent erhalten.“ Bei diesem seinem Besuche in Berlin wurde BOUSQUET durch Vermittelung von DANIEL BERNOULLI auch mit EULER bekannt.[5]) In jenem Briefe an GOLDBACH heißt es weiter: „M. BOUSQUET hat

1) *Einteilung der sämtlichen Werke* LEONHARD EULERS, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 19, 1910, Zweite Abt., p. 104 und 129.

2) Siehe auch das von F. ENGEL und L. SCHLESINGER verfaßte Vorwort zur neuen Ausgabe des ersten Bandes der *Institutiones calculi integralis.*

3) Ihr folgten 1755 die *Institutiones calculi differentialis* und 1768, 1769, 1770 die drei Bände der *Institutiones calculi integralis.* Beide Werke wurden auf Kosten der Petersburger Akademie gedruckt (die *Inst. calc. diff.* in Berlin).

4) Siehe *Correspondance math. et phys. publiée par P. H. Fuss,* St.-Pétersbourg 1843, t. I, p. 227; *LEONHARDI EULERI Opera omnia,* series III.

5) Siehe den Brief von DANIEL BERNOULLI an EULER vom 23. April 1743 in der soeben zitierten *Correspondance* von FUSS, t. II, p. 522; *LEONHARDI EULERI Opera omnia,* series III.

einen Contract mit mir geschlossen, kraft welches er alle meine Schriften, ausgenommen diejenigen, welche ich nach St. Petersburg zu schicken schuldig bin, drucken wird, und wird den Anfang mit dem tractatu de Isoperimetricis[1]) machen. Er hätte gern mit der Scientia navali angefangen; ich muß aber erst vernehmen, ob die Akademie noch gesinnt seyn wird, dasselbe zu drucken".[2])

EULER hatte die *Introductio* schon einige Jahre vor 1748 vollendet. Schon am 4. Juli 1744 schrieb er an GOLDBACH[3]): „Ob mein Tractat de problemate isoperimetrico in Lausanne schon völlig gedruckt ist, habe ich noch keine Nachricht erhalten. Ich habe inzwischen ein neues Werk dahin geschickt unter dem Titul *Introductio ad analysin infinitorum*, worin ich sowohl den partem sublimiorem der Algeber als der Geometrie abgehandelt und eine große Menge schwerer problematum ohne den calculum infinitesimalem resolvirt, wovon fast nichts anderswo anzutreffen. Nachdem ich mir einen Plan von einem vollständigen Tractat über die analysis infinitorum formirt hatte, so habe ich bemerkt, daß sehr viele Sachen, welche dazu eigentlich nicht gehören, und nirgend abgehandelt gefunden werden, vorhergehen müßten, und aus denselben ist dieses Werk als prodromus ad analysin infinitorum entstanden."

Auf den Inhalt der *Introductio* an dieser Stelle näher einzutreten, können wir füglich unterlassen. Eine Übersicht[4]) hat EULER selber in seiner *Praefatio* gegeben. Wir verweisen auf diese und das darauf folgende Inhaltsverzeichnis, vor allem aber auf das Werk selbst, das auch heute noch verdient, nicht nur gelesen, sondern mit Andacht studiert zu werden. Kein Mathematiker wird es ohne reichen Gewinn aus der Hand legen.

Die *Introductio* fordert um so mehr unsere Bewunderung heraus, als ihr Verfasser so gut wie gar keine Vorläufer gehabt hat, an die er sich hätte anlehnen können. Man

1) Gemeint ist die *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*, welches Werk in der Tat 1744 bei BOUSQUET erschien.

2) Nach einem noch nicht veröffentlichten Briefe EULERS an G. CRAMER in Genf vom 2. November 1751 wurde der allgemeine Verlagsvertrag BOUSQUET-EULER 1751 von EULER gekündigt, nachdem die *Scientia navalis* schon 1749 in Petersburg erschienen war.

3) Siehe FUSS, *Correspondance*, t. I, p. 278; siehe ferner EULERS Brief an D'ALEMBERT vom 28. September 1748, Bullett. di bibliogr. e di storia d. sc. matem. e fis. **19**, 1886, p. 145, sowie EULERS Brief an GOLDBACH vom 6. August 1748, FUSS, *Correspondance*, t. I, p. 471, und den Brief von D. BERNOULLI an EULER vom Anfang des Jahres 1745, FUSS, *Correspondance*, t. II, p. 568; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series III.

4) Die Besprechungen, die der *Introductio* in den Nova acta eruditorum 1751, p. 222, und in der Nouvelle bibliothèque Germanique 7:1, 1750, p. 17, zuteil geworden sind, enthalten sachlich nichts Bemerkenswertes.

könnte höchstens an die bekannten fünf unter JAKOB BERNOULLIS Leitung in den Jahren 1689—1704 entstandenen Abhandlungen denken, die unter dem gemeinsamen Titel *Positiones arithmeticae de seriebus infinitis earumque summa finita* erschienen und später in BERNOULLIS *Opera* aufgenommen worden sind.[1]) Eine genauere Vergleichung zeigt jedoch, daß diese Abhandlungen mit ihrem verhältnismäßig eng umschriebenen Inhalt doch zu wenig Berührungspunkte mit der so viele grundlegende Untersuchungen der verschiedensten Art umspannenden *Introductio* besitzen, als daß sie ernstlich in Betracht gezogen werden dürften.[2]) EULERS Werk ist im besten Sinne des Wortes originell und unvergleichbar. Wenn er in jenem Briefe an GOLDBACH sagt, er habe darin „eine große Menge schwerer problematum ohne den calculum infinitesimalem resolvirt, wovon fast nichts anderswo anzutreffen", so hat er nicht zuviel behauptet. Wohl aber darf hinzugefügt werden, daß die *Introductio* den Beginn einer neuen Zeit bezeichnet und daß dieses Werk nicht nur durch seinen Inhalt, sondern auch durch seine Sprache maßgebend geworden ist für die ganze Entwickelung der mathematischen Wissenschaft.

BOUSQUET hat, freilich mit EULERS Erlaubnis, die *Introductio* dem Pariser Akademiker J. J. MAIRAN (1678—1771), dem Nachfolger FONTENELLES (1657—1757) im Sekretariate, gewidmet und die Widmung mit einer schwülstigen[3]) *Epistola dedicatoria* versehen. Er hat sogar das Werk mit MAIRANS Bildnis geschmückt. Wie BOUSQUET zu dieser Huldigung kam, darüber ist nichts bekannt. Offenbar hat es sich lediglich um eine Verlegerreklame gehandelt.[4]) Trotzdem haben wir geglaubt, auf den Bildschmuck, den man nun einmal bei der *Introductio* zu sehen gewohnt ist, nicht verzichten zu sollen; wir haben dafür aber dem Bande ein Bild von EULER vorangestellt. Es ist dies eine von der Firma FROBENIUS in Basel hergestellte Reproduktion des von dem Basler Maler EMANUEL HANDMANN (1718—1781) im Jahre 1753 gemalten Pastellbildes, das sich in der „Öffentlichen Kunstsammlung" zu Basel befindet.[5])

1) JACOBI BERNOULLI *Opera*, Genevae 1744, I, p. 375—402, 517—542; II, p. 745—767, 849—867, 955—975.

2) In noch höherem Maße gilt dies von NEWTONS *Arithmetica universalis* (1707), von der *Arithmetica infinitorum* (1655) von WALLIS, von desselben Verfassers *Treatise of Algebra* (1685) und von andern Werken, an die man, durch Äußerlichkeiten verleitet, etwa noch denken könnte.

3) Auch wenn man den Stil der damaligen Zeit berücksichtigt.

4) In einem noch nicht veröffentlichten Briefe an EULER vom 12. Februar 1748 entschuldigt sich MAIRAN, daß BOUSQUET ihm die *Introductio* gewidmet und er, MAIRAN, die Eitelkeit gehabt habe, die Widmung anzunehmen. Im übrigen dankt er EULER für die erteilte Erlaubnis.

5) Über die bekannteren Bilder von EULER orientiert Eneströms Artikel *Über Bildnisse von LEONHARD EULER*, Biblioth. Mathem. 7_3, 1906—1907, p. 372. Speziell von HANDMANN stammt noch das 1756 gemalte, ebenfalls in Basel befindliche Ölbild EULERS, das in Reproduktionen von CHRISTIAN VON MECHEL und FRIEDRICH WEBER die Bände I_1 (*Algebra*) und II_1 (*Mechanica*) unserer Euleransgabe ziert.

Bei dem reichen Inhalt der *Introductio* ist es selbstverständlich, daß das Werk mannigfache Berührungspunkte mit anderen Arbeiten EULERS aufweist. Wir haben uns bemüht, in zahlreichen Anmerkungen den wünschenswerten Zusammenhang herzustellen, haben aber auch darüber hinaus, so weit als möglich, die Beziehungen der *Introductio* zu den Arbeiten anderer Mathematiker zu verfolgen und die etwas allzu spärlichen Zitate EULERS zu vervollständigen gesucht. Der *Index nominum* gibt darüber nähere Auskunft. Besondere Sorgfalt verwendeten wir auf die Ausmerzung der zahlreichen Fehler, seien es Rechenfehler, seien es andere, die der *Editio princeps* anhaften. Sämtliche Rechnungen wurden auf das genaueste kontrolliert und wo nötig verbessert. Bei dieser verantwortungsvollen und nicht ganz einfachen Arbeit hatten wir uns wiederholt der Unterstützung der Herren Dr. H. BRANDT, Karlsruhe (jetzt Aachen), und Dr. J. WILDHABER, Zürich, zu erfreuen, denen wir dafür auch an dieser Stelle unseren besten Dank aussprechen.

Zu Danke verpflichtet sind wir auch Herrn G. ENESTRÖM, auf dessen wertvolle Ratschläge in historischen Fragen wir stets rechnen durften, und sodann namentlich unseren beiden Mitredaktoren für ihre Unterstützung bei der Korrektur. Auch der Verlagsfirma B. G. TEUBNER sprechen wir gerne unsere Anerkennung und unsern Dank aus für die Sorgfalt, die sie der Drucklegung hat zuteil werden lassen, und für die Bereitwilligkeit, mit der sie stets auf unsere Wünsche eingegangen ist.

Wehmut beschleicht uns beim Abschlusse unseres Bandes — er ist der erste, an dem PAUL STÄCKEL nicht mehr hat mitarbeiten können.

Karlsruhe und Zürich, März 1922.

ADOLF KRAZER. FERDINAND RUDIO.

BIBLIOGRAPHIE

Introductio in analysin infinitorum. Auctore LEONHARDO EULERO, professore regio Berolinensi, et academiae imperialis scientiarum Petropolitanae socio. Tomus primus, Stich + Porträt (MAIRAN) + (2) + XVI + 320 S. + 1 Tabelle. Tomus secundus, (2) + 398 + (1) S. + 40 Tafeln. Lausannae, apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET et socios. 1748. 4°.

Weitere Auflagen und Übersetzungen:

1. Neue Titelauflage. Lausannae, apud JULIUM HENRICUM POTT et soc. 1783. — Stich + Porträt (MAIRAN) des ersten Bandes fehlen.
2. Editio nova. Tomus primus, XVI + 320 S. Tomus secundus, (2) + 398 S. + 16 Taf. Lugduni, apud BERNUSET, DALAMOLLIERE, FALQUE et soc. 1797. 4°.
3. Introduction à l'analyse des infiniment petits de M. EULER. Traduite du latin. Première partie. Par M. PEZZI. Précédée de l'éloge de M. EULER prononcé à la rentrée de l'académie royale des sciences le 6 février 1785 par M. le marquis DE CONDORCET. Porträt + 6 + IV + 44 + XII + 346 + (2) S. A Strasbourg aux dépens de la librairie académique 1786. 8°. — Der zweite Teil sollte von KRAMP übersetzt werden, ist aber nicht erschienen.
4. Introduction à l'analyse infinitésimale par LÉONARD EULER; traduite du latin en français, avec des notes et des éclaircissements, par J. B. LABEY. Tome premier, XIV + (2) + 364 S. Tome second, (12) + 424 S. + 16 Tafeln. A Paris, chez BARROIS, aîné, l'an IV (1796) et l'an V (1797). 4°.
5. Neue Titelauflage. Paris, BACHELIER 1835.
6. LEONHARD EULERS Einleitung in die Analysis des Unendlichen. Aus dem Lateinischen übersetzt und mit Anmerkungen und Zusätzen begleitet von JOH. ANDR. CHR. MICHELSEN. Erstes Buch, XXIV + 626 + (3) S. + 2 Tabellen. Zweites Buch, (VI) + 578 S. + 8 Tafeln. Berlin, bey CARL MATZDORFF 1788. 8°. — Es gibt Exemplare, die auf dem Titelblatt: „Berlin, bey SIGISMUND FRIEDRICH HESSE 1788" haben.

   Im Jahre 1791 ließ MICHELSEN seiner Übersetzung der *Introductio* ein „Drittes Buch" folgen, dem er auch den Nebentitel *Die Theorie der Gleichungen* beifügte. Der Haupttitel aber ist nur irreleitend, denn das Buch hat gar nichts mit der *Introductio* zu tun, sondern ist eine Sammlung von Übersetzungen algebraischer Arbeiten EULERS (der Abhandlungen 30 und 282 des ENESTRÖMSCHEN Verzeichnisses) und LAGRANGES.
7. Neue unveränderte berichtigte Auflage. Erstes Buch, XVI + 456 S. + 1 Tab. Zweites Buch, VIII + 392 S. + 8 Taf. Berlin, REIMER 1835 und 1836.
8. Einleitung in die Analysis des Unendlichen. Von LEONHARD EULER. Erster Teil. Ins Deutsche übertragen von H. MASER. X + (1) + 319 S. Berlin, SPRINGER 1885. 8°. — Eine Fortsetzung ist nicht erschienen.

INTRODUCTIO
IN ANALYSIN INFINITORUM

TOMUS PRIMUS

A Lausanne et Geneve, chez MARC-MICHEL BOUSQUET *et Comp.e 1748.*

INTRODUCTIO
IN ANALYSIN
INFINITORUM.

AUCTORE

LEONHARDO EULERO,
Professore Regio BEROLINENSI, *& Academiæ Imperialis Scientiarum* PETROPOLITANÆ *Socio.*

TOMUS PRIMUS.

LAUSANNÆ,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.

MDCCXLVIII.

ILLUSTRISSIMO VIRO

JOHANNI JACOBO

DORTOUS DE MAIRAN,

UNI EX XLVIRIS

ACADEMIÆ GALLICÆ,

REGIÆ ETIAM SCIENTIARUM

PARISIENSIS,

IN QUA SECRETARII PERPETUI MUNUS NUPER

ABDICAVIT,

NEC NON

ALIARUM BENE MULTARUM,

LONDINENSIS, PETROPOLITANÆ,

&c.

SOCIETATUM, ACADEMIARUMVE

SOCIO DIGNISSIMO.

MARCUS-MICHAEL BOUSQUET.

VIR ILLUSTRISSIME

Patronos Euleriano scripto quaerere necesse neutiquam esse Mathematicarum Disciplinarum cultoribus satis constat. Sciunt utique illi varias earum partes novis eum luminibus sic illustrasse, ut inde merito clarissimi rerum in his abstrusissimarum interpretis locum sit consequutus. Quem quin egregie tueatur, immo tollat se altius quoque opere isthoc, nemo dubitabit, certior hisce factus, indulsisse Te mihi, ut illustrissimo nomini Tuo dicatum publice prodiret. Pertinere autem hoc in me collatum beneficium ad Auctoris decus probe intelligens, Ipse, ut eo uterer, lubens concessit; et cum in rem meam faciat omnimodo, qui neglexissem?

Ab his equidem, quibus Libros inscribunt, sibi nescio quid ideo deberi, plerique tacite constituunt, acceptaque beneficia quodammodo remunerari, ut sese fere nexu liberent omni. Ego vero secus sentio. Mihi certe merum est beneficium patroni, quod scriptoris aut excusoris opera id genus honore condecorari patiantur. Hac mente utique Tibi, *Vir illustrissime*, animi gratissimi summaeque observantiae professionem hisce publicam excipias, rogo.

Paratum promtumque semper iuvandis litterarum studiis qui Te novit, et notus vel hoc nomine es cuicumque in Republica doctorum Europae totius non hospiti, plurimis officiis meae etiam conditionis homines a Te affectos fuisse statuat necesse est. Nempe, tanquam Tibi uni esset iniunctum curare, ut floreant humanum ingenium illustrantes scientiae omnes hominumque in usus adinventae artes, ad singulis inservientium artifices etiam Te demittere dignaris, vel ab illa sublimium rerum perscrutatione Caelive ipsius Tibi tam nota regione, ut, quae hucusque mentes hominum metu complebant Phaenomena minus intellecta, per Te iam grato tantum admirationis sensu contemplentur eorumque causas habeant perspectas.

Hinc ille veluti ex condicto Academiarum Orbis eruditi concursus, ut adlectum Te coetui suo consequerentur, ornamento alias carituro insigni, quo ceteras nollent prae se frui. Hinc inprimis Illustrissimae Parisiensis de Te iudicium, cum ageretur de successore sufficiendo in locum emeriti Fontenellii, Viri, cuius ex ore calamoque fluere Scientiarum Artiumque omnium exquisitiores divitiae elegantiaeque universae perpetuo visae sunt et videbuntur, dum sani sensus quicquam humano ingenio erit. Tibi, scilicet, Commentariorum Academiae conscribendorum provincia, cui praefectus ille erat, demandabatur continuo; quam ut ornare diutius voluisses, docti omnes optabant: hoc uno minus dolentes Te aliter censuisse, quod aliis Tibi magis placituris profuturisque nihilominus litteris in universum eruditionis ingeniive thesauros impenderes. Quod ut ad ultimas usque metas hominum vitae positas incolumis, florens atque beatus praestes, omni votorum contentione precor. Vale!

Dabam Lausannae die 1. Aprilis
Anni Aerae Dionys. 1748.

PRAEFATIO

Saepenumero animadverti maximam difficultatum partem, quas Matheseos cultores in addiscenda Analysi infinitorum offendere solent, inde oriri, quod Algebra communi vix apprehensa animum ad illam sublimiorem artem appellant; quo fit, ut non solum quasi in limine subsistant, sed etiam perversas ideas illius infiniti, cuius notio in subsidium vocatur, sibi forment. Quanquam autem Analysis infinitorum non perfectam Algebrae communis omniumque artificiorum adhuc inventorum cognitionem requirit, tamen plurimae extant quaestiones, quarum evolutio discentium animos ad sublimiorem scientiam praeparare valet, quae tamen in communibus Algebrae elementis vel omittuntur vel non satis accurate pertractantur. Hanc ob rem non dubito, quin ea, quae in his libris congessi, hunc defectum abunde supplere queant. Non solum enim operam dedi, ut eas res, quas Analysis infinitorum absolute requirit, uberius atque distinctius exponerem, quam vulgo fieri solet, sed etiam satis multas quaestiones enodavi, quibus lectores sensim et quasi praeter expectationem ideam infiniti sibi familiarem reddent. Plures quoque quaestiones per praecepta communis Algebrae hic resolvi, quae vulgo in Analysi infinitorum tractantur, quo facilius deinceps utriusque methodi summus consensus eluceat.

Divisi hoc opus in duos libros, in quorum priori, quae ad meram Analysin pertinent, sum complexus; in posteriori vero, quae ex Geometria sunt scitu necessaria, explicavi, quoniam Analysis infinitorum ita quoque tradi solet, ut simul eius applicatio ad Geometriam ostendatur. In utroque autem prima elementa praetermisi eaque tantum exponenda duxi, quae alibi vel omnino non vel minus commode tractata vel ex diversis principiis petita reperiuntur.

In primo igitur libro, cum universa Analysis infinitorum circa quantitates variabiles earumque functiones versetur, hoc argumentum de functionibus inprimis fusius exposui atque functionum tam transformationem quam resolutionem et evolutionem per series infinitas demonstravi. Complures enumeravi functionum species, quarum in Analysi sublimiori praecipue ratio est habenda. Primum eas distinxi in algebraicas et transcendentes; quarum illae per operationes in Algebra communi usitatas ex quantitatibus variabilibus formantur, hae vero vel per alias rationes componuntur vel ex iisdem operationibus infinities repetitis efficiuntur. Algebraicarum functionum primaria subdivisio fit in rationales et irrationales; priores docui cum in partes simpliciores tum in factores resolvere, quae operatio in Calculo integrali maximum adiumentum affert; posteriores vero quemadmodum idoneis substitutionibus ad formam rationalem perduci queant, ostendi. Evolutio autem per series infinitas ad utrumque genus aeque pertinet atque etiam ad functiones transcendentes summa cum utilitate applicari solet; at quantopere doctrina de seriebus infinitis Analysin sublimiorem amplificaverit, nemo est, qui ignoret.

Nonnulla igitur adiunxi capita, quibus plurium serierum infinitarum proprietates atque summas sum scrutatus, quarum quaedam ita sunt comparatae, ut sine subsidio Analyseos infinitorum vix investigari posse videantur. Huiusmodi series sunt, quarum summae exprimuntur vel per logarithmos vel arcus circulares; quae quantitates cum sint transcendentes, dum per quadraturam hyperbolae et circuli exhibentur, maximam partem demum in Analysi infinitorum tractari sunt solitae. Postquam autem a potestatibus ad quantitates exponentiales essem progressus, quae nil aliud sunt nisi potestates, quarum exponentes sunt variabiles, ex earum conversione maxime naturalem ac fecundam logarithmorum ideam sum adeptus; unde non solum amplissimus eorum usus sponte est consecutus, sed etiam ex ea cunctas series infinitas, quibus vulgo istae quantitates repraesentari solent, elicere licuit; hincque adeo facillimus se prodidit modus tabulas logarithmorum construendi. Simili modo in contemplatione arcuum circularium sum versatus, quod quantitatum genus, etsi a logarithmis maxime est diversum, tamen tam arcto vinculo est connexum, ut, dum alterum imaginarium fieri videtur, in alterum transeat. Repetitis autem ex Geometria, quae de inventione sinuum et cosinuum arcuum multiplorum ac submultiplorum traduntur, ex sinu vel cosinu cuiusque arcus expressi sinum cosinumque arcus minimi et quasi evanescentis, quo ipso ad series infinitas sum deductus; unde, cum arcus evanescens sinui suo sit aequalis, cosinus vero radio, quemvis arcum cum suo sinu et cosinu ope serierum infinitarum comparavi. Tum vero tam varias expressiones cum finitas tum infinitas pro huius generis quantitatibus obtinui, ut ad earum naturam perspiciendam Calculo infinitesimali prorsus non amplius esset opus. Atque quemadmodum logarithmi peculiarem algorithmum requirunt, cuius in universa Analysi summus extat usus, ita quantitates circulares ad certam quoque algorithmi normam perduxi, ut in calculo aeque commode ac logarithmi et ipsae

quantitates algebraicae tractari possent. Quantum autem hinc utilitatis ad resolutionem difficillimarum quaestionum redundet, cum nonnulla capita huius libri luculenter declarant, tum ex Analysi infinitorum plurima specimina proferri possent, nisi iam satis essent cognita et in dies magis multiplicarentur.

Maximum autem haec investigatio attulit adiumentum ad functiones fractas in factores reales resolvendas; quod argumentum, cum in Calculo integrali sit prorsus necessarium, diligentius enucleavi. Series postmodum infinitas, quae ex huiusmodi functionum evolutione nascuntur et quae recurrentium nomine innotuerunt, examini subieci; ubi earum tam summas quam terminos generales aliasque insignes proprietates exhibui, et quoniam ad haec resolutio in factores manuduxit, ita vicissim, quemadmodum producta ex pluribus, immo etiam infinitis factoribus conflata per multiplicationem in series explicentur, perpendi. Quod negotium non solum ad cognitionem innumerabilium serierum viam aperuit, sed quia hoc modo series in producta ex infinitis factoribus constantia resolvere licebat, satis commodas inveni expressiones numericas, quarum ope logarithmi sinuum, cosinuum et tangentium facillime supputari possunt. Praeterea quoque ex eodem fonte solutiones plurium quaestionum, quae circa partitionem numerorum proponi possunt, derivavi, cuiusmodi quaestiones sine hoc subsidio vires Analyseos superare videantur.

Haec tanta materiarum diversitas in plura volumina facile excrescere potuisset, sed omnia, quantum fieri potuit, tam succincte proposui, ut ubique fundamentum clarissime quidem explicaretur, uberior vero amplificatio industriae lectorum relinqueretur, quo habeant, quibus vires suas exerceant finesque Analyseos ulterius promoveant. Neque enim vereor profiteri in hoc libro non solum multa plane nova contineri, sed etiam fontes esse detectos, unde plurima insignia inventa adhuc hauriri queant.

Eodem instituto sum usus in altero[1]) libro, ubi, quae vulgo ad Geometriam sublimiorem referri solent, pertractavi. Antequam autem de sectionibus conicis, quae alias fere solae hunc locum occupant, agerem, theoriam linearum curvarum in genere ita proposui, ut ad scrutationem naturae quarumvis linearum curvarum cum utilitate adhiberi posset. Ad hoc nullum aliud subsidium affero praeter aequationem, qua cuiusque lineae curvae natura exprimitur, ex eaque cum figuram tum primarias proprietates deducere doceo; id quod potissimum in sectionibus conicis praestitisse mihi sum visus, quae antehac vel secundum solam Geometriam vel per Analysin quidem, sed nimis imperfecte ac minus naturaliter tractari sunt solitae. Ex aequatione scilicet generali pro lineis secundi ordinis primum earum proprietates generales explicavi, tum eas in genera seu species subdivisi respiciendo, utrum habeant ramos in infinitum excurrentes, an vero tota curva finito spatio includatur. Priori autem casu in-

1) *Leonhardi Euleri Opera omnia*, series I, vol. 9. A. K.

super dispiciendum erat, quot sint rami in infinitum excurrentes et cuius naturae sint singuli, an habeant lineas rectas asymptotas[1]) an minus. Sicque obtinui tres consuetas sectionum conicarum species, quarum prima est ellipsis, tota in spatio finito contenta, secunda autem hyperbola, quae quatuor habet ramos infinitos ad duas rectas asymptotas convergentes; tertia vero species prodiit parabola duos habens ramos infinitos asymptotis destitutos.

Simili porro ratione lineas tertii ordinis sum persecutus, quas post expositas earum proprietates generales divisi in sedecim genera ad eaque omnes septuaginta duas species NEUTONI[2]) revocavi. Ipsam vero methodum ita clare descripsi, ut pro quovis linearum ordine sequente divisio in genera facillime institui queat; cuius negotii periculum quoque feci in lineis quarti ordinis.

His deinde, quae ad ordines linearum pertinent, expeditis reversus sum ad generales omnium linearum affectiones eruendas. Explicavi itaque methodum definiendi tangentes curvarum, earum normales atque etiam ipsam curvaturam, quae per radium osculi aestimari solet; quae etsi nunc quidem plerumque Calculo differentiali absolvuntur, tamen idem per solam communem Algebram hic praestiti, ut deinceps transitus ab Analysi finitorum ad Analysin infinitorum eo facilior reddatur. Perpendi etiam curvarum puncta flexus contrarii, cuspides, puncta duplicia ac multiplicia; modumque exposui haec omnia ex aequationibus sine ulla difficultate definiendi. Interim tamen non nego has quaestiones multo facilius Calculi differentialis ope enodari posse. Attigi quoque controversiam de cuspide secundi ordinis, ubi ambo arcus in cuspidem coeuntes curvaturam in eandem partem vertunt, eamque ita composuisse mihi videor, ut nullum dubium amplius superesse possit. Denique adiunxi aliquot capita, in quibus lineas curvas, quae datis proprietatibus gaudeant, invenire docui pluraque tandem problemata circa singulares circuli sectiones soluta dedi.

Quae cum sint ea ex Geometria, quae ad Analysin infinitorum addiscendam maximum adminiculum afferre videntur, appendicis loco ex Stereometria theoriam solidorum eorumque superficierum per calculum proposui et, quemadmodum cuiusque superficiei natura per aequationem inter tres variabiles exponi queat, ostendi. Hinc superficiebus instar linearum in ordines digestis secundum dimensionum, quas variabiles in aequatione constituunt, numerum in primo ordine solam superficiem planam contineri ostendi. Superficies vero secundi ordinis ratione habita partium in infinitum expansarum in sex genera divisi similique modo pro ceteris ordinibus divisio institui poterit. Contemplatus sum quoque intersectiones duarum

1) EULERUS plerumque *asymtota* scripsit, sed invenitur etiam hac in ipsa praefatione scribendi modus *asymptota*. A. K.

2) I. NEWTON (1643—1727), *Enumeratio linearum tertii ordinis*, Londini 1706; *I. Newtoni Opuscula mathematica etc.* Lausannae et Genevae 1744, t. I, p. 245. A. K.

superficierum; quae cum plerumque sint curvae non in eodem plano sitae, quemadmodum aequationibus comprehendi queant, monstravi. Tandem etiam positionem planorum tangentium atque rectarum, quae ad superficies sint normales, determinavi.

De cetero, cum non paucae res hic occurrant ab aliis iam tractatae, veniam rogare me oportet, quod non ubique honorificam mentionem eorum, qui ante me in eodem genere elaborarunt, fecerim. Cum enim mihi propositum esset omnia quam brevissime pertractare, historia cuiusque problematis magnitudinem operis non mediocriter auxisset. Interim tamen pleraeque quaestiones, quae alibi quoque solutae reperiuntur, hic solutiones ex aliis principiis sunt nactae, ita ut non exiguam partem mihi vindicare possem. Spero autem cum ista tum ea potissimum, quae prorsus nova hic proferuntur, plerisque, qui hoc studio delectantur, non ingrata esse futura.

INDEX CAPITUM

TOMI PRIMI

INTRODUCTIO
IN
ANALYSIN INFINITORUM.

LIBER PRIMUS,

Continens

Explicationem de Functionibus quantitatum variabilium ; earum resolutione in Factores, atque evolutione per Series infinitas : una cum doctrina de Logarithmis, Arcubus circularibus, eorumque Sinubus & Tangentibus; pluribusque aliis rebus, quibus Analysis infinitorum non mediocriter adjuvatur.

LIBER PRIMUS

CAPUT I

DE FUNCTIONIBUS IN GENERE

1. *Quantitas constans est quantitas determinata perpetuo eundem valorem servans.*

Eiusmodi quantitates sunt numeri cuiusvis generis, quippe qui eundem, quem semel obtinuerunt, valorem constanter conservant; atque si huiusmodi quantitates constantes per characteres indicare convenit, adhibentur litterae alphabeti initiales a, b, c etc. In Analysi quidem communi, ubi tantum quantitates determinatae considerantur, hae litterae alphabeti priores quantitates cognitas denotare solent, posteriores vero quantitates incognitas; at in Analysi sublimiori hoc discrimen non tantopere spectatur, cum hic ad illud quantitatum discrimen praecipue respiciatur, quo aliae constantes, aliae vero variabiles statuuntur.

2. *Quantitas variabilis est quantitas indeterminata seu universalis, quae omnes omnino valores determinatos in se complectitur.*

Cum ergo omnes valores determinati numeris exprimi queant, quantitas variabilis omnes numeros cuiusvis generis involvit. Quemadmodum scilicet ex ideis individuorum formantur ideae specierum et generum, ita quantitas variabilis est genus, sub quo omnes quantitates determinatae continentur. Huiusmodi autem quantitates variabiles per litteras alphabeti postremas z, y, x etc. repraesentari solent.

3. *Quantitas variabilis determinatur, dum ei valor quicunque determinatus tribuitur.*

Quantitas ergo variabilis innumerabilibus modis determinari potest, cum omnes omnino numeros eius loco substituere liceat. Neque significatus quantitatis variabilis exhauritur, nisi omnes valores determinati eius loco fuerint substituti. Quantitas ergo variabilis in se complectitur omnes prorsus numeros, tam affirmativos quam negativos, tam integros quam fractos, tam rationales quam irrationales et transcendentes. Quin etiam cyphra et numeri imaginarii a significatu quantitatis variabilis non excluduntur.

4. *Functio quantitatis variabilis est expressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili et numeris seu quantitatibus constantibus.*

Omnis ergo expressio analytica, in qua praeter quantitatem variabilem z omnes quantitates illam expressionem componentes sunt constantes, erit functio ipsius z. Sic

$$a+3z, \quad az-4zz, \quad az+b\sqrt{(aa-zz)}, \quad c^z \text{ etc.}$$

sunt functiones ipsius z.

5. *Functio ergo quantitatis variabilis ipsa erit quantitas variabilis.*

Cum enim loco quantitatis variabilis omnes valores determinatos substituere liceat, hinc functio innumerabiles valores determinatos induet; neque ullus valor determinatus excipietur, quem functio induere nequeat, cum quantitas variabilis quoque valores imaginarios involvat. Sic, etsi haec functio

$$\sqrt{(9-zz)}$$

numeris realibus loco z substituendis nunquam valorem ternario maiorem recipere potest, tamen ipsi z valores imaginarios tribuendo, ut $5\sqrt{-1}$, nullus assignari poterit valor determinatus, quin ex formula $\sqrt{(9-zz)}$ elici queat. Occurrunt autem nonnunquam functiones tantum apparentes, quae, utcunque quantitas variabilis varietur, tamen usque eundem valorem retinent, ut

$$z^0, \quad 1^z, \quad \frac{aa-az}{a-z},$$

quae, etsi speciem functionis mentiuntur, tamen revera sunt quantitates constantes.

6. *Praecipuum functionum discrimen in modo compositionis, quo ex quantitate variabili et quantitatibus constantibus formantur, positum est.*

Pendet ergo ab operationibus, quibus quantitates inter se componi et permisceri possunt; quae operationes sunt additio et subtractio, multiplicatio et divisio, evectio ad potestates et radicum extractio, quo etiam resolutio aequationum est referenda. Praeter has operationes, quae algebraicae vocari solent, dantur complures aliae transcendentes, ut exponentiales, logarithmicae atque innumerabiles aliae, quas Calculus integralis suppeditat.

Interim species quaedam functionum notari possunt, ut multipla

$$2z, \quad 3z, \quad \frac{3}{5}z, \quad az \text{ etc.}$$

et potestates ipsius z, ut

$$z^2, \quad z^3, \quad z^{\frac{1}{2}}, \quad z^{-1} \text{ etc.};$$

quae uti ex unica operatione sunt desumptae, ita expressiones, quae ex operationibus quibuscunque nascuntur, functionum nomine insigniuntur.

7. *Functiones dividuntur in algebraicas et transcendentes; illae sunt, quae componuntur per operationes algebraicas solas; hae vero, in quibus operationes transcendentes insunt.*

Sunt ergo multipla ac potestates ipsius z functiones algebraicae atque omnes omnino expressiones, quae per operationes algebraicas ante memoratas formantur, cuiusmodi est

$$\frac{a+bz^n-c\sqrt{(2z-zz)}}{aaz-3bz^3}.$$

Quin etiam functiones algebraicae saepenumero ne quidem explicite exhiberi possunt, cuiusmodi functio ipsius z est Z, si definiatur per huiusmodi aequationem

$$Z^5 = azzZ^3 - bz^4Z^2 + cz^3Z - 1.$$

Quanquam enim haec aequatio resolvi nequit, tamen constat Z aequari expressioni cuipiam ex variabili z et constantibus compositae ac propterea fore Z functionem quandam ipsius z.[1]) Ceterum de functionibus transcendentibus notandum est eas demum fore transcendentes, si operatio transcendens non solum ingrediatur, sed etiam quantitatem variabilem afficiat. Si enim operationes transcendentes tantum ad quantitates constantes pertineant, functio nihilominus algebraica est censenda; uti si c denotet circumferentiam circuli, cuius radius sit $= 1$, erit utique c quantitas transcendens, verumtamen hae expressiones

$$c + z, \quad cz^2, \quad 4z^c \quad \text{etc.}$$

erunt functiones algebraicae ipsius z. Parvi quidem est momenti dubium, quod a quibusdam movetur, utrum eiusmodi expressiones z^c functionibus algebraicis annumerari iure possint necne; quin etiam potestates ipsius z, quarum exponentes sint numeri irrationales, uti $z^{\sqrt{2}}$, nonnulli maluerunt functiones *interscendentes* quam algebraicas appellare.[2])

8. *Functiones algebraicae subdividuntur in rationales et irrationales; illae sunt, si quantitas variabilis in nulla irrationalitate involvitur; hae vero, in quibus signa radicalia quantitatem variabilem afficiunt.*

In functionibus ergo rationalibus aliae operationes praeter additionem, subtractionem, multiplicationem, divisionem et evectionem ad potestates, quarum exponentes sint numeri integri, non insunt; erunt adeo

$$a + z, \quad a - z, \quad az, \quad \frac{aa + zz}{a + z}, \quad az^3 - bz^5 \quad \text{etc.}$$

1) Hanc opinionem, omnem radicem cuiusque aequationis expressioni cuipiam ex variabili et constantibus compositae aequari debere, EULERUS non semel enuntiavit; confer praeter paragraphos 8 et 17 huius operis Commentationes 30 et 282 (indicis ENESTROEMIANI): *De formis radicum aequationum cuiusque ordinis coniectatio,* Comment. acad. sc. Petrop. 6 (1732/3), 1738, p. 216, et *De resolutione aequationum cuiusvis gradus*, Novi comment. acad. sc. Petrop. 6 (1762/3), 1764, p. 70; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 6. p. 1 et 170. A. K.

2) Vide epistolam a G. LEIBNIZ (1646—1716) ad J. WALLIS (1616—1703) scriptam d. 28. Maii 1697; *LEIBNIZENS Mathematische Schriften,* herausg. von C. I. GERHARDT, 1. Abt., Bd. 4, Halle 1859, p. 28. A. K.

functiones rationales ipsius z. At huiusmodi expressiones

$$\sqrt{z}, \quad a + \sqrt{(aa - zz)}, \quad \sqrt[3]{(a - 2z + zz)}, \quad \frac{aa - z\sqrt{(aa + zz)}}{a + z} \quad \text{etc.}$$

erunt functiones irrationales ipsius z.

Hae commode distinguuntur in explicitas et implicitas.

Explicitae sunt, quae per signa radicalia sunt evolutae, cuiusmodi exempla modo sunt data. *Implicitae* vero functiones irrationales sunt, quae ex resolutione aequationum ortum habent. Sic Z erit functio irrationalis implicita ipsius z, si per huiusmodi aequationem

$$Z^7 = azZ^2 - bz^5$$

definiatur, quoniam valorem explicitum pro Z admissis etiam signis radicalibus exhibere non licet, propterea quod Algebra communis nondum ad hunc perfectionis gradum est evecta.[1])

9. *Functiones rationales denuo subdividuntur in integras et fractas.*

In illis neque z usquam habet exponentes negativos neque expressiones continent fractiones, in quarum denominatores quantitas variabilis z ingrediatur; unde intelligitur functiones fractas esse, in quibus denominatores z continentes vel exponentes negativi ipsius z occurrant. Functionum integrarum haec ergo erit formula generalis

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + \text{etc.};$$

nulla enim functio ipsius z integra excogitari potest, quae non in hac expressione contineatur. Functiones autem fractae omnes, quia plures fractiones in unam cogi possunt, continebuntur in hac formula

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + \text{etc.}}{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \zeta z^5 + \text{etc.}},$$

ubi notandum est quantitates constantes a, b, c, d etc., α, β, γ, δ etc., sive sint affirmativae sive negativae, sive integrae sive fractae, sive rationales sive irrationales sive etiam transcendentes, naturam functionum non mutare.

1) Vide notam 1 p. 20. A. K.

10. *Deinde potissimum tenenda est functionum divisio in uniformes ac multiformes.*

Functio autem *uniformis* est, quae, si quantitati variabili z valor determinatus quicunque tribuatur, ipsa quoque unicum valorem determinatum obtineat. Functio autem *multiformis* est, quae pro unoquoque valore determinato in locum variabilis z substituto plures valores determinatos exhibet.

Sunt igitur omnes functiones rationales, sive integrae sive fractae, functiones uniformes, quoniam eiusmodi expressiones, quicunque valor quantitati variabili tribuatur, non nisi unicum valorem praebent. Functiones autem irrationales omnes sunt multiformes, propterea quod signa radicalia sunt ambigua et geminum valorem involvunt. Dantur autem quoque inter functiones transcendentes et uniformes et multiformes; quin etiam habentur functiones infinitiformes, cuiusmodi est arcus circuli sinui z respondens; dantur enim arcus circulares innumerabiles, qui omnes eundem habeant sinum.

Denotent autem hae litterae P, Q, R, S, T etc. singulae functiones uniformes ipsius z.

11. *Functio biformis ipsius z est eiusmodi functio, quae pro quovis ipsius z valore determinato geminum valorem praebeat.*

Huiusmodi functiones radices quadratae exhibent, ut $\sqrt{(2z+zz)}$; quicunque enim valor pro z statuatur, expressio $\sqrt{(2z+zz)}$ duplicem habet significatum, vel affirmativum vel negativum. Generatim vero Z erit functio biformis ipsius z, si determinetur per aequationem quadraticam

$$Z^2-PZ+Q=0,$$

si quidem P et Q fuerint functiones uniformes ipsius z. Erit namque

$$Z=\frac{1}{2}P\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}P^2-Q\right)};$$

ex quo patet cuique valori determinato ipsius z duplicem valorem determinatum ipsius Z respondere. Hic autem notandum est vel utrumque valorem functionis Z esse realem vel utrumque imaginarium. Tum vero erit semper, uti constat ex natura aequationum, binorum valorum ipsius Z summa $=P$ ac productum $=Q$.

12. *Functio triformis ipsius z est, quae pro quovis ipsius z valore tres valores determinatos exhibet.*

Huiusmodi functiones ex resolutione aequationum cubicarum originem trahunt. Si enim fuerint P, Q et R functiones uniformes sitque

$$Z^3-PZ^2+QZ-R=0,$$

erit Z functio triformis ipsius z, quia pro quolibet valore determinato ipsius z triplicem valorem obtinet. Tres isti ipsius Z valores unicuique valori ipsius z respondentes vel erunt omnes reales vel unicus erit realis, dum bini reliqui sunt imaginarii. Ceterum constat horum trium valorum summam perpetuo esse $=P$, summam factorum ex binis esse $=Q$ et productum ex omnibus tribus esse $=R$.

13. *Functio quadriformis ipsius z est, quae pro quovis ipsius z valore quatuor valores determinatos exhibet.*

Huiusmodi functiones ex resolutione aequationum biquadraticarum nascuntur. Quodsi enim P, Q, R et S denotent functiones uniformes ipsius z fueritque

$$Z^4-PZ^3+QZ^2-RZ+S=0,$$

erit Z functio quadriformis ipsius z, eo quod cuique valori ipsius z quadruplex valor ipsius Z respondet. Quatuor horum valorum ergo vel omnes erunt reales vel duo reales duoque imaginarii, vel omnes quatuor erunt imaginarii. Ceterum perpetuo summa horum quatuor valorum ipsius Z est $=P$, summa factorum ex binis $=Q$, summa factorum ex ternis $=R$ ac productum omnium $=S$.

Simili autem modo comparata est ratio functionum quinqueformium et sequentium.

14. *Erit ergo Z functio multiformis ipsius z, quae pro quovis valore ipsius z tot exhibet valores, quot numerus n continet unitates, si Z definiatur per hanc aequationem*

$$Z^n-PZ^{n-1}+QZ^{n-2}-RZ^{n-3}+SZ^{n-4}-\text{etc.}=0.$$

Ubi quidem notandum est n esse oportere numerum integrum atque perpetuo, ut diiudicari possit, quam multiformis sit functio Z ipsius z, aequatio, per quam Z definitur, reduci debet ad rationalitatem; quo facto exponens maximae potestatis ipsius Z indicabit quaesitum valorum numerum cuique ipsius z valori respondentium. Deinde quoque tenendum est litteras P, Q, R, S etc. denotare debere functiones uniformes ipsius z; si enim aliqua earum iam esset functio multiformis, tum functio Z multo plures praebitura esset valores unicuique valori ipsius z respondentes, quam quidem numerus dimensionum ipsius Z indicaret. Semper autem, si qui valores ipsius Z fuerint imaginarii, eorum numerus erit par[1]); unde intelligitur, si fuerit n numerus impar, perpetuo unum ad minimum valorem ipsius Z fore realem, contra autem fieri posse, si numerus n fuerit par, ut nullus prorsus valor ipsius Z sit realis.

15. *Si Z eiusmodi fuerit functio multiformis ipsius z, ut perpetuo nonnisi unicum valorem exhibeat realem, tum Z functionem uniformem ipsius z mentietur ac plerumque loco functionis uniformis usurpari poterit.*

Eiusmodi functiones erunt

$$\sqrt[3]{P}, \quad \sqrt[5]{P}, \quad \sqrt[7]{P} \quad \text{etc.},$$

quippe quae perpetuo nonnisi unicum valorem realem praebent reliquis omnibus existentibus imaginariis, dummodo P fuerit functio uniformis ipsius z. Hanc ob rem huiusmodi expressio $P^{\frac{m}{n}}$, quoties n fuerit numerus impar, functionibus uniformibus annumerari poterit, sive m fuerit numerus par sive impar. Quodsi autem n fuerit numerus par, tum $P^{\frac{m}{n}}$ vel nullum habebit valorem realem vel duos; ex quo eiusmodi expressiones $P^{\frac{m}{n}}$ existente n numero pari eodem iure functionibus biformibus accenseri poterunt, siquidem fractio $\frac{m}{n}$ ad minores terminos non fuerit reducibilis.

16. *Si fuerit y functio quaecunque ipsius z, tum vicissim z erit functio ipsius y.*

Cum enim y sit functio ipsius z, sive uniformis sive multiformis, dabitur aequatio, qua y per z et constantes quantitates definitur. Ex eadem vero aequatione vicissim z per y et constantes definiri poterit; unde, quoniam

1) Vide § 30 et imprimis notam 1 ibi adiectam. A. K.

y est quantitas variabilis, z aequabitur expressioni ex y et constantibus compositae eritque adeo functio ipsius y. Hinc quoque patebit, quam multiformis functio futura sit z ipsius y, fierique potest, ut, etiamsi y fuerit functio uniformis ipsius z, tamen z futura sit functio multiformis ipsius y. Sic, si y ex hac aequatione per z definiatur

$$y^3 = ayz - bzz,$$

erit utique y functio triformis ipsius z, contra vero z functio tantum biformis ipsius y.

17. *Si fuerint y et x functiones ipsius z, erit quoque y functio ipsius x et vicissim x functio ipsius y.*

Cum enim sit y functio ipsius z, erit quoque z functio ipsius y simílique modo erit etiam z functio ipsius x. Hanc ob rem functio ipsius y aequalis erit functioni ipsius x; ex qua aequatione et y per x et viceversa x per y definiri poterit; quocirca manifestum est esse y functionem ipsius x atque x functionem ipsius y. Saepissime quidem has functiones explicite exhibere non licet ob defectum Algebrae[1]); interim tamen nihilominus, quasi omnes aequationes resolvi possent, haec functionum reciprocatio perspicitur. Ceterum per methodum in Algebra traditam ex datis binis aequationibus, quarum altera continet y et z, altera vero x et z, per eliminationem quantitatis z formabitur una aequatio relationem inter x et y exprimens.[2])

18. *Species denique quaedam functionum peculiares sunt notandae; sic functio par ipsius z est, quae eundem dat valorem, sive pro z ponatur valor determinatus $+k$ sive $-k$.*

Huiusmodi ergo functio par ipsius z erit zz; sive enim ponatur $z = +k$ sive $z = -k$, eundem valorem praebebit expressio zz, nempe

1) Vide notam 1 p. 20. A. K.

2) I. Newton, *Arithmetica universalis*, Cantabrigiae 1707, 3. ed. Lugd. Batav. 1732, p. 57—63. Vide porro L. Euleri Commentationem 310 (indicis Enestroemiani): *Nouvelle méthode d'éliminer les quantités inconnues des équations*, Mém. de l'acad. d. sc. de Berlin [20] (1764), 1766, p. 91; *Leonhardi Euleri Opera omnia*, series I, vol. 6, p. 197. A. K.

$zz = +kk$. Simili modo functiones pares ipsius z erunt hae ipsius z potestates z^4, z^6, z^8 et generatim omnis potestas z^m, si fuerit m numerus par, sive affirmativus sive negativus. Quin etiam, cum $z^{\frac{m}{n}}$ mentiatur functionem ipsius z uniformem, si n sit numerus impar, perspicuum est $z^{\frac{m}{n}}$ fore functionem parem ipsius z, si m fuerit numerus par, n vero numerus impar. Hanc ob rem expressiones ex huiusmodi potestatibus utcunque compositae praebebunt functiones pares ipsius z; sic Z erit functio par ipsius z, si fuerit

$$Z = a + bz^2 + cz^4 + dz^6 + \text{etc.},$$

item si fuerit

$$Z = \frac{a + bz^2 + cz^4 + dz^6 + \text{etc.}}{\alpha + \beta z^2 + \gamma z^4 + \delta z^6 + \text{etc.}}.$$

Similique modo exponentes fractos ipsius z introducendo erit Z functio par ipsius z, si fuerit

$$Z = a + bz^{\frac{2}{3}} + cz^{\frac{2}{5}} + dz^{\frac{4}{7}} + \text{etc.}$$

vel

$$Z = a + bz^{-\frac{2}{3}} + cz^{-\frac{4}{3}} + dz^{-\frac{2}{5}} + \text{etc.}$$

vel

$$Z = \frac{a + bz^{\frac{2}{7}} + cz^{-\frac{4}{5}} + dz^{\frac{8}{3}} + \text{etc.}}{\alpha + \beta z^{\frac{2}{3}} + \gamma z^{-\frac{2}{5}} + \delta z^{\frac{4}{7}} + \text{etc.}}.$$

Cuiusmodi expressiones, cum omnes sint functiones uniformes ipsius z, appellari poterunt functiones pares uniformes ipsius z.

19. *Functio multiformis par ipsius z est, quae, etiamsi pro quovis valore ipsius z plures exhibeat valores determinatos, tamen eosdem valores praebet, sive ponatur $z = +k$ sive $z = -k$.*

Sit Z eiusmodi functio multiformis par ipsius z; quoniam natura functionis multiformis exprimitur per aequationem inter Z et z, in qua Z tot habeat dimensiones, quot varios valores complectatur, manifestum est Z fore functionem multiformem parem, si in aequatione naturam ipsius Z exprimente quantitas variabilis z ubique pares habeat dimensiones. Sic, si fuerit

$$Z^2 = az^4 Z + bz^2,$$

erit Z functio biformis par ipsius z; sin autem sit

$$Z^3 - az^2 Z^2 + bz^4 Z - cz^8 = 0,$$

erit Z functio triformis par ipsius z; atque generatim, si P, Q, R, S etc. denotent functiones uniformes pares ipsius z, erit Z functio biformis par ipsius z, si sit

$$Z^2 - PZ + Q = 0.$$

At Z erit functio triformis par ipsius z, si sit

$$Z^3 - PZ^2 + QZ - R = 0,$$

et ita porro.

20. *Functio ergo, sive uniformis sive multiformis, par ipsius z erit eiusmodi expressio ex quantitate variabili z et constantibus conflata, in qua ubique numerus dimensionum ipsius z sit par.*

Huiusmodi ergo functiones praeter uniformes, quarum exempla ante sunt allata, erunt hae expressiones

$$a + \sqrt{(bb - zz)}, \quad azz + \sqrt[3]{(a^6 z^4 - bz^2)}, \quad \text{item} \quad az^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{(z^2 + \sqrt{(a^4 - z^4)})} \quad \text{etc.}$$

Unde patet functiones pares ita definiri posse, ut dicantur esse functiones ipsius zz.

Si enim ponatur $y = zz$ fueritque Z functio quaecunque ipsius y, restituto ubique zz loco y erit Z eiusmodi functio ipsius z, in qua z ubique parem habeat dimensionum numerum. Excipiendi tamen sunt ii casus, quibus in expressione ipsius Z occurrunt $\sqrt{y}$ ac huiusmodi aliae formae, quae facto $y = zz$ signa radicalia amittunt. Quamvis enim sit $y + \sqrt{ay}$ functio ipsius y, tamen posito $y = zz$ eadem expressio non erit functio par ipsius z, cum fiat

$$y + \sqrt{ay} = zz + z\sqrt{a}.$$

Exclusis ergo his casibus definitio ultima functionum parium erit bona atque ad eiusmodi functiones formandas idonea.

4*

21. *Functio impar ipsius z est eiusmodi functio, cuius valor, si loco z ponatur $-z$, fit quoque negativus.*

Huiusmodi functiones ergo impares erunt omnes potestates ipsius z, quarum exponentes sunt numeri impares, ut z^1, z^3, z^5, z^7 etc., item z^{-1}, z^{-3}, z^{-5} etc.; tum vero etiam $z^{\frac{m}{n}}$ erit functio impar, si ambo numeri m et n fuerint numeri impares. Generatim vero omnis expressio ex huiusmodi potestatibus composita erit functio impar ipsius z; cuiusmodi sunt

$$az+bz^3,\quad az+az^{-1},\quad \text{item}\quad z^{\frac{1}{3}}+az^{\frac{3}{5}}+bz^{-\frac{5}{3}}\ \text{etc.}$$

Harum autem functionum natura et inventio ex functionibus paribus facilius perspicietur.

22. *Si functio par ipsius z multiplicetur per z vel per eiusdem functionem imparem quamcunque, productum erit functio impar ipsius z.*

Sit P functio par ipsius z, quae idcirco manet eadem, si loco z ponatur $-z$; quodsi ergo in producto Pz ponatur $-z$ loco z, prodibit $-Pz$, unde Pz erit functio impar ipsius z. Sit iam P functio par ipsius z et Q functio impar ipsius z atque ex definitione patet, si loco z ponatur $-z$, valorem ipsius P manere eundem, at valorem ipsius Q abire in sui negativum $-Q$, quare productum PQ posito $-z$ loco z abibit in $-PQ$, hoc est in sui negativum, eritque ideo PQ functio impar ipsius z. Sic, cum sit $a+\sqrt{(aa+zz)}$ functio par et z^3 functio impar ipsius z, erit productum

$$az^3+z^3\sqrt{(aa+zz)}$$

functio impar ipsius z similique modo

$$z\times\frac{a+bzz}{\alpha+\beta zz}=\frac{az+bz^3}{\alpha+\beta zz}$$

functio impar ipsius z.

Ex his vero etiam intelligitur, si duarum functionum P et Q, quarum altera P est par, altera Q impar, altera per alteram dividatur, quotum fore functionem imparem; erit ergo $\frac{P}{Q}$ itemque $\frac{Q}{P}$ functio impar ipsius z.

23. *Si functio impar per functionem imparem vel multiplicetur vel dividatur, quod resultat erit functio par.*

Sint Q et S functiones impares ipsius z, ita ut posito $-z$ loco z Q abeat in $-Q$ et S in $-S$, atque perspicuum est tam productum QS quam quotum $\frac{Q}{S}$ eundem valorem retinere, etiamsi pro z ponatur $-z$, ideoque esse utrumque functionem parem ipsius z. Manifestum itaque porro est cuiusque functionis imparis quadratum esse functionem parem, cubum vero functionem imparem, biquadratum iterum functionem parem atque ita porro.

24. *Si fuerit y functio impar ipsius z, erit vicissim z functio impar ipsius y.*

Cum enim sit y functio impar ipsius z, si ponatur $-z$ loco z, abibit y in $-y$. Quodsi ergo z per y definiatur, necesse est, ut posito $-y$ loco y quoque z abeat in $-z$, eritque ideo z functio impar ipsius y. Sic, quia posito

$$y=z^3$$

est y functio impar ipsius z, erit quoque ex aequatione

$$z^3=y\quad\text{seu}\quad z=y^{\frac{1}{3}}$$

z functio impar ipsius y. Et quia, si fuerit

$$y=az+bz^3,$$

est y functio impar ipsius z, erit vicissim ex aequatione

$$bz^3+az=y$$

valor ipsius z per y expressus functio impar ipsius y.

25. *Si natura functionis y per eiusmodi aequationem definiatur, in cuius singulis terminis numerus dimensionum, quas y et z occupant coniunctim, sit vel par ubique vel impar, tum erit y functio impar ipsius z.*

Quodsi enim in eiusmodi aequatione ubique loco z scribatur $-z$ simulque $-y$ loco y, omnes aequationis termini vel manebunt iidem vel fient negativi, utroque vero casu aequatio manebit eadem. Unde patet $-y$ eodem modo per $-z$ determinatum iri, quo $+y$ per $+z$ determinatur, et hanc ob rem, si loco z ponatur $-z$, valor ipsius y abibit in $-y$ seu y erit functio impar ipsius z. Sic, si fuerit vel

$$yy = ayz + bzz + c$$

vel

$$y^3 + ayyz = byzz + cy + dz,$$

ex utraque aequatione y erit functio impar ipsius z.

26. *Si Z fuerit functio ipsius z et Y functio ipsius y atque Y eodem modo definiatur per variabilem y et constantes, quo Z definitur per variabilem z et constantes, tum hae functiones Y et Z vocantur functiones similes ipsarum y et z.*

Si scilicet fuerit

$$Z = a + bz + cz^2 \quad \text{et} \quad Y = a + by + cy^2,$$

erunt Z et Y functiones similes ipsarum z et y similique modo in multiformibus, si fuerit

$$Z^3 = azzZ + b \quad \text{et} \quad Y^3 = ayyY + b,$$

erunt Z et Y functiones similes ipsarum z et y. Hinc sequitur, si Y et Z fuerint huiusmodi functiones similes ipsarum y et z, tum, si loco z scribatur y, functionem Z abituram esse in functionem Y. Solet haec similitudo etiam hoc modo verbis exprimi, ut Y talis functio dicatur ipsius y, qualis functio sit Z ipsius z. Hae locutiones perinde occurrent, sive quantitates variabiles z et y a se invicem pendeant sive secus; sic, qualis functio est

$$ay + by^3$$

ipsius y, talis functio erit

$$a(y+n) + b(y+n)^3$$

ipsius $y + n$, existente scilicet $z = y + n$; tum, qualis functio est

$$\frac{a + bz + czz}{\alpha + \beta z + \gamma zz}$$

ipsius z, talis functio erit

$$\frac{azz + bz + c}{\alpha zz + \beta z + \gamma}$$

ipsius $\frac{1}{z}$ posito $y = \frac{1}{z}$. Atque ex his luculenter perspicitur ratio similitudinis functionum, cuius per universam Analysin sublimiorem uberrimus est usus.

Ceterum haec in genere de natura functionum unius variabilis sufficere possunt, cum plenior expositio in applicatione sequente tradatur.

CAPUT II

DE TRANSFORMATIONE FUNCTIONUM

27. *Functiones in alias formas transmutantur vel loco quantitatis variabilis aliam introducendo vel eandem quantitatem variabilem retinendo.*

Quodsi eadem quantitas variabilis servatur, functio proprie mutari non potest. Sed omnis transformatio consistit in alio modo eandem functionem exprimendi, quemadmodum ex Algebra constat eandem quantitatem per plures diversas formas exprimi posse. Huiusmodi transformationes sunt, si loco huius functionis

$$2-3z+zz \quad \text{ponatur} \quad (1-z)(2-z),$$

vel

$$(a+z)^3 \quad \text{loco} \quad a^3+3aaz+3azz+z^3,$$

vel

$$\frac{a}{a-z}+\frac{a}{a+z} \quad \text{loco} \quad \frac{2aa}{aa-zz},$$

vel

$$\sqrt{(1+zz)}+z \quad \text{loco} \quad \frac{1}{\sqrt{(1+zz)}-z};$$

quae expressiones, etsi forma differunt, tamen revera congruunt. Saepenumero autem harum plurium formarum idem significantium una aptior est ad propositum efficiendum quam reliquae et hanc ob rem formam commodissimam eligi oportet.

Alter transformationis modus, quo loco quantitatis variabilis z alia quantitas variabilis y introducitur, quae quidem ad z datam teneat relationem, per substitutionem fieri dicitur; hocque modo ita uti convenit, ut functio

proposita succinctius et commodius exprimatur; uti, si ista proposita fuerit ipsius z functio

$$a^4-4a^3z+6aazz-4az^3+z^4,$$

si loco $a-z$ ponatur y, prodibit ista multo simplicior ipsius y functio

$$y^4,$$

et si habeatur haec functio irrationalis

$$\sqrt{(aa+zz)}$$

ipsius z, si ponatur

$$z=\frac{aa-yy}{2y},$$

ista functio per y expressa fiet rationalis

$$=\frac{aa+yy}{2y}.$$

Hunc autem transformationis modum in sequens caput differam hoc capite illum, qui sine substitutione procedit, expositurus.

28. *Functio integra ipsius z saepenumero commode in suos factores resolvitur sicque in productum transformatur.*

Quando functio integra hoc pacto in factores resolvitur, eius natura multo facilius perspicitur; casus enim statim innotescunt, quibus functionis valor fit $=0$. Sic haec ipsius z functio

$$6-7z+z^3$$

transformatur in hoc productum

$$(1-z)(2-z)(3+z),$$

ex quo statim liquet functionem propositam tribus casibus fieri $=0$, scilicet si $z=1$ et $z=2$ et $z=-3$, quae proprietates ex forma $6-7z+z^3$ non tam facile intelliguntur. Istiusmodi factores, in quibus variabilis z nulla [altior] occurrit potestas, vocantur factores *simplices*, ut distinguantur a factoribus *compositis*, in quibus ipsius z inest quadratum vel cubus vel alia potestas altior. Erit ergo in genere

$$f + gz$$

forma factorum simplicium,

$$f + gz + hzz$$

forma factorum duplicium,

$$f + gz + hzz + iz^3$$

forma factorum triplicium et ita porro. Perspicuum autem est factorem duplicem duos complecti factores simplices, factorem triplicem tres simplices et ita porro. Hinc functio ipsius z integra, in qua exponens summae potestatis ipsius z est $= n$, continebit n factores simplices; ex quo simul, si qui factores fuerint vel duplices vel triplices etc., numerus factorum cognoscetur.

29. *Factores simplices functionis cuiuscunque integrae Z ipsius z reperiuntur, si functio Z nihilo aequalis ponatur atque ex hac aequatione omnes ipsius z radices investigentur; singulae enim ipsius z radices dabunt totidem factores simplices functionis Z.*

Quodsi enim ex aequatione $Z = 0$ fuerit quaepiam radix $z = f$, erit $z - f$ divisor ac proinde factor functionis Z; sic igitur investigandis omnibus radicibus aequationis $Z = 0$, quae sint

$$z = f, \quad z = g, \quad z = h \quad \text{etc.},$$

functio Z resolvetur in suos factores simplices atque transformabitur in productum

$$Z = (z - f)(z - g)(z - h) \text{ etc.};$$

ubi quidem notandum est, si summae potestatis ipsius z in Z non fuerit coefficiens $= +1$, tum productum $(z-f)(z-g)$ etc. insuper per illum coefficientem multiplicari debere. Sic, si fuerit

$$Z = Az^n + Bz^{n-1} + Cz^{n-2} + \text{etc.},$$

erit

$$Z = A(z-f)(z-g)(z-h) \text{ etc.}$$

At si fuerit

$$Z = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc.}$$

atque aequationis $Z = 0$ radices z repertae sint f, g, h, i etc., erit

$$Z = A\left(1 - \frac{z}{f}\right)\left(1 - \frac{z}{g}\right)\left(1 - \frac{z}{h}\right) \text{ etc.}$$

Ex his autem vicissim intelligitur, si functionis Z factor fuerit $z - f$ seu $1 - \frac{z}{f}$, tum valorem functionis in nihilum abire, si loco z ponatur f. Facto enim $z = f$, unus factor $z - f$ seu $1 - \frac{z}{f}$ functionis Z ideoque ipsa functio Z evanescere debet.

30. *Factores simplices ergo erunt vel reales vel imaginarii et, si functio Z habeat factores imaginarios, eorum numerus semper erit par.*

Cum enim factores simplices nascantur ex radicibus aequationis $Z = 0$, radices reales praebebunt factores reales et imaginariae imaginarios; in omni autem aequatione numerus radicum imaginariarum semper est par, quamobrem functio Z vel nullos habebit factores imaginarios vel duos vel quatuor vel sex etc.[1]) Quodsi functio Z duos tantum habeat factores imaginarios, eorum productum erit reale ideoque praebebit factorem duplicem realem. Sit enim $P =$ producto ex omnibus factoribus realibus, erit productum duorum factorum imaginariorum $= \frac{Z}{P}$ hincque reale. Simili modo si functio Z habeat quatuor vel sex vel octo etc. factores imaginarios, erit eorum productum semper reale, nempe aequale quoto, qui oritur, si functio Z dividatur per productum omnium factorum realium.

31. *Si fuerit Q productum reale ex quatuor factoribus simplicibus imaginariis, tum idem hoc productum Q resolvi poterit in duos factores duplices reales.*[2])

Habebit enim Q eiusmodi formam

$$z^4 + Az^3 + Bz^2 + Cz + D;$$

quae si negetur in duos factores duplices reales resolvi posse, resolubilis erit

1) Confer § 35 et 36, porro L. EULERI Commentationem 170 (indicis ENESTROEMIANI): *Recherches sur les racines imaginaires des équations*, Mém. de l'acad. d. sc. de Berlin 5 (1749), 1751, p. 222; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 6, p. 78. A. K.

2) Vide § 9 Commentationis 170 modo laudatae, imprimis notam ibi adiectam. A. K.

statuenda in duos factores duplices imaginarios, qui huiusmodi formam habebunt

$$zz - 2(p + q\sqrt{-1})z + r + s\sqrt{-1}$$

et

$$zz - 2(p - q\sqrt{-1})z + r - s\sqrt{-1};$$

aliae enim formae imaginariae concipi non possunt, quarum productum fiat reale, nempe $= z^4 + Az^3 + Bz^2 + Cz + D$. Ex his autem factoribus imaginariis duplicibus sequentes emergent quatuor factores simplices imaginarii ipsius Q:

$$\text{I. } z - (p + q\sqrt{-1}) + \sqrt{(pp + 2pq\sqrt{-1} - qq - r - s\sqrt{-1})},$$

$$\text{II. } z - (p + q\sqrt{-1}) - \sqrt{(pp + 2pq\sqrt{-1} - qq - r - s\sqrt{-1})},$$

$$\text{III. } z - (p - q\sqrt{-1}) + \sqrt{(pp - 2pq\sqrt{-1} - qq - r + s\sqrt{-1})},$$

$$\text{IV. } z - (p - q\sqrt{-1}) - \sqrt{(pp - 2pq\sqrt{-1} - qq - r + s\sqrt{-1})}.$$

Horum factorum multiplicentur primus ac tertius in se invicem posito brevitatis gratia

$$t = pp - qq - r \quad \text{et} \quad u = 2pq - s$$

eritque horum factorum productum

$$= zz - \left(2p - \sqrt{2t + 2\sqrt{(tt + uu)}}\right)z$$

$$+ pp + qq - p\sqrt{2t + 2\sqrt{(tt + uu)}} - q\sqrt{-2t + 2\sqrt{(tt + uu)}} + \sqrt{(tt + uu)},$$

quod utique est reale. Simili autem modo productum ex factoribus secundo et quarto erit reale, nempe

$$= zz - \left(2p + \sqrt{2t + 2\sqrt{(tt + uu)}}\right)z$$

$$+ pp + qq + p\sqrt{2t + 2\sqrt{(tt + uu)}} + q\sqrt{-2t + 2\sqrt{(tt + uu)}} + \sqrt{(tt + uu)}.$$

Quocirca productum propositum Q, quod in duos factores duplices reales resolvi posse negabatur, nihilominus actu in duos factores duplices reales est resolutum.

32. *Si functio integra Z ipsius z quotcunque habeat factores simplices imaginarios, bini semper ita coniungi possunt, ut eorum productum fiat reale.*

Quoniam numerus radicum imaginariarum semper est par, sit is $= 2n$ ac primo quidem patet [§ 30] productum harum radicum imaginariarum omnium esse reale. Quodsi ergo duae tantum radices imaginariae habeantur, erit earum productum utique reale; sin autem quatuor habeantur factores imaginarii, tum, uti vidimus, eorum productum resolvi potest in duos factores duplices reales formae $fzz + gz + h$. Quanquam autem eundem demonstrandi modum ad altiores potestates extendere non licet, tamen extra dubium videtur esse positum eandem proprietatem in quotcunque factores imaginarios competere, ita ut semper loco $2n$ factorum simplicium imaginariorum induci queant n factores duplices reales. Hinc omnis functio intêgra ipsius z resolvi poterit in factores reales vel simplices vel duplices. Quod quamvis non summo rigore sit demonstratum, tamen eius veritas in sequentibus[1]) magis corroborabitur, ubi huius generis functiones

$$a + bz^n, \quad a + bz^n + cz^{2n}, \quad a + bz^n + cz^{2n} + dz^{3n} \quad \text{etc.}$$

actu in istiusmodi factores duplices reales resolventur.

33. *Si functio integra Z posito $z = a$ induat valorem A et posito $z = b$ induat valorem B, tum loco z valores medios inter a et b ponendo functio Z quosvis valores medios inter A et B accipere potest.*

Cum enim Z sit functio uniformis ipsius z, quicunque valor realis ipsi z tribuatur, functio quoque Z hinc valorem realem obtinebit. Cum igitur Z priore casu $z = a$ nanciscatur valorem A, posteriore casu $z = b$ autem valorem B, ab A ad B transire non poterit nisi per omnes valores medios transeundo. Quodsi ergo aequatio $Z - A = 0$ habeat radicem realem simulque $Z - B = 0$ radicem realem suppeditet, tum aequatio quoque $Z - C = 0$ radicem habebit realem, siquidem C intra valores A et B contineatur. Hinc si expressiones $Z - A$ et $Z - B$ habeant factorem simplicem realem, tum expressio quaecunque $Z - C$ factorem simplicem habebit realem, dummodo C intra valores A et B contineatur.

1) Vide § 150—154. A. K.

34. *Si in functione integra Z exponens maximae ipsius z potestatis fuerit numerus impar $2n+1$, tum ea functio Z unicum ad minimum habebit factorem simplicem realem.*

Habebit scilicet Z huiusmodi formam

$$z^{2n+1} + \alpha z^{2n} + \beta z^{2n-1} + \gamma z^{2n-2} + \text{etc.};$$

in qua si ponatur $z=\infty$, quia valores singulorum terminorum prae primo evanescunt, fiet

$$Z = (\infty)^{2n+1} = \infty$$

ideoque $Z - \infty$ factorem simplicem habebit realem, nempe $z - \infty$. Sin autem ponatur $z = -\infty$, fiet

$$Z = (-\infty)^{2n+1} = -\infty$$

ideoque habebit $Z+\infty$ factorem simplicem realem $z+\infty$. Cum igitur tam $Z-\infty$ quam $Z+\infty$ habeat factorem simplicem realem, sequitur etiam $Z-C$ habiturum esse factorem simplicem realem, siquidem C contineatur intra limites $+\infty$ et $-\infty$, hoc est, si C fuerit numerus realis quicunque, sive affirmativus sive negativus. Hanc ob rem facto $C=0$ habebit quoque ipsa functio Z factorem simplicem realem $z-c$ atque quantitas c continebitur intra limites $+\infty$ et $-\infty$ eritque idcirco vel quantitas affirmativa vel negativa vel nihil.

35. *Functio igitur integra Z, in qua exponens maximae potestatis ipsius z est numerus impar, vel unum habebit factorem simplicem realem vel tres vel quinque vel septem etc.*

Cum enim demonstratum sit functionem Z certo unum habere factorem simplicem realem $z-c$, ponamus eam praeterea unum factorem habere $z-d$ atque dividatur functio Z, in qua maxima ipsius z potestas sit z^{2n+1}, per $(z-c)(z-d)$; erit quoti maxima potestas $=z^{2n-1}$, cuius exponens, cum sit numerus impar, indicat denuo ipsius Z dari factorem simplicem realem. Si ergo Z plures uno habeat factores simplices reales, habebit vel tres vel (quoniam eodem modo progredi licet) quinque vel septem etc. Erit scilicet numerus factorum simplicium realium impar, et quia numerus omnium factorum simplicium est $=2n+1$, erit numerus factorum imaginariorum par.

36. *Functio integra Z, in qua exponens maximae potestatis ipsius z est numerus par $2n$, vel duos habebit factores simplices reales vel quatuor vel sex vel etc.*

Ponamus ipsius Z constare factorum simplicium realium numerum imparem $2m+1$; si ergo per horum omnium productum dividatur functio Z, quoti maxima potestas erit $=z^{2n-2m-1}$ eiusque ideo exponens numerus impar; habebit ergo functio Z praeterea unum certo factorem simplicem realem, ex quo numerus omnium factorum simplicium realium ad minimum erit $=2m+2$ ideoque par ac numerus factorum imaginariorum pariter par. Omnis ergo functionis integrae factores simplices imaginarii sunt numero pares, quemadmodum quidem iam ante [§ 30] statuimus.

37. *Si in functione integra Z exponens maximae potestatis ipsius z fuerit numerus par atque terminus absolutus seu constans signo $-$ affectus, tum functio Z ad minimum duos habet factores simplices reales.*

Functio ergo Z, de qua hic sermo est, huiusmodi formam habebit

$$z^{2n} \pm \alpha z^{2n-1} \pm \beta z^{2n-2} \pm \cdots \pm \nu z - A.$$

Si iam ponatur $z=\infty$, fiet, uti supra vidimus, $Z=\infty$ atque, si ponatur $z=0$, fiet $Z=-A$. Habebit ergo $Z-\infty$ factorem realem $z-\infty$ et $Z+A$ factorem $z-0$; unde, cum 0 contineatur intra limites $-\infty$ et $+A$, sequitur $Z+0$ habere factorem simplicem realem $z-c$, ita ut c contineatur intra limites 0 et ∞. Deinde, cum posito $z=-\infty$ fiat $Z=\infty$ ideoque $Z-\infty$ factorem habeat $z+\infty$ et $Z+A$ factorem $z+0$, sequitur quoque $Z+0$ factorem simplicem realem habere $z+d$, ita ut d intra limites 0 et ∞ contineatur; unde constat propositum. Ex his igitur perspicitur, si Z talis fuerit functio, qualis hic est descripta, aequationem $Z=0$ duas ad minimum habere debere radices reales, alteram affirmativam, alteram negativam. Sic aequatio haec

$$z^4 + \alpha z^3 + \beta z^2 + \gamma z - aa = 0$$

duas habet radices reales, alteram affirmativam, alteram negativam.

38. *Si in functione fracta quantitas variabilis z tot vel plures habeat dimensiones in numeratore quam in denominatore, tum ista functio resolvi poterit in duas partes, quarum altera est functio integra, altera fracta, in cuius numeratore quantitas variabilis z pauciores habeat dimensiones quam in denominatore.*

Si enim exponens maximae potestatis ipsius z minor fuerit in denominatore quam in numeratore, tum numerator per denominatorem dividatur more solito, donec in quoto ad exponentes negativos ipsius z perveniatur; hoc ergo loco abrupta divisionis operatione quotus constabit ex parte integra atque fractione, in cuius numeratore minor erit dimensionum numerus ipsius z quam in denominatore; hic autem quotus functioni propositae est aequalis. Sic, si haec proposita fuerit functio fracta

$$\frac{1+z^4}{1+zz},$$

ea per divisionem ita resolvetur:

$$\begin{array}{lll} zz+1) & z^4+1 & \left(zz-1+\frac{2}{1+zz}\right. \\ & \underline{z^4+zz} & \\ & -zz+1 & \\ & \underline{-zz-1} & \\ & \quad +2 & \end{array}$$

eritque

$$\frac{1+z^4}{1+zz}=zz-1+\frac{2}{1+zz}.$$

Huiusmodi functiones fractae, in quibus quantitas variabilis z tot vel plures habet dimensiones in numeratore quam in denominatore, ad similitudinem Arithmeticae vocari possunt fractiones *spuriae* vel functiones fractae spuriae, quo distinguantur a functionibus fractis *genuinis*, in quarum numeratore quantitas variabilis z pauciores habet dimensiones quam in denominatore. Functio itaque fracta spuria resolvi poterit in functionem integram et functionem fractam genuinam haecque resolutio per vulgarem divisionis operationem absolvetur.

39. *Si denominator functionis fractae duos habeat factores inter se primos, tum ipsa functio fracta resolvetur in duas fractiones, quarum denominatores sint illis binis factoribus respective aequales.*

Quanquam haec resolutio ad functiones fractas spurias aeque pertinet atque ad genuinas, tamen eam ad genuinas potissimum accommodabimus. Resoluto autem denominatore huiusmodi functionis fractae in duos factores inter se primos, ipsa functio resolvetur in duas alias functiones fractas genuinas, quarum denominatores sint illis binis factoribus respective aequales, haecque resolutio, siquidem fractiones sint genuinae, unico modo fieri potest; cuius rei veritas ex exemplo clarius quam per ratiocinium perspicietur. Sit ergo proposita haec functio fracta

$$\frac{1-2z+3zz-4z^3}{1+4z^4};$$

cuius denominator $1+4z^4$ cum sit aequalis huic producto

$$(1+2z+2zz)(1-2z+2zz),$$

fractio proposita in duas fractiones resolvetur, quarum alterius denominator erit $1+2z+2zz$, alterius $1-2z+2zz$; ad quas inveniendas, quia sunt genuinae, statuantur numeratores illius $=\alpha+\beta z$, huius $=\gamma+\delta z$ eritque per hypothesin

$$\frac{1-2z+3zz-4z^3}{1+4z^4}=\frac{\alpha+\beta z}{1+2z+2zz}+\frac{\gamma+\delta z}{1-2z+2zz};$$

addantur actu hae duae fractiones eritque summae

numerator	denominator
$+\alpha-2\alpha z+2\alpha zz$ $\quad+\ \beta z-2\beta zz+2\beta z^3$ $+\gamma+2\gamma z+2\gamma zz$ $\quad+\ \delta z+2\delta zz+2\delta z^3,$	$1+4z^4.$

Cum ergo denominator aequalis sit denominatori fractionis propositae, numeratores quoque aequales reddi debent; quod ob tot litteras incognitas α, β, γ, δ, quot sunt termini aequales efficiendi, utique fieri idque unico modo poterit; nanciscimur scilicet has quatuor aequationes

$$\text{I.}\quad \alpha+\gamma=1, \qquad \text{III.}\ 2\alpha-2\beta+2\gamma+2\delta=3,$$

$$\text{II.}\ -2\alpha+\beta+2\gamma+\delta=-2, \qquad \text{IV.}\ 2\beta+2\delta=-4.$$

Hinc ob

$$\alpha+\gamma=1 \quad \text{et} \quad \beta+\delta=-2$$

aequationes II. et III. dabunt

$$\alpha-\gamma=0 \quad \text{et} \quad \delta-\beta=\frac{1}{2},$$

ex quibus fit

$$\alpha=\frac{1}{2}, \quad \gamma=\frac{1}{2}, \quad \beta=-\frac{5}{4}, \quad \delta=-\frac{3}{4},$$

ideoque fractio proposita

$$\frac{1-2z+3zz-4z^3}{1+4z^4}$$

transformatur in has duas

$$\frac{\frac{1}{2}-\frac{5}{4}z}{1+2z+2zz}+\frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}z}{1-2z+2zz}.$$

Simili autem modo facile perspicietur resolutionem semper succedere debere, quoniam semper tot litterae incognitae introducuntur, quot opus est ad numeratorem propositum eliciendum. Ex doctrina vero fractionum communi intelligitur hanc resolutionem succedere non posse, nisi isti denominatoris factores fuerint inter se primi.

40. *Functio igitur fracta $\frac{M}{N}$ in tot fractiones simplices formae $\frac{A}{p-qz}$ resolvi poterit, quot factores simplices habet denominator N inter se inaequales.*

Repraesentat hic fractio $\frac{M}{N}$ functionem quamcunque fractam genuinam, ita ut M et N sint functiones integrae ipsius z atque summa potestas ipsius z in M minor sit quam in N. Quodsi ergo denominator N in suos factores simplices resolvatur hique inter se fuerint inaequales, expressio $\frac{M}{N}$ in tot fractiones resolvetur, quot factores simplices in denominatore N continentur, propterea quod quisque factor abit in denominatorem fractionis partialis. Si ergo $p-qz$ fuerit factor ipsius N, is erit denominator fractionis cuiusdam

partialis et, cum in numeratore huius fractionis numerus dimensionum ipsius z minor esse debeat quam in denominatore $p-qz$, numerator necessario erit quantitas constans. Hinc ex unoquoque factore simplici $p-qz$ denominatoris N nascetur fractio simplex $\frac{A}{p-qz}$, ita ut summa omnium harum fractionum sit aequalis fractioni propositae $\frac{M}{N}$.

EXEMPLUM

Sit exempli causa proposita haec functio fracta

$$\frac{1+zz}{z-z^3}.$$

Quia factores simplices denominatoris sunt z, $1-z$ et $1+z$, ista functio resolvetur in has tres fractiones simplices

$$\frac{A}{z}+\frac{B}{1-z}+\frac{C}{1+z}=\frac{1+zz}{z-z^3},$$

ubi numeratores constantes A, B et C definire oportet. Reducantur hae fractiones ad communem denominatorem, qui erit $z-z^3$, atque numeratorum summa aequari debebit ipsi $1+zz$, unde ista aequatio oritur

$$\begin{aligned} A+Bz-Azz &= 1+zz=1+0z+zz,\\ +\,Cz+Bzz &\\ -\,Czz &\end{aligned}$$

quae totidem comparationes praebet, quot sunt litterae incognitae A, B, C; erit scilicet

$$\text{I.}\ A=1,$$

$$\text{II.}\ B+C=0,$$

$$\text{III.}\ -A+B-C=1.$$

Hinc fit

$$B-C=2$$

et porro

$$A=1, \quad B=1 \quad \text{et} \quad C=-1.$$

Functio ergo proposita

$$\frac{1+zz}{z-z^3}$$

resolvitur in hanc formam

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}-\frac{1}{1+z}.$$

Simili autem modo intelligitur, quotcunque habuerit denominator N factores simplices inter se inaequales, semper fractionem $\frac{M}{N}$ in totidem fractiones simplices resolvi. Sin autem aliquot factores fuerint aequales inter se, tum alio modo post explicando resolutio institui debet.

41. *Cum igitur quilibet factor simplex denominatoris N suppeditet fractionem simplicem pro resolutione functionis propositae $\frac{M}{N}$, ostendendum est, quomodo ex factore simplici denominatoris N cognito fractio simplex respondens reperiatur.*[1])

Sit $p-qz$ factor simplex ipsius N, ita ut sit

$$N=(p-qz)S$$

atque S functio integra ipsius z; ponatur fractio ex factore $p-qz$ orta

$$=\frac{A}{p-qz}$$

et sit fractio ex altero factore denominatoris S oriunda

$$=\frac{P}{S},$$

ita ut secundum § 39 futurum sit

$$\frac{M}{N}=\frac{A}{p-qz}+\frac{P}{S}=\frac{M}{(p-qz)S};$$

hinc erit

$$\frac{P}{S}=\frac{M-AS}{(p-qz)S};$$

1) Confer L. EULERI Commentationes 540 et 728 (indicis ENESTROEMIANI): *Nova methodus fractiones quascunque rationales in fractiones simplices resolvendi*, Acta acad. sc. Petrop. 1780: I, 1783, p. 32, et *De resolutione fractionum compositarum in simpliciores*, Mém. de l'acad. d. sc. de St. Pétersbourg 1 (1803/6), 1809, p. 3; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 6, p 370 et 465. A. K.

quae fractiones cum congruere debeant, necesse est, ut $M-AS$ sit divisibile per $p-qz$, quoniam functio integra P ipsi quoto aequatur. Quando vero $p-qz$ divisor existit ipsius $M-AS$, haec expressio posito $z=\frac{p}{q}$ evanescit. Ponatur ergo ubique loco z hic valor constans $\frac{p}{q}$ in M et S; erit $M-AS=0$, ex quo fiet

$$A=\frac{M}{S},$$

hocque ergo modo reperitur numerator A fractionis quaesitae $\frac{A}{p-qz}$; atque si ex singulis denominatoris N factoribus simplicibus, dummodo sint inter se inaequales, huiusmodi fractiones simplices formentur, harum fractionum simplicium omnium summa erit aequalis functioni propositae $\frac{M}{N}$.

EXEMPLUM

Sic, si in exemplo praecedente

$$\frac{1+zz}{z-z^3},$$

ubi est

$$M=1+zz \quad \text{et} \quad N=z-z^3,$$

sumatur z pro factore simplici, erit

$$S=1-zz$$

atque fractionis simplicis $\frac{A}{z}$ hinc ortae erit numerator

$$A=\frac{1+zz}{1-zz}=1$$

posito $z=0$, quem valorem z obtinet, si ipse hic factor simplex z nihilo aequalis ponatur.

Simili modo si pro denominatoris factore sumatur $1-z$, ut sit

$$S=z+zz,$$

erit

$$A=\frac{1+zz}{z+zz}$$

facto $1 - z = 0$, unde erit

$$A = 1$$

et ex factore $1 - z$ nascitur fractio $\frac{1}{1-z}$.

Tertius denique factor $1 + z$ ob

$$S = z - zz$$

et

$$A = \frac{1+zz}{z-zz}$$

posito $1 + z = 0$ seu $z = -1$ dabit

$$A = -1$$

et fractionem simplicem $= \frac{-1}{1+z}$.

Quare per hanc regulam reperitur

$$\frac{1+zz}{z-z^3} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z}$$

ut ante.

42. *Functio fracta huius formae* $\frac{P}{(p-qz)^n}$, *cuius numerator* P *non tantam ipsius* z *potestatem involvit quantam denominator* $(p-qz)^n$, *transmutari potest in huiusmodi fractiones partiales*

$$\frac{A}{(p-qz)^n} + \frac{B}{(p-qz)^{n-1}} + \frac{C}{(p-qz)^{n-2}} + \frac{D}{(p-qz)^{n-3}} + \cdots + \frac{K}{p-qz},$$

quarum omnium numeratores sint quantitates constantes.

Quoniam maxima potestas ipsius z in P minor est quam z^n, erit z^{n-1} ideoque P huiusmodi habebit formam

$$\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \cdots + \varkappa z^{n-1}$$

existente terminorum numero $= n$, cui aequari debet numerator summae omnium fractionum partialium, postquam singulae ad eundem denominatorem $(p-qz)^n$ fuerint perductae; qui numerator propterea erit

$$= A + B(p-qz) + C(p-qz)^2 + D(p-qz)^3 + \cdots + K(p-qz)^{n-1}.$$

Huius maxima ipsius z potestas est, ut ibi, z^{n-1} atque tot habentur litterae incognitae $A, B, C, D, \ldots K$ (quarum numerus est $= n$), quot sunt termini congruentes reddendi. Quamobrem litterae A, B, C etc. ita definiri poterunt, ut fiat functio fracta genuina

$$\frac{P}{(p-qz)^n} = \frac{A}{(p-qz)^n} + \frac{B}{(p-qz)^{n-1}} + \frac{C}{(p-qz)^{n-2}} + \frac{D}{(p-qz)^{n-3}} + \cdots + \frac{K}{p-qz}.$$

Ipsa autem horum numeratorum inventio mox facilis aperietur.

43. *Si functionis fractae* $\frac{M}{N}$ *denominator* N *factorem habeat* $(p-qz)^2$, *sequenti modo fractiones partiales ex hoc factore oriundae reperientur.*

Cuiusmodi fractiones partiales ex singulis factoribus denominatoris simplicibus, qui alios sibi aequales non habeant, oriantur, ante est ostensum; nunc igitur ponamus duos factores inter se esse aequales seu iis coniunctis denominatoris N factorem esse $(p-qz)^2$. Ex hoc ergo factore per paragraphum praecedentem duae nascentur fractiones partiales hae

$$\frac{A}{(p-qz)^2} + \frac{B}{p-qz}.$$

Sit autem

$$N = (p-qz)^2 S$$

eritque

$$\frac{M}{N} = \frac{M}{(p-qz)^2 S} = \frac{A}{(p-qz)^2} + \frac{B}{p-qz} + \frac{P}{S}$$

denotante $\frac{P}{S}$ omnes fractiones simplices iunctim sumptas ex denominatoris factore S ortas. Hinc erit

$$\frac{P}{S} = \frac{M - AS - B(p-qz)S}{(p-qz)^2 S}$$

et

$$P = \frac{M - AS - B(p-qz)S}{(p-qz)^2} = \text{functioni integrae.}$$

Debet ergo

$$M - AS - B(p-qz)S$$

divisibile esse per $(p-qz)^2$. Sit primum divisibile per $p - qz$ atque tota expressio $M - AS - B(p - qz)S$ evanescet posito $p - qz = 0$ seu $z = \frac{p}{q}$; ponatur ergo ubique $\frac{p}{q}$ loco z eritque $M - AS = 0$ ideoque

$$A = \frac{M}{S};$$

scilicet fractio $\frac{M}{S}$, si loco z ubique ponatur $\frac{p}{q}$, dabit valorem ipsius A constantem.

Hoc invento quantitas $M - AS - B(p - qz)S$ etiam per $(p - qz)^2$ divisibilis esse debet seu $\frac{M - AS}{p - qz} - BS$ denuo per $p - qz$ divisibilis esse debet. Posito ergo ubique $z = \frac{p}{q}$ erit

$$\frac{M - AS}{p - qz} = BS$$

ideoque

$$B = \frac{M - AS}{(p - qz)S} = \frac{1}{p - qz}\left(\frac{M}{S} - A\right),$$

ubi notandum est, cum $M - AS$ divisibile sit per $p - qz$, hanc divisionem prius institui debere, quam loco z substituatur $\frac{p}{q}$. Vel ponatur

$$\frac{M - AS}{p - qz} = T$$

eritque

$$B = \frac{T}{S}$$

posito $z = \frac{p}{q}$.

Inventis ergo numeratoribus A et B erunt fractiones partiales ex denominatoris N factore $(p - qz)^2$ ortae hae

$$\frac{A}{(p - qz)^2} + \frac{B}{p - qz}.$$

EXEMPLUM 1

Sit haec proposita functio fracta

$$\frac{1 - zz}{zz(1 + zz)};$$

erit ob denominatoris factorem quadratum zz

$$S = 1 + zz \quad \text{et} \quad M = 1 - zz.$$

Sint fractiones partiales ex zz ortae

$$\frac{A}{zz} + \frac{B}{z};$$

erit

$$A = \frac{M}{S} = \frac{1 - zz}{1 + zz}$$

posito factore $z = 0$ hincque

$$A = 1.$$

Tum erit $M - AS = -2zz$, quod divisum per factorem simplicem z dabit

$$T = -2z$$

hincque

$$B = \frac{T}{S} = \frac{-2z}{1 + zz}$$

posito $z = 0$; unde erit

$$B = 0$$

atque ex factore denominatoris zz orietur unica haec fractio partialis $\frac{1}{zz}$.

EXEMPLUM 2

Sit haec proposita functio fracta

$$\frac{z^3}{(1 - z)^2(1 + z^4)},$$

cuius ob denominatoris factorem quadratum $(1 - z)^2$ fractiones partiales sint

$$\frac{A}{(1 - z)^2} + \frac{B}{1 - z}.$$

Erit ergo

$$M = z^3 \quad \text{et} \quad S = 1 + z^4$$

ideoque

$$A = \frac{M}{S} = \frac{z^3}{1 + z^4}$$

posito $1 - z = 0$ seu $z = 1$, unde fit

$$A = \frac{1}{2}.$$

Prodibit ergo

$$M - AS = z^3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^4 = -\frac{1}{2} + z^3 - \frac{1}{2}z^4,$$

quod per $1 - z$ divisum dat

$$T = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}zz + \frac{1}{2}z^3,$$

ideoque

$$B = \frac{T}{S} = \frac{-1 - z - zz + z^3}{2 + 2z^4}$$

posito $z = 1$, ita ut sit

$$B = -\frac{1}{2}.$$

Fractiones ergo partiales quaesitae sunt

$$\frac{1}{2(1-z)^2} - \frac{1}{2(1-z)}.$$

44. *Si functionis fractae* $\frac{M}{N}$ *denominator* N *factorem habeat* $(p - qz)^3$, *sequenti modo fractiones partiales ex hoc factore oriundae*

$$\frac{A}{(p-qz)^3} + \frac{B}{(p-qz)^2} + \frac{C}{p-qz}$$

reperientur.

Ponatur

$$N = (p - qz)^3 S$$

sitque fractio ex factore S orta $= \frac{P}{S}$; erit

$$P = \frac{M - AS - B(p-qz)S - C(p-qz)^2 S}{(p-qz)^3} = \text{functioni integrae.}$$

Numerator ergo

$$M - AS - B(p-qz)S - C(p-qz)^2 S$$

ante omnia divisibilis esse debet per $p - qz$, unde is posito $p - qz = 0$ seu $z = \frac{p}{q}$ evanescere debet eritque adeo $M - AS = 0$ ideoque

$$A = \frac{M}{S}$$

posito $z = \frac{p}{q}$.

Invento hoc pacto A erit $M - AS$ divisibile per $p - qz$; ponatur ergo

$$\frac{M - AS}{p - qz} = T$$

atque

$$T - BS - C(p - qz)S$$

adhuc per $(p - qz)^2$ erit divisibile; fiet ergo $= 0$ posito $p - qz = 0$, ex quo prodit

$$B = \frac{T}{S}$$

posito $z = \frac{p}{q}$.

Sic autem invento B erit $T - BS$ divisibile per $p - qz$. Hanc ob rem posito

$$\frac{T - BS}{p - qz} = V$$

superest, ut

$$V - CS$$

divisibile sit per $p - qz$, eritque ergo $V - CS = 0$ posito $p - qz = 0$ atque

$$C = \frac{V}{S}$$

posito $z = \frac{p}{q}$.

Inventis ergo hoc modo numeratoribus A, B, C fractiones partiales ex denominatoris N factore $(p - qz)^3$ ortae erunt

$$\frac{A}{(p-qz)^3} + \frac{B}{(p-qz)^2} + \frac{C}{p-qz}.$$

EXEMPLUM

Sit proposita haec fracta functio

$$\frac{zz}{(1-z)^3(1+zz)},$$

ex cuius denominatoris factore cubico $(1-z)^3$ oriantur hae fractiones partiales

$$\frac{A}{(1-z)^3}+\frac{B}{(1-z)^2}+\frac{C}{1-z}.$$

Erit ergo

$$M=zz \quad \text{et} \quad S=1+zz;$$

unde fit primum

$$A=\frac{zz}{1+zz}$$

posito $1-z=0$ seu $z=1$, ex quo prodit

$$A=\frac{1}{2}.$$

Iam ponatur

$$T=\frac{M-AS}{1-z};$$

erit

$$T=\frac{\frac{1}{2}zz-\frac{1}{2}}{1-z}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z;$$

unde oritur

$$B=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z}{1+zz}$$

posito $z=1$, ita ut sit

$$B=-\frac{1}{2}.$$

Ponatur porro

$$V=\frac{T-BS}{1-z}=\frac{T+\frac{1}{2}S}{1-z};$$

erit

$$V=\frac{-\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}zz}{1-z}=-\frac{1}{2}z;$$

unde fit

$$C=\frac{V}{S}=\frac{-\frac{1}{2}z}{1+zz}$$

posito $z=1$, ita ut sit

$$C=-\frac{1}{4}.$$

Quocirca fractiones partiales ex denominatoris factore $(1-z)^3$ ortae erunt

$$\frac{1}{2(1-z)^3}-\frac{1}{2(1-z)^2}-\frac{1}{4(1-z)}.$$

45. *Si functionis fractae $\frac{M}{N}$ denominator N factorem habeat $(p-qz)^n$, fractiones partiales hinc ortae*

$$\frac{A}{(p-qz)^n}+\frac{B}{(p-qz)^{n-1}}+\frac{C}{(p-qz)^{n-2}}+\cdots+\frac{K}{p-qz}$$

sequenti modo invenientur.

Ponatur denominator

$$N=(p-qz)^n Z$$

atque ratiocinium ut ante instituendo reperietur, ut sequitur, primo

$$A=\frac{M}{Z}$$

posito $z=\frac{p}{q}$.

Ponatur

$$P=\frac{M-AZ}{p-qz};$$

secundo

$$B=\frac{P}{Z}$$

posito $z=\frac{p}{q}$.

Ponatur

$$Q=\frac{P-BZ}{p-qz};$$

tertio

$$C=\frac{Q}{Z}$$

posito $z=\frac{p}{q}$.

Ponatur

$$R = \frac{Q - CZ}{p - qz};$$

quarto

$$D = \frac{R}{Z}$$

posito $z = \frac{p}{q}$.

Ponatur

$$S = \frac{R - DZ}{p - qz};$$

quinto

$$E = \frac{S}{Z}$$

posito $z = \frac{p}{q}$; etc.

Hoc ergo modo si definiantur singuli numeratores constantes A, B, C, D etc., invenientur omnes fractiones partiales, quae ex denominatoris N factore $(p - qz)^n$ nascuntur.

EXEMPLUM

Sit proposita ista functio fracta

$$\frac{1 + zz}{z^5(1 + z^3)},$$

ex cuius denominatoris factore z^5 nascantur hae fractiones partiales

$$\frac{A}{z^5} + \frac{B}{z^4} + \frac{C}{z^3} + \frac{D}{z^2} + \frac{E}{z}.$$

Ad quarum numeratores constantes inveniendos erit

$$M = 1 + zz \quad \text{atque} \quad Z = 1 + z^3 \quad \text{et} \quad \frac{p}{q} = 0.$$

Sequens ergo calculus ineatur.

Primum est

$$A = \frac{M}{Z} = \frac{1 + zz}{1 + z^3}$$

posito $z = 0$, ergo

$$A = 1.$$

Ponatur

$$P = \frac{M - AZ}{z} = \frac{zz - z^3}{z} = z - zz$$

eritque secundo

$$B = \frac{P}{Z} = \frac{z - zz}{1 + z^3}$$

posito $z = 0$, ergo

$$B = 0.$$

Ponatur

$$Q = \frac{P - BZ}{z} = \frac{z - zz}{z} = 1 - z$$

eritque tertio

$$C = \frac{Q}{Z} = \frac{1 - z}{1 + z^3}$$

posito $z = 0$, ergo

$$C = 1.$$

Ponatur

$$R = \frac{Q - CZ}{z} = \frac{-z - z^3}{z} = -1 - zz;$$

erit quarto

$$D = \frac{R}{Z} = \frac{-1 - zz}{1 + z^3}$$

posito $z = 0$, ex quo fit

$$D = -1.$$

Ponatur

$$S = \frac{R - DZ}{z} = \frac{-zz + z^3}{z} = -z + zz;$$

erit quinto

$$E = \frac{S}{Z} = \frac{-z + zz}{1 + z^3}$$

posito $z = 0$, unde fit

$$E = 0.$$

Quocirca fractiones partiales quaesitae erunt hae:

$$\frac{1}{z^5} + \frac{0}{z^4} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} + \frac{0}{z}.$$

[45a].[1]) *Quaecunque ergo proposita fuerit functio rationalis fracta* $\frac{M}{N}$, *ea sequenti modo in partes resolvetur atque in formam simplicissimam transmutabitur.*

Quaerantur denominatoris N omnes factores simplices sive reales sive imaginarii; quorum qui sibi pares non habeant, seorsim tractentur et ex unoquoque per § 41 fractio partialis eruatur. Quodsi idem factor simplex bis vel pluries occurrat, ii coniunctim sumantur atque ex eorum producto, quod erit potestas formae $(p-qz)^n$, quaerantur fractiones partiales convenientes per § 45. Hocque modo cum ex singulis factoribus simplicibus denominatoris erutae fuerint fractiones partiales, tum harum omnium aggregatum aequabitur functioni propositae $\frac{M}{N}$, nisi fuerit spuria; si enim fuerit spuria, pars integra insuper extrahi atque ad istas fractiones partiales inventas adiici debebit, quo prodeat valor functionis $\frac{M}{N}$ in forma simplicissima expressus. Perinde autem est, sive fractiones partiales ante extractionem partis integrae sive post quaerantur. Eaedem enim ex singulis denominatoris N factoribus prodeunt fractiones partiales, sive adhibeatur ipse numerator M sive idem quocunque denominatoris N multiplo vel auctus vel minutus; id quod regulas datas contemplanti facile patebit.

EXEMPLUM

Quaeratur valor functionis

$$\frac{1}{z^3(1-z)^2(1+z)}$$

in forma simplicissima expressus.

Sumatur primum factor denominatoris solitarius $1+z$, qui dat $\frac{p}{q}=-1$; erit

$$M=1 \quad \text{et} \quad Z=z^3-2z^4+z^5.$$

Hinc ad fractionem $\frac{A}{1+z}$ inveniendam erit

$$A=\frac{1}{z^3-2z^4+z^5}$$

posito $z=-1$ ideoque fit

$$A=-\frac{1}{4}$$

1) In editione principe et huic et sequenti paragrapho per errorem numerus 46 datus est. A. K.

atque ex factore $1+z$ oritur haec fractio partialis

$$-\frac{1}{4(1+z)}.$$

Iam sumatur factor quadratus $(1-z)^2$, qui dat

$$\frac{p}{q}=1, \quad M=1 \quad \text{et} \quad Z=z^3+z^4.$$

Positis ergo fractionibus partialibus hinc ortis

$$\frac{A}{(1-z)^2}+\frac{B}{1-z}$$

erit

$$A=\frac{1}{z^3+z^4}$$

posito $z=1$, ergo

$$A=\frac{1}{2}.$$

Fiat

$$P=\frac{M-\frac{1}{2}Z}{1-z}=\frac{1-\frac{1}{2}z^3-\frac{1}{2}z^4}{1-z}=1+z+zz+\frac{1}{2}z^3$$

eritque

$$B=\frac{P}{Z}=\frac{1+z+zz+\frac{1}{2}z^3}{z^3+z^4}$$

posito $z=1$, ergo

$$B=\frac{7}{4}$$

et fractiones partiales quaesitae

$$\frac{1}{2(1-z)^2}+\frac{7}{4(1-z)}.$$

Denique tertius factor cubicus z^3 dat

$$\frac{p}{q}=0, \quad M=1 \quad \text{et} \quad Z=1-z-zz+z^3.$$

Positis ergo fractionibus partialibus his

$$\frac{A}{z^3}+\frac{B}{z^2}+\frac{C}{z}$$

erit primum

$$A = \frac{M}{Z} = \frac{1}{1 - z - zz + z^3}$$

posito $z = 0$, ergo

$$A = 1.$$

Ponatur

$$P = \frac{M - Z}{z} = 1 + z - zz;$$

erit

$$B = \frac{P}{Z}$$

posito $z = 0$, ergo

$$B = 1.$$

Ponatur

$$Q = \frac{P - Z}{z} = 2 - zz;$$

erit

$$C = \frac{Q}{Z}$$

posito $z = 0$, ergo

$$C = 2.$$

Hanc ob rem functio proposita

$$\frac{1}{z^3(1-z)^2(1+z)}$$

in hanc formam resolvitur

$$\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} + \frac{1}{2(1-z)^2} + \frac{7}{4(1-z)} - \frac{1}{4(1+z)}.$$

Nulla enim pars integra insuper accedit, quia fractio proposita non est spuria.[1])

1) De reali functionum fractarum evolutione agitur in cap. XII. A. K.

CAPUT III

DE TRANSFORMATIONE FUNCTIONUM PER SUBSTITUTIONEM

46. *Si fuerit y functio quaecunque ipsius z atque z definiatur per novam variabilem x, tum quoque y per x definiri poterit.*

Cum ergo antea y fuisset functio ipsius z, nunc nova quantitas variabilis x inducitur, per quam utraque priorum y et z definiatur. Sic, si fuerit

$$y = \frac{1 - zz}{1 + zz}$$

atque ponatur

$$z = \frac{1 - x}{1 + x},$$

hoc valore loco z substituto erit

$$y = \frac{2x}{1 + xx}.$$

Sumpto ergo pro x valore quocunque determinato ex eo reperientur valores determinati pro z et y sicque invenitur valor ipsius y respondens illi valori ipsius z, qui simul prodiit. Uti, si sit $x = \frac{1}{2}$, fiet $z = \frac{1}{3}$ et $y = \frac{4}{5}$; reperitur autem quoque $y = \frac{4}{5}$, si in $\frac{1 - zz}{1 + zz}$, cui expressioni y aequatur, ponatur $z = \frac{1}{3}$.

Adhibetur autem haec novae variabilis introductio ad duplicem finem: vel enim hoc modo irrationalitas, qua expressio ipsius y per z data laborat, tollitur; vel quando ob aequationem altioris gradus, qua relatio inter y et z exprimitur, non licet functionem explicitam ipsius z ipsi y aequalem exhibere, nova variabilis x introducitur, ex qua utraque y et z commode definiri queat; unde insignis substitutionum usus iam satis elucet, ex sequentibus vero multo clarius perspicietur.

47. *Si fuerit*

$$y = \sqrt{(a+bz)},$$

nova variabilis x, per quam utraque z et y rationaliter exprimatur, sequenti modo invenietur.

Quoniam tam z quam y debet esse functio rationalis ipsius x, perspicuum est hoc obtineri, si ponatur

$$\sqrt{(a+bz)} = bx.$$

Fiet enim primo

$$y = bx \quad \text{et} \quad a + bz = bbxx$$

hincque

$$z = bxx - \frac{a}{b}.$$

Quocirca utraque quantitas y et z per functionem rationalem ipsius x exprimitur; scilicet cum sit $y = \sqrt{(a+bz)}$, fiat

$$z = bxx - \frac{a}{b};$$

erit

$$y = bx.$$

48. *Si fuerit*

$$y = (a+bz)^{m:n},$$

nova variabilis x, per quam tam y quam z rationaliter exprimatur, sic reperietur.

Ponatur

$$y = x^m$$

fietque

$$(a+bz)^{m:n} = x^m \quad \text{ideoque} \quad (a+bz)^{1:n} = x, \quad \text{ergo} \quad a+bz = x^n$$

et

$$z = \frac{x^n - a}{b}.$$

Sic ergo utraque quantitas y et z rationaliter per x definietur, ope scilicet substitutionis

$$z = \frac{x^n - a}{b},$$

quae praebet

$$y = x^m.$$

Quamvis igitur neque y per z neque vicissim z per y rationaliter exprimi possit, tamen utraque reddita est functio rationalis novae quantitatis variabilis x per substitutionem introductae, scopo substitutionis omnino convenienter.

49. *Si fuerit*

$$y = \left(\frac{a+bz}{f+gz}\right)^{m:n},$$

requiritur nova quantitas variabilis x, per quam utraque y et z rationaliter exprimatur.

Manifestum primo est, si ponatur

$$y = x^m,$$

quaesito satisfieri; erit enim

$$\left(\frac{a+bz}{f+gz}\right)^{m:n} = x^m \quad \text{ideoque} \quad \frac{a+bz}{f+gz} = x^n;$$

ex qua aequatione elicitur

$$z = \frac{a - fx^n}{gx^n - b},$$

quae substitutio praebet

$$y = x^m.$$

Hinc quoque intelligitur, si fuerit

$$\left(\frac{\alpha+\beta y}{\gamma+\delta y}\right)^n = \left(\frac{a+bz}{f+gz}\right)^m,$$

tam y quam z rationaliter per x expressum iri, si utraque formula ponatur $= x^{mn}$; reperietur enim

$$y = \frac{\alpha - \gamma x^m}{\delta x^m - \beta}$$

et

$$z = \frac{a - f x^n}{g x^n - b};$$

qui casus nil habent difficultatis.

50. *Si fuerit*

$$y = \sqrt{((a + bz)(c + dz))},$$

substitutio idonea invenietur, qua y et z rationaliter exprimuntur, hoc modo.

Ponatur

$$\sqrt{((a + bz)(c + dz))} = (a + bz)x;$$

facile enim perspicitur hinc valorem rationalem pro z esse prodituram, quia valor ipsius z per aequationem simplicem determinatur. Erit ergo

$$c + dz = (a + bz)xx$$

hincque

$$z = \frac{c - axx}{bxx - d}.$$

Quare porro fiet

$$a + bz = \frac{bc - ad}{bxx - d}$$

et ob $y = \sqrt{((a + bz)(c + dz))} = (a + bz)x$ habebitur

$$y = \frac{(bc - ad)x}{bxx - d}.$$

Functio ergo irrationalis $y = \sqrt{((a + bz)(c + dz))}$ ad rationalitatem perducitur ope substitutionis

$$z = \frac{c - axx}{bxx - d},$$

quippe quae dabit

$$y = \frac{(bc - ad)x}{bxx - d}.$$

Sic, si fuerit

$$y = \sqrt{(aa - zz)} = \sqrt{((a + z)(a - z))},$$

ob $b = +1$, $c = a$, $d = -1$ ponatur

$$z = \frac{a - axx}{1 + xx}$$

eritque

$$y = \frac{2ax}{1 + xx}.$$

Quoties ergo quantitas post signum $\sqrt{}$ habuerit duos factores simplices reales, hoc modo reductio ad rationalitatem absolvetur; sin autem factores bini simplices fuerint imaginarii, sequenti modo uti praestabit.

51. *Sit*

$$y = \sqrt{(p + qz + rzz)}$$

atque requiritur substitutio idonea pro z facienda, ut valor ipsius y fiat rationalis.

Pluribus modis hoc fieri potest, prout p et q fuerint quantitates vel affirmativae vel negativae. Sit primo p quantitas affirmativa ac ponatur aa pro p; etiamsi enim p non sit quadratum, tamen irrationalitas quantitatum constantium praesens negotium non turbat. Sit igitur

I. $y = \sqrt{(aa + bz + czz)}$ ac ponatur

$$\sqrt{(aa + bz + czz)} = a + xz;$$

erit

$$b + cz = 2ax + xxz,$$

unde fit

$$z = \frac{b - 2ax}{xx - c};$$

tum vero erit

$$y = a + xz = \frac{bx - axx - ac}{xx - c},$$

ubi z et y sunt functiones rationales ipsius x. Sit iam

II. $y = \sqrt{(aazz + bz + c)}$ ac ponatur

$$\sqrt{(aazz + bz + c)} = az + x;$$

erit

$$bz + c = 2axz + xx$$

et

$$z = \frac{xx - c}{b - 2ax}.$$

Tum autem fit

$$y = az + x = \frac{-ac + bx - axx}{b - 2ax}.$$

III. Si fuerint p et r quantitates negativae, tum, nisi sit $qq > 4pr$, valor ipsius y semper erit imaginarius. Quodsi autem fuerit $qq > 4pr$, expressio $p + qz + rzz$ in duos factores resolvi poterit, qui casus ad paragraphum praecedentem reducitur. Saepenumero autem commodius ad hanc formam reducitur

$$y = \sqrt{(aa + (b + cz)(d + ez))};$$

pro qua ad rationalitatem perducenda ponatur

$$y = a + (b + cz)x$$

eritque

$$d + ez = 2ax + bxx + cxxz,$$

unde fit

$$z = \frac{d - 2ax - bxx}{cxx - e}$$

et

$$y = \frac{-ae + (cd - be)x - acxx}{cxx - e}.$$

Interdum commodius fieri potest reductio ad hanc formam

$$y = \sqrt{(azz + (b + cz)(d + ez))}.$$

Tum ponatur

$$y = az + (b + cz)x;$$

erit

$$d + ez = 2axz + bxx + cxxz$$

et

$$z = \frac{bxx - d}{e - 2ax - cxx}$$

atque

$$y = \frac{-ad + (be - cd)x - abxx}{e - 2ax - cxx}.$$

EXEMPLUM

Si habeatur ista ipsius z functio irrationalis

$$y = \sqrt{(-1 + 3z - zz)},$$

quae, cum reduci queat ad hanc formam

$$y = \sqrt{(1 - 2 + 3z - zz)} = \sqrt{(1 - (1 - z)(2 - z))},$$

ponatur

$$y = 1 - (1 - z)x,$$

erit

$$-2 + z = -2x + xx - xxz$$

et

$$z = \frac{2 - 2x + xx}{1 + xx}.$$

Deinde est

$$1 - z = \frac{-1 + 2x}{1 + xx}$$

et

$$y = 1 - (1 - z)x = \frac{1 + x - xx}{1 + xx}.$$

Atque hi sunt fere casus, quos Algebra indeterminata seu methodus *Diophantea* suppeditat, neque alios casus in his tractatis non comprehensos per substitutionem rationalem ad rationalitatem reducere licet. Quocirca ad alterum substitutionis usum monstrandum progredior.

52. *Si y eiusmodi fuerit functio ipsius z, ut sit*

$$ay^\alpha + bz^\beta + cy^\gamma z^\delta = 0,$$

invenire novam variabilem x, per quam valores ipsarum y et z explicite assignari queant.

Quoniam resolutio aequationum generalis non habetur, ex aequatione proposita $ay^\alpha + bz^\beta + cy^\gamma z^\delta = 0$ neque y per z neque vicissim z per y exhiberi potest. Quo igitur huic incommodo remedium afferatur, ponatur

$$y = x^m z^n$$

eritque

$$ax^{\alpha m} z^{\alpha n} + bz^{\beta} + cx^{\gamma m} z^{\gamma n + \delta} = 0.$$

Determinetur nunc exponens n ita, ut ex hac aequatione valor ipsius z definiri queat, quod tribus modis praestari potest.

I. Sit

$$\alpha n = \beta \quad \text{ideoque} \quad n = \frac{\beta}{\alpha};$$

erit aequatione per $z^{\alpha n} = z^{\beta}$ divisa

$$ax^{\alpha m} + b + cx^{\gamma m} z^{\gamma n - \beta + \delta} = 0,$$

unde oritur

$$z = \left(\frac{-ax^{\alpha m} - b}{cx^{\gamma m}}\right)^{\frac{1}{\gamma n - \beta + \delta}} \quad \text{sive} \quad z = \left(\frac{-ax^{\alpha m} - b}{cx^{\gamma m}}\right)^{\frac{\alpha}{\beta\gamma - \alpha\beta + \alpha\delta}}$$

et

$$y = x^m \left(\frac{-ax^{\alpha m} - b}{cx^{\gamma m}}\right)^{\frac{\beta}{\beta\gamma - \alpha\beta + \alpha\delta}}.$$

II. Sit

$$\beta = \gamma n + \delta \quad \text{seu} \quad n = \frac{\beta - \delta}{\gamma};$$

erit aequatione per z^{β} divisa

$$ax^{\alpha m} z^{\alpha n - \beta} + b + cx^{\gamma m} = 0,$$

unde oritur

$$z = \left(\frac{-b - cx^{\gamma m}}{ax^{\alpha m}}\right)^{\frac{1}{\alpha n - \beta}} = \left(\frac{-b - cx^{\gamma m}}{ax^{\alpha m}}\right)^{\frac{\gamma}{\alpha\beta - \alpha\delta - \beta\gamma}}$$

atque

$$y = x^m \left(\frac{-b - cx^{\gamma m}}{ax^{\alpha m}}\right)^{\frac{\beta - \delta}{\alpha\beta - \alpha\delta - \beta\gamma}}.$$

III. Sit

$$\alpha n = \gamma n + \delta \quad \text{seu} \quad n = \frac{\delta}{\alpha - \gamma};$$

erit aequatione per $z^{\alpha n}$ divisa

$$ax^{\alpha m} + bz^{\beta - \alpha n} + cx^{\gamma m} = 0,$$

unde oritur

$$z = \left(\frac{-ax^{\alpha m} - cx^{\gamma m}}{b}\right)^{\frac{1}{\beta - \alpha n}} = \left(\frac{-ax^{\alpha m} - cx^{\gamma m}}{b}\right)^{\frac{\alpha - \gamma}{\alpha\beta - \beta\gamma - \alpha\delta}}$$

atque

$$y = x^m \left(\frac{-ax^{\alpha m} - cx^{\gamma m}}{b}\right)^{\frac{\delta}{\alpha\beta - \beta\gamma - \alpha\delta}}.$$

Tribus igitur diversis modis erutae sunt functiones ipsius x, quae ipsis z et y sunt aequales. Praeterea vero pro m numerum pro lubitu substituere licet cyphra excepta sicque formulae ad commodissimam expressionem reduci poterunt.

EXEMPLUM

Exprimatur natura functionis y per hanc aequationem

$$y^3 + z^3 - cyz = 0$$

atque quaerantur functiones ipsius x ipsis y et z aequales.

Erit ergo

$$a = -1, \quad b = -1, \quad \alpha = 3, \quad \beta = 3, \quad \gamma = 1 \quad \text{et} \quad \delta = 1.$$

Hinc primus modus dabit posito $m = 1$

$$z = \left(\frac{x^3 + 1}{cx}\right)^{-1} \quad \text{et} \quad y = x\left(\frac{x^3 + 1}{cx}\right)^{-1}$$

sive

$$z = \frac{cx}{1 + x^3} \quad \text{et} \quad y = \frac{cxx}{1 + x^3},$$

quarum expressionum utraque adeo est rationalis.

Secundus modus vero dabit hos valores

$$z = \left(\frac{cx - 1}{x^3}\right)^{1:3} \quad \text{et} \quad y = x\left(\frac{cx - 1}{x^3}\right)^{2:3}$$

sive

$$z = \frac{1}{x}\sqrt[3]{(cx - 1)} \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{x}\sqrt[3]{(cx - 1)^2}.$$

Tertius modus ita rem expediet, ut sit

$$z = (cx - x^3)^{2:3} \quad \text{et} \quad y = x(cx - x^3)^{1:3}.$$

53. *Hinc a posteriori intelligitur, cuiusmodi aequationes, quibus valor functionis y per z determinatur, hoc modo novam variabilem x introducendo resolvi queant.*

Ponamus enim resolutione iam instituta prodiisse has determinationes

$$z = \left(\frac{ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \text{etc.}}{A + Bx^\mu + Cx^\nu + \text{etc.}}\right)^{p:r}$$

atque

$$y = x\left(\frac{ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \text{etc.}}{A + Bx^\mu + Cx^\nu + \text{etc.}}\right)^{q:r}$$

eritque

$$y^p = x^p z^q$$

et hinc

$$x = yz^{-q:p}.$$

Cum igitur sit

$$z^{r:p} = \frac{ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \text{etc.}}{A + Bx^\mu + Cx^\nu + \text{etc.}},$$

si loco x eius valorem $yz^{-q:p}$ substituamus, prodibit ista aequatio

$$z^{r:p} = \frac{ay^\alpha z^{-\alpha q:p} + by^\beta z^{-\beta q:p} + cy^\gamma z^{-\gamma q:p} + \text{etc.}}{A + By^\mu z^{-\mu q:p} + Cy^\nu z^{-\nu q:p} + \text{etc.}},$$

quae reducitur ad hanc

$$Az^{r:p} + By^\mu z^{(r-\mu q):p} + Cy^\nu z^{(r-\nu q):p} + \text{etc.} = ay^\alpha z^{-\alpha q:p} + by^\beta z^{-\beta q:p} + cy^\gamma z^{-\gamma q:p} + \text{etc.},$$

quae multiplicata per $z^{\alpha q:p}$ transibit in hanc

$$Az^{(\alpha q+r):p} + By^\mu z^{(\alpha q-\mu q+r):p} + Cy^\nu z^{(\alpha q-\nu q+r):p} + \text{etc.}$$
$$= ay^\alpha + by^\beta z^{(\alpha q-\beta q):p} + cy^\gamma z^{(\alpha q-\gamma q):p} + \text{etc.}$$

Ponatur

$$\frac{\alpha q + r}{p} = m \quad \text{et} \quad \frac{\alpha q - \beta q}{p} = n;$$

fiet

$$p = \alpha - \beta, \quad q = n \quad \text{et} \quad r = \alpha m - \beta m - \alpha n$$

atque nascetur ista aequatio

$$Az^m + By^\mu z^{m-\mu n:(\alpha-\beta)} + Cy^\nu z^{m-\nu n:(\alpha-\beta)} + \text{etc.}$$
$$= ay^\alpha + by^\beta z^n + cy^\gamma z^{(\alpha-\gamma)n:(\alpha-\beta)} + \text{etc.},$$

quae propterea ita resolvetur, ut sit

$$z = \left(\frac{ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \text{etc.}}{A + Bx^\mu + Cx^\nu + \text{etc.}}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha m - \beta m - \alpha n}}$$

et

$$y = x\left(\frac{ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \text{etc.}}{A + Bx^\mu + Cx^\nu + \text{etc.}}\right)^{\frac{n}{\alpha m - \beta m - \alpha n}}.$$

Vel ponatur

$$\frac{\alpha q + r}{p} = m \quad \text{et} \quad \frac{\alpha q - \mu q + r}{p} = n;$$

erit

$$m - n = \frac{\mu q}{p} \quad \text{et} \quad \frac{q}{p} = \frac{m-n}{\mu} \quad \text{atque} \quad \frac{r}{p} = m - \frac{\alpha m - \alpha n}{\mu}.$$

Hinc fit

$$p = \mu, \quad q = m - n \quad \text{et} \quad r = \mu m - \alpha m + \alpha n$$

atque haec aequatio resultabit

$$Az^m + By^\mu z^n + Cy^\nu z^{m-\nu(m-n):\mu} + \text{etc.}$$
$$= ay^\alpha + by^\beta z^{(\alpha-\beta)(m-n):\mu} + cy^\gamma z^{(\alpha-\gamma)(m-n):\mu} + \text{etc.},$$

quae ita resolvetur, ut sit

$$z = \left(\frac{ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \text{etc.}}{A + Bx^\mu + Cx^\nu + \text{etc.}}\right)^{\frac{\mu}{\mu m - \alpha m + \alpha n}}$$

et

$$y = x\left(\frac{ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \text{etc.}}{A + Bx^\mu + Cx^\nu + \text{etc.}}\right)^{\frac{m-n}{\mu m - \alpha m + \alpha n}}.$$

54. *Si y ita pendeat a z, ut sit*

$$ayy + byz + czz + dy + ez = 0,$$

sequenti modo tam y quam z rationaliter per novam variabilem x exprimetur.

Ponatur $y = xz$; erit divisione per z facta

$$axxz + bxz + cz + dx + e = 0,$$

ex qua reperitur

$$z = \frac{-dx-e}{axx+bx+c}$$

et

$$y = \frac{-dxx-ex}{axx+bx+c}.$$

At vero ad formam propositam reduci potest haec aequatio inter y et z

$$ayy + byz + czz + dy + ez + f = 0$$

diminuendo vel augendo utramque variabilem certa quadam quantitate constante, unde et haec aequatio per novam variabilem x rationaliter explicari potest.

55. *Si y ita pendeat a z, ut sit*

$$ay^3 + by^2z + cyz^2 + dz^3 + eyy + fyz + gzz = 0,$$

sequenti modo tam y quam z rationaliter per novam variabilem x exprimi poterit.

Ponatur $y = xz$ et facta substitutione tota aequatio per zz dividi poterit; prodibit autem

$$ax^3z + bxxz + cxz + dz + exx + fx + g = 0.$$

Unde oritur

$$z = \frac{-exx-fx-g}{ax^3+bxx+cx+d},$$

ex quo erit

$$y = \frac{-ex^3-fxx-gx}{ax^3+bxx+cx+d}.$$

Ex his casibus facile intelligitur, quemadmodum aequationes altiorum graduum, quibus y per z definitur, comparatae esse debeant, ut huiusmodi resolutio locum habere queat. Ceterum hi casus in superioribus formulis § 53 continentur, at, quia formulae generales non tam facile ad huiusmodi casus saepius occurrentes accommodantur, visum est horum aliquos seorsim evolvere.

56. *Si y ita pendeat a z, ut sit*

$$ayy + byz + czz = d,$$

hoc modo utraque quantitas y et z per novam variabilem x exprimetur.

Ponatur $y = xz$ eritque

$$(axx + bx + c)zz = d$$

ideoque

$$z = \sqrt{\frac{d}{axx+bx+c}}$$

et

$$y = x\sqrt{\frac{d}{axx+bx+c}}.$$

Simili modo si fuerit

$$ay^3 + by^2z + cyz^2 + dz^3 = ey + fz,$$

posito $y = xz$ tota aequatio per z divisa dabit

$$(ax^3 + bxx + cx + d)zz = ex + f,$$

unde oritur

$$z = \sqrt{\frac{ex+f}{ax^3+bxx+cx+d}}$$

et

$$y = x\sqrt{\frac{ex+f}{ax^3+bxx+cx+d}}.$$

Hi autem casus aliique similes resolutiones admittentes comprehenduntur in sequente paragrapho.

57. *Si y ita pendeat a z, ut sit*

$$ay^m + by^{m-1}z + cy^{m-2}z^2 + dy^{m-3}z^3 + \text{etc.} = \alpha y^n + \beta y^{n-1}z + \gamma y^{n-2}z^2 + \delta y^{n-3}z^3 + \text{etc.},$$

sequenti modo tam z quam y commode per novam variabilem x exprimetur.

Sit $y = xz$ atque facta substitutione tota aequatio dividi poterit per z^n, siquidem exponens m sit maior quam n, eritque

$$(ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + dx^{m-3} + \text{etc.})z^{m-n} = \alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \delta x^{n-3} + \text{etc.},$$

unde obtinebitur

$$z = \left(\frac{\alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \delta x^{n-3} + \text{etc.}}{a x^m + b x^{m-1} + c x^{m-2} + d x^{m-3} + \text{etc.}}\right)^{1:(m-n)}$$

et

$$y = x\left(\frac{\alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \delta x^{n-3} + \text{etc.}}{a x^m + b x^{m-1} + c x^{m-2} + d x^{m-3} + \text{etc.}}\right)^{1:(m-n)}.$$

Haec scilicet resolutio locum habet, si in aequatione naturam functionis y per z exprimente duplex tantum ubique occurrit dimensionum ab y et z sumptarum numerus, uti in casu tractato in singulis terminis numerus dimensionum vel est m vel n.

58. *Si in aequatione inter y et z triplicis generis dimensiones occurrant, quarum summa tantum superet mediam, quantum haec media infimam, ope resolutionis aequationis quadratae variabiles y et z per novam x exprimi poterunt.*

Si enim ponatur $y = xz$, divisione per minimam ipsius z potestatem facta valor ipsius z per x ope extractionis radicis quadratae exhibebitur, id quod ex sequentibus exemplis erit manifestum.

EXEMPLUM 1

Sit

$$ay^3 + byyz + cyzz + dz^3 = 2eyy + 2fyz + 2gzz + hy + iz$$

ac ponatur $y = xz$; erit divisione per z facta

$$(ax^3 + bxx + cx + d)zz = 2(exx + fx + g)z + hx + i,$$

ex qua sequens ipsius z obtinebitur valor

$$z = \frac{exx + fx + g \pm \sqrt{((exx + fx + g)^2 + (ax^3 + bxx + cx + d)(hx + i))}}{ax^3 + bxx + cx + d},$$

quo invento erit $y = xz$.

EXEMPLUM 2

Sit

$$y^5 = 2az^3 + by + cz$$

ac posito $y = xz$ erit

$$x^5z^4 = 2azz + bx + c,$$

ex qua reperitur

$$zz = \frac{a \pm \sqrt{(aa + bx^6 + cx^5)}}{x^5}$$

et

$$z = \frac{\sqrt{(a \pm \sqrt{(aa + bx^6 + cx^5)})}}{xx\sqrt{x}}$$

et

$$y = \frac{\sqrt{(a \pm \sqrt{(aa + bx^6 + cx^5)})}}{x\sqrt{x}}.$$

EXEMPLUM 3

Sit

$$y^{10} = 2ayz^6 + byz^3 + cz^4;$$

in qua cum dimensiones sint 10, 7 et 4, ponatur $y = xz$ atque aequatio per z^4 divisa abibit in hanc

$$x^{10}z^6 = 2axz^3 + bx + c$$

seu

$$z^6 = \frac{2axz^3 + bx + c}{x^{10}},$$

unde invenitur

$$z^3 = \frac{ax \pm x\sqrt{(aa + bx^9 + cx^8)}}{x^{10}},$$

ideoque erit

$$z = \frac{\sqrt[3]{(a \pm \sqrt{(aa + bx^9 + cx^8)})}}{x^3}$$

atque

$$y = \frac{\sqrt[3]{(a \pm \sqrt{(aa + bx^9 + cx^8)})}}{x^2}.$$

Ex quibus exemplis usus huiusmodi substitutionum abunde perspicitur.

CAPUT IV

DE EXPLICATIONE FUNCTIONUM PER SERIES INFINITAS

59. Cum functiones fractae atque irrationales ipsius z non in forma integra $A+Bz+Cz^2+Dz^3+$ etc. contineantur, ita ut terminorum numerus sit finitus, quaeri solent huiusmodi expressiones in infinitum excurrentes, quae valorem cuiusvis functionis sive fractae sive irrationalis exhibeant; quin etiam natura functionum transcendentium melius intelligi censetur, si per eiusmodi formam etsi infinitam exprimantur. Cum enim natura functionis integrae optime perspiciatur, si secundum diversas potestates ipsius z explicetur atque adeo ad formam $A+Bz+Cz^2+Dz^3+$ etc. reducatur, ita eadem forma aptissima videtur ad reliquarum functionum omnium indolem menti repraesentandam, etiamsi terminorum numerus sit revera infinitus. Perspicuum autem est nullam functionem non integram ipsius z per numerum huiusmodi terminorum $A+Bz+Cz^2+Dz^3+$ etc. finitum exponi posse; eo ipso enim functio foret integra. Num vero per huiusmodi terminorum seriem infinitam exhiberi possit, si quis dubitet, hoc dubium per ipsam evolutionem cuiusque functionis tolletur. Quo autem haec explicatio latius pateat, praeter potestates ipsius z exponentes integros affirmativos habentes admitti debent potestates quaecunque. Sic dubium erit nullum, quin omnis functio ipsius z in huiusmodi expressionem infinitam transmutari possit

$$Az^\alpha + Bz^\beta + Cz^\gamma + Dz^\delta + \text{etc.}$$

denotantibus exponentibus α, β, γ, δ etc. numeros quoscunque.

60. *Per divisionem autem continuam intelligitur fractionem*

$$\frac{a}{\alpha+\beta z}$$

resolvi in hanc seriem infinitam

$$\frac{a}{\alpha} - \frac{a\beta z}{\alpha^2} + \frac{a\beta^2 z^2}{\alpha^3} - \frac{a\beta^3 z^3}{\alpha^4} + \frac{a\beta^4 z^4}{\alpha^5} - \text{etc.},$$

quae, cum quilibet terminus ad sequentem habeat rationem constantem $1 : -\frac{\beta z}{\alpha}$, *vocatur series geometrica.*

Potest vero quoque haec series ita inveniri, ut ipsa initio pro incognita habeatur; ponatur enim

$$\frac{a}{\alpha+\beta z} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc.}$$

atque ad aequalitatem producendam quaerantur coefficientes A, B, C, D etc. Erit ergo

$$a = (\alpha+\beta z)(A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{etc.})$$

et multiplicatione actu peracta fiet

$$\begin{aligned} a = \alpha A &+ \alpha Bz + \alpha Cz^2 + \alpha Dz^3 + \alpha Ez^4 + \text{etc.} \\ &+ \beta Az + \beta Bz^2 + \beta Cz^3 + \beta Dz^4 + \text{etc.} \end{aligned}$$

Quamobrem esse debet

$$a = \alpha A \quad \text{ideoque} \quad A = \frac{a}{\alpha}$$

et coefficientium uniuscuiusque potestatis ipsius z summa nihilo aequalis est ponenda, unde prodibunt hae aequationes

$$\begin{aligned} \alpha B + \beta A &= 0, \\ \alpha C + \beta B &= 0, \\ \alpha D + \beta C &= 0, \\ \alpha E + \beta D &= 0 \\ &\text{etc.}; \end{aligned}$$

cognito ergo quovis coefficiente facile reperitur sequens; si enim fuerit coefficiens termini cuiusque $= P$ et sequens $= Q$, erit

$$\alpha Q + \beta P = 0 \quad \text{sive} \quad Q = -\frac{\beta P}{\alpha}.$$

Cum igitur terminus primus A sit determinatus $= \frac{a}{\alpha}$, ex eo sequentes litterae B, C, D etc. definiuntur eodem modo, quo ex divisione sunt orti. Ceterum ex inspectione perspicitur in serie infinita pro $\frac{a}{\alpha+\beta z}$ inventa potestatis z^n coefficientem fore $= \pm \frac{a\beta^n}{\alpha^{n+1}}$, ubi signum $+$ locum habet, si n sit numerus par, signum $-$ autem, si n sit numerus impar, seu coefficiens erit $= \frac{a}{\alpha}\left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)^n$.

61. *Simili modo ope divisionis continuatae haec functio fracta*

$$\frac{a+bz}{\alpha+\beta z+\gamma zz}$$

in seriem infinitam converti potest.

Cum autem divisio sit taediosa neque tam facile naturam seriei infinitae ostendat, commodius erit seriem quaesitam fingere atque modo ante tradito determinare. Sit igitur

$$\frac{a+bz}{\alpha+\beta z+\gamma zz} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc.};$$

multiplicetur utrinque per $\alpha + \beta z + \gamma zz$ atque fiet

$$\begin{aligned} a + bz = \alpha A + \alpha Bz &+ \alpha Cz^2 + \alpha Dz^3 + \alpha Ez^4 + \text{etc.} \\ &+ \beta Az + \beta Bz^2 + \beta Cz^3 + \beta Dz^4 + \text{etc.} \\ &\qquad\quad + \gamma Az^2 + \gamma Bz^3 + \gamma Cz^4 + \text{etc.} \end{aligned}$$

Hinc erit

$$\alpha A = a, \quad \alpha B + \beta A = b,$$

unde reperitur

$$A = \frac{a}{\alpha} \quad \text{et} \quad B = \frac{b}{\alpha} - \frac{a\beta}{\alpha\alpha};$$

reliquae vero litterae ex sequentibus aequationibus determinabuntur

$$\begin{aligned} \alpha C + \beta B + \gamma A &= 0, \\ \alpha D + \beta C + \gamma B &= 0, \\ \alpha E + \beta D + \gamma C &= 0, \\ \alpha F + \beta E + \gamma D &= 0 \\ &\text{etc.}; \end{aligned}$$

hinc ergo ex binis quibusque coefficientibus contiguis sequens reperitur. Sic, si duo coefficientes contigui fuerint P, Q et sequens R, erit

$$\alpha R + \beta Q + \gamma P = 0 \quad \text{seu} \quad R = \frac{-\beta Q - \gamma P}{\alpha}.$$

Cum igitur duae litterae primae A et B iam sint inventae, sequentes C, D, E, F etc. omnes successive ex iis invenientur sicque reperietur series infinita $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{etc.}$ functioni fractae propositae $\frac{a+bz}{\alpha+\beta z+\gamma z^2}$ aequalis.

EXEMPLUM

Si fuerit proposita haec fractio

$$\frac{1+2z}{1-z-zz}$$

huicque aequalis statuatur series

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{etc.},$$

ob

$$a = 1, \quad b = 2, \quad \alpha = 1, \quad \beta = -1, \quad \gamma = -1$$

erit

$$A = 1, \quad B = 3;$$

tum vero erit

$$\begin{aligned} C &= B + A, \\ D &= C + B, \\ E &= D + C, \\ F &= E + D \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Quilibet ergo coefficiens aequalis est summae duorum praecedentium; quare si cogniti fuerint duo coefficientes contigui P et Q, erit sequens

$$R = P + Q.$$

Cum igitur duo coefficientes primi A et B sint cogniti, fractio proposita

$$\frac{1+2z}{1-z-zz}$$

in hanc seriem infinitam transmutatur

$$1 + 3z + 4z^2 + 7z^3 + 11z^4 + 18z^5 + \text{etc.},$$

quae nullo negotio, quousque libuerit, continuari potest.

62. Ex his iam satis intelligitur indoles serierum infinitarum, in quas functiones fractae transmutantur; tenent enim eiusmodi legem, ut quilibet terminus ex aliquot praecedentibus determinari possit.

Scilicet, si denominator fractionis propositae fuerit

$$\alpha + \beta z$$

atque series infinita statuatur

$$A + Bz + Cz^2 + \cdots + Pz^n + Qz^{n+1} + Rz^{n+2} + Sz^{n+3} + \text{etc.},$$

quilibet coefficiens Q ex praecedente P solo ita definietur, ut sit

$$\alpha Q + \beta P = 0.$$

Sin denominator fuerit trinomium

$$\alpha + \beta z + \gamma zz,$$

quilibet coefficiens seriei R ex duobus praecedentibus Q et P ita definietur, ut sit

$$\alpha R + \beta Q + \gamma P = 0.$$

Simili modo, si denominator fuerit quadrinomium, ut

$$\alpha + \beta z + \gamma zz + \delta z^3,$$

quilibet coefficiens seriei S ex tribus antecedentibus R, Q et P ita determinabitur, ut sit

$$\alpha S + \beta R + \gamma Q + \delta P = 0,$$

sicque de ceteris.

In his ergo seriebus quilibet terminus determinatur ex aliquot antecedentibus secundum legem quandam constantem, quae lex ex denominatore fractionis hanc seriem producentis sponte apparet. Vocari autem hae series a Celeberrimo MOIVREO, qui earum naturam maxime est scrutatus, solent *recurrentes*, propterea quod ad terminos antecedentes est recurrendum, si sequentes investigare velimus.[1])

63. Ad harum porro serierum formationem requiritur, ut denominatoris terminus constans α non sit $= 0$; cum enim inventus sit terminus seriei primus $A = \frac{a}{\alpha}$, tum is tum omnes sequentes fierent infiniti, si esset $\alpha = 0$. Hoc ergo casu excluso, quem deinceps evolvam, functio fracta in seriem infinitam recurrentem transmutanda huiusmodi habebit formam

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{etc.}}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \text{etc.}},$$

ubi primum denominatoris terminum pono $= 1$; huc enim semper fractio reduci potest, nisi is sit $= 0$; reliquos autem denominatoris terminos omnes tanquam negativos contemplor, ut seriei hinc formatae omnes termini fiant affirmativi. Quodsi enim series recurrens hinc orta ponatur

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc.},$$

coefficientes ita determinabuntur, ut sit

---

1) A. DE MOIVRE (1667—1754), *De fractionibus algebraicis radicalitate immunibus ad fractiones simpliciores reducendis, deque summandis terminis quarumdam serierum aequali intervallo a se distantibus*, Philosophical transactions (London) 32 (1722/3), 1724, numb. 373, p. 162, imprimis p. 176. Vide etiam eiusdem auctoris *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*, Londini 1730, p. 27, nec non *The doctrine of chances*, London 1718, p. 127—134.

Series recurrentes ab EULERO ipso fusius pertractatae sunt in cap. XIII et XVII huius *Introductionis*. A. K.

$$
\begin{aligned}
A &= a,\\
B &= \alpha A + b,\\
C &= \alpha B + \beta A + c,\\
D &= \alpha C + \beta B + \gamma A + d,\\
E &= \alpha D + \beta C + \gamma B + \delta A + e\\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

Quilibet ergo coefficiens aequalis est aggregato ex multiplis aliquot praecedentium una cum numero quodam, quem numerator praebet. Nisi autem numerator in infinitum progrediatur, haec additio mox cessabit atque quivis terminus secundum legem constantem ex aliquot praecedentibus determinabitur. Ne ergo lex progressionis usquam turbetur, conveniet functionem fractam genuinam adhibere; si enim fractio spuria accipiatur, tum pars integra in ea contenta ad seriem accedet atque in illis terminis, quos vel auget vel minuit, legem progressionis interrumpet. Exempli gratia haec fractio spuria

$$\frac{1 + 2z - z^3}{1 - z - zz}$$

praebebit hanc seriem

$$1 + 3z + 4zz + 6z^3 + 10z^4 + 16z^5 + 26z^6 + 42z^7 + \text{etc.},$$

ubi a lege, qua quivis coefficiens est summa duorum praecedentium, terminus quartus $6z^3$ excipitur.

64. Peculiarem contemplationem series recurrentes merentur, si denominator fractionis, unde oriuntur, fuerit potestas. Sic, si ista fractio

$$\frac{a + bz}{(1 - \alpha z)^2}$$

in seriem resolvatur, prodit

$$
\begin{aligned}
a &+ 2\alpha a z + 3\alpha^2 a z^2 + 4\alpha^3 a z^3 + 5\alpha^4 a z^4 + \text{etc.},\\
&+ \quad b \quad + 2\alpha b \quad + 3\alpha^2 b \quad + 4\alpha^3 b
\end{aligned}
$$

in qua coefficiens potestatis z^n erit

$$(n + 1)\alpha^n a + n\alpha^{n-1} b.$$

Erit tamen haec series recurrens, quia quilibet terminus ex duobus praecedentibus determinatur, cuius determinationis lex perspicitur ex denominatore evoluto $1 - 2\alpha z + \alpha\alpha zz$.

Si ponatur $\alpha = 1$ et $z = 1$, abit series in progressionem arithmeticam generalem

$$a + (2a + b) + (3a + 2b) + (4a + 3b) + \text{etc.},$$

cuius differentiae sunt constantes. Omnis ergo progressio arithmetica est series recurrens; si enim sit

$$A + B + C + D + E + F + \text{etc.}$$

progressio arithmetica, erit

$$C = 2B - A, \quad D = 2C - B, \quad E = 2D - C \quad \text{etc.}$$

65. Deinde haec fractio

$$\frac{a + bz + czz}{(1 - \alpha z)^3}$$

ob

$$\frac{1}{(1 - \alpha z)^3} = (1 - \alpha z)^{-3} = 1 + 3\alpha z + 6\alpha^2 z^2 + 10\alpha^3 z^3 + 15\alpha^4 z^4 + \text{etc.}$$

transmutabitur in hanc seriem infinitam

$$
\begin{aligned}
a &+ 3\alpha a z + 6\alpha^2 a z^2 + 10\alpha^3 a z^3 + 15\alpha^4 a z^4 + \text{etc.},\\
&+ \quad b \quad + 3\alpha b \quad + 6\alpha^2 b \quad + 10\alpha^3 b\\
&\qquad\quad + \quad c \quad + 3\alpha c \quad + 6\alpha^2 c
\end{aligned}
$$

in qua potestas z^n coefficientem habebit

$$\frac{(n + 1)(n + 2)}{1 \cdot 2}\alpha^n a + \frac{n(n + 1)}{1 \cdot 2}\alpha^{n-1} b + \frac{(n - 1)n}{1 \cdot 2}\alpha^{n-2} c.$$

Quodsi autem ponatur $\alpha = 1$ et $z = 1$, series haec abibit in progressionem generalem secundi ordinis, cuius differentiae secundae sunt constantes. Designet

$$A + B + C + D + E + F + \text{etc.}$$

huiusmodi progressionem; erit ea simul series recurrens, cuius quilibet terminus ex tribus antecedentibus ita determinatur, ut sit

$$D = 3C - 3B + A, \quad E = 3D - 3C + B, \quad F = 3E - 3D + C \quad \text{etc.}$$

Cum igitur terminorum in progressione arithmetica procedentium secundae differentiae quoque sint aequales, nempe $= 0$, haec proprietas quoque ad progressiones arithmeticas extenditur.

66. Simili modo haec fractio

$$\frac{a + bz + czz + dz^3}{(1 - \alpha z)^4}$$

dabit seriem infinitam, in qua potestas ipsius z quaecunque z^n hunc habebit coefficientem

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^n a + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^{n-1} b + \frac{(n-1)n(n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^{n-2} c$$
$$+ \frac{(n-2)(n-1)n}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^{n-3} d.$$

Posito ergo $\alpha = 1$ et $z = 1$ haec series in se complectetur omnes progressiones algebraicas tertii ordinis, quarum differentiae tertiae sunt constantes; omnes ergo huius ordinis progressiones, cuiusmodi sit

$$A + B + C + D + E + F + \text{etc.},$$

erunt simul recurrentes ex denominatore $1 - 4z + 6zz - 4z^3 + z^4$ ortae, unde erit

$$E = 4D - 6C + 4B - A, \quad F = 4E - 6D + 4C - B \quad \text{etc.},$$

quae proprietas simul in omnes progressiones inferiorum ordinum competit.

67. Hoc modo ostendetur omnes progressiones algebraicas cuiuscunque ordinis, quae tandem ad differentias constantes deducunt, esse series recurrentes, quarum lex definiatur ex denominatore $(1 - z)^n$ existente n numero maiore quam is, qui ordinem progressionis indicat. Cum igitur

$$a^m + (a + b)^m + (a + 2b)^m + (a + 3b)^m + \text{etc.}$$

exhibeat progressionem ordinis m, erit ob naturam serierum recurrentium

$$0 = a^m - \frac{n}{1}(a + b)^m + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}(a + 2b)^m - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(a + 3b)^m$$
$$+ \cdots \mp \frac{n}{1}(a + (n-1)b)^m \pm (a + nb)^m,$$

ubi signa superiora valent, si n sit numerus par, inferiora autem, si n sit numerus impar. Haec ergo aequatio semper est vera, si fuerit n numerus integer maior quam m. Hinc ergo intelligitur, quam late pateat doctrina de seriebus recurrentibus.

68. Si denominator fuerit potestas non binomii sed multinomii, natura seriei quoque alio modo explicari potest. Sit nempe haec fractio

$$\frac{1}{(1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \text{etc.})^{m+1}}$$

proposita; erit series infinita hinc nata

$$\begin{array}{llll} 1 + \frac{m+1}{1}\alpha z & + \frac{(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2}\alpha^2 z^2 & + \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\alpha^3 z^3 & + \text{etc.} \\ & + \quad \frac{m+1}{1}\beta & + \quad \frac{(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2} 2\alpha\beta & \\ & & + \quad \frac{m+1}{1}\gamma & \end{array}$$

Ad naturam huius seriei penitius inspiciendam exponatur haec series per litteras generales hoc modo

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \cdots + Kz^{n-3} + Lz^{n-2} + Mz^{n-1} + Nz^n + \text{etc.}$$

ac quilibet coefficiens N ex tot praecedentibus, quot sunt litterae $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc., ita determinabitur, ut sit

$$N = \frac{m+n}{n}\alpha M + \frac{2m+n}{n}\beta L + \frac{3m+n}{n}\gamma K + \frac{4m+n}{n}\delta I + \text{etc.};$$

quae lex continuationis etsi non est constans, sed ab exponente potestatis z pendet, tamen eidem seriei alia convenit lex progressionis constans, quam denominator evolutus praebet naturae serierum recurrentium consentaneam.

Illa vero lex non constans tantum locum habet, si numerator fractionis fuerit unitas seu quantitas constans; si enim quoque aliquot potestates ipsius z contineret, tum illa lex multo magis fieret complicata, id quod post tradita calculi differentialis principia facilius patebit.

69. Quoniam hactenus posuimus primum denominatoris terminum constantem non esse $=0$ eiusque loco unitatem collocavimus, nunc videamus, cuiusmodi series oriantur, si in denominatore terminus constans evanescat. His casibus ergo functio fracta huiusmodi formam habebit

$$\frac{a+bz+czz+\text{etc.}}{z(1-\alpha z-\beta zz-\gamma z^3-\text{etc.})};$$

convertatur ergo neglecto denominatoris factore z reliqua fractio

$$\frac{a+bz+czz+\text{etc.}}{1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\text{etc.}}$$

in seriem recurrentem

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+\text{etc.}$$

atque manifestum est fore

$$\frac{a+bz+czz+\text{etc.}}{z(1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\text{etc.})}=\frac{A}{z}+B+Cz+Dz^2+Ez^3+\text{etc.}$$

Simili modo erit

$$\frac{a+bz+cz^2+\text{etc.}}{z^2(1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\text{etc.})}=\frac{A}{zz}+\frac{B}{z}+C+Dz+Ez^2+\text{etc.}$$

atque generatim erit

$$\frac{a+bz+cz^2+\text{etc.}}{z^m(1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\text{etc.})}=\frac{A}{z^m}+\frac{B}{z^{m-1}}+\frac{C}{z^{m-2}}+\frac{D}{z^{m-3}}+\text{etc.},$$

quicunque numerus fuerit exponens m.

70. Quoniam per substitutionem loco z alia variabilis x in functionem fractam introduci hocque pacto functio fracta quaevis in innumerabiles formas diversas transmutari potest, hoc modo eadem functio fracta infinitis modis

per series recurrentes explicari poterit. Sit scilicet proposita haec fractio

$$y=\frac{1+z}{1-z-zz}$$

et per seriem recurrentem

$$y=1+2z+3z^2+5z^3+8z^4+\text{etc.};$$

ponatur $z=\frac{1}{x}$; erit

$$y=\frac{xx+x}{xx-x-1}=\frac{-x(1+x)}{1+x-xx}.$$

Iam

$$\frac{1+x}{1+x-xx}=1+0x+xx-x^3+2x^4-3x^5+5x^6-\text{etc.},$$

unde erit

$$y=-x+0x^2-x^3+x^4-2x^5+3x^6-5x^7+\text{etc.}$$

Vel ponatur

$$z=\frac{1-x}{1+x};$$

erit

$$y=\frac{-2-2x}{1-4x-xx},$$

unde fit

$$y=-2-10x-42xx-178x^3-754x^4-\text{etc.},$$

cuiusmodi series recurrentes pro y innumerabiles inveniri possunt.

71. Functiones irrationales ex hoc theoremate universali[1]) in series infinitas transformari solent, quod sit

$$(P+Q)^{\frac{m}{n}}=P^{\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}P^{\frac{m-n}{n}}Q+\frac{m(m-n)}{n\cdot 2n}P^{\frac{m-2n}{n}}Q^2$$
$$+\frac{m(m-n)(m-2n)}{n\cdot 2n\cdot 3n}P^{\frac{m-3n}{n}}Q^3+\text{etc.};$$

1) Vide L. EULERI *Institutiones calculi differentialis,* Petropoli 1755, partis posterioris cap. IV; *LEONHARDI EULERI Opera omnia,* series I, vol. 10, p. 276. Vide porro L. EULERI Commentationem 465 (indicis ENESTROEMIANI): *Demonstratio theorematis NEUTONIANI de evolutione potestatum binomii pro casibus, quibus exponentes non sunt numeri integri,* Novi comment. acad. sc. Petrop. 19 (1774), 1775, p. 103; *LEONHARDI EULERI Opera omnia,* series I, vol. 15. A. K.

hi enim termini, nisi fuerit $\frac{m}{n}$ numerus integer affirmativus, in infinitum excurrunt. Sic erit pro m et n numeros definitos scribendo

$$(P+Q)^{\frac{1}{2}} = P^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}P^{-\frac{1}{2}}Q - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}P^{-\frac{3}{2}}Q^2 + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}P^{-\frac{5}{2}}Q^3 - \text{etc.},$$

$$(P+Q)^{-\frac{1}{2}} = P^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}P^{-\frac{3}{2}}Q + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}P^{-\frac{5}{2}}Q^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}P^{-\frac{7}{2}}Q^3 + \text{etc.},$$

$$(P+Q)^{\frac{1}{3}} = P^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}P^{-\frac{2}{3}}Q - \frac{1\cdot 2}{3\cdot 6}P^{-\frac{5}{3}}Q^2 + \frac{1\cdot 2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}P^{-\frac{8}{3}}Q^3 - \text{etc.},$$

$$(P+Q)^{-\frac{1}{3}} = P^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}P^{-\frac{4}{3}}Q + \frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}P^{-\frac{7}{3}}Q^2 - \frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}P^{-\frac{10}{3}}Q^3 + \text{etc.},$$

$$(P+Q)^{\frac{2}{3}} = P^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}P^{-\frac{1}{3}}Q - \frac{2\cdot 1}{3\cdot 6}P^{-\frac{4}{3}}Q^2 + \frac{2\cdot 1\cdot 4}{3\cdot 6\cdot 9}P^{-\frac{7}{3}}Q^3 - \text{etc.}$$

etc.

72. Huiusmodi ergo serierum termini ita progrediuntur, ut quilibet ex antecedente formari possit. Sit enim seriei, quae ex $(P+Q)^{\frac{m}{n}}$ nascitur, terminus quilibet

$$= MP^{\frac{m-kn}{n}}Q^k;$$

erit sequens

$$= \frac{m-kn}{(k+1)n}MP^{\frac{m-(k+1)n}{n}}Q^{k+1}.$$

Notandum autem est in quovis termino sequente exponentem ipsius P unitate decrescere, contra vero exponentem ipsius Q unitate crescere. Quo autem haec facilius ad quemvis casum accommodentur, forma generalis $(P+Q)^{\frac{m}{n}}$ ita exponi potest $P^{\frac{m}{n}}\left(1+\frac{Q}{P}\right)^{\frac{m}{n}}$; evoluta enim formula $\left(1+\frac{Q}{P}\right)^{\frac{m}{n}}$ serieque resultante per $P^{\frac{m}{n}}$ multiplicata prodibit ipsa series ante data. Tum vero, si m non solum numeros integros denotet, sed etiam fractos, pro n tuto unitas collocari poterit. Quibus factis si pro $\frac{Q}{P}$, quae est functio ipsius z, ponatur Z, habebitur

$$(1+Z)^m = 1 + \frac{m}{1}Z + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}Z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}Z^3 + \text{etc.}$$

Ad sequentes progressionum leges autem observandas conveniet hanc formulae generalis in seriem conversionem notasse

$$(1+Z)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1}Z + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}Z^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3}Z^3 + \text{etc.}$$

73. Sit igitur primum

$$Z = \alpha z$$

eritque

$$(1+\alpha z)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1}\alpha z + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}\alpha^2 z^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3 z^3 + \text{etc.}$$

Scribatur pro hac serie ista forma generalis

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \cdots + Mz^{n-1} + Nz^n + \text{etc.}$$

atque quilibet coefficiens N ex praecedente M ita determinabitur, ut sit

$$N = \frac{m-n}{n}\alpha M.$$

Sic posito $n=1$, cum sit $M=1$, erit

$$N = A = \frac{m-1}{1}\alpha;$$

tum facto $n=2$ ob $M = A = \frac{m-1}{1}\alpha$ erit

$$N = B = \frac{m-2}{2}\alpha M = \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}\alpha^2$$

similique modo porro

$$C = \frac{m-3}{3}\alpha B = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3,$$

ut series ante inventa declarat.

74. Sit

$$Z = \alpha z + \beta zz$$

eritque

$$(1+\alpha z+\beta zz)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1}(\alpha z+\beta zz) + \frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}(\alpha z+\beta zz)^2 + \text{etc.}$$

Quodsi ergo termini secundum potestates ipsius z disponantur, erit

$$\begin{aligned}(1+\alpha z+\beta zz)^{m-1} \\ =1+\frac{m-1}{1}\alpha z+\frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}\alpha^2 z^2+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3 z^3+\text{etc.} \\ +\frac{m-1}{1}\beta z^2 \qquad +\frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}2\alpha\beta z^3\end{aligned}$$

Scribatur pro hac serie ista forma generalis

$$1+Az+Bz^2+Cz^3+\cdots+Lz^{n-2}+Mz^{n-1}+Nz^n+\text{etc.}$$

atque quilibet coefficiens ex duobus antecedentibus ita definietur, ut sit

$$N=\frac{m-n}{n}\alpha M+\frac{2m-n}{n}\beta L,$$

unde omnes termini ex primo, qui est 1, definiri poterunt. Erit nempe

$$\begin{aligned}A&=\frac{m-1}{1}\alpha,\\ B&=\frac{m-2}{2}\alpha A+\frac{2m-2}{2}\beta,\\ C&=\frac{m-3}{3}\alpha B+\frac{2m-3}{3}\beta A,\\ D&=\frac{m-4}{4}\alpha C+\frac{2m-4}{4}\beta B\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

75. Si fuerit

$$Z=\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3,$$

erit

$$\begin{aligned}(1+\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3)^{m-1} \\ =1+\frac{m-1}{1}(\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3)+\frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}(\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3)^2+\text{etc.},\end{aligned}$$

quae expressio, si omnes termini secundum potestates ipsius z ordinentur, abibit in hanc seriem

$$\begin{aligned}1+\frac{m-1}{1}\alpha z+\frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}\alpha^2 z^2+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3 z^3+\text{etc.}; \\ +\frac{m-1}{1}\beta z^2 \qquad +\frac{(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}2\alpha\beta z^3 \\ +\frac{m-1}{1}\gamma z^3\end{aligned}$$

cuius lex progressionis ut melius patescat, ponatur eius loco

$$1+Az+Bz^2+Cz^3+\cdots+Kz^{n-3}+Lz^{n-2}+Mz^{n-1}+Nz^n+\text{etc.},$$

cuius seriei quilibet coefficiens ex tribus antecedentibus ita determinatur, ut sit

$$N=\frac{m-n}{n}\alpha M+\frac{2m-n}{n}\beta L+\frac{3m-n}{n}\gamma K.$$

Cum igitur primus terminus sit $=1$ et antecedentes nulli, erit

$$\begin{aligned}A&=\frac{m-1}{1}\alpha,\\ B&=\frac{m-2}{2}\alpha A+\frac{2m-2}{2}\beta,\\ C&=\frac{m-3}{3}\alpha B+\frac{2m-3}{3}\beta A+\frac{3m-3}{3}\gamma,\\ D&=\frac{m-4}{4}\alpha C+\frac{2m-4}{4}\beta B+\frac{3m-4}{4}\gamma A,\\ E&=\frac{m-5}{5}\alpha D+\frac{2m-5}{5}\beta C+\frac{3m-5}{5}\gamma B\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

76. Generaliter ergo si ponatur

$$(1+\alpha z+\beta z^2+\gamma z^3+\delta z^4+\text{etc.})^{m-1}=1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+Ez^5+\text{etc.},$$

huius seriei singuli termini ita ex praecedentibus definientur, ut sit

$$\begin{aligned}A&=\frac{m-1}{1}\alpha,\\ B&=\frac{m-2}{2}\alpha A+\frac{2m-2}{2}\beta,\\ C&=\frac{m-3}{3}\alpha B+\frac{2m-3}{3}\beta A+\frac{3m-3}{3}\gamma,\\ D&=\frac{m-4}{4}\alpha C+\frac{2m-4}{4}\beta B+\frac{3m-4}{4}\gamma A+\frac{4m-4}{4}\delta,\\ E&=\frac{m-5}{5}\alpha D+\frac{2m-5}{5}\beta C+\frac{3m-5}{5}\gamma B+\frac{4m-5}{5}\delta A+\frac{5m-5}{5}\varepsilon\\ &\text{etc.};\end{aligned}$$

quilibet scilicet terminus per tot praecedentes determinatur, quot habentur litterae α, β, γ, δ etc. in functione ipsius z, cuius potestas in seriem convertitur. Ceterum ratio huius legis convenit cum ea, quam supra § 68 [invenimus], ubi similem formam $(1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\text{etc.})^{-m-1}$ in seriem infinitam resolvimus; si enim loco m scribatur $-m$ atque litterae α, β, γ, δ etc. negative accipiantur, series inventae prorsus congruent. Interim hoc loco non licet rationem huius progressionis legis a priori demonstrare, id quod per principia Calculi differentialis[1]) demum commode fieri poterit; interea ergo sufficiet veritatem per applicationem ad omnis generis exempla comprobasse.

1) Confer L. EULERI *Institutiones calculi differentialis*, Petropoli 1755, partis posterioris cap. VIII; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 10, p. 396. A. K.

CAPUT V

DE FUNCTIONIBUS DUARUM PLURIUMVE VARIABILIUM

77. Quanquam plures hactenus quantitates variabiles sumus contemplati, tamen eae ita erant comparatae, ut omnes unius essent functiones unaque determinata reliquae simul determinarentur. Nunc autem eiusmodi considerabimus quantitates variabiles, quae a se invicem non pendeant, ita ut, quamvis uni determinatus valor tribuatur, reliquae tamen nihilominus maneant indeterminatae ac variabiles. Eiusmodi ergo quantitates variabiles, cuiusmodi sint x, y, z, ratione significationis convenient, cum quaelibet omnes valores determinatos in se complectatur; at, si inter se comparentur, maxime erunt diversae, cum, licet pro una z valor quicunque determinatus substituatur, reliquae tamen x et y aeque late pateant atque ante. Discrimen ergo inter quantitates variabiles a se pendentes et non pendentes in hoc versatur, ut priori casu, si una determinetur, simul reliquae determinentur, posteriori vero determinatio unius significationes reliquarum minime restringat.

78. *Functio ergo duarum pluriumve quantitatum variabilium x, y, z est expressio quomodocunque ex his quantitatibus composita.*

Ita erit

$$x^3+xyz+az^2$$

functio quantitatum variabilium trium x, y, z. Haec ergo functio, si una determinetur variabilis, puta z, hoc est, eius loco constans numerus substituatur, manebit adhuc quantitas variabilis, scilicet functio ipsarum x et y. Atque si praeter z quoque y determinetur, tum erit adhuc functio ipsius x.

Huiusmodi ergo plurium variabilium functio non ante valorem determinatum obtinebit, quam singulae quantitates variabiles fuerint determinatae. Cum igitur una quantitas variabilis infinitis modis determinari possit, functio duarum variabilium, quia pro quavis determinatione unius infinitas determinationes suscipere potest, omnino infinities infinitas determinationes admittet. Atque in functione trium variabilium numerus determinationum erit adhuc infinities maior; sicque porro crescet pro pluribus variabilibus.

79. *Huiusmodi functiones plurium variabilium perinde atque functiones unius variabilis commodissime dividuntur in algebraicas ac transcendentes.*

Quarum illae sunt, in quibus ratio compositionis in solis Algebrae operationibus est posita; hae vero, in quarum formationem quoque operationes transcendentes ingrediuntur. In his denuo species notari possent, prout operationes transcendentes vel omnes quantitates variabiles implicant vel aliquot vel tantum unicam. Sic ista expressio

$$zz + y \log. z,$$

quia logarithmus ipsius z inest, erit quidem functio transcendens ipsarum y et z, verum ideo minus transcendens est putanda, quod, si variabilis z determinetur, supersit functio algebraica ipsius y. Interim tamen non expedit huiusmodi subdivisionibus tractationem amplificari.

80. *Functiones deinde algebraicae subdividuntur in rationales et irrationales, rationales autem porro in integras ac fractas.*

Ratio harum denominationum ex capite primo iam abunde intelligitur. Functio scilicet rationalis omnino est libera ab omni irrationalitate quantitates variabiles, quarum functio dicitur, afficiente; haecque erit integra, si nullis fractionibus inquinetur, contra vero fracta. Sic functionis integrae duarum variabilium y et z haec erit forma generalis

$$\alpha + \beta y + \gamma z + \delta y^2 + \varepsilon yz + \zeta z^2 + \eta y^3 + \theta y^2 z + \iota yz^2 + \varkappa z^3 + \text{etc.}$$

Quodsi ergo P et Q denotent huiusmodi functiones integras, sive duarum sive plurium variabilium, erit $\frac{P}{Q}$ forma generalis functionum fractarum.

Functio denique irrationalis est vel explicita vel implicita; illa per signa radicalia iam penitus est evoluta, haec autem per aequationem irresolubilem exhibetur. Sic V erit functio implicita irrationalis ipsarum y et z, si fuerit

$$V^5 = (ayz + z^3) V^2 + (y^4 + z^4) V + y^5 + 2ayz^3 + z^5.$$

81. *Multiformitas deinde in his functionibus aeque notari debet atque in iis, quae ex unica variabili constant.*

Sic functiones rationales erunt uniformes, quia singulis quantitatibus variabilibus determinatis unicum valorem determinatum exhibent. Denotent P, Q, R, S etc. functiones rationales seu uniformes variabilium x, y, z eritque V functio biformis earundem variabilium, si fuerit

$$V^2 - PV + Q = 0;$$

quicunque enim valores determinati quantitatibus x, y et z tribuuntur, functio V non unum sed duplicem perpetuo habebit valorem determinatum. Simili modo erit V functio triformis, si fuerit

$$V^3 - PV^2 + QV - R = 0,$$

atque functio quadriformis, si fuerit

$$V^4 - PV^3 + QV^2 - RV + S = 0;$$

hocque modo ratio functionum multiformium ulteriorum erit comparata.

82. Quemadmodum, si functio unius variabilis z nihilo aequalis ponitur, quantitas variabilis z valorem consequitur determinatum vel simplicem vel multiplicem, ita, si functio duarum variabilium y et z nihilo aequalis ponitur, tum altera variabilis per alteram definitur eiusque ideo functio evadit, cum ante a se mutuo non penderent. Simili modo si functio trium variabilium x, y, z nihilo aequalis statuatur, tum una variabilis per duas reliquas definitur earumque functio existit. Idem evenit, si functio non nihilo, sed quantitati constanti vel etiam alii functioni aequalis ponatur; ex omni enim aequatione, quotcunque variabiles involvat, semper una variabilis per reliquas definitur earumque fit functio; duae autem aequationes diversae inter easdem variabiles ortae binas per reliquas definient atque ita porro.

83. *Functionum autem duarum pluriumve variabilium divisio maxime notatu digna est in homogeneas et heterogeneas.*

Functio homogenea[1]) est, per quam ubique idem regnat variabilium numerus dimensionum; *functio* autem *heterogenea* est, in qua diversi occurrunt dimensionum numeri. Censetur vero unaquaeque variabilis unam dimensionem constituere; quadratum uniuscuiusque atque productum ex duabus duas; productum ex tribus variabilibus, sive iisdem sive diversis, tres, et ita porro; quantitates autem constantes ad dimensionum numerationem non admittuntur. Ita in his formulis

$$\alpha y,\ \beta z$$

unica dimensio inesse dicitur; in his vero

$$\alpha y^2,\ \beta yz,\ \gamma z^2$$

duae insunt dimensiones; in his

$$\alpha y^3,\quad \beta y^2 z,\quad \gamma yz^2,\quad \delta z^3$$

tres; in his vero

$$\alpha y^4,\quad \beta y^3 z,\quad \gamma y^2 z^2,\quad \delta yz^3,\quad \varepsilon z^4$$

quatuor sicque porro.

84. Applicemus primum hanc distinctionem ad functiones integras atque duas tantum variabiles inesse ponamus, quoniam plurium par est ratio.

Functio igitur integra erit homogenea, in cuius singulis terminis idem existit dimensionum numerus.

Subdividentur ergo huiusmodi functiones commodissime secundum numerum dimensionum, quem variabiles in ipsis ubique constituunt. Sic erit

$$\alpha y + \beta z$$

1) Terminus technicus *homogeneus* invenitur iam apud FR. VIETA (1540–1603), *Opera mathematica* (ed. FR. À SCHOOTEN), Lugd. Batav. 1646, p. 4. Eum respiciens deinde G. LEIBNIZ distincte definivit expressiones secundum *legem homogeneorum* compositas (id est *functiones homogeneas*); vide *LEIBNIZENS Mathematische Schriften*, herausg. von C. I. GERHARDT, 2. Abt., Bd. 3, Halle 1853, p. 65. Concedendum quidem est hunc ipsum terminum *functionis homogeneae* primum inveniri apud IOH. BERNOULLI (1667–1748), *De integrationibus aequationum differentialium etc.*, Comment. acad. sc. Petrop. 1 (1726), 1728, p. 167; *Opera omnia*, Lausannae et Genevae 1742, t. III, p. 108. A. K.

forma generalis functionum integrarum unius dimensionis; haec vero expressio

$$\alpha y^2 + \beta yz + \gamma z^2$$

erit forma generalis functionum duarum dimensionum; tum forma generalis functionum trium dimensionum erit

$$\alpha y^3 + \beta y^2 z + \gamma yz^2 + \delta z^3;$$

quatuor dimensionum vero haec

$$\alpha y^4 + \beta y^3 z + \gamma y^2 z^2 + \delta yz^3 + \varepsilon z^4$$

et ita porro. Ad analogiam igitur erit quantitas constans sola α functio nullius dimensionis.

85. *Functio porro fracta erit homogenea, si eius numerator ac denominator fuerint functiones homogeneae.*

Sic haec fractio

$$\frac{ayz + bzz}{\alpha y + \beta z}$$

erit functio homogenea ipsarum y et z; numerus dimensionum autem habebitur, si a numero dimensionum numeratoris subtrahatur numerus dimensionum denominatoris, atque ob hanc rationem fractio allata erit functio unius dimensionis. Haec vero fractio

$$\frac{y^5 + z^5}{yy + zz}$$

erit functio trium dimensionum. Quando ergo in numeratore ac denominatore idem dimensionum numerus inest, tum fractio erit functio nullius dimensionis, uti evenit in hac fractione

$$\frac{y^3 + z^3}{yyz}$$

vel etiam in his

$$\frac{y}{z},\quad \frac{\alpha zz}{yy},\quad \frac{\beta y^3}{z^3}.$$

Quodsi igitur in denominatore plures sint dimensiones quam in numeratore, numerus dimensionum fractionis erit negativus; sic

$$\frac{y}{zz}$$

erit functio -1 dimensionis,

$$\frac{y+z}{y^4+z^4}$$

erit functio -3 dimensionum,

$$\frac{1}{y^5+ayz^4}$$

erit functio -5 dimensionum, quia in numeratore nulla inest dimensio. Ceterum sponte intelligitur plures functiones homogeneas, in quibus singulis idem regnat dimensionum numerus, sive additas sive subtractas praebere functionem quoque homogeneam eiusdem dimensionum numeri. Sic haec expressio

$$\alpha y+\frac{\beta zz}{y}+\frac{\gamma y^4-\delta z^4}{yyz+yzz}$$

erit functio unius dimensionis; haec autem

$$\alpha+\frac{\beta y}{z}+\frac{\gamma zz}{yy}+\frac{yy+zz}{yy-zz}$$

erit functio nullius dimensionis.

86. Natura functionum homogenearum quoque ad expressiones irrationales extenditur. Si enim fuerit P functio quaecunque homogenea, puta n dimensionum, tum $\sqrt{P}$ erit functio $\frac{1}{2}n$ dimensionum, $\sqrt[3]{P}$ erit functio $\frac{1}{3}n$ dimensionum et generatim $P^{\frac{\mu}{\nu}}$ erit functio $\frac{\mu}{\nu}n$ dimensionum. Sic $\sqrt{(yy+zz)}$ erit functio unius dimensionis, $\sqrt[3]{(y^9+z^9)}$ erit functio trium dimensionum, $(yz+zz)^{\frac{3}{4}}$ erit functio $\frac{3}{2}$ dimensionum atque $\frac{yy+zz}{\sqrt{(y^4+z^4)}}$ erit functio nullius dimensionis. His ergo cum praecedentibus coniunctis intelligetur haec expressio

$$\frac{1}{y}+\frac{y\sqrt{(yy+zz)}}{z^3}-\frac{y}{\sqrt[3]{(y^6-z^6)}}+\frac{y\sqrt{z}}{zz\sqrt{y}+\sqrt{(y^5+z^5)}}$$

esse functio homogenea -1 dimensionis.

87. Utrum functio irrationalis implicita sit homogenea necne, ex his facile colligi potest. Sit V huiusmodi functio implicita ac

$$V^3+PV^2+QV+R=0$$

existentibus P, Q et R functionibus ipsarum y et z. Primum igitur patet V functionem homogeneam esse non posse, nisi P, Q et R sint functiones homogeneae. Praeterea vero, si ponamus V esse functionem n dimensionum, erit V^2 functio $2n$ et V^3 functio $3n$ dimensionum; cum igitur ubique idem debeat esse numerus dimensionum, oportet, ut P sit functio n dimensionum, Q functio $2n$ dimensionum et R functio $3n$ dimensionum. Si ergo vicissim litterae P, Q, R [sint] functiones homogeneae respective n, $2n$, $3n$ dimensionum, hinc concludetur fore V functionem n dimensionum. Ita si fuerit

$$V^5+(y^4+z^4)V^3+\alpha y^8V-z^{10}=0,$$

erit V functio homogenea duarum dimensionum ipsarum y et z.

88. *Si fuerit V functio homogenea n dimensionum ipsarum y et z in eaque ponatur ubique $y=uz$, functio V abibit in productum ex potestate z^n in functionem quandam variabilis u.*

Per hanc enim substitutionem $y=uz$ in singulos terminos tantae inducentur potestates ipsius z, quantae ante inerant ipsius y. Cum igitur in singulis terminis dimensiones ipsarum y et z coniunctim aequassent numerum n, nunc sola variabilis z ubique habebit n dimensiones ideoque ubique inerit eius potestas z^n. Per hanc ergo potestatem functio V fiet divisibilis et quotus erit functio variabilem tantum u involvens.

Hoc primum patebit in functionibus integris. Si enim sit

$$V=\alpha y^3+\beta y^2z+\gamma yz^2+\delta z^3,$$

posito $y=uz$ fiet

$$V=z^3(\alpha u^3+\beta u^2+\gamma u+\delta).$$

Deinde vero idem manifestum est in fractis. Sit enim

$$V=\frac{\alpha y+\beta z}{yy+zz},$$

nempe functio -1 dimensionis; facto $y = uz$ fiet

$$V = z^{-1} \cdot \frac{\alpha u + \beta}{uu + 1}.$$

Neque etiam functiones irrationales hinc excipiuntur. Si enim sit

$$V = \frac{y + \sqrt{(yy + zz)}}{z\sqrt{(y^3 + z^3)}},$$

quae est functio $-\frac{3}{2}$ dimensionum, posito $y = uz$ prodibit

$$V = z^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{u + \sqrt{(uu + 1)}}{\sqrt{(u^3 + 1)}}.$$

Hoc itaque modo functiones homogeneae duarum tantum variabilium reducentur ad functiones unius variabilis; neque enim potestas ipsius z, quia est factor, functionem illam ipsius u inquinat.

89. *Functio ergo homogenea V duarum variabilium y et z nullius dimensionis posito $y = uz$ transmutabitur in functionem unicae variabilis u puram.*

Cum enim numerus dimensionum sit nullus, potestas ipsius z, quae functionem ipsius u multiplicabit, erit $z^0 = 1$ hocque casu variabilis z prorsus ex computo egredietur. Ita si fuerit

$$V = \frac{y + z}{y - z},$$

facto $y = uz$ orietur

$$V = \frac{u + 1}{u - 1},$$

atque in irrationalibus si sit

$$V = \frac{y - \sqrt{(yy - zz)}}{z},$$

posito $y = uz$ erit

$$V = u - \sqrt{(uu - 1)}.$$

90. *Functio integra homogenea duarum variabilium y et z resolvi poterit in tot factores simplices formae $\alpha y + \beta z$, quot habuerit dimensiones.*

Cum enim functio sit homogenea, posito $y = uz$ transibit in productum ex z^n in functionem quandam ipsius u integram, quae functio propterea in factores simplices formae $\alpha u + \beta$ resolvi poterit. Multiplicentur singuli factores hi per z eritque uniuscuiusque forma $\alpha uz + \beta z = \alpha y + \beta z$ ob $uz = y$. Propter multiplicatorem autem z^n, tot huiusmodi factores nascentur, quot exponens n contineat unitates; factores autem hi simplices erunt vel reales vel imaginarii, hoc est, coefficientes α et β erunt vel reales vel imaginarii.

Ex hoc itaque sequitur functionem duarum dimensionum

$$ayy + byz + czz$$

duos habere factores simplices formae $\alpha y + \beta z$; functio autem

$$ay^3 + by^2z + cyz^2 + dz^3$$

habebit tres factores simplices formae $\alpha y + \beta z$; sicque porro functionum homogenearum integrarum, quae plures habent dimensiones, natura erit comparata.

91. Quemadmodum ergo haec expressio $\alpha y + \beta z$ continet formam generalem functionum integrarum unius dimensionis, ita

$$(\alpha y + \beta z)(\gamma y + \delta z)$$

erit forma generalis functionum integrarum duarum dimensionum; atque in hac forma

$$(\alpha y + \beta z)(\gamma y + \delta z)(\varepsilon y + \zeta z)$$

continebuntur omnes functiones integrae trium dimensionum sicque omnes functiones integrae homogeneae per producta ex tot huiusmodi factoribus $\alpha y + \beta z$ exhiberi poterunt, quot functiones illae contineant dimensiones. Isti autem factores eodem modo per resolutionem aequationum reperiuntur, quo supra [§ 29] factores simplices functionum integrarum unius variabilis invenire docuimus. Ceterum haec proprietas functionum homogenearum duarum variabilium non extenditur ad functiones homogeneas trium pluriumve variabilium;

forma enim generalis huiusmodi functionum duarum tantum dimensionum, quae est

$$ayy + byz + cyx + dxz + exx + fzz,$$

generaliter non reduci potest ad huiusmodi productum

$$(\alpha y + \beta z + \gamma x)(\delta y + \varepsilon z + \zeta x)$$

multoque minus functiones plurium dimensionum ad huiusmodi producta revocari possunt.

92. Ex his, quae de functionibus homogeneis sunt dicta, simul intelligitur, quid sit functio heterogenea; in cuius scilicet terminis non ubique idem dimensionum numerus deprehenditur. Possunt autem functiones heterogeneae subdividi pro multiplicitate dimensionum, quae in ipsis occurrunt. Sic functio *bifida* erit, in qua duplex dimensionum numerus occurrit, eritque adeo aggregatum duarum functionum homogenearum, quarum numeri dimensionum differunt; ita

$$y^5 + 2y^3z^2 + yy + zz$$

erit functio bifida, quia partim quinque, partim duas continet dimensiones. Functio autem *trifida* est, in qua tres diversi dimensionum numeri insunt seu quae in tres functiones homogeneas distribui possunt, uti

$$y^6 + y^2z^2 + z^4 + y - z.$$

Praeterea autem dantur functiones heterogeneae fractae vel irrationales tantopere permixtae, quae in functiones homogeneas resolvi non possunt, cuiusmodi sunt

$$\frac{y^3 + ayz}{by + zz}, \quad \frac{a + \sqrt{(yy + zz)}}{yy - bz}.$$

93. Interdum functio heterogenea ope substitutionis idoneae, vel loco unius vel utriusque variabilis factae, ad homogeneam reduci potest; quod quibus casibus fieri queat, non tam facile indicare licet. Sufficiet ergo exempla quaedam attulisse, quibus eiusmodi reductio locum habet. Si scilicet haec proposita sit functio

$$y^5 + zzy + y^3z + \frac{z^3}{y},$$

post levem attentionem apparebit eam ad homogeneitatem perduci posito $z = xx$; prodibit enim

$$y^5 + x^4y + y^3xx + \frac{x^6}{y},$$

functio homogenea 5 dimensionum ipsarum x et y. Deinde haec functio

$$y + y^2x + y^3xx + y^5x^4 + \frac{a}{x}$$

ad homogeneitatem reducitur ponendo $x = \frac{1}{z}$; prodit enim functio unius dimensionis

$$y + \frac{yy}{z} + \frac{y^3}{zz} + \frac{y^5}{z^4} + az.$$

Multo difficiliores autem sunt casus, quibus non per tam simplicem substitutionem ad homogeneitatem pervenire licet.

94. Tandem inprimis notari meretur functionum integrarum secundum ordines divisio satis usitata, secundum quam ordo definitur ex maximo dimensionum numero, qui in functione inest. Sic

$$xx + yy + zz + ay - aa$$

est functio secundi ordinis, quia duae dimensiones occurrunt. Et

$$y^4 + yz^3 - ay^2z + abyz - aayy + b^4$$

pertinet ad functiones quarti ordinis. Ad hanc divisionem potissimum in doctrina de lineis curvis respici solet, unde adhuc una functionum integrarum divisio commemoranda venit.

95. Superest scilicet divisio functionum integrarum in *complexas* atque *incomplexas*. Functio autem complexa est, quae in factores rationales resolvi potest seu quae est productum ex duabus functionibus pluribusve rationalibus; cuiusmodi est

$$y^4 - z^4 + 2az^3 - 2byzz - aazz + 2abzy - bbyy,$$

quae est productum ex his duabus functionibus

$$(yy + zz - az + by)(yy - zz + az - by).$$

Ita vidimus omnem functionem integram homogeneam, quae tantum duas variabiles complectatur, esse functionem complexam, quoniam tot factores simplices formae $\alpha y + \beta z$ habet, quot continet dimensiones. Functio igitur integra erit incomplexa, si in factores rationales resolvi omnino nequeat, uti

$$yy + zz - aa,$$

cuius nullos dari factores rationales facile intelligitur. Ex inquisitione divisorum patebit, utrum functio proposita sit complexa an incomplexa.

CAPUT VI

DE QUANTITATIBUS EXPONENTIALIBUS AC LOGARITHMIS

96. Quanquam notio functionum transcendentium in Calculo integrali demum perpendetur, tamen, antequam eo perveniamus, quasdam species magis obvias atque ad plures investigationes aditum aperientes evolvere conveniet. Primum ergo considerandae sunt quantitates exponentiales seu potestates, quarum exponens ipse est quantitas variabilis. Perspicuum enim est huiusmodi quantitates ad functiones algebraicas referri non posse, cum in his exponentes non nisi constantes locum habeant. Multiplices autem sunt quantitates exponentiales, prout vel solus exponens est quantitas variabilis vel praeterea etiam ipsa quantitas elevata. Prioris generis est a^z, huius vero y^z; quin etiam ipse exponens potest esse quantitas exponentialis, uti in his formis a^{a^z}, a^{y^z}, y^{a^z}, x^{y^z}. Huiusmodi autem quantitatum non plura constituemus genera, cum earum natura satis clare intelligi queat, si primam tantum speciem a^z evolverimus.

97. Sit igitur proposita huiusmodi quantitas exponentialis a^z, quae est potestas quantitatis constantis a exponentem habens variabilem z. Cum igitur iste exponens z omnes numeros determinatos in se complectatur, primum patet, si loco z omnes numeri integri affirmativi successive substituantur, loco a^z hos prodituros esse valores determinatos

$$a^1, \ a^2, \ a^3, \ a^4, \ a^5, \ a^6 \text{ etc.}$$

Sin autem pro z ponantur successive numeri negativi -1, -2, -3, -4 etc., prodibunt

$$\frac{1}{a},\ \frac{1}{a^2},\ \frac{1}{a^3},\ \frac{1}{a^4}\ \text{etc.}$$

ac, si fuerit $z = 0$, habebitur semper

$$a^0 = 1.$$

Quodsi loco z numeri fracti ponantur, ut $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ etc., orientur isti valores

$$\sqrt{a},\ \sqrt[3]{a},\ \sqrt[3]{aa},\ \sqrt[4]{a},\ \sqrt[4]{a^3}\ \text{etc.},$$

qui in se spectati geminos pluresve induunt valores, cum radicum extractio semper valores multiformes producat. Interim tamen hoc loco valores tantum primarii, reales scilicet atque affirmativi, admitti solent, quia quantitas a^z tanquam functio uniformis ipsius z spectatur. Sic $a^{\frac{5}{2}}$ medium quendam tenebit locum inter a^2 et a^3 eritque ideo quantitas eiusdem generis; et quamvis valor $a^{\frac{5}{2}}$ sit aeque $= -aa\sqrt{a}$ ac $= +aa\sqrt{a}$, tamen posterior tantum in censum venit. Eodem modo res se habet, si exponens z valores irrationales accipiat, quibus casibus, cum difficile sit numerum valorum involutorum concipere, unicus tantum realis consideratur. Sic $a^{\sqrt{7}}$ erit valor determinatus intra limites a^2 et a^3 comprehensus.

98. Maxime autem valores quantitatis exponentialis a^z a magnitudine numeri constantis a pendebunt. Si enim fuerit $a = 1$, semper erit $a^z = 1$, quicunque valores exponenti z tribuantur. Sin autem fuerit $a > 1$, tum valores ipsius a^z eo erunt maiores, quo maior numerus loco z substituatur, atque adeo posito $z = \infty$ in infinitum excrescunt; si fuerit $z = 0$, fiet $a^z = 1$, et si sit $z < 0$, valores a^z fient unitate minores, quoad posito $z = -\infty$ fiat $a^z = 0$. Contrarium evenit, si sit $a < 1$, verum tamen quantitas affirmativa; tum enim valores ipsius a^z decrescent crescente z supra 0; crescent vero, si pro z numeri negativi substituantur. Cum enim sit $a < 1$, erit $\frac{1}{a} > 1$; posito ergo $\frac{1}{a} = b$ erit $a^z = b^{-z}$, unde posterior casus ex priori diiudicari poterit.

99. Si sit $a = 0$, ingens saltus in valoribus ipsius a^z deprehenditur. Quamdiu enim fuerit z numerus affirmativus seu maior nihilo, erit perpetuo

$a^z = 0$; si sit $z = 0$, erit $a^0 = 1$; sin autem fuerit z numerus negativus, tum a^z obtinebit valorem infinite magnum. Sit enim $z = -3$; erit

$$a^z = 0^{-3} = \frac{1}{0^3} = \frac{1}{0}$$

ideoque infinitum.

Multo maiores autem saltus occurrent, si quantitas constans a habeat valorem negativum, puta -2. Tum enim ponendis loco z numeris integris valores ipsius a^z alternatim erunt affirmativi et negativi, ut ex hac serie intelligitur

$$\begin{array}{cccccccccc} a^{-4}, & a^{-3}, & a^{-2}, & a^{-1}, & a^0, & a^1, & a^2, & a^3, & a^4 & \text{etc.} \\ +\frac{1}{16}, & -\frac{1}{8}, & +\frac{1}{4}, & -\frac{1}{2}, & 1, & -2, & +4, & -8, & +16 & \text{etc.} \end{array}$$

Praeterea vero, si exponenti z valores tribuantur fracti, potestas $a^z = (-2)^z$ mox reales mox imaginarios induet valores; erit enim $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$ imaginarium, at erit $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$ reale; utrum autem, si exponenti z tribuantur valores irrationales, potestas a^z exhibeat quantitates reales an imaginarias, ne quidem definiri licet.

100. His igitur incommodis numerorum negativorum loco a substituendorum commemoratis statuamus a esse numerum affirmativum et unitate quidem maiorem, quia huc quoque illi casus, quibus a est numerus affirmativus unitate minor, facile reducuntur. Si ergo ponatur $a^z = y$, loco z substituendo omnes numeros reales, qui intra limites $+\infty$ et $-\infty$ continentur, y adipiscetur omnes valores affirmativos intra limites $+\infty$ et 0 contentos. Si enim sit $z = \infty$, erit $y = \infty$; si $z = 0$, erit $y = 1$, et si $z = -\infty$, fiet $y = 0$. Vicissim ergo quicunque valor affirmativus pro y accipiatur, dabitur quoque valor realis respondens pro z, ita ut sit $a^z = y$; sin autem ipsi y tribueretur valor negativus, exponens z valorem realem habere non poterit.

101. Si igitur fuerit $y = a^z$, erit y functio quaedam ipsius z; et quemadmodum y a z pendeat, ex natura potestatum facile intelligitur; hinc enim, quicunque valor ipsi z tribuatur, valor ipsius y determinatur. Erit autem

$$yy = a^{2z},\quad y^3 = a^{3z}$$

et generaliter erit

$$y^n = a^{nz};$$

unde sequitur fore

$$\sqrt{y} = a^{\frac{1}{2}z}, \quad \sqrt[3]{y} = a^{\frac{1}{3}z} \quad \text{et} \quad \frac{1}{y} = a^{-z}, \quad \frac{1}{yy} = a^{-2z} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{y}} = a^{-\frac{1}{2}z}$$

et ita porro. Praeterea, si fuerit $v = a^x$, erit

$$vy = a^{x+z} \quad \text{et} \quad \frac{v}{y} = a^{x-z},$$

quorum subsidiorum beneficio eo facilius valor ipsius y ex dato valore ipsius z inveniri potest.

EXEMPLUM

Si fuerit $a = 10$, ex Arithmetica, qua utimur, denaria in promptu erit valores ipsius y exhibere, si quidem pro z numeri integri ponantur. Erit enim

$$10^1 = 10, \quad 10^2 = 100, \quad 10^3 = 1000, \quad 10^4 = 10000 \quad \text{et} \quad 10^0 = 1;$$

item

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1, \quad 10^{-2} = \frac{1}{100} = 0{,}01, \quad 10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001;$$

sin autem pro z fractiones ponantur, ope radicum extractionis valores ipsius y indicari possunt; sic erit

$$10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3{,}162277\,^{1)} \quad \text{etc.}$$

102. Quemadmodum autem dato numero a ex quovis valore ipsius z reperiri potest valor ipsius y, ita vicissim dato valore quocunque affirmativo ipsius y conveniens dabitur valor ipsius z, ut sit $a^z = y$; iste autem valor ipsius z, quatenus tanquam functio ipsius y spectatur, vocari solet *Logarithmus* ipsius y. Supponit ergo doctrina logarithmorum numerum certum constantem loco a substituendum, qui propterea vocatur *basis* logarithmorum; qua assumpta erit logarithmus cuiusque numeri y exponens potestatis a^z, ita ut

1) Valor accuratior est 3,162278, nempe 3,16227766. A. K.

ipsa potestas a^z aequalis sit numero illi y; indicari autem logarithmus numeri y solet hoc modo ly. Quodsi ergo fuerit

$$a^z = y,$$

erit

$$z = ly,$$

ex quo intelligitur basin logarithmorum, etiamsi ab arbitrio nostro pendeat, tamen esse debere numerum unitate maiorem hincque nonnisi numerorum affirmativorum logarithmos realiter exhiberi posse.

103. Quicunque ergo numerus pro basi logarithmica a accipiatur, erit semper

$$l1 = 0;$$

si enim in aequatione $a^z = y$, quae convenit cum hac $z = ly$, ponatur $y = 1$, erit $z = 0$.

Deinde numerorum unitate maiorum logarithmi erunt affirmativi, pendentes a valore basis a; sic erit

$$la = 1, \quad laa = 2, \quad la^3 = 3, \quad la^4 = 4 \quad \text{etc.},$$

unde a posteriori intelligi potest, quantus numerus pro basi sit assumptus; scilicet ille numerus, cuius logarithmus est $= 1$, erit basis logarithmica.

Numerorum autem unitate minorum, affirmativorum tamen, logarithmi erunt negativi; erit enim

$$l\frac{1}{a} = -1, \quad l\frac{1}{aa} = -2, \quad l\frac{1}{a^3} = -3 \quad \text{etc.}$$

Numerorum autem negativorum logarithmi non erunt reales, sed imaginarii, uti iam notavimus.

104. Simili modo si fuerit $ly = z$, erit

$$lyy = 2z, \quad ly^3 = 3z$$

et generaliter

$$ly^n = nz \quad \text{seu} \quad ly^n = nly$$

ob $z = ly$. Logarithmus igitur cuiusque potestatis ipsius y aequatur logarithmo ipsius y per exponentem potestatis multiplicato; sic erit

$$l\sqrt{y} = \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}ly, \quad l\frac{1}{\sqrt{y}} = ly^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}ly$$

et ita porro; unde ex dato logarithmo cuiusque numeri inveniri possunt logarithmi quarumcunque ipsius potestatum.

Sin autem iam inventi sint duo logarithmi, nempe

$$ly = z \quad \text{et} \quad lv = x,$$

cum sit $y = a^z$ et $v = a^x$, erit

$$lvy = x + z = lv + ly;$$

hinc logarithmus producti duorum numerorum aequatur summae logarithmorum factorum; simili vero modo erit

$$l\frac{y}{v} = z - x = ly - lv;$$

hincque logarithmus fractionis aequatur logarithmo numeratoris dempto logarithmo denominatoris; quae regulae inserviunt logarithmis plurium numerorum inveniendis ex cognitis iam aliquot logarithmis.

105. Ex his autem patet aliorum numerorum non dari logarithmos rationales nisi potestatum basis a; nisi enim numerus alius b fuerit potestas basis a, eius logarithmus numero rationali exprimi non poterit. Neque vero etiam logarithmus ipsius b erit numerus irrationalis. Si enim foret $lb = \sqrt{n}$, tum esset $a^{\sqrt{n}} = b$; id quod fieri nequit, si quidem numeri a et b rationales statuantur. Solent autem imprimis numerorum rationalium et integrorum logarithmi desiderari, quia ex his logarithmi fractionum ac numerorum surdorum inveniri possunt. Cum igitur logarithmi numerorum, qui non sunt potestates basis a, neque rationaliter neque irrationaliter exhiberi queant, merito ad quantitates transcendentes referuntur hincque logarithmi quantitatibus transcendentibus annumerari solent.

106. Hanc ob rem logarithmi numerorum vero tantum proxime per fractiones decimales exprimi solent, qui eo minus a veritate discrepabunt, ad quo plures figuras fuerint exacti. Atque hoc modo per solam radicis quadratae extractionem cuiusque numeri logarithmus vero proxime determinari poterit. Cum enim posito

$$ly = z \quad \text{et} \quad lv = x$$

sit

$$l\sqrt{vy} = \frac{x+z}{2},$$

si numerus propositus b contineatur intra limites a^2 et a^3, quorum logarithmi sunt 2 et 3, quaeratur valor ipsius $a^{2\frac{1}{2}}$ seu $a^2\sqrt{a}$ atque b vel intra limites a et $a^{2\frac{1}{2}}$ vel $a^{2\frac{1}{2}}$ et a^3 continebitur; utrumvis accidat, sumendo medio proportionali denuo limites propiores prodibunt hocque modo ad limites pervenire licebit, quorum intervallum data quantitate minus evadat et quibuscum numerus propositus b sine errore confundi possit. Quoniam vero horum singulorum limitum logarithmi dantur, tandem logarithmus numeri b reperietur.

EXEMPLUM

Ponatur basis logarithmica $a = 10$, quod in tabulis usu receptis fieri solet, et quaeratur vero tantum proxime logarithmus numeri 5; quia hic continetur intra limites 1 et 10, quorum logarithmi sunt 0 et 1, sequenti modo radicum extractio continua instituatur, quoad ad limites a numero proposito 5 non amplius discrepantes perveniatur.

$A = 1{,}000000$,	$lA = 0{,}0000000$,	sit
$B = 10{,}000000$,	$lB = 1{,}0000000$,	$C = \sqrt{AB}$,
$C = 3{,}162277$,	$lC = 0{,}5000000$,	$D = \sqrt{BC}$,
$D = 5{,}623413$,	$lD = 0{,}7500000$,	$E = \sqrt{CD}$,
$E = 4{,}216964$,	$lE = 0{,}6250000$,	$F = \sqrt{DE}$,
$F = 4{,}869674$,	$lF = 0{,}6875000$,	$G = \sqrt{DF}$,
$G = 5{,}232991$,	$lG = 0{,}7187500$,	$H = \sqrt{FG}$,
$H = 5{,}048065$,	$lH = 0{,}7031250$,	$I = \sqrt{FH}$,
$I = 4{,}958069$,	$lI = 0{,}6953125$,	$K = \sqrt{HI}$,
$K = 5{,}002865$,	$lK = 0{,}6992187$,	$L = \sqrt{IK}$,
$L = 4{,}980416$,	$lL = 0{,}6972656$,	$M = \sqrt{KL}$,
$M = 4{,}991627$,	$lM = 0{,}6982421$,[1]	$N = \sqrt{KM}$,
$N = 4{,}997242$,	$lN = 0{,}6987304$,	$O = \sqrt{KN}$,
$O = 5{,}000052$,	$lO = 0{,}6989745$,	$P = \sqrt{NO}$,
$P = 4{,}998647$,	$lP = 0{,}6988525$,	$Q = \sqrt{OP}$,
$Q = 4{,}999350$,	$lQ = 0{,}6989135$,	$R = \sqrt{OQ}$,
$R = 4{,}999701$,	$lR = 0{,}6989440$,	$S = \sqrt{OR}$,
$S = 4{,}999876$,	$lS = 0{,}6989592$,	$T = \sqrt{OS}$,
$T = 4{,}999963$,	$lT = 0{,}6989668$,	$V = \sqrt{OT}$,
$V = 5{,}000008$,	$lV = 0{,}6989707$,	$W = \sqrt{TV}$,
$W = 4{,}999984$,	$lW = 0{,}6989687$,	$X = \sqrt{VW}$,
$X = 4{,}999997$,	$lX = 0{,}6989697$,	$Y = \sqrt{VX}$,
$Y = 5{,}000003$,	$lY = 0{,}6989702$,	$Z = \sqrt{XY}$,
$Z = 5{,}000000$,	$lZ = 0{,}6989700$.	

1) Quod valores accuratiores

$$lK = 0{,}6992187500 \quad \text{et} \quad lL = 0{,}6972656250$$

sunt, est accuratius

$$lM = 0{,}6982421875,$$

ergo, si septem figurae scribantur,

$$lM = 0{,}6982422.$$

Qua de causa supra et valor lM et plurimi sequentium valorum erant corrigendi; sed cum isti errores sint parvi momenti, eos corrigere neglleximus. A. K.

Sic ergo mediis proportionalibus sumendis tandem perventum est ad $Z = 5{,}000000$, ex quo logarithmus numeri 5 quaesitus est 0,698970 posita basi logarithmica $= 10$. Quare erit proxime

$$10^{\frac{69897}{100000}} = 5.$$

Hoc autem modo computatus est canon logarithmorum vulgaris a BRIGGIO et VLACQUIO[1]), quamquam postea eximia inventa sunt compendia, quorum ope multo expeditius logarithmi supputari possunt.

107. Dantur ergo tot diversa logarithmorum systemata, quot varii numeri pro basi a accipi possunt, atque ideo numerus systematum logarithmicorum erit infinitus. Perpetuo autem in duobus systematis logarithmi eiusdem numeri eandem inter se servant rationem. Sit basis unius systematis $= a$, alterius $= b$ atque numeri n logarithmus in priori systemate $= p$, in posteriori $= q$; erit

$$a^p = n \quad \text{et} \quad b^q = n,$$

unde

$$a^p = b^q \quad \text{ideoque} \quad a = b^{\frac{q}{p}}.$$

Oportet ergo, ut fractio $\frac{q}{p}$ constantem obtineat valorem, quicunque numerus pro n fuerit assumptus. Quodsi ergo pro uno systemate logarithmi omnium numerorum fuerint computati, hinc facili negotio per regulam auream logarithmi pro quovis alio systemate reperiri possunt. Sic, cum dentur logarithmi pro basi 10, hinc logarithmi pro quavis alia basi, puta 2, inveniri possunt; quaeratur enim logarithmus numeri n pro basi 2, qui sit $= q$, cum eiusdem numeri n logarithmus sit $= p$ pro basi 10. Quoniam pro basi 10 est $l2 = 0{,}3010300$ et pro basi 2 est $l2 = 1$, erit

$$0{,}3010300 : 1 = p : q$$

ideoque

1) H. BRIGGS (1556–1630), *Arithmetica logarithmica sive logarithmorum chiliades triginta etc.*, Londini 1624; A. VLACQ (1600?–1667?), *Arithmetica logarithmica sive logarithmorum chiliades centum etc.* Editio secunda aucta, Goudae 1628. Confer etiam J. NEPER (1550–1617), *Mirifici logarithmorum canonis constructio. Appendix*, Edinburgii 1619. A. K.

$$q = \frac{p}{0,3010300} = 3,3219280 \cdot p;^{1})$$

si ergo omnes logarithmi communes multiplicentur per numerum 3,3219280[1]) prodibit tabula logarithmorum pro basi 2.

108. *Hinc sequitur duorum numerorum logarithmos in quocunque systemate eandem tenere rationem.*

Sint enim duo numeri M et N, quorum pro basi a logarithmi sint m et n; erit $M = a^m$ et $N = a^n$; hinc fiet $a^{mn} = M^n = N^m$ ideoque

$$M = N^{\frac{m}{n}};$$

in qua aequatione cum basis a non amplius insit, perspicuum est fractionem $\frac{m}{n}$ habere valorem a basi a non pendentem. Sint enim pro alia basi b numerorum eorundem M et N logarithmi μ et ν, pari modo colligetur fore

$$M = N^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

Erit ergo

$$N^{\frac{m}{n}} = N^{\frac{\mu}{\nu}}$$

hincque

$$\frac{m}{n} = \frac{\mu}{\nu} \quad \text{seu} \quad m : n = \mu : \nu.$$

Ita iam vidimus in omni logarithmorum systemate logarithmos diversarum eiusdem numeri potestatum ut y^m et y^n tenere rationem exponentium $m : n$.

109. Ad canonem ergo logarithmorum pro basi quacunque a condendum sufficit numerorum tantum primorum logarithmos methodo ante tradita vel alia commodiori supputasse. Cum enim logarithmi numerorum compositorum sint aequales summis logarithmorum singulorum factorum, logarithmi nume-

1) Editio princeps: $3,3219277 \cdot p$. Correxit A. K.

rorum compositorum per solam additionem reperientur. Sic, si habeantur logarithmi numerorum 3 et 5, erit

$$l15 = l3 + l5, \quad l45 = 2l3 + l5.$$

Atque, cum supra pro basi $a = 10$ inventus sit

$$l5 = 0,6989700,$$

praeterea autem sit $l10 = 1$, erit

$$l\frac{10}{5} = l2 = l10 - l5$$

ideoque orietur

$$l2 = 1 - 0,6989700 = 0,3010300;$$

ex his autem numerorum primorum 2 et 5 logarithmis inventis reperientur logarithmi omnium numerorum ex his 2 et 5 compositorum, cuiusmodi sunt isti 4, 8, 16, 32, 64 etc., 20, 40, 80, 25, 50 etc.

110. Tabularum autem logarithmicarum amplissimus est usus in contrahendis calculis numericis, propterea quod ex eiusmodi tabulis non solum dati cuiusque numeri logarithmus, sed etiam cuiusque logarithmi propositi numerus conveniens reperiri potest. Sic, si c, d, e, f, g, h denotent numeros quoscunque, citra multiplicationem reperiri poterit valor istius expressionis

$$\frac{ccd\sqrt{e}}{f\sqrt[3]{gh}};$$

erit enim huius expressionis logarithmus

$$= 2lc + ld + \frac{1}{2}le - lf - \frac{1}{3}lg - \frac{1}{3}lh;$$

cui logarithmo si quaeratur numerus respondens, habebitur valor quaesitus. Inprimis autem inserviunt tabulae logarithmicae dignitatibus atque radicibus intricatissimis inveniendis, quarum operationum loco in logarithmis tantum multiplicatio et divisio adhibetur.

EXEMPLUM 1

Quaeratur valor huius potestatis $2^{\frac{7}{12}}$.

Quoniam eius logarithmus est $= \frac{7}{12} l2$, multiplicetur logarithmus binarii ex tabulis, qui est 0,3010300, per $\frac{7}{12}$, hoc est per $\frac{1}{2} + \frac{1}{12}$; erit

$$l2^{\frac{7}{12}} = 0{,}1756008,$$

cui logarithmo respondet numerus

$$1{,}498307,$$

qui ergo proxime exhibet valorem $2^{\frac{7}{12}}$.

EXEMPLUM 2

Si numerus incolarum cuiuspiam provinciae quotannis sui parte trigesima augeatur, initio autem in provincia habitaverint 100000 hominum, quaeritur post 100 annos incolarum numerus.

Sit brevitatis gratia initio incolarum numerus $= n$, ita ut sit

$$n = 100000;$$

anno elapso uno erit incolarum numerus

$$= \left(1 + \frac{1}{30}\right) n = \frac{31}{30} n,$$

post duos annos $= \left(\frac{31}{30}\right)^2 n$, post tres annos $= \left(\frac{31}{30}\right)^3 n$ hincque post centum annos

$$= \left(\frac{31}{30}\right)^{100} n = \left(\frac{31}{30}\right)^{100} 100000,$$

cuius logarithmus est

$$= 100\, l\frac{31}{30} + l100000.$$

At est

$$l\frac{31}{30} = l31 - l30 = 0{,}014240439,$$

unde

$$100\, l\frac{31}{30} = 1{,}4240439;$$

ad quem si addatur $l100000 = 5$, erit logarithmus numeri incolarum quaesiti

$$= 6{,}4240439,$$

cui respondet numerus

$$= 2654874.$$

Post centum ergo annos numerus incolarum fit plus quam vicies sexies cum semisse maior.

EXEMPLUM 3

Cum post diluvium a sex hominibus genus humanum sit propagatum, si ponamus ducentis annis post numerum hominum iam ad 1000000 excrevisse, quaeritur, quanta sui parte numerus hominum quotannis augeri debuerit.

Ponamus hoc tempore numerum hominum parte sua $\frac{1}{x}$ quotannis increvisse atque post ducentos annos prodierit necesse est numerus hominum

$$= \left(\frac{1+x}{x}\right)^{200} 6 = 1000000,$$

unde fit

$$\frac{1+x}{x} = \left(\frac{1000000}{6}\right)^{\frac{1}{200}}.$$

Erit ergo

$$l\frac{1+x}{x} = \frac{1}{200}\, l\frac{1000000}{6} = \frac{1}{200} \cdot 5{,}2218487 = 0{,}0261092$$

ideoque

$$\frac{1+x}{x} = \frac{1061963}{1000000} \quad \text{et} \quad 1000000 = 61963x,$$

unde fit

$$x = 16 \text{ circiter}.$$

Ad tantam ergo hominum multiplicationem suffecisset, si quotannis decima sexta sui parte increverint; quae multiplicatio ob longaevam vitam non nimis magna censeri potest. Quodsi autem eadem ratione per intervallum 400 annorum numerus hominum crescere perrexisset, tum numerus hominum ad

$$1000000 \cdot \frac{1000000}{6} = 166666666666$$

ascendere debuisset, quibus sustentandis universus orbis terrarum nequaquam par fuisset.

EXEMPLUM 4

Si singulis seculis numerus hominum duplicetur, quaeritur incrementum annuum.

Si quotannis hominum numerum parte sua $\frac{1}{x}$ crescere ponamus et initio numerus hominum fuerit $= n$, erit is post centum annos $= \left(\frac{1+x}{x}\right)^{100} n$; qui cum esse debeat $= 2n$, erit

$$\frac{1+x}{x} = 2^{\frac{1}{100}}$$

et

$$l\frac{1+x}{x} = \frac{1}{100}\, l2 = 0{,}0030103;$$

hinc

$$\frac{1+x}{x} = \frac{10069555}{10000000},$$

ergo

$$x = \frac{10000000}{69555} = 144 \text{ circiter.}$$

Sufficit ergo, si numerus hominum quotannis parte sua $\frac{1}{144}$ augeatur. Quam ob causam maxime ridiculae sunt eorum incredulorum hominum obiectiones, qui negant tam brevi temporis spatio ab uno homine universam terram incolis impleri potuisse.

111. Potissimum autem logarithmorum usus requiritur ad eiusmodi aequationes resolvendas, in quibus quantitas incognita in exponentem ingreditur. Sic, si ad huiusmodi perveniatur aequationem

$$a^x = b,$$

ex qua incognitae x valorem erui oporteat, hoc non nisi per logarithmos effici poterit. Cum enim sit $a^x = b$, erit

$$la^x = xla = lb$$

ideoque

$$x = \frac{lb}{la},$$

ubi quidem perinde est, quonam systemate logarithmico utatur, cum in omni systemate logarithmi numerorum a et b eandem inter se teneant rationem.

EXEMPLUM 1

Si numerus hominum quotannis centesima sui parte augeatur, quaeritur, post quot annos numerus hominum fiat decuplo maior.

Ponamus hoc evenire post x annos et initio hominum numerum fuisse $= n$; erit is ergo elapsis x annis $= \left(\frac{101}{100}\right)^x n$, qui cum aequalis sit $10n$, fiet

$$\left(\frac{101}{100}\right)^x = 10$$

ideoque

$$xl\frac{101}{100} = l10$$

et

$$x = \frac{l10}{l101 - l100}.$$

Prodibit itaque

$$x = \frac{10000000}{43214} = 231 \text{ [circiter].}$$

Post annos ergo 231 fiet hominum numerus, quorum incrementum annuum tantum centesimam partem efficit, decuplo maior; hinc post 462 annos fiet centies et post 693 annos millies maior.

EXEMPLUM 2

Quidam debet 400000 florenos hac conditione, ut quotannis usuram 5 de centenis solvere teneatur; exsolvit autem singulis annis 25000 florenos. Quaeritur, post quot annos debitum penitus extinguatur.

Scribamus a pro debita summa 400000 fl. et b pro summa 25000 fl. quotannis soluta; debebit ergo elapso uno anno

$$\frac{105}{100}a - b,$$

elapsis duobus annis

$$\left(\frac{105}{100}\right)^2 a - \frac{105}{100}b - b,$$

elapsis tribus annis

$$\left(\frac{105}{100}\right)^3 a - \left(\frac{105}{100}\right)^2 b - \frac{105}{100}b - b;$$

hinc posito brevitatis causa n pro $\frac{105}{100}$ elapsis x annis adhuc debebit

$$n^x a - n^{x-1}b - n^{x-2}b - n^{x-3}b - \cdots - b = n^x a - b(1+n+n^2+\cdots+n^{x-1}).$$

Cum igitur sit ex natura progressionum geometricarum

$$1+n+n^2+\cdots+n^{x-1} = \frac{n^x-1}{n-1},$$

post x annos debitor adhuc debebit

$$n^x a - \frac{n^x b - b}{n-1} \text{ flor.},$$

quod debitum nihilo aequale positum dabit hanc aequationem

$$n^x a = \frac{n^x b - b}{n-1}$$

seu

$$(n-1)n^x a = n^x b - b \quad \text{ideoque} \quad (b - na + a)n^x = b$$

et

$$n^x = \frac{b}{b-(n-1)a},$$

unde fit

$$x = \frac{lb - l(b-(n-1)a)}{ln}.$$

Cum iam sit

$$a = 400000, \quad b = 25000, \quad n = \frac{105}{100},$$

erit

$$(n-1)a = 20000 \quad \text{et} \quad b-(n-1)a = 5000$$

atque annorum, quibus debitum penitus extinguitur, numerus

$$x = \frac{l\,25000 - l\,5000}{l\frac{105}{100}} = \frac{l\,5}{l\frac{21}{20}} = \frac{6989700}{211893};$$

erit ergo x aliquanto minor quam 33. Scilicet elapsis annis 33 non solum debitum extinguetur, sed creditor debitori reddere tenebitur

$$\frac{(n^{33}-1)b}{n-1} - n^{33}a = \frac{\left(\frac{21}{20}\right)^{33}\cdot 5000 - 25000}{\frac{1}{20}} = 100000\left(\frac{21}{20}\right)^{33} - 500000 \text{ flor.}$$

Quia vero est

$$l\frac{21}{20} = 0{,}0211892991,$$

erit

$$l\left(\frac{21}{20}\right)^{33} = 0{,}69924687 \quad \text{et} \quad l\,100000\left(\frac{21}{20}\right)^{33} = 5{,}6992469,$$

cui respondet hic numerus 500318,8; unde creditor debitori post 33 annos restituere debet $318\frac{4}{5}$ florenos.

112. Logarithmi autem vulgares super basi $= 10$ extracti praeter hunc usum, quem logarithmi in genere praestant, in Arithmetica decimali usu recepta singulari gaudent commodo atque ob hanc causam prae aliis systematibus insignem afferunt utilitatem. Cum enim logarithmi omnium numerorum praeter denarii potestates in fractionibus decimalibus exhibeantur, numerorum inter 1 et 10 contentorum logarithmi intra limites 0 et 1, numerorum autem inter 10 et 100 contentorum logarithmi inter limites 1 et 2, et ita porro, continebuntur. Constat ergo logarithmus quisque ex numero integro et fractione decimali et ille numerus integer vocari solet *characteristica*, fractio decimalis autem *mantissa*. Characteristica itaque unitate deficiet a numero notarum, quibus numerus constat; ita logarithmi numeri 78509 characteristica erit 4, quia is ex quinque notis seu figuris constat. Hinc ex logarithmo cuiusvis numeri statim intelligitur, ex quot figuris numerus sit compositus. Sic numerus logarithmo 7,5804631 respondens ex 8 figuris constabit.

113. Si ergo duorum logarithmorum mantissae conveniant, characteristicae vero tantum discrepent, tum numeri his logarithmis respondentes rationem habebunt ut potestas denarii ad unitatem ideoque ratione figurarum, quibus constant, convenient. Ita horum logarithmorum 4,9130187 et 6,9130187 numeri erunt 81850 et 8185000; logarithmo autem 3,9130187 conveniet 8185 et logarithmo huic 0,9130187 convenit 8,185. Sola ergo mantissa indicabit figuras numerum componentes; quibus inventis ex characteristica patebit, quot figurae a sinistra ad integra referri debeant, reliquae ad dextram vero dabunt fractiones decimales. Sic, si hic logarithmus fuerit inventus 2,7603429, mantissa indicabit has figuras 5758945, characteristica 2 autem numerum illi logarithmo

determinat, ut sit 575,8945; si characteristica esset 0, foret numerus 5,758945; sin denuo unitate minuatur, ut sit -1, erit numerus respondens decies minor, nempe 0,5758945, et characteristicae -2 respondebit 0,05758945 etc. Loco characteristicarum autem huiusmodi negativarum -1, -2, -3 etc. scribi solent 9, 8, 7 etc. atque subintelligitur hos logarithmos denario minui debere. Haec vero in manductionibus ad tabulas logarithmorum fusius exponi solent.

EXEMPLUM

Si haec progressio 2, 4, 16, 256 etc., cuius quisque terminus est quadratum praecedentis, continuetur usque ad terminum vigesimum quintum, quaeritur magnitudo huius termini ultimi.

Termini huius progressionis per exponentes ita commodius exprimuntur

$$2^1, \quad 2^2, \quad 2^4, \quad 2^8 \quad \text{etc.},$$

ubi patet exponentes progressionem geometricam constituere atque termini vigesimi quinti exponentem fore

$$2^{24} = 16777216,$$

ita ut ipse terminus quaesitus sit

$$= 2^{16777216};$$

huius ergo logarithmus erit

$$= 16777216\, l2.$$

Cum ergo sit

$$l2 = 0{,}30102\,99956\,63981\,1952\,^{1)},$$

1) In editione principe ultima figura 2 deest; ad mantissam autem 259733675932 satis accurate computandam haec figura necessaria est. Ceterum valorem ipsius $l2$ (et valores pro k et $\frac{1}{k}$ in § 124 expositos) EULERUS depromere potuit ex dissertatione Celeberrimi E. HALLEY (1656—1742), *A most compendious and facile method for constructing the logarithms*, Philosophical transactions (London) **19**, 1695, numb. 216, p. 58, ubi sexaginta figurae horum et aliorum valorum sunt communicatae, quas A. SHARP (1651—1742) computaverat.

Exemplum hic pertractatum invenitur etiam in EULERI libro, qui inscribitur *Institutiones calculi differentialis*, Petropoli 1755, partis posterioris cap. IV, § 82; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 10, p. 288. A. K.

erit numeri quaesiti logarithmus

$$= 5050445{,}259733675932,$$

ex cuius characteristica patet numerum quaesitum more solito expressum constare ex

$$5050446$$

figuris. Mantissa autem 259733675932 in tabula logarithmorum quaesita dabit figuras initiales numeri quaesiti, quae erunt 181858. Quanquam ergo iste numerus nullo modo exhiberi potest, tamen affirmari potest eum omnino ex 5050446 figuris constare atque figuras initiales sex esse 181858, quas dextrorsum adhuc 5050440 figurae sequantur, quarum insuper nonnullae ex maiori logarithmorum canone definiri possent; undecim scilicet figurae initiales erunt 18185852986.

CAPUT VII

DE QUANTITATUM EXPONENTIALIUM AC LOGARITHMORUM PER SERIES EXPLICATIONE

114. Quia est $a^0 = 1$ atque crescente exponente ipsius a simul valor potestatis augetur, si quidem a est numerus unitate maior, sequitur, si exponens infinite parum cyphram excedat, potestatem ipsam quoque infinite parum unitatem esse superaturam. Sit ω numerus infinite parvus seu fractio tam exigua, ut tantum non nihilo sit aequalis; erit

$$a^\omega = 1 + \psi$$

existente ψ quoque numero infinite parvo. Ex praecedente enim capite constat, nisi ψ esset numerus infinite parvus, neque ω talem esse posse. Erit ergo vel $\psi = \omega$ vel $\psi > \omega$ vel $\psi < \omega$, quae ratio utique a quantitate litterae a pendebit; quae cum adhuc sit incognita, ponatur $\psi = k\omega$, ita ut sit

$$a^\omega = 1 + k\omega,$$

et sumpta a pro basi logarithmica erit

$$\omega = l(1 + k\omega).$$

EXEMPLUM

Quo clarius appareat, quemadmodum numerus k pendeat a basi a, ponamus esse $a = 10$ atque ex tabulis vulgaribus quaeramus logarithmum numeri quam minime unitatem superantis, puta $1 + \frac{1}{1000000}$, ita ut sit $k\omega = \frac{1}{1000000}$;

erit

$$l\left(1 + \frac{1}{1000000}\right) = l\frac{1000001}{1000000} = 0{,}00000043429 = \omega.$$

Hinc ob $k\omega = 0{,}00000100000$ erit

$$\frac{1}{k} = \frac{43429}{100000}$$

et

$$k = \frac{100000}{43429} = 2{,}30258;$$

unde patet k esse numerum finitum pendentem a valore basis a. Si enim alius numerus pro basi a statuatur, tum logarithmus eiusdem numeri $1 + k\omega$ ad priorem datam tenebit rationem, unde simul alius valor litterae k prodiret.

115. Cum sit $a^\omega = 1 + k\omega$, erit

$$a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i,$$

quicunque numerus loco i substituatur. Erit ergo

$$a^{i\omega} = 1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2}k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}k^3\omega^3 + \text{etc.}$$

Quodsi ergo statuatur $i = \frac{z}{\omega}$ et z denotet numerum quemcunque finitum, ob ω numerum infinite parvum fiet i numerus infinite magnus hincque $\omega = \frac{z}{i}$, ita ut sit ω fractio denominatorem habens infinitum adeoque infinite parva, qualis est assumpta. Substituatur ergo $\frac{z}{i}$ loco ω eritque

$$a^z = \left(1 + \frac{kz}{i}\right)^i = 1 + \frac{1}{1}kz + \frac{1(i-1)}{1 \cdot 2i}k^2z^2 + \frac{1(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2i \cdot 3i}k^3z^3$$
$$+ \frac{1(i-1)(i-2)(i-3)}{1 \cdot 2i \cdot 3i \cdot 4i}k^4z^4 + \text{etc.},$$

quae aequatio erit vera, si pro i numerus infinite magnus substituatur. Tum vero est k numerus finitus ab a pendens, uti modo vidimus.

116. Cum autem i sit numerus infinite magnus, erit

$$\frac{i-1}{i} = 1;$$

patet enim, quo maior numerus loco i substituatur, eo propius valorem fractionis $\frac{i-1}{i}$ ad unitatem esse accessurum; hinc, si i sit numerus omni assignabili maior, fractio quoque $\frac{i-1}{i}$ ipsam unitatem adaequabit. Ob similem autem rationem erit

$$\frac{i-2}{i} = 1, \quad \frac{i-3}{i} = 1$$

et ita porro; hinc sequitur fore

$$\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2}, \quad \frac{i-2}{3i} = \frac{1}{3}, \quad \frac{i-3}{4i} = \frac{1}{4}$$

et ita porro. His igitur valoribus substitutis erit

$$a^z = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2z^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{k^4z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc. in infinitum.}$$

Haec autem aequatio simul relationem inter numeros a et k ostendit; posito enim $z = 1$ erit

$$a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{k^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.}$$

atque, ut a sit $= 10$, necesse est, ut sit circiter $k = 2{,}30258$, uti ante invenimus.

117. Ponamus esse

$$b = a^n;$$

erit sumpto numero a pro basi logarithmica $lb = n$. Hinc, cum sit $b^z = a^{nz}$, erit per seriem infinitam

$$b^z = 1 + \frac{knz}{1} + \frac{k^2n^2z^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3n^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{k^4n^4z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.};$$

posito vero lb pro n erit

$$b^z = 1 + \frac{kz}{1}lb + \frac{k^2z^2}{1\cdot 2}(lb)^2 + \frac{k^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3}(lb)^3 + \frac{k^4z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(lb)^4 + \text{etc.}$$

Cognito ergo valore litterae k ex dato valore basis a quantitas exponentialis quaecunque b^z per seriem infinitam exprimi poterit, cuius termini secundum potestates ipsius z procedant. His expositis ostendamus quoque, quomodo logarithmi per series infinitas explicari possint.

118. Cum sit $a^\omega = 1 + k\omega$ existente ω fractione infinite parva atque ratio inter a et k definiatur per hanc aequationem

$$a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc.},$$

si a sumatur pro basi logarithmica, erit

$$\omega = l(1 + k\omega) \quad \text{et} \quad i\omega = l(1 + k\omega)^i.$$

Manifestum autem est, quo maior numerus pro i sumatur, eo magis potestatem $(1 + k\omega)^i$ unitatem esse superaturam atque statuendo $i =$ numero infinito valorem potestatis $(1 + k\omega)^i$ ad quemvis numerum unitate maiorem ascendere. Quodsi ergo ponatur

$$(1 + k\omega)^i = 1 + x,$$

erit

$$l(1 + x) = i\omega,$$

unde, cum sit $i\omega$ numerus finitus, logarithmus scilicet numeri $1 + x$, perspicuum est i esse debere numerum infinite magnum; alioquin enim $i\omega$ valorem finitum habere non posset.

119. Cum autem positum sit

$$(1 + k\omega)^i = 1 + x,$$

erit

$$1 + k\omega = (1 + x)^{\frac{1}{i}} \quad \text{et} \quad k\omega = (1 + x)^{\frac{1}{i}} - 1,$$

unde fit

$$i\omega = \frac{i}{k}\left((1 + x)^{\frac{1}{i}} - 1\right).$$

Quia vero est $i\omega = l(1+x)$, erit

$$l(1+x) = \frac{i}{k}(1+x)^{\frac{1}{i}} - \frac{i}{k}$$

posito i numero infinite magno. Est autem

$$(1+x)^{\frac{1}{i}} = 1 + \frac{1}{i}x - \frac{1(i-1)}{i\cdot 2i}x^2 + \frac{1(i-1)(2i-1)}{i\cdot 2i\cdot 3i}x^3 - \frac{1(i-1)(2i-1)(3i-1)}{i\cdot 2i\cdot 3i\cdot 4i}x^4 + \text{etc.}$$

Ob i autem numerum infinitum erit

$$\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2},\quad \frac{2i-1}{3i} = \frac{2}{3},\quad \frac{3i-1}{4i} = \frac{3}{4}\quad \text{etc.};$$

hinc erit

$$i(1+x)^{\frac{1}{i}} = i + \frac{x}{1} - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{etc.}$$

et consequenter

$$l(1+x) = \frac{1}{k}\left(\frac{x}{1} - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{etc.}\right)$$

posita basi logarithmica $= a$ ac denotante k numerum huic basi convenientem, ut scilicet sit

$$a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc.}$$

120. Cum igitur habeamus seriem logarithmo numeri $1+x$ aequalem, eius ope ex data basi a definire poterimus valorem numeri k. Si enim ponamus $1+x=a$, ob $la=1$ erit

$$1 = \frac{1}{k}\left(\frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \text{etc.}\right)$$

hincque habebitur

$$k = \frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \text{etc.},$$

cuius ideo seriei infinitae valor, si ponatur $a=10$, circiter esse debebit $=2,30258$, quanquam difficulter intelligi potest esse

$$2{,}30258 = \frac{9}{1} - \frac{9^2}{2} + \frac{9^3}{3} - \frac{9^4}{4} + \text{etc.},$$

quoniam huius seriei termini continuo fiunt maiores neque adeo aliquot terminis sumendis summa vero propinqua haberi potest; cui incommodo mox remedium afferetur.

121. Quoniam igitur est

$$l(1+x) = \frac{1}{k}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{etc.}\right),$$

erit posito x negativo

$$l(1-x) = -\frac{1}{k}\left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \text{etc.}\right).$$

Subtrahatur series posterior a priori; erit

$$l(1+x) - l(1-x) = l\frac{1+x}{1-x} = \frac{2}{k}\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \text{etc.}\right).$$

Nunc ponatur

$$\frac{1+x}{1-x} = a,$$

ut sit

$$x = \frac{a-1}{a+1};$$

ob $la=1$ erit

$$k = 2\left(\frac{a-1}{a+1} + \frac{(a-1)^3}{3(a+1)^3} + \frac{(a-1)^5}{5(a+1)^5} + \text{etc.}\right),$$

ex qua aequatione valor numeri k ex basi a inveniri poterit. Si ergo basis a ponatur $=10$, erit

$$k = 2\left(\frac{9}{11} + \frac{9^3}{3\cdot 11^3} + \frac{9^5}{5\cdot 11^5} + \frac{9^7}{7\cdot 11^7} + \text{etc.}\right),$$

cuius seriei termini sensibiliter decrescunt ideoque mox valorem pro k satis propinquum exhibent.

122. Quoniam ad systema logarithmorum condendum basin a pro lubitu accipere licet, ea ita assumi poterit, ut fiat $k=1$. Ponamus ergo esse $k=1$ eritque per seriem supra (§ 116) inventam

$$a = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.},$$

qui termini, si in fractiones decimales convertantur atque actu addantur, praebebunt hunc valorem pro a

$$2{,}71828\,18284\,59045\,23536\,028,$$

cuius ultima adhuc nota veritati est consentanea.

Quodsi iam ex hac basi logarithmi construantur, ii vocari solent logarithmi *naturales* seu *hyperbolici*, quoniam quadratura hyperbolae per istiusmodi logarithmos exprimi potest. Ponamus autem brevitatis gratia pro numero hoc 2,71828 18284 59 etc. constanter litteram

$$e,$$

quae ergo denotabit basin logarithmorum naturalium seu hyperbolicorum [1]), cui respondet valor litterae $k = 1$; sive haec littera e quoque exprimet summam huius seriei

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc. in infinitum.}$$

123. Logarithmi ergo hyperbolici hanc habebunt proprietatem, ut numeri $1 + \omega$ logarithmus sit $= \omega$ denotante ω quantitatem infinite parvam, atque cum ex hac proprietate valor $k = 1$ innotescat, omnium numerorum logarithmi hyperbolici exhiberi poterunt. Erit ergo posita e pro numero supra invento perpetuo

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.}$$

Ipsi vero logarithmi hyperbolici ex his seriebus invenientur, quibus est

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \text{etc.}$$

et

$$l\,\frac{1+x}{1-x} = \frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \frac{2x^9}{9} + \text{etc.},$$

1) Hac littera e EULERUS iam a. 1728 basin logarithmorum naturalium designaverat; confer G. ENESTRÖM, Biblioth. Mathem. 14_3, p. 81, et 5_3, p. 310. Haec eadem significatio occurrit constanter in libro, qui inscribitur *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*, Petropoli 1736; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series II, vol. 1 et 2. In Commentatione quidem 28 (indicis ENESTROEMIANI): *Specimen de constructione aequationum differentialium etc.*, Comment. acad. sc. Petrop. 6 (1732/3), 1738, *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 20, p. 1, invenitur (uti etiam antea) loco litterae e littera c, haec autem dissertatio iam a. 1733 scripta est. A. K.

quae series vehementer convergunt, si pro x statuatur fractio valde parva. Ita ex serie posteriori facili negotio inveniuntur logarithmi numerorum unitate non multo maiorum. Posito namque $x = \frac{1}{5}$ erit

$$l\,\frac{6}{4} = l\,\frac{3}{2} = \frac{2}{1\cdot 5} + \frac{2}{3\cdot 5^3} + \frac{2}{5\cdot 5^5} + \frac{2}{7\cdot 5^7} + \text{etc.}$$

et facto $x = \frac{1}{7}$ erit

$$l\,\frac{4}{3} = \frac{2}{1\cdot 7} + \frac{2}{3\cdot 7^3} + \frac{2}{5\cdot 7^5} + \frac{2}{7\cdot 7^7} + \text{etc.}$$

et facto $x = \frac{1}{9}$ erit

$$l\,\frac{5}{4} = \frac{2}{1\cdot 9} + \frac{2}{3\cdot 9^3} + \frac{2}{5\cdot 9^5} + \frac{2}{7\cdot 9^7} + \text{etc.}$$

Ex logarithmis vero harum fractionum reperientur logarithmi numerorum integrorum; erit enim ex natura logarithmorum

$$l\,\frac{3}{2} + l\,\frac{4}{3} = l\,2,$$

tum

$$l\,\frac{3}{2} + l\,2 = l\,3 \quad \text{et} \quad 2\,l\,2 = l\,4,$$

porro

$$l\,\frac{5}{4} + l\,4 = l\,5, \quad l\,2 + l\,3 = l\,6, \quad 3\,l\,2 = l\,8, \quad 2\,l\,3 = l\,9 \quad \text{et} \quad l\,2 + l\,5 = l\,10.$$

EXEMPLUM

Hinc logarithmi hyperbolici numerorum ab 1 usque ad 10 ita se habebunt, ut sit

$$l\,1 = 0{,}00000\,00000\,00000\,00000\,00000$$

$$l\,2 = 0{,}69314\,71805\,59945\,30941\,72321$$

$$l\,3 = 1{,}09861\,22886\,68109\,69139\,52452$$

$$l\,4 = 1{,}38629\,43611\,19890\,61883\,44642$$

$$l\,5 = 1{,}60943\,79124\,34100\,37460\,07593$$

$$l\,6 = 1{,}79175\,94692\,28055\,00081\,24774$$ [1])

$$l\,7 = 1{,}94591\,01490\,55313\,30510\,53527$$ [2])

$$l\,8 = 2{,}07944\,15416\,79835\,92825\,16964$$

$$l\,9 = 2{,}19722\,45773\,36219\,38279\,04905$$

$$l\,10 = 2{,}30258\,50929\,94045\,68401\,79915$$ [3])

Hi scilicet logarithmi omnes ex superioribus tribus seriebus sunt deducti praeter $l\,7$, quem hoc compendio sum assecutus. Posui nimirum in serie posteriori $x = \frac{1}{99}$ sicque obtinui

$$l\,\frac{100}{98} = l\,\frac{50}{49} = 0{,}02020\,27073\,17519\,44840\,80453,$$ [4])

qui subtractus a

$$l\,50 = 2\,l\,5 + l\,2 = 3{,}91202\,30054\,28146\,05861\,87508$$

relinquit $l\,49$, cuius semissis dat $l\,7$.

124. Ponatur logarithmus hyperbolicus ipsius $1+x$ seu $l(1+x) = y$; erit

$$y = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{etc.}$$

Sumpto autem numero a pro basi logarithmica sit numeri eiusdem $1+x$ logarithmus $= v$; erit, ut vidimus,

$$v = \frac{1}{k}\left(x - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{etc.}\right) = \frac{y}{k}$$

hincque

$$k = \frac{y}{v};$$

1) In editione principe ultimae figurae sunt 00081 24773. Correxit A. K.
2) In editione principe ultimae figurae sunt 30510 54639. Correxit A. K.
3) In editione principe ultimae figurae sunt 68401 79914. Correxit A. K.
4) In editione principe ultimae figurae sunt 44840 78230. Correxit A. K.

ex quo commodissime valor ipsius k basi a respondens ita definitur, ut sit aequalis cuiusvis numeri logarithmo hyperbolico diviso per logarithmum eiusdem numeri ex basi a formati. Posito ergo numero hoc $= a$ erit $v = 1$ hincque fit $k =$ logarithmo hyperbolico basis a. In systemate ergo logarithmorum communium, ubi est $a = 10$, erit $k =$ logarithmo hyperbolico ipsius 10, unde fit

$$k = 2{,}30258\,50929\,94045\,68401\,79915$$ [1]),

quem valorem iam supra satis prope collegimus. Si ergo singuli logarithmi hyperbolici per hunc numerum k dividantur vel, quod eodem redit, multiplicentur per hanc fractionem decimalem

$$0{,}43429\,44819\,03251\,82765\,11289$$ [1]),

prodibunt logarithmi vulgares basi $a = 10$ convenientes.

125. Cum sit

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc.},$$

si ponatur $a^y = e^z$, erit sumptis logarithmis hyperbolicis $yla = z$, quia est $le = 1$; quo valore loco z substituto erit

$$a^y = 1 + \frac{yla}{1} + \frac{y^2(la)^2}{1\cdot 2} + \frac{y^3(la)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc.},$$

unde quaelibet quantitas exponentialis ope logarithmorum hyperbolicorum per seriem infinitam explicari potest.

Tum vero denotante i numerum infinite magnum tam quantitates exponentiales quam logarithmi per potestates exponi possunt. Erit enim

1) Vide notam 3 p. 130 atque notam 1 p. 120. A. K.

$$e^z = \left(1 + \frac{z}{i}\right)^i$$

hincque

$$a^y = \left(1 + \frac{yla}{i}\right)^i,$$

deinde pro logarithmis hyperbolicis habetur

$$l(1+x) = i\left((1+x)^{\frac{1}{i}} - 1\right).$$

De cetero logarithmorum hyperbolicorum usus in Calculo integrali fusius demonstrabitur.

CAPUT VIII

DE QUANTITATIBUS TRANSCENDENTIBUS EX CIRCULO ORTIS

126. Post logarithmos et quantitates exponentiales considerari debent arcus circulares eorumque sinus et cosinus, quia non solum aliud quantitatum transcendentium genus constituunt, sed etiam ex ipsis logarithmis et exponentialibus, quando imaginariis quantitatibus involvuntur, proveniunt, id quod infra clarius patebit.

Ponamus ergo radium circuli seu sinum totum esse $=1$ atque satis liquet peripheriam huius circuli in numeris rationalibus exacte exprimi non posse; per approximationes autem inventa est semicircumferentia huius circuli esse[1])

$$\begin{aligned} = 3{,}14159\,26535\,89793\,23846\,26433\,83279\,50288\,41971\,69399\,37510 \\ 58209\,74944\,59230\,78164\,06286\,20899\,86280\,34825\,34211\,70679 \\ 82148\,08651\,32823\,06647\,09384\,46 +, \end{aligned}$$

1) Hunc valorem EULERUS deprompsit e dissertatione, quam scripsit TH. F. DE LAGNY (1660—1734): *Mémoire sur la quadrature du cercle, et sur la mesure de tout arc, tout secteur et tout segment donné*, Mém. de l'acad. d. sc. de Paris (1719), 1721, p. 135. Confer L. EULERI Commentationem 74 (indicis ENESTROEMIANI): *De variis modis circuli quadraturam numeris proxime exprimendi*, Comment. acad. sc. Petrop. 9 (1737), 1744, p. 222; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 14.

Figuram centesimam decimam tertiam, qualem DE LAGNY dederat et EULERUS tradiderat, falsam esse, quippe quae 8, non 7, esse debeat, adnotavit G. DE VEGA (1756—1802) in libro, qui inscribitur *Thesaurus logarithmorum completus*, Lipsiae 1794, p. 633. A. K.

pro quo numero brevitatis ergo scribam

$$\pi,$$

ita ut sit π = semicircumferentiae circuli, cuius radius = 1, seu π erit longitudo arcus 180 graduum.[1])

127. Denotante z arcum huius circuli quemcunque, cuius radium perpetuo assumo = 1, huius arcus z considerari potissimum solent sinus et cosinus. Sinum autem arcus z in posterum hoc modo indicabo

$$\sin. A. z \text{ seu tantum } \sin. z,$$

cosinum vero hoc modo

$$\cos. A. z \text{ seu tantum } \cos. z.$$

Ita, cum π sit arcus 180°, erit

$$\sin. 0\pi = 0, \quad \cos. 0\pi = 1$$

1) Ante EULERUM huiusmodi rationes non breviter ut nunc signo singulari, id est una littera, designabantur, sed copiose pluribus verbis circumscribebantur. Exstant quidem notabiles exceptiones. Sic apud J. CHR. STURM (1635—1703) in libro, qui inscribitur *Mathesis enucleata*, Norimbergae 1689, legitur p. 81: *Promptum autem hinc est inferre, si diameter alicuius circuli ponatur a, circumferentiam appellari posse ea (quaecumque enim inter eas fuerit ratio, illius nomen potest designari littera e).* Quin etiam W. JONES (1675—1749) rationem circumferentiae ad diametrum a. 1706 ipsa littera π designaverat; vide W. JONES, *Synopsis palmariorum matheseos or new introduction to the mathematics*, London 1706, p. 243. Verumtamen EULERUS primus hunc designandi modum reddidit generalem. Iam in libro, qui inscribitur *Mechanica sive motus scientia analytice exposita*, Petropoli 1736, *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series II, vol. 1 et 2, saepenumero sed non constanter rationem circumferentiae ad diametrum littera π denotaverat. Littera π invenitur praeterea in Commentatione 72 (indicis ENESTROEMIANI): *Variae observationes circa series infinitas*, Comment. acad. sc. Petrop. 9 (1737), 1744, p. 160; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 14. In Commentatione quidem 74 nota praecedenti laudata uti etiam in nonnullis dissertationibus prioribus EULERUS p loco π scripsit, sed inde ab eo tempore usus litterae π praevalebat et mox fiebat omnino generalis, praesertim cum haec *Introductio* edita esset.

De historia numeri π et omnino de historia quadraturae circuli vide F. RUDIO, *ARCHIMEDES, HUYGENS, LAMBERT, LEGENDRE, Vier Abhandlungen über die Kreismessung etc.*, Leipzig 1892, et E. W. HOBSON, *Squaring the circle, a history of the problem*, Cambridge 1913. A. K.

et

$$\sin. \tfrac{1}{2}\pi = 1, \qquad \cos. \tfrac{1}{2}\pi = 0,$$

$$\sin. \pi = 0, \qquad \cos. \pi = -1,$$

$$\sin. \tfrac{3}{2}\pi = -1, \qquad \cos. \tfrac{3}{2}\pi = 0,$$

$$\sin. 2\pi = 0, \qquad \cos. 2\pi = 1.$$

Omnes ergo sinus et cosinus intra limites +1 et −1 continentur. Erit autem porro

$$\cos. z = \sin. \left(\tfrac{1}{2}\pi - z\right) \quad \text{et} \quad \sin. z = \cos. \left(\tfrac{1}{2}\pi - z\right)$$

atque

$$(\sin. z)^2 + (\cos. z)^2 = 1.$$

Praeter has denominationes notandae sunt quoque hae:

$$\text{tang. } z,$$

quae denotat tangentem arcus z,

$$\cot. z$$

cotangentem arcus z, constatque esse

$$\text{tang. } z = \frac{\sin. z}{\cos. z}$$

et

$$\cot. z = \frac{\cos. z}{\sin. z} = \frac{1}{\text{tang. } z},$$

quae omnia ex trigonometria sunt nota.

128. Hinc vero etiam constat, si habeantur duo arcus y et z, fore

$$\sin. (y + z) = \sin. y \cos. z + \cos. y \sin. z$$

et

$$\cos. (y + z) = \cos. y \cos. z - \sin. y \sin. z$$

itemque

$$\sin. (y - z) = \sin. y \cos. z - \cos. y \sin. z$$

et

$$\cos. (y - z) = \cos. y \cos. z + \sin. y \sin. z.$$

Hinc loco y substituendo arcus $\frac{1}{2}\pi$, π, $\frac{3}{2}\pi$ etc. erit

$\sin.\left(\frac{1}{2}\pi+z\right)=+\cos. z$	$\sin.\left(\frac{1}{2}\pi-z\right)=+\cos. z$
$\cos.\left(\frac{1}{2}\pi+z\right)=-\sin. z$	$\cos.\left(\frac{1}{2}\pi-z\right)=+\sin. z$
$\sin.\ (\pi+z)=-\sin. z$	$\sin.\ (\pi-z)=+\sin. z$
$\cos.\ (\pi+z)=-\cos. z$	$\cos.\ (\pi-z)=-\cos. z$
$\sin.\left(\frac{3}{2}\pi+z\right)=-\cos. z$	$\sin.\left(\frac{3}{2}\pi-z\right)=-\cos. z$
$\cos.\left(\frac{3}{2}\pi+z\right)=+\sin. z$	$\cos.\left(\frac{3}{2}\pi-z\right)=-\sin. z$
$\sin.\ (2\pi+z)=+\sin. z$	$\sin.\ (2\pi-z)=-\sin. z$
$\cos.\ (2\pi+z)=+\cos. z$	$\cos.\ (2\pi-z)=+\cos. z$

Si ergo n denotet numerum integrum quemcunque, erit

$\sin.\left(\frac{4n+1}{2}\pi+z\right)=+\cos. z$	$\sin.\left(\frac{4n+1}{2}\pi-z\right)=+\cos. z$
$\cos.\left(\frac{4n+1}{2}\pi+z\right)=-\sin. z$	$\cos.\left(\frac{4n+1}{2}\pi-z\right)=+\sin. z$
$\sin.\left(\frac{4n+2}{2}\pi+z\right)=-\sin. z$	$\sin.\left(\frac{4n+2}{2}\pi-z\right)=+\sin. z$
$\cos.\left(\frac{4n+2}{2}\pi+z\right)=-\cos. z$	$\cos.\left(\frac{4n+2}{2}\pi-z\right)=-\cos. z$
$\sin.\left(\frac{4n+3}{2}\pi+z\right)=-\cos. z$	$\sin.\left(\frac{4n+3}{2}\pi-z\right)=-\cos. z$
$\cos.\left(\frac{4n+3}{2}\pi+z\right)=+\sin. z$	$\cos.\left(\frac{4n+3}{2}\pi-z\right)=-\sin. z$
$\sin.\left(\frac{4n+4}{2}\pi+z\right)=+\sin. z$	$\sin.\left(\frac{4n+4}{2}\pi-z\right)=-\sin. z$
$\cos.\left(\frac{4n+4}{2}\pi+z\right)=+\cos. z$	$\cos.\left(\frac{4n+4}{2}\pi-z\right)=+\cos. z$

Quae formulae verae sunt, sive n sit numerus affirmativus sive negativus integer.

129. Sit

$$\sin. z=p \quad \text{et} \quad \cos. z=q;$$

erit

$$pp+qq=1;$$

et

$$\sin. y=m, \quad \cos. y=n,$$

ut sit quoque

$$mm+nn=1;$$

arcuum ex his compositorum sinus et cosinus ita se habebunt:

$\sin.\ z=p$	$\cos.\ z=q$
$\sin.\ (y+z)=mq+np$	$\cos.\ (y+z)=nq-mp$
$\sin.(2y+z)=2mnq+(nn-mm)p$	$\cos.(2y+z)=(nn-mm)q-2mnp$
$\sin.(3y+z)=(3mn^2-m^3)q+(n^3-3m^2n)p$	$\cos.(3y+z)=(n^3-3m^2n)q-(3mn^2-m^3)p$
etc.	etc.

Arcus isti

$$z, \quad y+z, \quad 2y+z, \quad 3y+z \quad \text{etc.}$$

in arithmetica progressione progrediuntur, eorum vero tam sinus quam cosinus progressionem recurrentem constituunt, qualis ex denominatore

$$1-2nx+(mm+nn)xx$$

oritur; est enim

$$\sin.(2y+z)=2n\sin.(y+z)-(mm+nn)\sin. z$$

sive

$$\sin.(2y+z)=2\cos. y\sin.(y+z)-\sin. z$$

atque simili modo

$$\cos.(2y+z)=2\cos. y\cos.(y+z)-\cos. z.$$

Eodem modo erit porro

$$\sin.(3y+z)=2\cos. y\sin.(2y+z)-\sin.(y+z)$$

et

$$\cos.(3y+z)=2\cos. y\cos.(2y+z)-\cos.(y+z)$$

itemque

$$\sin.(4y+z) = 2\cos.y\,\sin.(3y+z) - \sin.(2y+z)$$

et

$$\cos.(4y+z) = 2\cos.y\,\cos.(3y+z) - \cos.(2y+z)$$

etc.

Cuius legis beneficio arcuum in progressione arithmetica progredientium tam sinus quam cosinus, quousque libuerit, expedite formari possunt.

130. Cum sit

$$\sin.(y+z) = \sin.y\,\cos.z + \cos.y\,\sin.z$$

atque

$$\sin.(y-z) = \sin.y\,\cos.z - \cos.y\,\sin.z,$$

erit his expressionibus vel addendis vel subtrahendis

$$\sin.y\,\cos.z = \frac{\sin.(y+z)+\sin.(y-z)}{2},$$

$$\cos.y\,\sin.z = \frac{\sin.(y+z)-\sin.(y-z)}{2}.$$

Quia porro est

$$\cos.(y+z) = \cos.y\,\cos.z - \sin.y\,\sin.z$$

atque

$$\cos.(y-z) = \cos.y\,\cos.z + \sin.y\,\sin.z,$$

erit pari modo

$$\cos.y\,\cos.z = \frac{\cos.(y-z)+\cos.(y+z)}{2},$$

$$\sin.y\,\sin.z = \frac{\cos.(y-z)-\cos.(y+z)}{2}.$$

Sit

$$y = z = \tfrac{1}{2}v;$$

erit ex his postremis formulis

$$\left(\cos.\tfrac{1}{2}v\right)^2 = \frac{1+\cos.v}{2} \quad \text{et} \quad \cos.\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+\cos.v}{2}},$$

$$\left(\sin.\tfrac{1}{2}v\right)^2 = \frac{1-\cos.v}{2} \quad \text{et} \quad \sin.\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1-\cos.v}{2}},$$

unde ex dato cosinu cuiusque anguli reperiuntur eius semissis sinus et cosinus.

131. Ponatur arcus

$$y+z = a \quad \text{et} \quad y-z = b;$$

erit

$$y = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad z = \frac{a-b}{2},$$

quibus in superioribus formulis substitutis habebuntur hae aequationes, tanquam totidem theoremata:

$$\sin.a + \sin.b = 2\sin.\frac{a+b}{2}\cos.\frac{a-b}{2},$$

$$\sin.a - \sin.b = 2\cos.\frac{a+b}{2}\sin.\frac{a-b}{2},$$

$$\cos.a + \cos.b = 2\cos.\frac{a+b}{2}\cos.\frac{a-b}{2},$$

$$\cos.b - \cos.a = 2\sin.\frac{a+b}{2}\sin.\frac{a-b}{2}.$$

Ex his porro nascuntur ope divisionis haec theoremata

$$\frac{\sin.a+\sin.b}{\sin.a-\sin.b} = \text{tang.}\frac{a+b}{2}\cot.\frac{a-b}{2} = \frac{\text{tang.}\frac{a+b}{2}}{\text{tang.}\frac{a-b}{2}},$$

$$\frac{\sin.a+\sin.b}{\cos.a+\cos.b} = \text{tang.}\frac{a+b}{2},$$

$$\frac{\sin.a+\sin.b}{\cos.b-\cos.a} = \cot.\frac{a-b}{2},$$

$$\frac{\sin.a-\sin.b}{\cos.a+\cos.b} = \text{tang.}\frac{a-b}{2},$$

$$\frac{\sin.a-\sin.b}{\cos.b-\cos.a} = \cot.\frac{a+b}{2},$$

$$\frac{\cos.a+\cos.b}{\cos.b-\cos.a} = \cot.\frac{a+b}{2}\cot.\frac{a-b}{2}.$$

Ex his denique deducuntur ista theoremata

$$\frac{\sin.a+\sin.b}{\cos.a+\cos.b} = \frac{\cos.b-\cos.a}{\sin.a-\sin.b},$$

$$\frac{\sin.a+\sin.b}{\sin.a-\sin.b} \times \frac{\cos.a+\cos.b}{\cos.b-\cos.a} = \left(\cot.\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

$$\frac{\sin.a+\sin.b}{\sin.a-\sin.b} \times \frac{\cos.b-\cos.a}{\cos.a+\cos.b} = \left(\text{tang.}\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

132. Cum sit

$$(\sin. z)^2 + (\cos. z)^2 = 1,$$

erit factoribus sumendis

$$(\cos. z + \sqrt{-1}\cdot\sin. z)(\cos. z - \sqrt{-1}\cdot\sin. z) = 1,$$

qui factores, etsi imaginarii, tamen ingentem praestant usum in arcubus combinandis et multiplicandis. Quaeratur enim productum horum factorum

$$(\cos. z + \sqrt{-1}\cdot\sin. z)(\cos. y + \sqrt{-1}\cdot\sin. y)$$

ac reperietur

$$\cos. y \cos. z - \sin. y \sin. z + \sqrt{-1}\cdot(\cos. y \sin. z + \sin. y \cos. z).$$

Cum autem sit

$$\cos. y \cos. z - \sin. y \sin. z = \cos. (y+z)$$

et

$$\cos. y \sin. z + \sin. y \cos. z = \sin. (y+z),$$

erit hoc productum

$$(\cos. y + \sqrt{-1}\cdot\sin. y)(\cos. z + \sqrt{-1}\cdot\sin. z) = \cos. (y+z) + \sqrt{-1}\cdot\sin. (y+z)$$

et simili modo

$$(\cos. y - \sqrt{-1}\cdot\sin. y)(\cos. z - \sqrt{-1}\cdot\sin. z) = \cos. (y+z) - \sqrt{-1}\cdot\sin. (y+z),$$

item

$$(\cos. x \pm \sqrt{-1}\cdot\sin. x)(\cos. y \pm \sqrt{-1}\cdot\sin. y)(\cos. z \pm \sqrt{-1}\cdot\sin. z)$$
$$= \cos. (x+y+z) \pm \sqrt{-1}\cdot\sin. (x+y+z).$$

133. Hinc itaque sequitur fore

$$(\cos. z \pm \sqrt{-1}\cdot\sin. z)^2 = \cos. 2z \pm \sqrt{-1}\cdot\sin. 2z$$

et

$$(\cos. z \pm \sqrt{-1}\cdot\sin. z)^3 = \cos. 3z \pm \sqrt{-1}\cdot\sin. 3z$$

ideoque generaliter erit[1])

$$(\cos. z \pm \sqrt{-1}\cdot\sin. z)^n = \cos. nz \pm \sqrt{-1}\cdot\sin. nz.$$

1) Vide A. DE MOIVRE, *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*, Londini 1730, p. 1. A. K.

Unde ob signorum ambiguitatem erit

$$\cos. nz = \frac{(\cos. z + \sqrt{-1}\cdot\sin. z)^n + (\cos. z - \sqrt{-1}\cdot\sin. z)^n}{2}$$

et

$$\sin. nz = \frac{(\cos. z + \sqrt{-1}\cdot\sin. z)^n - (\cos. z - \sqrt{-1}\cdot\sin. z)^n}{2\sqrt{-1}}.$$

Evolutis ergo binomiis hisce erit per series

$$\begin{aligned}\cos. nz &= (\cos. z)^n - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(\cos. z)^{n-2}(\sin. z)^2\\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(\cos. z)^{n-4}(\sin. z)^4\\ &- \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}(\cos. z)^{n-6}(\sin. z)^6\\ &+ \text{etc.}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sin. nz &= \frac{n}{1}(\cos. z)^{n-1}\sin. z - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(\cos. z)^{n-3}(\sin. z)^3\\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}(\cos. z)^{n-5}(\sin. z)^5\\ &- \text{etc.}\end{aligned}$$

134. Sit arcus z infinite parvus; erit $\sin. z = z$ et $\cos. z = 1$; sit autem n numerus infinite magnus, ut sit arcus nz finitae magnitudinis, puta $nz = v$; ob $\sin. z = z = \frac{v}{n}$ erit

$$\cos. v = 1 - \frac{v^2}{1\cdot 2} + \frac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{v^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \text{etc.}$$

et

$$\sin. v = v - \frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{v^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{v^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \text{etc.}$$

Dato ergo arcu v ope harum serierum eius sinus et cosinus inveniri poterunt; quarum formularum usus quo magis pateat, ponamus arcum v esse ad quadrantem seu 90° ut m ad n seu esse $v = \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$. Quia nunc valor ipsius π constat, si is ubique substituatur, prodibit[1])

$$\sin. A. \frac{m}{n} 90^\circ$$

$$
\begin{aligned}
= &+ \frac{m}{n} \cdot 1{,}57079\ 63267\ 94896\ 61923\ 13216\ 916 \\
&- \frac{m^3}{n^3} \cdot 0{,}64596\ 40975\ 06246\ 25365\ 57565\ 639 \\
&+ \frac{m^5}{n^5} \cdot 0{,}07969\ 26262\ 46167\ 04512\ 05055\ 495 \\
&- \frac{m^7}{n^7} \cdot 0{,}00468\ 17541\ 35318\ 68810\ 06854\ 639 \\
&+ \frac{m^9}{n^9} \cdot 0{,}00016\ 04411\ 84787\ 35982\ 18726\ 609 \\
&- \frac{m^{11}}{n^{11}} \cdot 0{,}00000\ 35988\ 43235\ 21208\ 53404\ 585 \\
&+ \frac{m^{13}}{n^{13}} \cdot 0{,}00000\ 00569\ 21729\ 21967\ 92681\ 178 \\
&- \frac{m^{15}}{n^{15}} \cdot 0{,}00000\ 00006\ 68803\ 51098\ 11467\ 232 \\
&+ \frac{m^{17}}{n^{17}} \cdot 0{,}00000\ 00000\ 06066\ 93573\ 11061\ 957 \\
&- \frac{m^{19}}{n^{19}} \cdot 0{,}00000\ 00000\ 00043\ 77065\ 46731\ 374 \\
&+ \frac{m^{21}}{n^{21}} \cdot 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 25714\ 22892\ 860 \\
&- \frac{m^{23}}{n^{23}} \cdot 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00125\ 38995\ 405 \\
&+ \frac{m^{25}}{n^{25}} \cdot 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 51564\ 552 \\
&- \frac{m^{27}}{n^{27}} \cdot 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00181\ 240 \\
&+ \frac{m^{29}}{n^{29}} \cdot 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 551
\end{aligned}
$$

1) In editione principe ultimae figurae fractionum decimalium, quae ad $\frac{m^3}{n^3}, \frac{m^5}{n^5}, \frac{m^7}{n^7}, \ldots \frac{m^{25}}{n^{25}}, \frac{m^{27}}{n^{27}}, \frac{m^{29}}{n^{29}}$ pertinent, ita se habent:

... 636, ... 488, ... 632, ... 605, ... 580, ... 171, ... 224,
... 950, ... 370, ... 856, ... 403, ... 550, ... 239, ... 549.

Correxit A. K.

atque[1])

$$\cos. A. \frac{m}{n} 90^\circ$$

$$
\begin{aligned}
= &+ 1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 000 \\
&- \frac{m^2}{n^2} \cdot 1{,}23370\ 05501\ 36169\ 82735\ 43113\ 750 \\
&+ \frac{m^4}{n^4} \cdot 0{,}25366\ 95079\ 01048\ 01363\ 65633\ 664 \\
&- \frac{m^6}{n^6} \cdot 0{,}02086\ 34807\ 63352\ 96087\ 30516\ 372 \\
&+ \frac{m^8}{n^8} \cdot 0{,}00091\ 92602\ 74839\ 42658\ 02417\ 162 \\
&- \frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0{,}00002\ 52020\ 42373\ 06060\ 54810\ 530 \\
&+ \frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0{,}00000\ 04710\ 87477\ 88181\ 71503\ 670 \\
&- \frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0{,}00000\ 00063\ 86603\ 08379\ 18522\ 411 \\
&+ \frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0{,}00000\ 00000\ 65659\ 63114\ 97947\ 236 \\
&- \frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0{,}00000\ 00000\ 00529\ 44002\ 00734\ 624 \\
&+ \frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0{,}00000\ 00000\ 00003\ 43773\ 91790\ 986 \\
&- \frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 01835\ 99165\ 216 \\
&+ \frac{m^{24}}{n^{24}} \cdot 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00008\ 20675\ 330 \\
&- \frac{m^{26}}{n^{26}} \cdot 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 03115\ 285 \\
&+ \frac{m^{28}}{n^{28}} \cdot 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00010\ 168 \\
&- \frac{m^{30}}{n^{30}} \cdot 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 029.
\end{aligned}
$$

1) In editione principe ultimae figurae fractionum decimalium, quae ad $\frac{m^2}{n^2}, \frac{m^4}{n^4}, \frac{m^6}{n^6}, \ldots \frac{m^{26}}{n^{26}}, \frac{m^{28}}{n^{28}}, \frac{m^{30}}{n^{30}}$ pertinent, ita se habent:

... 745, ... 659, ... 364, ... 158, ... 526, ... 665, ... 408, ... 230, ... 620, ... 981,
... 212, ... 327, ... 285 (quae ergo figurae accuratae sunt) ... 165, ... 026.

Correxit A. K.

Cum igitur sufficiat sinus et cosinus angulorum ad 45° nosse, fractio $\frac{m}{n}$ semper minor erit quam $\frac{1}{2}$ hincque etiam ob potestates fractionis $\frac{m}{n}$ series exhibitae maxime convergent, ita ut plerumque aliquot tantum termini sufficiant, praecipue si sinus et cosinus non ad tot figuras desiderentur.

135. Inventis sinibus et cosinibus inveniri quidem possunt tangentes et cotangentes per analogias consuetas; at quia in huiusmodi ingentibus numeris multiplicatio et divisio vehementer est molesta, peculiari modo eas exprimere convenit. Erit ergo

$$\operatorname{tang.} v = \frac{\sin. v}{\cos. v} = \frac{v - \frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{v^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{v^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 7} + \text{etc.}}{1 - \frac{v^2}{1\cdot 2} + \frac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{v^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 6} + \text{etc.}}$$

et

$$\cot. v = \frac{\cos. v}{\sin. v} = \frac{1 - \frac{v^2}{1\cdot 2} + \frac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{v^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 6} + \text{etc.}}{v - \frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{v^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{v^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 7} + \text{etc.}}.$$

Si iam sit arcus $v = \frac{m}{n} 90^\circ$, erit eodem modo quo ante

$\operatorname{tang. A.} \frac{m}{n} 90^\circ$	$\cot. \text{A.} \frac{m}{n} 90^\circ$
$= + \frac{2mn}{nn - mm} \cdot 0{,}6366197723676$ [1])	$= + \frac{n}{m} \cdot 0{,}6366197723676$ [1])
$+ \frac{m}{n} \cdot 0{,}2975567820597$	$- \frac{4mn}{4nn - mm} \cdot 0{,}3183098861838$ [1])
$+ \frac{m^3}{n^3} \cdot 0{,}0186886502773$	$- \frac{m}{n} \cdot 0{,}2052888894145$
$+ \frac{m^5}{n^5} \cdot 0{,}0018424752034$	$- \frac{m^3}{n^3} \cdot 0{,}0065510747882$
$+ \frac{m^7}{n^7} \cdot 0{,}0001975800715$ [1])	$- \frac{m^5}{n^5} \cdot 0{,}0003450292554$
$+ \frac{m^9}{n^9} \cdot 0{,}0000216977373$ [2])	$- \frac{m^7}{n^7} \cdot 0{,}0000202791061$ [1])
$+ \frac{m^{11}}{n^{11}} \cdot 0{,}0000024011370$	$- \frac{m^9}{n^9} \cdot 0{,}0000012366527$
$+ \frac{m^{13}}{n^{13}} \cdot 0{,}0000002664133$ [1])	$- \frac{m^{11}}{n^{11}} \cdot 0{,}0000000764959$
$+ \frac{m^{15}}{n^{15}} \cdot 0{,}0000000295865$ [1])	$- \frac{m^{13}}{n^{13}} \cdot 0{,}0000000047597$
$+ \frac{m^{17}}{n^{17}} \cdot 0{,}0000000032868$ [1])	$- \frac{m^{15}}{n^{15}} \cdot 0{,}0000000002969$
$+ \frac{m^{19}}{n^{19}} \cdot 0{,}0000000003652$ [1])	$- \frac{m^{17}}{n^{17}} \cdot 0{,}0000000000185$
$+ \frac{m^{21}}{n^{21}} \cdot 0{,}0000000000406$ [1])	$- \frac{m^{19}}{n^{19}} \cdot 0{,}0000000000012$ [1])
$+ \frac{m^{23}}{n^{23}} \cdot 0{,}0000000000045$	
$+ \frac{m^{25}}{n^{25}} \cdot 0{,}0000000000005$	

quarum serierum ratio infra [§ 198 a] fusius exponetur.

1) In editione principe ultima figura huius fractionis decimalis est unitate minor. Correxit A. K.

2) In editione principe tres ultimae figurae sunt 245. Correxit A. K.

136. Ex superioribus quidem constat, si cogniti fuerint omnium angulorum semirecto minorum sinus et cosinus, inde simul omnium angulorum maiorum sinus et cosinus haberi. Verum si tantum angulorum 30^0 minorum habeantur sinus et cosinus, ex iis per solam additionem et subtractionem omnium angulorum maiorum sinus et cosinus inveniri possunt. Cum enim sit

$$\sin. 30^0 = \frac{1}{2},$$

erit posito $y = 30^0$ ex § 130

$$\cos. z = \sin. (30 + z) + \sin. (30 - z)$$

et

$$\sin. z = \cos. (30 - z) - \cos. (30 + z)$$

ideoque ex sinibus et cosinibus angulorum z et $30 - z$ reperiuntur

$$\sin. (30 + z) = \cos. z - \sin. (30 - z)$$

et

$$\cos. (30 + z) = \cos. (30 - z) - \sin. z,$$

unde sinus et cosinus angulorum a 30^0 ad 60^0 hincque omnes maiores definiuntur.

137. In tangentibus et cotangentibus simile subsidium usu venit. Cum enim sit

$$\text{tang.} (a + b) = \frac{\text{tang.} a + \text{tang.} b}{1 - \text{tang.} a \,\text{tang.} b},$$

erit

$$\text{tang.} 2a = \frac{2 \,\text{tang.} a}{1 - \text{tang.} a \,\text{tang.} a} \quad \text{et} \quad \cot. 2a = \frac{\cot. a - \text{tang.} a}{2},$$

unde ex tangentibus et cotangentibus arcuum 30^0 minorum inveniuntur cotangentes usque ad 60^0.

Sit iam $a = 30 - b$; erit $2a = 60 - 2b$ et $\cot. 2a = \text{tang.} (30 + 2b)$; erit ergo

$$\text{tang.} (30 + 2b) = \frac{\cot. (30 - b) - \text{tang.} (30 - b)}{2},$$

unde etiam tangentes arcuum 30^0 maiorum obtinentur.

Secantes autem et cosecantes ex tangentibus per solam subtractionem inveniuntur; est enim

$$\text{cosec.} z = \cot. \tfrac{1}{2} z - \cot. z$$

et hinc

$$\sec. z = \cot. \left(45^0 - \tfrac{1}{2} z\right) - \text{tang.} z.$$

Ex his ergo luculenter perspicitur, quomodo canones sinuum construi potuerint.

138. Ponatur denuo in formulis § 133 arcus z infinite parvus et sit n numerus infinite magnus i, ut iz obtineat valorem finitum v. Erit ergo $nz = v$ et $z = \frac{v}{i}$, unde $\sin. z = \frac{v}{i}$ et $\cos. z = 1$; his substitutis fit

$$\cos. v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i + \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2}$$

atque

$$\sin. v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i - \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2\sqrt{-1}}.$$

In capite autem praecedente vidimus esse

$$\left(1 + \frac{z}{i}\right)^i = e^z$$

denotante e basin logarithmorum hyperbolicorum; scripto ergo pro z partim $+v\sqrt{-1}$ partim $-v\sqrt{-1}$ erit

$$\cos. v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2}$$

et

$$\sin. v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Ex quibus intelligitur, quomodo quantitates exponentiales imaginariae ad sinus et cosinus arcuum realium reducantur.[1]) Erit vero

1) Has celeberrimas formulas, quas ab inventore *Formulas Eulerianas* nominare solemus, Eulerus distincte primum exposuit in Commentatione 61 (indicis Enestroemiani): *De summis*

$$e^{+v\sqrt{-1}} = \cos. v + \sqrt{-1}\cdot \sin. v$$

et

$$e^{-v\sqrt{-1}} = \cos. v - \sqrt{-1}\cdot \sin. v.$$

139. Sit iam in iisdem formulis § 133 n numerus infinite parvus seu $n = \frac{1}{i}$ existente i numero infinite magno; erit

$$\cos. nz = \cos. \frac{z}{i} = 1 \quad \text{et} \quad \sin. nz = \sin. \frac{z}{i} = \frac{z}{i};$$

arcus enim evanescentis $\frac{z}{i}$ sinus est ipsi aequalis, cosinus vero $= 1$. His positis habebitur

$$1 = \frac{(\cos. z + \sqrt{-1}\cdot\sin. z)^{\frac{1}{i}} + (\cos. z - \sqrt{-1}\cdot\sin. z)^{\frac{1}{i}}}{2}$$

et

$$\frac{z}{i} = \frac{(\cos. z + \sqrt{-1}\cdot\sin. z)^{\frac{1}{i}} - (\cos. z - \sqrt{-1}\cdot\sin. z)^{\frac{1}{i}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Sumendis autem logarithmis hyperbolicis supra (§ 125) ostendimus esse

$$l(1+x) = i(1+x)^{\frac{1}{i}} - i \quad \text{seu} \quad y^{\frac{1}{i}} = 1 + \frac{1}{i} ly$$

posito y loco $1 + x$. Nunc igitur posito loco y partim $\cos. z + \sqrt{-1}\cdot\sin. z$ partim $\cos. z - \sqrt{-1}\cdot\sin. z$ prodibit

serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum, Miscellanea Berolin. 7, 1743, p. 172; LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, series I, vol. 14. Iam antea quidem cum amico CHR. GOLDBACH (1690—1764) formulas huc pertinentes, partim speciales partim generaliores, communicaverat. Sic in epistola d. 9. Dec. 1741 scripta invenitur haec formula

$$\frac{2^{+\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}}{2} = \text{Cos. Arc. } l\,2$$

et in epistola d. 8. Maii 1742 scripta haec

$$a^{p\sqrt{-1}} + a^{-p\sqrt{-1}} = 2 \text{ Cos. Arc. } pla.$$

Vide *Correspondance math. et phys. publiée par P. H. Fuss*, St.-Pétersbourg 1843, t. I, p. 110 et 123; LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, series III. Confer etiam Commentationem 170 nota 1 p. 35 laudatam, imprimis § 90 et 91. A. K.

$$1 = \frac{1 + \frac{1}{i} l(\cos. z + \sqrt{-1}\cdot\sin. z) + 1 + \frac{1}{i} l(\cos. z - \sqrt{-1}\cdot\sin. z)}{2} = 1$$

ob logarithmos evanescentes, ita ut hinc nil sequatur. Altera vero aequatio pro sinu suppeditat

$$\frac{z}{i} = \frac{\frac{1}{i} l(\cos. z + \sqrt{-1}\cdot\sin. z) - \frac{1}{i} l(\cos. z - \sqrt{-1}\cdot\sin. z)}{2\sqrt{-1}}$$

ideoque

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\,\frac{\cos. z + \sqrt{-1}\cdot\sin. z}{\cos. z - \sqrt{-1}\cdot\sin. z},$$

unde patet, quemadmodum logarithmi imaginarii ad arcus circulares revocentur.

140. Cum sit $\frac{\sin. z}{\cos. z} = \text{tang. } z$, arcus z per suam tangentem ita exprimetur, ut sit

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\,\frac{1 + \sqrt{-1}\cdot\text{tang. } z}{1 - \sqrt{-1}\cdot\text{tang. } z}.$$

Supra vero (§ 123) vidimus esse

$$l\,\frac{1+x}{1-x} = \frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \text{etc.}$$

Posito ergo $x = \sqrt{-1}\cdot\text{tang. } z$ fiet

$$z = \frac{\text{tang. } z}{1} - \frac{(\text{tang. } z)^3}{3} + \frac{(\text{tang. } z)^5}{5} - \frac{(\text{tang. } z)^7}{7} + \text{etc.}$$

Si ergo ponamus $\text{tang. } z = t$, ut sit z arcus, cuius tangens est t, quem ita indicabimus $\text{A. tang. } t$, ideoque erit

$$z = \text{A. tang. } t.$$

Cognita ergo tangente t erit arcus respondens[1])

1) Seriem sequentem primus J. GREGORY (1638—1675) d. 15. Febr. 1671 cum J. COLLINS (1625—1683) communicavit. Vide *Commercium epistolicum J. Collins et aliorum de analysi pro-*

$$z = \frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} - \text{etc.}$$

Cum igitur, si tangens t aequetur radio 1, fiat arcus $z =$ arcui 45° seu $z = \frac{\pi}{4}$, erit

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{etc.},$$

quae est series a LEIBNITZIO primum producta ad valorem peripheriae circuli exprimendum.[1])

141. Quo autem ex hiusmodi serie longitudo arcus circuli expedite definiri possit, perspicuum est pro tangente t fractionem satis parvam substitui debere. Sic ope huius seriei facile reperietur longitudo arcus z, cuius tangens t aequetur $\frac{1}{10}$; foret enim iste arcus

mota etc., publié par J.-B. BIOT et F. LEFORT, Paris 1856, p. 79. Observandum quidem est apud GREGORY hanc seriem ita se habere

$$a = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \cdots,$$

ubi r, t, a *lineas* denotant, scilicet radium, tangentem et arcum correspondentem. EULERUS primus loco priorum *linearum* trigonometricarum *rationes* earum ad radium hocque modo *functiones* trigonometricas in analysin introduxit. Vide F. RUDIO, *ARCHIMEDES, HUYGENS, LAMBERT, LEGENDRE, Vier Abhandlungen über die Kreismessung etc.*, Leipzig 1892, p. 43 et 46—53. A. K.

1) G. LEIBNIZ, *De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus expressa.* Acta erud. 1682, p. 41; *LEIBNIZENS Mathematische Schriften*, herausg. von C. I. GERHARDT, 2. Abt., Bd. 1, Halle 1858, p. 118.

LEIBNIZ seriem suam plus quam octo annis ante cum amicis communicaverat. Vide epistolas, quas CHR. HUYGENS (1629—1695) et H. OLDENBURG (1626—1678) d. 6. Nov. 1674 et 12. Apr. 1675 ad G. LEIBNIZ scripserunt, *LEIBNIZENS Mathematische Schriften*, 1. Abt., Bd. 2, Berlin 1850, p. 16, et 1. Abt., Bd. 1, Berlin 1849, p. 60. Vide etiam epistolam a LEIBNIZ d. 27. Aug. 1676 ad OLDENBURG scriptam, *LEIBNIZENS Mathematische Schriften*, 1. Abt., Bd. 1, Berlin 1849, p. 114. Hac in epistola legitur: *Unde, posito Quadrato Circumscripto 1. erit Circulus*

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Quae expressio, iam Triennio abhinc et ultra a me communicata amicis, haud dubie omnium possibilium simplicissima est maximeque afficiens mentem.

Epistolae tres supra laudatae inveniuntur etiam in libro, qui inscribitur *Commercium epistolicum* (vide notam praecedentem), p. 93 et 198 (ubi imprimis notabilis est nota adiecta) et 112. Vide porro M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 3. Bd., 2. Aufl., p. 75 et sq. A. K.

$$z = \frac{1}{10} - \frac{1}{3000} + \frac{1}{500000} - \text{etc.},$$

cuius seriei valor per approximationem non difficulter in fractione decimali exhiberetur. At vero ex tali arcu cognito nihil pro longitudine totius circumferentiae concludere licebit, cum ratio, quam arcus, cuius tangens est $= \frac{1}{10}$, ad totam peripheriam tenet, non sit assignabilis. Hanc ob rem ad peripheriam indagandam eiusmodi arcus quaeri debet, qui sit simul pars aliquota peripheriae et cuius tangens satis exigua commode exprimi queat. Ad hoc ergo institutum sumi solet arcus 30°, cuius tangens est $= \frac{1}{\sqrt{3}}$, quia minorum arcuum cum peripheria commensurabilium tangentes nimis fiunt irrationales. Quare ob arcum $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ erit

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3 \cdot 3\sqrt{3}} + \frac{1}{5 \cdot 3^2\sqrt{3}} - \text{etc.}$$

et

$$\pi = \frac{2\sqrt{3}}{1} - \frac{2\sqrt{3}}{3 \cdot 3} + \frac{2\sqrt{3}}{5 \cdot 3^2} - \frac{2\sqrt{3}}{7 \cdot 3^3} + \text{etc.},$$

cuius seriei ope valor ipsius π ante [§ 126] exhibitus incredibili labore fuit determinatus.

142. Hic autem labor eo maior est, quod primum singuli termini sint irrationales, tum vero quisque tantum circiter triplo sit minor quam praecedens. Huic itaque incommodo ita occurri poterit. Sumatur arcus 45° seu $\frac{\pi}{4}$; cuius valor etsi per seriem vix convergentem

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{etc.}$$

exprimitur, tamen is retineatur atque in duos arcus a et b dispertiatur, ut sit $a + b = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$. Cum igitur sit

$$\text{tang.}\,(a + b) = 1 = \frac{\text{tang.}\,a + \text{tang.}\,b}{1 - \text{tang.}\,a\ \text{tang.}\,b},$$

erit

$$1 - \text{tang.}\,a\ \text{tang.}\,b = \text{tang.}\,a + \text{tang.}\,b$$

et

$$\text{tang.}\,b = \frac{1 - \text{tang.}\,a}{1 + \text{tang.}\,a}.$$

Sit nunc tang. $a = \frac{1}{2}$; erit tang. $b = \frac{1}{3}$; hinc uterque arcus a et b per seriem rationalem multo magis quam superior convergentem exprimetur eorumque summa dabit valorem arcus $\frac{\pi}{4}$; hinc itaque erit

$$\pi = 4 \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \frac{1}{9 \cdot 2^9} - \text{etc.} \\ \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} - \text{etc.} \end{array} \right\}.$$

Hoc ergo modo multo expeditius longitudo semicircumferentiae π inveniri potuisset, quam quidem factum est ope seriei ante commemoratae.[1])

1) Quomodo numerus π per series infinitas, producta infinita, fractiones continuas infinitas exprimi possit et quales relationes analyticae pro hoc numero valeant, EULERUS permultis investigationibus exposuit. Longius autem est has omnes multis verbis enumerare. Commemorentur tantum exempli gratia capita X, XI, XV, XVIII huius *Introductionis* et Commentationes 41, 59, 61, 63, 72, 74, 125, 130, 275, 561, 664, 705, 706, 745, 809 indicis ENESTROEMIANI. Cetera hic index ipse indicabit. A. K.

CAPUT IX

DE INVESTIGATIONE FACTORUM TRINOMIALIUM

143. Quemadmodum factores simplices cuiusque functionis integrae inveniri oporteat, supra [§ 29] quidem ostendimus hoc fieri per resolutionem aequationum. Si enim proposita sit functio quaecunque integra

$$\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \text{etc.}$$

huiusque quaerantur factores simplices formae $p - qz$, manifestum est, si $p - qz$ fuerit factor functionis $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \text{etc.}$, tum posito $z = \frac{p}{q}$, quo casu factor $p - qz$ fit $= 0$, etiam ipsam functionem propositam evanescere debere. Hinc $p - qz$ erit factor vel divisor functionis

$$\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \text{etc.};$$

sequitur fore hanc expressionem

$$\alpha + \frac{\beta p}{q} + \frac{\gamma p^2}{q^2} + \frac{\delta p^3}{q^3} + \frac{\varepsilon p^4}{q^4} + \text{etc.} = 0.$$

Unde vicissim, si omnes radices $\frac{p}{q}$ huius aequationis eruantur, singulae dabunt totidem factores simplices functionis integrae propositae

$$\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \text{etc.},$$

nempe $p - qz$. Patet autem simul numerum factorum huiusmodi simplicium ex maxima potestate ipsius z definiri.

144. Hoc autem modo plerumque difficulter factores imaginarii eruuntur, quamobrem hoc capite methodum peculiarem tradam, cuius ope saepenumero factores simplices imaginarii inveniri queant. Quoniam vero factores simplices imaginarii ita sunt comparati, ut binorum productum fiat reale, hos ipsos factores imaginarios reperiemus, si factores investigemus duplices seu huius formae

$$p - qz + rzz,$$

reales quidem, sed quorum factores simplices sint imaginarii. Quodsi enim functionis $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \text{etc.}$ constent omnes factores reales duplices huius formae trinomiales $p - qz + rzz$, simul omnes factores imaginarii habebuntur.

145. Trinomium autem $p - qz + rzz$ factores simplices habebit imaginarios, si fuerit $4pr > qq$ seu

$$\frac{q}{2\sqrt{pr}} < 1.$$

Cum igitur sinus et cosinus angulorum sint unitate minores, formula $p - qz + rzz$ factores simplices habebit imaginarios, si fuerit $\frac{q}{2\sqrt{pr}} =$ sinui vel cosinui cuiuspiam anguli. Sit ergo

$$\frac{q}{2\sqrt{pr}} = \cos.\varphi \quad \text{seu} \quad q = 2\sqrt{pr}\cdot\cos.\varphi$$

atque trinomium $p - qz + rzz$ continebit factores simplices imaginarios. Ne autem irrationalitas molestiam facessat, assumo hanc formam

$$pp - 2pqz\cos.\varphi + qqzz,$$

cuius factores simplices imaginarii erunt hi

$$qz - p(\cos.\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin.\varphi) \quad \text{et} \quad qz - p(\cos.\varphi - \sqrt{-1}\cdot\sin.\varphi).$$

Ubi quidem patet, si fuerit $\cos.\varphi = \pm 1$, tum ambos factores ob $\sin.\varphi = 0$ fieri aequales et reales.

146. Proposita ergo functione integra $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \text{etc.}$ eius factores simplices imaginarii eruentur, si determinentur litterae p et q cum angulo φ, ut hoc trinomium $pp - 2pqz\cos.\varphi + qqzz$ fiat factor functionis. Tum enim simul inerunt isti factores simplices imaginarii

$$qz - p(\cos.\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin.\varphi) \quad \text{et} \quad qz - p(\cos.\varphi - \sqrt{-1}\cdot\sin.\varphi).$$

Quamobrem functio proposita evanescet, si ponatur tam

$$z = \frac{p}{q}(\cos.\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin.\varphi)$$

quam

$$z = \frac{p}{q}(\cos.\varphi - \sqrt{-1}\cdot\sin.\varphi).$$

Hinc facta substitutione utraque duplex nascetur aequatio, ex quibus tam fractio $\frac{p}{q}$ quam arcus φ definiri poterunt.

147. Hae autem substitutiones loco z faciendae, etiamsi primo intuitu difficiles videantur, tamen per ea, quae in capite praecedente sunt tradita, satis expedite absolventur. Cum enim fuerit ostensum esse

$$(\cos.\varphi \pm \sqrt{-1}\cdot\sin.\varphi)^n = \cos.n\varphi \pm \sqrt{-1}\cdot\sin.n\varphi,$$

sequentes formulae loco singularum ipsius z potestatum habebuntur substituendae:

pro priori factore	pro altero factore
$z = \frac{p}{q}(\cos.\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin.\varphi)$	$z = \frac{p}{q}(\cos.\varphi - \sqrt{-1}\cdot\sin.\varphi)$
$z^2 = \frac{p^2}{q^2}(\cos.2\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin.2\varphi)$	$z^2 = \frac{p^2}{q^2}(\cos.2\varphi - \sqrt{-1}\cdot\sin.2\varphi)$
$z^3 = \frac{p^3}{q^3}(\cos.3\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin.3\varphi)$	$z^3 = \frac{p^3}{q^3}(\cos.3\varphi - \sqrt{-1}\cdot\sin.3\varphi)$
$z^4 = \frac{p^4}{q^4}(\cos.4\varphi + \sqrt{-1}\cdot\sin.4\varphi)$	$z^4 = \frac{p^4}{q^4}(\cos.4\varphi - \sqrt{-1}\cdot\sin.4\varphi)$
etc.	etc.

Ponatur brevitatis gratia $\frac{p}{q} = r$ factaque substitutione sequentes duae nascentur aequationes:

$$0 = \begin{cases} \alpha + \beta r \cos.\varphi + \gamma r^2 \cos.2\varphi + \delta r^3 \cos.3\varphi + \text{etc.} \\ + \beta r\sqrt{-1}\cdot\sin.\varphi + \gamma r^2\sqrt{-1}\cdot\sin.2\varphi + \delta r^3\sqrt{-1}\cdot\sin.3\varphi + \text{etc.} \end{cases}$$

$$0 = \begin{cases} \alpha + \beta r \cos.\varphi + \gamma r^2 \cos.2\varphi + \delta r^3 \cos.3\varphi + \text{etc.} \\ - \beta r\sqrt{-1}\cdot\sin.\varphi - \gamma r^2\sqrt{-1}\cdot\sin.2\varphi - \delta r^3\sqrt{-1}\cdot\sin.3\varphi - \text{etc.} \end{cases}$$

148. Quodsi hae duae aequationes invicem addantur et subtrahantur et posteriori casu per $2\sqrt{-1}$ dividantur, prodibunt hae duae aequationes reales:

$$0 = \alpha + \beta r\cos.\varphi + \gamma r^2\cos.2\varphi + \delta r^3\cos.3\varphi + \text{etc.},$$
$$0 = \quad \beta r\sin.\varphi + \gamma r^2\sin.2\varphi + \delta r^3\sin.3\varphi + \text{etc.},$$

quae statim ex forma functionis propositae

$$\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \text{etc.}$$

formari possunt ponendo primum pro unaquaque ipsius z potestate

$$z^n = r^n \cos.n\varphi,$$

deinceps

$$z^n = r^n \sin.n\varphi.$$

Sic enim ob $\sin.0\varphi = 0$ et $\cos.0\varphi = 1$ pro z^0 seu 1 in termino constanti priori casu ponitur 1, posteriori autem 0.

Si ergo ex his duabus aequationibus definiantur incognitae r et φ, ob $r = \frac{p}{q}$ habebitur factor functionis trinomialis

$$pp - 2pqz\cos.\varphi + qqzz$$

duos factores simplices imaginarios involvens.

149. Si aequatio prior multiplicetur per $\sin.m\varphi$, posterior per $\cos.m\varphi$ atque producta vel addantur vel subtrahantur, prodibunt istae duae aequationes:

$$0 = \alpha\sin.m\varphi + \beta r\sin.(m+1)\varphi + \gamma r^2\sin.(m+2)\varphi + \delta r^3\sin.(m+3)\varphi + \text{etc.},$$
$$0 = \alpha\sin.m\varphi + \beta r\sin.(m-1)\varphi + \gamma r^2\sin.(m-2)\varphi + \delta r^3\sin.(m-3)\varphi + \text{etc.}$$

Sin autem aequatio prior multiplicetur per $\cos.m\varphi$ et posterior per $\sin.m\varphi$, per additionem ac subtractionem sequentes emergent aequationes:

$$0 = \alpha\cos.m\varphi + \beta r\cos.(m-1)\varphi + \gamma r^2\cos.(m-2)\varphi + \delta r^3\cos.(m-3)\varphi + \text{etc.},$$
$$0 = \alpha\cos.m\varphi + \beta r\cos.(m+1)\varphi + \gamma r^2\cos.(m+2)\varphi + \delta r^3\cos.(m+3)\varphi + \text{etc.}$$

Huiusmodi ergo duae aequationes quaecunque coniunctae determinabunt incognitas r et φ; quod cum plerumque pluribus modis fieri possit, simul plures factores trinomiales obtinentur iique adeo omnes, quos functio proposita in se complectitur.

150. Quo usus harum regularum clarius appareat, quarumdam functionum saepius occurrentium factores trinomiales hic indagabimus, ut eos, quoties occasio postulaverit, hinc depromere liceat. Sit itaque proposita haec functio

$$a^n + z^n,$$

cuius factores trinomiales formae

$$pp - 2pqz\cos.\varphi + qqzz$$

determinari oporteat. Posito ergo $r = \frac{p}{q}$ habebuntur hae duae aequationes

$$0 = a^n + r^n\cos.n\varphi \quad \text{et} \quad 0 = r^n\sin.n\varphi,$$

quarum posterior dat

$$\sin.n\varphi = 0;$$

unde erit $n\varphi$ arcus vel huius formae $(2k+1)\pi$ vel $2k\pi$ denotante k numerum integrum. Casus hos ideo distinguo, quod eorum cosinus sint differentes; priori enim casu erit $\cos.(2k+1)\pi = -1$, posteriori casu autem $\cos.2k\pi = +1$. Patet autem priorem formam

$$n\varphi = (2k+1)\pi$$

sumi debere, quippe quae dat $\cos. n\varphi = -1$, unde fit

$$0 = a^n - r^n$$

hincque porro

$$r = a = \frac{p}{q}.$$

Erit ergo

$$p = a, \quad q = 1$$

et

$$\varphi = \frac{2k+1}{n}\pi,$$

unde functionis $a^n + z^n$ factor erit

$$aa - 2az \cos. \frac{2k+1}{n}\pi + zz.$$

Cum igitur pro k numerum quemque integrum ponere liceat, prodeunt hoc modo plures factores neque tamen infiniti, quoniam, si $2k+1$ ultra n augetur, factores priores recurrunt, quod ex exemplis clarius patebit, cum sit $\cos. (2\pi \pm \varphi) = \cos. \varphi$. Deinde si n est numerus impar, posito $2k+1 = n$ erit factor quadratus $aa + 2az + zz$; neque vero hinc sequitur quadratum $(a+z)^2$ esse factorem functionis $a^n + z^n$, quoniam (in § 148) unica aequatio resultat, qua tantum patet $a + z$ esse divisorem formulae $a^n + z^n$; quae regula semper est tenenda, quoties $\cos. \varphi$ fit vel $+1$ vel -1.

EXEMPLUM

Evolvamus aliquot casus, quo isti factores clarius ob oculos ponantur, atque hos casus in duas classes distribuamus, prout n fuerit numerus vel par vel impar.

Si
$$n = 1,$$
formulae
$$a + z$$
factor est
$$a + z.$$

Si
$$n = 2,$$
formulae
$$a^2 + z^2$$
factor est
$$a^2 + z^2.$$

Si
$$n = 3,$$
formulae
$$a^3 + z^3$$
factores sunt
$$aa - 2az \cos. \tfrac{1}{3}\pi + zz,$$
$$a + z.$$

Si
$$n = 4,$$
formulae
$$a^4 + z^4$$
factores sunt
$$aa - 2az \cos. \tfrac{1}{4}\pi + zz,$$
$$aa - 2az \cos. \tfrac{3}{4}\pi + zz.$$

Si
$$n = 5,$$
formulae
$$a^5 + z^5$$
factores sunt
$$aa - 2az \cos. \tfrac{1}{5}\pi + zz,$$
$$aa - 2az \cos. \tfrac{3}{5}\pi + zz,$$
$$a + z.$$

Si
$$n = 6,$$
formulae
$$a^6 + z^6$$
factores sunt
$$aa - 2az \cos. \tfrac{1}{6}\pi + zz,$$
$$aa - 2az \cos. \tfrac{3}{6}\pi + zz,$$
$$aa - 2az \cos. \tfrac{5}{6}\pi + zz.$$

Ex quibus exemplis patet omnes factores obtineri, si loco $2k+1$ omnes numeri impares non maiores quam exponens n substituantur, iis vero casibus, quibus factor quadratus prodit, tantum eius radicem factoribus annumerari debere.

151. Si proposita sit haec functio

$$a^n - z^n,$$

eius factor trinomialis erit

$$pp - 2pqz \cos. \varphi + qqzz,$$

si posito $r = \frac{p}{q}$ fuerit

$$0 = a^n - r^n \cos. n\varphi \quad \text{et} \quad 0 = r^n \sin. n\varphi.$$

Erit ergo iterum

$$\sin. n\varphi = 0$$

ideoque $n\varphi = (2k+1)\pi$ vel $n\varphi = 2k\pi$. Hoc autem casu valor posterior sumi debet, ut sit $\cos. n\varphi = +1$, qui dat

$$0 = a^n - r^n$$

et

$$r = \frac{p}{q} = a.$$

Habebitur itaque

$$p = a, \quad q = 1$$

et

$$\varphi = \frac{2k}{n}\pi,$$

unde factor trinomialis formulae propositae erit

$$aa - 2az\cos.\frac{2k}{n}\pi + zz;$$

quae forma, si loco $2k$ omnes numeri pares non maiores quam n ponantur, simul dabit omnes factores; ubi de factoribus quadratis idem est tenendum, quod ante monuimus. Ac primo quidem posito $k = 0$ prodit factor $aa - 2az + zz$, pro quo vero radix $a - z$ capi debet. Similiter, si n fuerit numerus par et ponatur $2k = n$, prodit $aa + 2az + zz$, unde patet $a + z$ esse divisorem formae $a^n - z^n$.

EXEMPLUM

Casus exponentis n ut ante tractati ita se habebunt, prout n fuerit numerus vel impar vel par.

Si

$$n = 1,$$

formulae

$$a - z$$

ipsa erit factor

$$a - z.$$

Si

$$n = 2,$$

formulae

$$a^2 - z^2$$

factores erunt

$$a - z,$$

$$a + z.$$

Si

$$n = 3,$$

formulae

$$a^3 - z^3$$

factores erunt

$$a - z,$$

$$aa - 2az\cos.\frac{2}{3}\pi + zz.$$

Si

$$n = 4,$$

formulae

$$a^4 - z^4$$

factores erunt

$$a - z,$$

$$aa - 2az\cos.\frac{2}{4}\pi + zz,$$

$$a + z.$$

Si

$$n = 5,$$

formulae

$$a^5 - z^5$$

factores erunt

$$a - z,$$

$$aa - 2az\cos.\frac{2}{5}\pi + zz,$$

$$aa - 2az\cos.\frac{4}{5}\pi + zz.$$

Si

$$n = 6,$$

formulae

$$a^6 - z^6$$

factores erunt

$$a - z,$$

$$aa - 2az\cos.\frac{2}{6}\pi + zz,$$

$$aa - 2az\cos.\frac{4}{6}\pi + zz,$$

$$a + z.$$

152. His igitur confirmatur id, quod supra [§ 32] iam innuimus, omnem functionem integram, si non in factores simplices reales, tamen in factores duplices reales resolvi posse. Vidimus enim hanc functionem indefinitae dimensionis $a^n \pm z^n$ semper in factores duplices reales praeter simplices reales resolvi posse.

Progrediamur ergo ad functiones magis compositas, uti $\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n}$, cuius quidem, si duos habeat factores formae $\eta + \theta z^n$, resolutio ex praecedentibus abunde patet. Hoc ergo tantum erit efficiendum, ut formae $\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n}$ eo casu, quo non habet duos factores reales formae $\eta + \theta z^n$, resolutionem in factores reales, vel simplices vel duplices, doceamus.

153. Consideremus ergo hanc functionem

$$a^{2n} - 2a^n z^n \cos. g + z^{2n},$$

quae in duos factores formae $\eta + \theta z^n$ reales resolvi nequit. Quodsi ergo ponamus huius functionis factorem duplicem realem esse

$$pp - 2pqz \cos. \varphi + qqzz,$$

posito $r = \frac{p}{q}$ duae sequentes aequationes erunt resolvendae

$$0 = a^{2n} - 2a^n r^n \cos. g \cos. n\varphi + r^{2n} \cos. 2n\varphi$$

et

$$0 = \qquad - 2a^n r^n \cos. g \sin. n\varphi + r^{2n} \sin. 2n\varphi.$$

Vel loco prioris aequationis sumatur ex § 149 (ponendo $m = 2n$) haec

$$0 = a^{2n} \sin. 2n\varphi - 2a^n r^n \cos. g \sin. n\varphi,$$

quae cum posteriori collata dat

$$r = a;$$

tum vero erit

$$\sin. 2n\varphi = 2 \cos. g \sin. n\varphi.$$

At est

$$\sin. 2n\varphi = 2 \sin. n\varphi \cos. n\varphi,$$

unde fit

$$\cos. n\varphi = \cos. g.$$

At est semper $\cos. (2k\pi \pm g) = \cos. g$, ex quo habetur

$$n\varphi = 2k\pi \pm g$$

et

$$\varphi = \frac{2k\pi \pm g}{n}.$$

Hinc ergo factor generalis duplex formae propositae erit

$$= aa - 2az \cos. \frac{2k\pi \pm g}{n} + zz$$

atque omnes factores prodibunt, si pro $2k$ omnes numeri pares non maiores quam n successive substituantur, uti ex applicatione ad casus videre licebit.

EXEMPLUM

Consideremus ergo casus, quibus n est 1, 2, 3, 4 etc., ut ratio factorum appareat. Erit ergo

formulae

$$aa - 2az \cos. g + zz$$

unicus factor

$$aa - 2az \cos. g + zz;$$

formulae

$$a^4 - 2a^2 z^2 \cos. g + z^4$$

factores duo

$$aa - 2az \cos. \frac{g}{2} + zz,$$

$$aa - 2az \cos. \frac{2\pi \pm g}{2} + zz \quad \text{seu} \quad aa + 2az \cos. \frac{g}{2} + zz;$$

formulae

$$a^6 - 2a^3 z^3 \cos. g + z^6$$

factores tres

$$aa - 2az \cos. \frac{g}{3} + zz,$$

$$aa - 2az \cos. \frac{2\pi - g}{3} + zz,$$

$$aa - 2az \cos. \frac{2\pi + g}{3} + zz;$$

formulae

$$a^8 - 2a^4 z^4 \cos. g + z^8$$

factores quatuor

$$aa - 2az \cos. \frac{g}{4} + zz,$$

$$aa - 2az \cos. \frac{2\pi - g}{4} + zz,$$

$$aa - 2az \cos. \frac{2\pi + g}{4} + zz,$$

$$aa - 2az \cos. \frac{4\pi \pm g}{4} + zz \quad \text{seu} \quad aa + 2az \cos. \frac{g}{4} + zz;$$

formulae

$$a^{10} - 2a^5z^5 \cos. g + z^{10}$$

factores quinque

$$aa - 2az \cos. \frac{g}{5} + zz,$$

$$aa - 2az \cos. \frac{2\pi - g}{5} + zz,$$

$$aa - 2az \cos. \frac{2\pi + g}{5} + zz,$$

$$aa - 2az \cos. \frac{4\pi - g}{5} + zz,$$

$$aa - 2az \cos. \frac{4\pi + g}{5} + zz.$$

Confirmatur ergo etiam his exemplis omnem functionem integram in factores reales sive simplices sive duplices resolvi posse.

154. Hinc ulterius progredi licebit ad functionem hanc

$$\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n},$$

quae certo habebit unum factorem realem formae $\eta + \theta z^n$, cuius igitur factores reales vel simplices vel duplices exhiberi possunt; alter vero multiplicator formae $\iota + \varkappa z^n + \lambda z^{2n}$, utcunque fuerit comparatus, per paragraphum praecedentem pari modo in factores resolvi poterit.

Deinde haec functio

$$\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n} + \varepsilon z^{4n},$$

cum perpetuo habeat duos factores reales formae huius $\eta + \theta z^n + \iota z^{2n}$, similiter in factores vel simplices vel duplices reales resolvitur.

Quin etiam progredi licet ad formam

$$\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n} + \varepsilon z^{4n} + \zeta z^{5n};$$

quae cum certo habeat unum factorem formae $\eta + \theta z^n$, alter factor erit formae

praecedentis, unde etiam haec functio resolutionem in factores reales vel simplices vel duplices admittet.

Quare si ullum dubium mansisset circa huiusmodi resolutionem omnium functionum integrarum, hoc nunc fere penitus tolletur.

155. Traduci vero etiam potest haec in factores resolutio ad series infinitas; scilicet quia vidimus supra [§ 123] esse

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.} = e^x,$$

at vero esse

$$e^x = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i$$

denotante i numerum infinitum, perspicuum est seriem

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc.}$$

habere factores infinitos simplices inter se aequales nempe $1 + \frac{x}{i}$. At si ab eadem serie primus terminus dematur, erit

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc.} = e^x - 1 = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i - 1,$$

cuius formae cum § 151 comparatae, quo fit

$$a = 1 + \frac{x}{i}, \quad n = i \quad \text{et} \quad z = 1,$$

factor quicunque erit

$$= \left(1 + \frac{x}{i}\right)^2 - 2\left(1 + \frac{x}{i}\right) \cos. \frac{2k}{i}\pi + 1,$$

unde substituendo pro $2k$ omnes numeros pares simul omnes factores prodibunt.

Posito autem $2k = 0$ prodit factor quadratus $\frac{xx}{ii}$, pro quo autem tantum ob rationes allegatas radix $\frac{x}{i}$ sumi debet; erit ergo x factor expressionis

$e^x - 1$, quod quidem sponte patet. Ad reliquos factores inveniendos notari oportet esse ob arcum $\frac{2k}{i}\pi$ infinite parvum

$$\cos.\frac{2k}{i}\pi = 1 - \frac{2kk}{ii}\pi\pi$$

(§ 134) terminis sequentibus ob i numerum infinitum in nihilum abeuntibus. Hinc erit factor quilibet

$$\frac{xx}{ii} + \frac{4kk}{ii}\pi\pi + \frac{4kk\pi\pi}{i^3}x$$

atque adeo forma $e^x - 1$ erit divisibilis per

$$1 + \frac{x}{i} + \frac{xx}{4kk\pi\pi}.$$

Quare expressio

$$e^x - 1 = x\left(1 + \frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.}\right)$$

praeter factorem x habebit hos infinitos

$$\left(1 + \frac{x}{i} + \frac{xx}{4\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{i} + \frac{xx}{16\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{i} + \frac{xx}{36\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{i} + \frac{xx}{64\pi\pi}\right) \text{ etc.}$$

156. Cum autem hi factores contineant partem infinite parvam $\frac{x}{i}$, quae, cum in singulis insit atque per multiplicationem omnium, quorum numerus est $\frac{1}{2}i$, producat terminum $\frac{x}{2}$, omitti non potest, ad hoc ergo incommodum vitandum consideremus hanc expressionem

$$e^x - e^{-x} = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i - \left(1 - \frac{x}{i}\right)^i = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \text{etc.}\right);$$

est enim

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc.}$$

Quae cum § 151 comparata dat

$$n = i, \quad a = 1 + \frac{x}{i} \quad \text{et} \quad z = 1 - \frac{x}{i},$$

unde huius expressionis factor erit

$$= aa - 2az\cos.\frac{2k}{n}\pi + zz$$

$$= 2 + \frac{2xx}{ii} - 2\left(1 - \frac{xx}{ii}\right)\cos.\frac{2k}{i}\pi = \frac{4xx}{ii} + \frac{4kk}{ii}\pi\pi - \frac{4kk\pi\pi xx}{i^4}$$

ob

$$\cos.\frac{2k}{i}\pi = 1 - \frac{2kk}{ii}\pi\pi.$$

Functio ergo $e^x - e^{-x}$ divisibilis erit per

$$1 + \frac{xx}{kk\pi\pi} - \frac{xx}{ii},$$

ubi autem terminus $\frac{xx}{ii}$ tuto omittitur, quia, etsi per i multiplicetur, tamen manet infinite parvus. Praeterea vero ut ante, si $k = 0$, erit primus factor $= x$. Quocirca his factoribus in ordinem redactis erit

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x\left(1 + \frac{xx}{\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{4\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{9\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{16\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{25\pi\pi}\right) \text{ etc.}$$

$$= x\left(1 + \frac{xx}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{x^6}{1\cdot 2\cdots 7} + \text{etc.}\right).$$

Singulis scilicet factoribus per multiplicationem constantis eiusmodi formam dedi, ut per actualem multiplicationem primus terminus x resultet.

157. Eodem modo cum sit

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{xx}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.} = \frac{\left(1 + \frac{x}{i}\right)^i + \left(1 - \frac{x}{i}\right)^i}{2},$$

huius expressionis cum superiori [§ 150] $a^n + z^n$ comparatio dabit

$$a = 1 + \frac{x}{i}, \quad z = 1 - \frac{x}{i} \quad \text{et} \quad n = i;$$

erit ergo factor quicunque

$$= aa - 2az\cos.\frac{2k+1}{n}\pi + zz = 2 + \frac{2xx}{ii} - 2\left(1 - \frac{xx}{ii}\right)\cos.\frac{2k+1}{i}\pi.$$

Est autem

$$\cos.\frac{2k+1}{i}\pi = 1 - \frac{(2k+1)^2}{2ii}\pi\pi,$$

unde forma factoris erit

$$\frac{4xx}{ii} + \frac{(2k+1)^2}{ii}\pi\pi$$

evanescente termino, cuius denominator est i^4. Quoniam ergo omnis factor expressionis

$$1 + \frac{xx}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.}$$

huiusmodi formam habere debet $1 + \alpha xx$, quo factor inventus ad hanc formam reducatur, dividi debet per $\frac{(2k+1)^2\pi^2}{ii}$; hinc factor formae propositae erit

$$= 1 + \frac{4xx}{(2k+1)^2\pi\pi}$$

ex eoque omnes factores infiniti invenientur, si loco $2k+1$ successive omnes numeri impares substituantur. Hanc ob rem erit

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{xx}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \text{etc.}$$
$$= \left(1 + \frac{4xx}{\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{4xx}{9\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{4xx}{25\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{4xx}{49\pi\pi}\right) \text{etc.}$$

158. Si x fiat quantitas imaginaria, formulae hae exponentiales in sinum et cosinum cuiuspiam arcus realis abeunt. Sit enim $x = z\sqrt{-1}$; erit

$$\frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin. z$$
$$= z - \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{z^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{z^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 7} + \text{etc.},$$

quae adeo expressio hos habet factores numero infinitos

$$z\left(1 - \frac{zz}{\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{zz}{4\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{zz}{9\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{zz}{16\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{zz}{25\pi\pi}\right) \text{etc.},$$

seu erit

$$\sin. z = z\left(1 - \frac{z}{\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{\pi}\right)\left(1 - \frac{z}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{z}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{z}{3\pi}\right) \text{etc.}$$

Quoties ergo arcus z ita est comparatus, ut quispiam factor evanescat, quod fit, si $z = 0$, $z = \pm\pi$, $z = \pm 2\pi$ et generaliter si $z = \pm k\pi$ denotante k numerum quemcunque integrum, simul sinus eius arcus debet esse $= 0$, quod quidem ita patet, ut hinc istos factores a posteriori eruere licuisset.

Simili modo cum sit

$$\frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2} = \cos. z,$$

erit quoque

$$\cos. z = \left(1 - \frac{4zz}{\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{4zz}{9\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{4zz}{25\pi\pi}\right)\left(1 - \frac{4zz}{49\pi\pi}\right) \text{etc.}$$

seu his factoribus in binos resolvendis erit quoque

$$\cos. z = \left(1 - \frac{2z}{\pi}\right)\left(1 + \frac{2z}{\pi}\right)\left(1 - \frac{2z}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{2z}{3\pi}\right)\left(1 - \frac{2z}{5\pi}\right)\left(1 + \frac{2z}{5\pi}\right) \text{etc.},$$

ex qua pari modo patet, si fuerit $z = \pm\frac{2k+1}{2}\pi$, fore $\cos. z = 0$, id quod etiam ex natura circuli liquet.

159. Ex § 153 etiam inveniri possunt factores huius expressionis

$$e^x - 2\cos. g + e^{-x} = 2\left(1 - \cos. g + \frac{xx}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.}\right).$$

Transit enim haec expressio in hanc

$$\left(1 + \frac{x}{i}\right)^i - 2\cos. g + \left(1 - \frac{x}{i}\right)^i,$$

quae cum illa forma comparata dat

$$2n = i, \quad a = 1 + \frac{x}{i} \quad \text{et} \quad z = 1 - \frac{x}{i},$$

unde factor quicunque huius formulae erit

$$= aa - 2az\cos.\frac{2k\pi \pm g}{n} + zz = 2 + \frac{2xx}{ii} - 2\left(1 - \frac{xx}{ii}\right)\cos.\frac{2(2k\pi \pm g)}{i};$$

at est

$$\cos.\frac{2(2k\pi \pm g)}{i} = 1 - \frac{2(2k\pi \pm g)^2}{ii},$$

unde factor erit $=\frac{4xx}{ii}+\frac{4(2k\pi\pm g)^2}{ii}$ seu huius formae

$$1+\frac{xx}{(2k\pi\pm g)^2}.$$

Si ergo expressio per $2(1-\cos.g)$ dividatur, ut in serie infinita terminus constans sit $=1$, erit sumendis omnibus factoribus

$$\frac{e^x-2\cos.g+e^{-x}}{2(1-\cos.g)}$$
$$=\left(1+\frac{xx}{gg}\right)\left(1+\frac{xx}{(2\pi-g)^2}\right)\left(1+\frac{xx}{(2\pi+g)^2}\right)\left(1+\frac{xx}{(4\pi-g)^2}\right)\left(1+\frac{xx}{(4\pi+g)^2}\right)$$
$$\left(1+\frac{xx}{(6\pi-g)^2}\right)\left(1+\frac{xx}{(6\pi+g)^2}\right)\text{ etc.}$$

Atque si loco x ponatur $z\sqrt{-1}$, erit

$$\frac{\cos.z-\cos.g}{1-\cos.g}$$
$$=\left(1-\frac{z}{g}\right)\left(1+\frac{z}{g}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi-g}\right)\left(1+\frac{z}{2\pi-g}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi+g}\right)\left(1+\frac{z}{2\pi+g}\right)$$
$$\left(1-\frac{z}{4\pi-g}\right)\left(1+\frac{z}{4\pi-g}\right)\text{ etc.}$$
$$=1-\frac{zz}{1\cdot 2(1-\cos.g)}+\frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4(1-\cos.g)}-\frac{z^6}{1\cdot 2\cdots 6(1-\cos.g)}+\text{etc.}$$

Huius adeo seriei in infinitum continuatae factores omnes cognoscuntur.

160. Commode etiam huiusmodi functionis

$$e^{b+x}\pm e^{c-x}$$

factores inveniri omnesque assignari possunt. Transmutatur enim in hanc formam

$$\left(1+\frac{b+x}{i}\right)^i\pm\left(1+\frac{c-x}{i}\right)^i,$$

quae comparata cum forma $a^i\pm z^i$ factorem habebit

$$aa-2az\cos.\frac{m\pi}{i}+zz$$

denotante m numerum imparem, si valeat signum superius, contra vero numerum parem [§ 150 et 151]. Cum autem ob i numerum infinite magnum sit

$$\cos.\frac{m\pi}{i}=1-\frac{mm\pi\pi}{2ii},$$

erit factor ille generalis

$$=(a-z)^2+\frac{mm\pi\pi}{ii}az.$$

At hoc casu erit

$$a=1+\frac{b+x}{i}\quad\text{et}\quad z=1+\frac{c-x}{i},$$

unde fit

$$(a-z)^2=\frac{(b-c+2x)^2}{ii}\quad\text{et}\quad az=1+\frac{b+c}{i}+\frac{bc+(c-b)x-xx}{ii};$$

ideoque factor erit per ii multiplicatus

$$=(b-c)^2+4(b-c)x+4xx+mm\pi\pi$$

neglectis terminis per i vel ii divisis, quoniam iam omnis generis termini adsunt, prae quibus hi evanescerent. Termino ergo constante ad unitatem per divisionem reducto erit factor

$$=1+\frac{4(b-c)x+4xx}{mm\pi\pi+(b-c)^2}.$$

161. Nunc quoniam in omnibus factoribus terminus constans est $=1$, ipsa functio $e^{b+x}\pm e^{c-x}$ per eiusmodi constantem dividi debet, ut terminus constans fiat $=1$ seu ut eius valor posito $x=0$ fiat $=1$; talis divisor erit $e^b\pm e^c$ et hanc ob rem expressio haec

$$\frac{e^{b+x}\pm e^{c-x}}{e^b\pm e^c}$$

per factores numero infinitos exponi poterit. Erit ergo, si valeat signum superius atque m denotet numerum imparem,

$$\frac{e^{b+x}+e^{c-x}}{e^b+e^c}$$
$$=\left(1+\frac{4(b-c)x+4xx}{\pi\pi+(b-c)^2}\right)\left(1+\frac{4(b-c)x+4xx}{9\pi\pi+(b-c)^2}\right)\left(1+\frac{4(b-c)x+4xx}{25\pi\pi+(b-c)^2}\right)\text{ etc.;}$$

sin autem signum inferius valeat atque ideo m denotet numerum parem casuque $m = 0$ radix factoris quadrati ponatur, erit

$$\frac{e^{b+x} - e^{c-x}}{e^b - e^c}$$

$$= \left(1 + \frac{2x}{b-c}\right)\left(1 + \frac{4(b-c)x + 4xx}{4\pi\pi + (b-c)^2}\right)\left(1 + \frac{4(b-c)x + 4xx}{16\pi\pi + (b-c)^2}\right)\left(1 + \frac{4(b-c)x + 4xx}{36\pi\pi + (b-c)^2}\right) \text{ etc.}$$

162. Ponatur $b = 0$, quod sine detrimento universalitatis fieri potest, eritque

$$\frac{e^x + e^c e^{-x}}{1 + e^c}$$

$$= \left(1 - \frac{4cx - 4xx}{\pi\pi + cc}\right)\left(1 - \frac{4cx - 4xx}{9\pi\pi + cc}\right)\left(1 - \frac{4cx - 4xx}{25\pi\pi + cc}\right) \text{ etc.},$$

$$\frac{e^x - e^c e^{-x}}{1 - e^c}$$

$$= \left(1 - \frac{2x}{c}\right)\left(1 - \frac{4cx - 4xx}{4\pi\pi + cc}\right)\left(1 - \frac{4cx - 4xx}{16\pi\pi + cc}\right)\left(1 - \frac{4cx - 4xx}{36\pi\pi + cc}\right) \text{ etc.}$$

Iam ponatur c negativum atque habebuntur hae duae aequationes

$$\frac{e^x + e^{-c} e^{-x}}{1 + e^{-c}}$$

$$= \left(1 + \frac{4cx + 4xx}{\pi\pi + cc}\right)\left(1 + \frac{4cx + 4xx}{9\pi\pi + cc}\right)\left(1 + \frac{4cx + 4xx}{25\pi\pi + cc}\right) \text{ etc.},$$

$$\frac{e^x - e^{-c} e^{-x}}{1 - e^{-c}}$$

$$= \left(1 + \frac{2x}{c}\right)\left(1 + \frac{4cx + 4xx}{4\pi\pi + cc}\right)\left(1 + \frac{4cx + 4xx}{16\pi\pi + cc}\right)\left(1 + \frac{4cx + 4xx}{36\pi\pi + cc}\right) \text{ etc.}$$

Multiplicetur forma prima per tertiam ac prodibit

$$\frac{e^{2x} + e^{-2x} + e^c + e^{-c}}{2 + e^c + e^{-c}};$$

ponatur vero y loco $2x$ eritque

$$\frac{e^y + e^{-y} + e^c + e^{-c}}{2 + e^c + e^{-c}}$$

$$= \left(1 - \frac{2cy - yy}{\pi\pi + cc}\right)\left(1 + \frac{2cy + yy}{\pi\pi + cc}\right)\left(1 - \frac{2cy - yy}{9\pi\pi + cc}\right)\left(1 + \frac{2cy + yy}{9\pi\pi + cc}\right)$$

$$\left(1 - \frac{2cy - yy}{25\pi\pi + cc}\right)\left(1 + \frac{2cy + yy}{25\pi\pi + cc}\right) \text{ etc.}$$

Multiplicetur prima forma per quartam; erit productum

$$= \frac{e^{2x} - e^{-2x} + e^c - e^{-c}}{e^c - e^{-c}};$$

ponatur y pro $2x$ eritque

$$\frac{e^y - e^{-y} + e^c - e^{-c}}{e^c - e^{-c}}$$

$$= \left(1 + \frac{y}{c}\right)\left(1 - \frac{2cy - yy}{\pi\pi + cc}\right)\left(1 + \frac{2cy + yy}{4\pi\pi + cc}\right)\left(1 - \frac{2cy - yy}{9\pi\pi + cc}\right)$$

$$\left(1 + \frac{2cy + yy}{16\pi\pi + cc}\right)\left(1 - \frac{2cy - yy}{25\pi\pi + cc}\right)\left(1 + \frac{2cy + yy}{36\pi\pi + cc}\right) \text{ etc.}$$

Si secunda forma per tertiam multiplicetur, prodibit eadem aequatio, nisi quod c capiendum sit negativum; erit nempe

$$\frac{e^c - e^{-c} - e^y + e^{-y}}{e^c - e^{-c}}$$

$$= \left(1 - \frac{y}{c}\right)\left(1 + \frac{2cy + yy}{\pi\pi + cc}\right)\left(1 - \frac{2cy - yy}{4\pi\pi + cc}\right)\left(1 + \frac{2cy + yy}{9\pi\pi + cc}\right)$$

$$\left(1 - \frac{2cy - yy}{16\pi\pi + cc}\right)\left(1 + \frac{2cy + yy}{25\pi\pi + cc}\right)\left(1 - \frac{2cy - yy}{36\pi\pi + cc}\right) \text{ etc.}$$

Multiplicetur denique forma secunda per quartam eritque

$$\frac{e^y + e^{-y} - e^c - e^{-c}}{2 - e^c - e^{-c}}$$

$$= \left(1 - \frac{yy}{cc}\right)\left(1 - \frac{2cy - yy}{4\pi\pi + cc}\right)\left(1 + \frac{2cy + yy}{4\pi\pi + cc}\right)\left(1 - \frac{2cy - yy}{16\pi\pi + cc}\right)\left(1 + \frac{2cy + yy}{16\pi\pi + cc}\right)$$

$$\left(1 - \frac{2cy - yy}{36\pi\pi + cc}\right)\left(1 + \frac{2cy + yy}{36\pi\pi + cc}\right) \text{ etc.}$$

163. Hae quatuor combinationes nunc commode ad circulum transferri possunt ponendo

$$c = g\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad y = v\sqrt{-1};$$

erit enim

$$e^{v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}} = 2\cos. v, \quad e^{v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\cdot\sin. v$$

et

$$e^{g\sqrt{-1}} + e^{-g\sqrt{-1}} = 2\cos. g, \quad e^{g\sqrt{-1}} - e^{-g\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\cdot\sin. g.$$

Hinc prima combinatio dabit

$$\frac{\cos. v + \cos. g}{1 + \cos. g}$$

$$= 1 - \frac{vv}{1\cdot 2(1+\cos. g)} + \frac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4(1+\cos. g)} - \frac{v^6}{1\cdot 2\cdots 6(1+\cos. g)} + \text{etc.}$$

$$= \left(1 + \frac{2gv - vv}{\pi\pi - gg}\right)\left(1 - \frac{2gv + vv}{\pi\pi - gg}\right)\left(1 + \frac{2gv - vv}{9\pi\pi - gg}\right)\left(1 - \frac{2gv + vv}{9\pi\pi - gg}\right)$$

$$\left(1 + \frac{2gv - vv}{25\pi\pi - gg}\right)\left(1 - \frac{2gv + vv}{25\pi\pi - gg}\right) \text{ etc.}$$

$$= \left(1 + \frac{v}{\pi - g}\right)\left(1 - \frac{v}{\pi + g}\right)\left(1 - \frac{v}{\pi - g}\right)\left(1 + \frac{v}{\pi + g}\right)$$

$$\left(1 + \frac{v}{3\pi - g}\right)\left(1 - \frac{v}{3\pi + g}\right)\left(1 - \frac{v}{3\pi - g}\right)\left(1 + \frac{v}{3\pi + g}\right) \text{ etc.}$$

$$= \left(1 - \frac{vv}{(\pi - g)^2}\right)\left(1 - \frac{vv}{(\pi + g)^2}\right)\left(1 - \frac{vv}{(3\pi - g)^2}\right)\left(1 - \frac{vv}{(3\pi + g)^2}\right)\left(1 - \frac{vv}{(5\pi - g)^2}\right) \text{ etc.}$$

Quarta vero combinatio dat

$$\frac{\cos. v - \cos. g}{1 - \cos. g}$$

$$= 1 - \frac{vv}{1\cdot 2(1-\cos. g)} + \frac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4(1-\cos. g)} - \frac{v^6}{1\cdot 2\cdots 6(1-\cos. g)} + \text{etc.}$$

$$= \left(1 - \frac{vv}{gg}\right)\left(1 + \frac{2gv - vv}{4\pi\pi - gg}\right)\left(1 - \frac{2gv + vv}{4\pi\pi - gg}\right)\left(1 + \frac{2gv - vv}{16\pi\pi - gg}\right)\left(1 - \frac{2gv + vv}{16\pi\pi - gg}\right) \text{ etc.}$$

$$= \left(1 - \frac{v}{g}\right)\left(1 + \frac{v}{g}\right)\left(1 + \frac{v}{2\pi - g}\right)\left(1 - \frac{v}{2\pi + g}\right)\left(1 - \frac{v}{2\pi - g}\right)\left(1 + \frac{v}{2\pi + g}\right)$$

$$\left(1 + \frac{v}{4\pi - g}\right)\left(1 - \frac{v}{4\pi + g}\right) \text{ etc.}$$

$$= \left(1 - \frac{vv}{gg}\right)\left(1 - \frac{vv}{(2\pi - g)^2}\right)\left(1 - \frac{vv}{(2\pi + g)^2}\right)\left(1 - \frac{vv}{(4\pi - g)^2}\right)\left(1 - \frac{vv}{(4\pi + g)^2}\right) \text{ etc.}$$

Secunda combinatio dat

$$\frac{\sin. g + \sin. v}{\sin. g}$$

$$= 1 + \frac{v}{\sin. g} - \frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3\sin. g} + \frac{v^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\sin. g} - \text{etc.}$$

$$= \left(1 + \frac{v}{g}\right)\left(1 + \frac{2gv - vv}{\pi\pi - gg}\right)\left(1 - \frac{2gv + vv}{4\pi\pi - gg}\right)\left(1 + \frac{2gv - vv}{9\pi\pi - gg}\right)\left(1 - \frac{2gv + vv}{16\pi\pi - gg}\right) \text{ etc.}$$

$$= \left(1 + \frac{v}{g}\right)\left(1 + \frac{v}{\pi - g}\right)\left(1 - \frac{v}{\pi + g}\right)\left(1 - \frac{v}{2\pi - g}\right)\left(1 + \frac{v}{2\pi + g}\right)$$

$$\left(1 + \frac{v}{3\pi - g}\right)\left(1 - \frac{v}{3\pi + g}\right)\left(1 - \frac{v}{4\pi - g}\right) \text{ etc.}$$

Ac sumto v negativo prodit tertia combinatio.

164. Ipsae vero etiam expressiones in § 162 primum inventae ad arcus circulares traduci possunt hoc modo. Cum sit

$$\frac{e^x + e^c e^{-x}}{1 + e^c} = \frac{(1 + e^{-c})(e^x + e^c e^{-x})}{2 + e^c + e^{-c}} = \frac{e^x + e^{-x} + e^{c-x} + e^{-c+x}}{2 + e^c + e^{-c}},$$

si ponamus

$$c = g\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad x = z\sqrt{-1},$$

haec expressio abit in hanc

$$\frac{\cos. z + \cos.(g - z)}{1 + \cos. g} = \cos. z + \frac{\sin. g \sin. z}{1 + \cos. g}.$$

Erit ergo ob $\frac{\sin. g}{1 + \cos. g} = \text{tang.}\frac{1}{2}g$

$$\cos. z + \text{tang.}\frac{1}{2}g \sin. z$$

$$= 1 + \frac{z}{1}\,\text{tang.}\frac{1}{2}g - \frac{zz}{1\cdot 2} - \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}\,\text{tang.}\frac{1}{2}g + \frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{z^5}{1\cdot 2\cdots 5}\,\text{tang.}\frac{1}{2}g - \text{etc.}$$

$$= \left(1 + \frac{4gz - 4zz}{\pi\pi - gg}\right)\left(1 + \frac{4gz - 4zz}{9\pi\pi - gg}\right)\left(1 + \frac{4gz - 4zz}{25\pi\pi - gg}\right) \text{ etc.}$$

$$= \left(1 + \frac{2z}{\pi - g}\right)\left(1 - \frac{2z}{\pi + g}\right)\left(1 + \frac{2z}{3\pi - g}\right)\left(1 - \frac{2z}{3\pi + g}\right)\left(1 + \frac{2z}{5\pi - g}\right)\left(1 - \frac{2z}{5\pi + g}\right) \text{etc.}$$

Simili modo altera expressio, si numerator et denominator per $1 - e^{-c}$ multiplicetur, abit in

$$\frac{e^x+e^{-x}-e^{c-x}-e^{-c+x}}{2-e^c-e^{-c}},$$

quae facto $c=g\sqrt{-1}$ et $x=z\sqrt{-1}$ dat

$$\frac{\cos. z-\cos.(g-z)}{1-\cos. g}=\cos. z-\frac{\sin. g \sin. z}{1-\cos. g}=\cos. z-\frac{\sin. z}{\text{tang.}\frac{1}{2}g}.$$

Erit ergo

$$\cos. z-\cot.\frac{1}{2}g\sin. z$$

$$=1-\frac{z}{1}\cot.\frac{1}{2}g-\frac{zz}{1\cdot 2}+\frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cot.\frac{1}{2}g+\frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{z^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cot.\frac{1}{2}g+\text{etc.}$$

$$=\left(1-\frac{2z}{g}\right)\left(1+\frac{4gz-4zz}{4\pi\pi-gg}\right)\left(1+\frac{4gz-4zz}{16\pi\pi-gg}\right)\left(1+\frac{4gz-4zz}{36\pi\pi-gg}\right)\text{etc.}$$

$$=\left(1-\frac{2z}{g}\right)\left(1+\frac{2z}{2\pi-g}\right)\left(1-\frac{2z}{2\pi+g}\right)\left(1+\frac{2z}{4\pi-g}\right)\left(1-\frac{2z}{4\pi+g}\right)\text{etc.}$$

Quodsi ergo ponatur $v=2z$ seu $z=\frac{1}{2}v$, habebitur

$$\frac{\cos.\frac{1}{2}(g-v)}{\cos.\frac{1}{2}g}=\cos.\frac{1}{2}v+\text{tang.}\frac{1}{2}g\sin.\frac{1}{2}v$$

$$=\left(1+\frac{v}{\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{\pi+g}\right)\left(1+\frac{v}{3\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{3\pi+g}\right)\text{etc.,}$$

$$\frac{\cos.\frac{1}{2}(g+v)}{\cos.\frac{1}{2}g}=\cos.\frac{1}{2}v-\text{tang.}\frac{1}{2}g\sin.\frac{1}{2}v$$

$$=\left(1-\frac{v}{\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{3\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{3\pi+g}\right)\text{etc.,}$$

$$\frac{\sin.\frac{1}{2}(g-v)}{\sin.\frac{1}{2}g}=\cos.\frac{1}{2}v-\cot.\frac{1}{2}g\sin.\frac{1}{2}v$$

$$=\left(1-\frac{v}{g}\right)\left(1+\frac{v}{2\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{2\pi+g}\right)\left(1+\frac{v}{4\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{4\pi+g}\right)\text{etc.,}$$

$$\frac{\sin.\frac{1}{2}(g+v)}{\sin.\frac{1}{2}g}=\cos.\frac{1}{2}v+\cot.\frac{1}{2}g\sin.\frac{1}{2}v$$

$$=\left(1+\frac{v}{g}\right)\left(1-\frac{v}{2\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{2\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{4\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{4\pi+g}\right)\text{etc.}$$

Quorum factorum lex progressionis satis est simplex et uniformis; atque ex his expressionibus per multiplicationem oriuntur eae ipsae, quae paragrapho praecedente sunt inventae.

CAPUT X

DE USU FACTORUM INVENTORUM IN DEFINIENDIS SUMMIS SERIERUM INFINITARUM

165. Si fuerit

$$1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\text{etc.}=(1+\alpha z)(1+\beta z)(1+\gamma z)(1+\delta z)\text{ etc.},$$

hi factores, sive sint numero finiti sive infiniti, si in se actu multiplicentur, illam expressionem $1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+$ etc. producere debent. Aequabitur ergo coefficiens A summae omnium quantitatum

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\text{etc.}$$

Coefficiens vero B aequalis erit summae productorum ex binis eritque

$$B=\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta+\text{etc.}$$

Tum vero coefficiens C aequabitur summae productorum ex ternis, nempe erit

$$C=\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta+\text{etc.}$$

Atque ita porro erit $D=$ summae productorum ex quaternis, $E=$ summae productorum ex quinis etc., id quod ex Algebra communi constat.

166. Quia summa quantitatum $\alpha+\beta+\gamma+\delta+$ etc. datur una cum summa productorum ex binis, hinc summa quadratorum $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+$ etc. inveniri poterit, quippe quae aequalis est quadrato summae demptis duplicibus

productis ex binis. Simili modo summa cuborum, biquadratorum et altiorum potestatum definiri potest; si enim ponamus

$$\begin{aligned}
P &= \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \text{ etc.},\\
Q &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 + \text{ etc.},\\
R &= \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \varepsilon^3 + \text{ etc.},\\
S &= \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4 + \varepsilon^4 + \text{ etc.},\\
T &= \alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 + \delta^5 + \varepsilon^5 + \text{ etc.},\\
V &= \alpha^6 + \beta^6 + \gamma^6 + \delta^6 + \varepsilon^6 + \text{ etc.}\\
&\text{etc.},
\end{aligned}$$

valores P, Q, R, S, T, V etc. sequenti modo ex cognitis A, B, C, D etc. determinabuntur:

$$\begin{aligned}
P &= A,\\
Q &= AP - 2B,\\
R &= AQ - BP + 3C,\\
S &= AR - BQ + CP - 4D,\\
T &= AS - BR + CQ - DP + 5E,\\
V &= AT - BS + CR - DQ + EP - 6F\\
&\text{etc.},
\end{aligned}$$

quarum formularum veritas examine instituto facile agnoscitur; interim tamen in Calculo differentiali summo cum rigore demonstrabitur.[1])

1) Has formulas, quae ab Eulero formulae Neutonianae nominari solent, usque ad quartam potestatem primus A. Girard (?—1632) exposuit in libro, qui inscribitur *Invention nouvelle en l'algèbre*, Amsterdam 1629; réimpression par D. Bierens de Haan, Leiden 1884, fol. F 2. Vide etiam I. Newton, *Arithmetica universalis*, Cantabrigiae 1707, p. 251; 3. ed. (ed. G. I. 's Gravesande) Lugd. Batav. 1732, p. 192. Demonstrationes dedit Eulerus in Commentatione 153 (indicis Enestroemiani): *Demonstratio gemina theorematis Neutoniani, quo traditur relatio inter coefficientes cuiusvis aequationis algebraicae et summas potestatum radicum eiusdem*, Opuscula varii argumenti 2, 1750, p. 108; *Leonhardi Euleri Opera omnia*, series I, vol. 6, p. 20 (confer imprimis notas p. 20—22 adiectas). Vide praeterea Commentationes 406 et 560 (indicis Enestroemiani): *Observationes circa radices aequationum*, Novi comment. acad. sc. Petrop. 15 (1770), 1771, p. 51, et *Miscellanea analytica*, Opuscula analytica 1, 1783, p. 329, imprimis p. 337; *Leonhardi Euleri Opera omnia*, series I, vol. 6, p. 263 (confer imprimis notas p. 265 et 267 adiectas) et vol. 4. A. K.

167. Cum igitur supra (§ 156) invenerimus esse

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x\left(1 + \frac{xx}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{x^6}{1\cdot 2\cdots 7} + \text{etc.}\right)$$
$$= x\left(1 + \frac{xx}{\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{4\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{9\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{16\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{25\pi\pi}\right) \text{ etc.},$$

erit

$$1 + \frac{xx}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 7} + \text{etc.}$$
$$= \left(1 + \frac{xx}{\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{4\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{9\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{16\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{xx}{25\pi\pi}\right) \text{ etc.}$$

Ponatur $xx = \pi\pi z$ eritque

$$1 + \frac{\pi\pi}{1\cdot 2\cdot 3}z + \frac{\pi^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}z^2 + \frac{\pi^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 7}z^3 + \text{etc.}$$
$$= (1 + z)\left(1 + \tfrac{1}{4}z\right)\left(1 + \tfrac{1}{9}z\right)\left(1 + \tfrac{1}{16}z\right)\left(1 + \tfrac{1}{25}z\right) \text{ etc.}$$

Facta ergo applicatione superioris regulae ad hunc casum erit

$$A = \frac{\pi\pi}{6}, \quad B = \frac{\pi^4}{120}, \quad C = \frac{\pi^6}{5040}, \quad D = \frac{\pi^8}{362880} \quad \text{etc.}$$

Quodsi ergo ponatur

$$\begin{aligned}
P &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \text{etc.},\\
Q &= 1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{25^2} + \frac{1}{36^2} + \text{etc.},\\
R &= 1 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{16^3} + \frac{1}{25^3} + \frac{1}{36^3} + \text{etc.},\\
S &= 1 + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{16^4} + \frac{1}{25^4} + \frac{1}{36^4} + \text{etc.},\\
T &= 1 + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{9^5} + \frac{1}{16^5} + \frac{1}{25^5} + \frac{1}{36^5} + \text{etc.}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

atque harum litterarum valores ex A, B, C, D etc. determinentur, prodibit:

$$P = \frac{\pi\pi}{6}\ ^{1)},$$

$$Q = \frac{\pi^4}{90},$$

$$R = \frac{\pi^6}{945},$$

$$S = \frac{\pi^8}{9450},$$

$$T = \frac{\pi^{10}}{93555}$$

etc.

168. Patet ergo omnium serierum infinitarum in hac forma generali

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \text{etc.}$$

contentarum [summas], quoties n fuerit numerus par, ope semiperipheriae circuli π exhiberi posse; habebit enim semper summa seriei ad π^n rationem

1) Hanc celeberrimam formulam

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

EULERUS a. 1736 cum D. BERNOULLI (1700–1782) communicaverat. Vide epistolam a D. BERNOULLI d. 12. Sept. 1736 ad EULERUM scriptam, *Correspondance math. et phys. publiée par P. H. Fuss*, St.-Pétersbourg 1843, t. II, p. 433. Confer G. ENESTRÖM, *Note historique sur la somme des valeurs inverses des nombres carrés, Der Briefwechsel zwischen LEONHARD EULER und JOHANN I. BERNOULLI, Der Briefwechsel zwischen LEONHARD EULER und DANIEL BERNOULLI,* Biblioth. Mathem. 4_2, 1890, p. 22, 5_3, 1904, p. 248, 7_3, 1906–1907, p. 126. Vide porro EULERI Commentationes 41, 63, 130 (indicis ENESTROEMIANI): *De summis serierum reciprocarum*, Comment. acad. sc. Petrop. 7 (1734/5), 1740, p. 123, *Démonstration de la somme de cette suite:* $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc.}$, Journal littéraire d'Allemagne etc. 2: 1, 1743, p. 115, *De seriebus quibusdam considerationes*, Comment acad. sc. Petrop. 12 (1740), 1750, p. 53. Ad Commentationem 63 pertinet P. STÄCKEL, *Eine vergessene Abhandlung LEONHARD EULERS über die Summe der reziproken Quadrate der natürlichen Zahlen,* Biblioth. Mathem. 8_3, 1907–1908, p. 37. A. K.

rationalem. Quo autem valor harum summarum clarius perspiciatur, plures huiusmodi serierum summas commodiori modo expressas hic adiiciam.

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{etc.} = \frac{2^0}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{1}\pi^2,$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.} = \frac{2^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{1}{3}\pi^4,$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \text{etc.} = \frac{2^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 7}\cdot\frac{1}{3}\pi^6,$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \text{etc.} = \frac{2^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 9}\cdot\frac{3}{5}\pi^8,$$

$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \text{etc.} = \frac{2^8}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 11}\cdot\frac{5}{3}\pi^{10},$$

$$1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{4^{12}} + \frac{1}{5^{12}} + \text{etc.} = \frac{2^{10}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 13}\cdot\frac{691}{105}\pi^{12},$$

$$1 + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{3^{14}} + \frac{1}{4^{14}} + \frac{1}{5^{14}} + \text{etc.} = \frac{2^{12}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 15}\cdot\frac{35}{1}\pi^{14},$$

$$1 + \frac{1}{2^{16}} + \frac{1}{3^{16}} + \frac{1}{4^{16}} + \frac{1}{5^{16}} + \text{etc.} = \frac{2^{14}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 17}\cdot\frac{3617}{15}\pi^{16},$$

$$1 + \frac{1}{2^{18}} + \frac{1}{3^{18}} + \frac{1}{4^{18}} + \frac{1}{5^{18}} + \text{etc.} = \frac{2^{16}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 19}\cdot\frac{43867}{21}\pi^{18},$$

$$1 + \frac{1}{2^{20}} + \frac{1}{3^{20}} + \frac{1}{4^{20}} + \frac{1}{5^{20}} + \text{etc.} = \frac{2^{18}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 21}\cdot\frac{1222277}{55}\pi^{20},$$

$$1 + \frac{1}{2^{22}} + \frac{1}{3^{22}} + \frac{1}{4^{22}} + \frac{1}{5^{22}} + \text{etc.} = \frac{2^{20}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 23}\cdot\frac{854513}{3}\pi^{22},$$

$$1 + \frac{1}{2^{24}} + \frac{1}{3^{24}} + \frac{1}{4^{24}} + \frac{1}{5^{24}} + \text{etc.} = \frac{2^{22}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 25}\cdot\frac{1181820455}{273}\pi^{24},$$

$$1 + \frac{1}{2^{26}} + \frac{1}{3^{26}} + \frac{1}{4^{26}} + \frac{1}{5^{26}} + \text{etc.} = \frac{2^{24}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 27}\cdot\frac{76977927}{1}\pi^{26}.$$

Hucusque istos potestatum ipsius π exponentes artificio alibi[1]) exponendo

1) Vide L. EULERI *Institutiones calculi differentialis*, Petropoli 1755, partis posterioris cap. V, § 121 et sq.; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 10, p. 319 et sq. His locis summae serierum reciprocarum litteris $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ etc. significantur, factores $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{3}$ etc. autem

continuare licuit, quod ideo hic adiunxi, quod seriei fractionum primo intuitu perquam irregularis

$$1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{3},\ \frac{691}{105},\ \frac{35}{1}\ \text{etc.}$$

in plurimis occasionibus eximius est usus.

169. Tractemus eodem modo aequationem § 157 inventam, ubi erat

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{xx}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\text{etc.}$$

$$=\left(1+\frac{4xx}{\pi\pi}\right)\left(1+\frac{4xx}{9\pi\pi}\right)\left(1+\frac{4xx}{25\pi\pi}\right)\left(1+\frac{4xx}{49\pi\pi}\right)\ \text{etc.}$$

Posito ergo $xx=\frac{\pi\pi z}{4}$ erit

$$1+\frac{\pi\pi}{1\cdot 2\cdot 4}z+\frac{\pi^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 4^2}zz+\frac{\pi^6}{1\cdot 2\cdots 6\cdot 4^3}z^3+\text{etc.}$$

$$=(1+z)\left(1+\frac{1}{9}z\right)\left(1+\frac{1}{25}z\right)\left(1+\frac{1}{49}z\right)\ \text{etc.}$$

Unde facta applicatione erit

$$A=\frac{\pi\pi}{1\cdot 2\cdot 4},\qquad B=\frac{\pi^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 4^2},\qquad C=\frac{\pi^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 6\cdot 4^3}\quad \text{etc.}$$

---

sunt dupla quantitatum α, β, γ, δ etc.; numeri BERNOULLIANI $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc. denique definiuntur aequationibus

$$\mathfrak{A}=\frac{\alpha}{3}=\frac{1}{6},\quad \mathfrak{B}=\frac{\beta}{5}=\frac{1}{30},\quad \mathfrak{C}=\frac{\gamma}{7}=\frac{1}{42},\quad \mathfrak{D}=\frac{\delta}{9}=\frac{1}{30}\quad \text{etc.}$$

Confer etiam praeter dissertationes nota praecedenti laudatas EULERI Commentationes 61 et 736 (indicis ENESTROEMIANI): *De summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum dissertatio altera*, Miscellanea Berolin. 7, 1743, p. 172, et *De summatione serierum in hac forma contentarum*

$$\frac{a}{1}+\frac{a^2}{4}+\frac{a^3}{9}+\frac{a^4}{16}+\frac{a^5}{25}+\frac{a^6}{36}+\text{etc.},$$

Mém. de l'acad. d. sc. de St.-Pétersbourg 3 (1809/10), 1811, p. 26; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 14 et 16. Vide porro *LEONHARDI EULERI Opera postuma* 1, Petropoli 1862, p. 519; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series III. A. K.

Quodsi ergo ponamus

$$P=1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{81}+\text{etc.},$$

$$Q=1+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{25^2}+\frac{1}{49^2}+\frac{1}{81^2}+\text{etc.},$$

$$R=1+\frac{1}{9^3}+\frac{1}{25^3}+\frac{1}{49^3}+\frac{1}{81^3}+\text{etc.},$$

$$S=1+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{25^4}+\frac{1}{49^4}+\frac{1}{81^4}+\text{etc.}$$

etc.,

reperientur sequentes pro P, Q, R, S etc. valores:

$$P=\frac{1}{1}\cdot\frac{\pi^2}{2^3},$$

$$Q=\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{\pi^4}{2^5},$$

$$R=\frac{16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{\pi^6}{2^7},$$

$$S=\frac{272}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 7}\cdot\frac{\pi^8}{2^9},$$

$$T=\frac{7936}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 9}\cdot\frac{\pi^{10}}{2^{11}},$$

$$V=\frac{353792}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 11}\cdot\frac{\pi^{12}}{2^{13}},$$

$$W=\frac{22368256}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 13}\cdot\frac{\pi^{14}}{2^{15}}$$

etc.

170. Eaedem summae potestatum numerorum imparium inveniri possunt ex summis praecedentibus, in quibus omnes numeri occurrunt. Si enim fuerit

$$M=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\text{etc.},$$

erit ubique per $\frac{1}{2^n}$ multiplicando

$$\frac{M}{2^n}=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{8^n}+\frac{1}{10^n}+\text{etc.};$$

quae series numeros tantum pares continens si a priori subtrahatur, relinquet numeros impares eritque ideo

$$M-\frac{M}{2^n}=\frac{2^n-1}{2^n}M=1+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{9^n}+\text{etc.}$$

Quodsi autem series $\frac{M}{2^n}$ bis sumta subtrahatur ab M, signa prodibunt alternantia eritque

$$M-\frac{2M}{2^n}=\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}M=1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}-\frac{1}{6^n}+\text{etc.}$$

Per tradita ergo praecepta summari poterunt hae series

$$1\pm\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\pm\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}\pm\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}\pm\text{etc.},$$

$$1+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{9^n}+\frac{1}{11^n}+\text{etc.},$$

si quidem n sit numerus par, atque summa erit $=A\pi^n$ existente A numero rationali.

171. Praeterea vero expressiones § 164 exhibitae simili modo series notatu dignas suppeditabunt. Cum enim sit

$$\cos.\frac{1}{2}v+\text{tang.}\frac{1}{2}g\sin.\frac{1}{2}v$$

$$=\left(1+\frac{v}{\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{\pi+g}\right)\left(1+\frac{v}{3\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{3\pi+g}\right)\text{ etc.},$$

si ponamus $v=\frac{x}{n}\pi$ et $g=\frac{m}{n}\pi$, erit

$$\left(1+\frac{x}{n-m}\right)\left(1-\frac{x}{n+m}\right)\left(1+\frac{x}{3n-m}\right)\left(1-\frac{x}{3n+m}\right)\left(1+\frac{x}{5n-m}\right)\left(1-\frac{x}{5n+m}\right)\text{ etc.}$$

$$=\cos.\frac{x\pi}{2n}+\text{tang.}\frac{m\pi}{2n}\sin.\frac{x\pi}{2n}$$

$$=1+\frac{\pi x}{2n}\text{tang.}\frac{m\pi}{2n}-\frac{\pi\pi xx}{2\cdot 4nn}-\frac{\pi^3x^3}{2\cdot 4\cdot 6n^3}\text{tang.}\frac{m\pi}{2n}+\frac{\pi^4x^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8n^4}+\text{etc.}$$

Haec expressio infinita cum § 165 collata dabit hos valores

$$A=\frac{\pi}{2n}\text{tang.}\frac{m\pi}{2n},$$

$$B=\frac{-\pi\pi}{2\cdot 4nn},$$

$$C=\frac{-\pi^3}{2\cdot 4\cdot 6n^3}\text{tang.}\frac{m\pi}{2n},$$

$$D=\frac{\pi^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8n^4},$$

$$E=\frac{\pi^5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10n^5}\text{tang.}\frac{m\pi}{2n}$$

etc.

Tum vero erit

$$\alpha=\frac{1}{n-m},\quad \beta=-\frac{1}{n+m},\quad \gamma=\frac{1}{3n-m},\quad \delta=-\frac{1}{3n+m},$$

$$\varepsilon=\frac{1}{5n-m},\quad \zeta=-\frac{1}{5n+m}\quad \text{etc.}$$

172. Hinc ergo ad normam § 166 sequentes series exorientur:

$$P=\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}+\frac{1}{3n-m}-\frac{1}{3n+m}+\frac{1}{5n-m}-\text{etc.},$$

$$Q=\frac{1}{(n-m)^2}+\frac{1}{(n+m)^2}+\frac{1}{(3n-m)^2}+\frac{1}{(3n+m)^2}+\frac{1}{(5n-m)^2}+\text{etc.},$$

$$R=\frac{1}{(n-m)^3}-\frac{1}{(n+m)^3}+\frac{1}{(3n-m)^3}-\frac{1}{(3n+m)^3}+\frac{1}{(5n-m)^3}-\text{etc.},$$

$$S=\frac{1}{(n-m)^4}+\frac{1}{(n+m)^4}+\frac{1}{(3n-m)^4}+\frac{1}{(3n+m)^4}+\frac{1}{(5n-m)^4}+\text{etc.},$$

$$T=\frac{1}{(n-m)^5}-\frac{1}{(n+m)^5}+\frac{1}{(3n-m)^5}-\frac{1}{(3n+m)^5}+\frac{1}{(5n-m)^5}-\text{etc.},$$

$$V=\frac{1}{(n-m)^6}+\frac{1}{(n+m)^6}+\frac{1}{(3n-m)^6}+\frac{1}{(3n+m)^6}+\frac{1}{(5n-m)^6}+\text{etc.}$$

etc.

Posito autem tang. $\frac{m\pi}{2n} = k$ erit, uti ostendimus,

$$P = A = \frac{k\pi}{2n} \qquad = \frac{k\pi}{2n},$$

$$Q = \frac{(kk+1)\pi\pi}{4nn} \qquad = \frac{(2kk+2)\pi^2}{2\cdot 4nn},$$

$$R = \frac{(k^3+k)\pi^3}{8n^3} \qquad = \frac{(6k^3+6k)\pi^3}{2\cdot 4\cdot 6n^3},$$

$$S = \frac{(3k^4+4kk+1)\pi^4}{48n^4} = \frac{(24k^4+32k^2+8)\pi^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8n^4},$$

$$T = \frac{(3k^5+5k^3+2k)\pi^5}{96n^5} = \frac{(120k^5+200k^3+80k)\pi^5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10n^5}$$

etc.

173. Pari modo ultima forma § 164

$$\cos.\frac{1}{2}v + \cot.\frac{1}{2}g\sin.\frac{1}{2}v$$

$$= \left(1+\frac{v}{g}\right)\left(1-\frac{v}{2\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{2\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{4\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{4\pi+g}\right) \text{ etc.},$$

si ponamus $v = \frac{x}{n}\pi$, $g = \frac{m}{n}\pi$ et tang. $\frac{m\pi}{2n} = k$, ut sit cot. $\frac{1}{2}g = \frac{1}{k}$, dabit

$$\cos.\frac{x\pi}{2n} + \frac{1}{k}\sin.\frac{x\pi}{2n}$$

$$= 1 + \frac{\pi x}{2nk} - \frac{\pi\pi xx}{2\cdot 4nn} - \frac{\pi^3x^3}{2\cdot 4\cdot 6n^3k} + \frac{\pi^4x^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8n^4} + \frac{\pi^5x^5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10n^5k} - \text{etc.}$$

$$= \left(1+\frac{x}{m}\right)\left(1-\frac{x}{2n-m}\right)\left(1+\frac{x}{2n+m}\right)\left(1-\frac{x}{4n-m}\right)\left(1+\frac{x}{4n+m}\right) \text{ etc.}$$

Comparatione ergo cum forma generali (§ 165) instituta erit

$$A = \frac{\pi}{2nk}, \quad B = \frac{-\pi\pi}{2\cdot 4n^2}, \quad C = \frac{-\pi^3}{2\cdot 4\cdot 6n^3k}, \quad D = \frac{\pi^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8n^4},$$

$$E = \frac{\pi^5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10n^5k} \quad \text{etc.};$$

ex factoribus vero habebitur

$$\alpha = \frac{1}{m}, \quad \beta = \frac{-1}{2n-m}, \quad \gamma = \frac{1}{2n+m}, \quad \delta = \frac{-1}{4n-m}, \quad \varepsilon = \frac{1}{4n+m} \quad \text{etc.}$$

174. Hinc ergo ad normam § 166 sequentes series formabuntur earumque summae assignabuntur

$$P = \frac{1}{m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{4n-m} + \frac{1}{4n+m} - \text{etc.},$$

$$Q = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{(2n-m)^2} + \frac{1}{(2n+m)^2} + \frac{1}{(4n-m)^2} + \frac{1}{(4n+m)^2} + \text{etc.},$$

$$R = \frac{1}{m^3} - \frac{1}{(2n-m)^3} + \frac{1}{(2n+m)^3} - \frac{1}{(4n-m)^3} + \frac{1}{(4n+m)^3} - \text{etc.},$$

$$S = \frac{1}{m^4} + \frac{1}{(2n-m)^4} + \frac{1}{(2n+m)^4} + \frac{1}{(4n-m)^4} + \frac{1}{(4n+m)^4} + \text{etc.},$$

$$T = \frac{1}{m^5} - \frac{1}{(2n-m)^5} + \frac{1}{(2n+m)^5} - \frac{1}{(4n-m)^5} + \frac{1}{(4n+m)^5} - \text{etc.}$$

Hae autem summae P, Q, R, S etc. ita se habebunt

$$P = A = \frac{\pi}{2nk} \qquad = \frac{1\pi}{2nk},$$

$$Q = \frac{(kk+1)\pi\pi}{4nnkk} \qquad = \frac{(2+2kk)\pi^2}{2\cdot 4n^2k^2},$$

$$R = \frac{(kk+1)\pi^3}{8n^3k^3} \qquad = \frac{(6+6kk)\pi^3}{2\cdot 4\cdot 6n^3k^3},$$

$$S = \frac{(k^4+4kk+3)\pi^4}{48n^4k^4} \qquad = \frac{(24+32kk+8k^4)\pi^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8n^4k^4},$$

$$T = \frac{(2k^4+5kk+3)\pi^5}{96n^5k^5} \qquad = \frac{(120+200kk+80k^4)\pi^5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10n^5k^5},$$

$$V = \frac{(2k^6+17k^4+30k^2+15)\pi^6}{960n^6k^6} = \frac{(720+1440kk+816k^4+96k^6)\pi^5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12n^6k^6}$$

etc.

175. Series istae generales merentur, ut casus quosdam particulares inde derivemus, qui prodibunt, si rationem m ad n in numeris determinemus. Sit igitur primum

$$m = 1 \quad \text{et} \quad n = 2;$$

fiet

$$k = \text{tang.}\frac{\pi}{4} = \text{tang.}\,45^0 = 1$$

atque ambae serierum classes inter se congruent. Erit ergo

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc.},$$

$$\frac{\pi\pi}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \text{etc.},$$

$$\frac{\pi^3}{32} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \text{etc.},$$

$$\frac{\pi^4}{96} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \text{etc.},$$

$$\frac{5\pi^5}{1536} = 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \text{etc.},$$

$$\frac{\pi^6}{960} = 1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \text{etc.}$$

etc.

Harum serierum primam iam supra (§ 140) elicuimus, reliquarum illae, quae pares habent dignitates, modo ante (§ 169) sunt erutae; ceterae, in quibus exponentes sunt numeri impares, hic primum occurrunt. Constat ergo omnium quoque istarum serierum

$$1 - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \frac{1}{7^{2n+1}} + \frac{1}{9^{2n+1}} - \text{etc.}$$

summas per valorem ipsius π assignari posse.

176. Sit nunc

$$m = 1, \quad n = 3;$$

erit

$$k = \text{tang.}\,\frac{\pi}{6} = \text{tang.}\,30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

atque series § 172 abibunt in has

$$\frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \text{etc.},$$

$$\frac{\pi\pi}{27} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{14^2} + \frac{1}{16^2} + \text{etc.},$$

$$\frac{\pi^3}{162\sqrt{3}} = \frac{1}{2^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{8^3} - \frac{1}{10^3} + \frac{1}{14^3} - \frac{1}{16^3} + \text{etc.}$$

etc.

sive

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \text{etc.},$$

$$\frac{4\pi\pi}{27} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \text{etc.},$$

$$\frac{4\pi^3}{81\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} - \frac{1}{8^3} + \text{etc.}$$

etc.

In his seriebus desunt omnes numeri per ternarium divisibiles; hinc pares dimensiones ex iam inventis deducentur hoc modo. Cum sit [§ 167, 168]

$$\frac{\pi\pi}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{etc.},$$

erit

$$\frac{\pi\pi}{6\cdot 9} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{12^2} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{54};$$

quae posterior series continens omnes numeros per ternarium divisibiles si subtrahatur a priori, remanebunt omnes numeri non divisibiles per 3 sicque erit

$$\frac{8\pi\pi}{54} = \frac{4\pi\pi}{27} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.},$$

uti invenimus.

177. Eadem hypothesis

$$m = 1, \quad n = 3 \quad \text{et} \quad k = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ad § 174 accommodata has praebebit summationes

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \text{etc.},$$

$$\frac{\pi\pi}{9} = 1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{17^2} + \frac{1}{19^2} + \text{etc.},$$

$$\frac{\pi^3}{18\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} - \frac{1}{11^3} + \frac{1}{13^3} - \frac{1}{17^3} + \frac{1}{19^3} - \text{etc.}$$

etc.,

in quarum denominatoribus numeri tantum impares occurrunt exceptis iis, qui per ternarium sunt divisibiles. Ceterum pares dimensiones ex iam cognitis deduci possunt; cum enim sit [§ 169]

$$\frac{\pi\pi}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \text{etc.},$$

erit

$$\frac{\pi\pi}{8\cdot 9} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{15^2} + \frac{1}{21^2} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{72};$$

quae series omnes numeros impares per 3 divisibiles continens si subtrahatur a superiore, relinquet seriem quadratorum numerorum imparium per 3 non divisibilium eritque

$$\frac{\pi\pi}{9} = 1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \text{etc.}$$

178. Si series in §§ 172 et 174 inventae vel addantur vel subtrahantur, obtinebuntur aliae series notatu dignae. Erit scilicet

$$\frac{k\pi}{2n} + \frac{\pi}{2nk} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} + \text{etc.} = \frac{(kk+1)\pi}{2nk};$$

at est

$$k = \text{tang.}\,\frac{m\pi}{2n} = \frac{\sin.\frac{m\pi}{2n}}{\cos.\frac{m\pi}{2n}} \quad \text{et} \quad 1 + kk = \frac{1}{\left(\cos.\frac{m\pi}{2n}\right)^2},$$

unde

$$\frac{2k}{1+kk} = 2\sin.\frac{m\pi}{2n}\cos.\frac{m\pi}{2n} = \sin.\frac{m\pi}{n},$$

quo valore substituto habebimus

$$\frac{\pi}{n\sin.\frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} + \frac{1}{3n-m} - \frac{1}{3n+m} - \text{etc.}$$

Simili modo per subtractionem erit

$$\frac{\pi}{2nk} - \frac{k\pi}{2n} = \frac{(1-kk)\pi}{2nk}$$

$$= \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{3n-m} + \frac{1}{3n+m} - \text{etc.};$$

at est

$$\frac{2k}{1-kk} = \text{tang.}\,2\frac{m\pi}{2n} = \text{tang.}\,\frac{m\pi}{n} = \frac{\sin.\frac{m\pi}{n}}{\cos.\frac{m\pi}{n}};$$

hinc erit

$$\frac{\pi\cos.\frac{m\pi}{n}}{n\sin.\frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{3n-m} + \text{etc.}$$

Series quadratorum et altiorum potestatum hinc ortae facilius per differentiationem hinc deducentur infra.

179. Quoniam casus, quibus $m = 1$ et $n = 2$ vel 3, iam evolvimus, ponamus

$$m = 1 \quad \text{et} \quad n = 4;$$

erit

$$\sin.\frac{m\pi}{n} = \sin.\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \cos.\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Hinc itaque habebitur

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \text{etc.}$$

et

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \text{etc.}$$

Sit

$$m = 1 \quad \text{et} \quad n = 8;$$

erit

$$\frac{m\pi}{n} = \frac{\pi}{8} \quad \text{et} \quad \sin.\frac{\pi}{8} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)} \quad \text{et} \quad \cos.\frac{\pi}{8} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)}$$

et

$$\frac{\cos.\frac{\pi}{8}}{\sin.\frac{\pi}{8}} = 1 + \sqrt{2}.$$

Hinc itaque erit

$$\frac{\pi}{4\sqrt{(2-\sqrt{2})}} = 1 + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{23} - \text{etc.},$$

$$\frac{\pi}{8(\sqrt{2}-1)} = 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{23} + \text{etc.}$$

Sit nunc

$$m = 3 \quad \text{et} \quad n = 8;$$

erit

$$\frac{m\pi}{n} = \frac{3\pi}{8} \quad \text{et} \quad \sin.\frac{3\pi}{8} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)} \quad \text{et} \quad \cos.\frac{3\pi}{8} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)},$$

unde

$$\frac{\cos.\frac{3\pi}{8}}{\sin.\frac{3\pi}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}+1},$$

ac prodibunt hae series

$$\frac{\pi}{4\sqrt{(2+\sqrt{2})}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} - \text{etc.},$$

$$\frac{\pi}{8(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{19} - \frac{1}{21} + \text{etc.}$$

180. Ex his seriebus per combinationem nascuntur

$$\frac{\pi\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{4} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \text{etc.},$$

$$\frac{\pi\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{4} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} - \text{etc.},$$

$$\frac{\pi\left(\sqrt{(4+2\sqrt{2})}+\sqrt{2}-1\right)}{8} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \text{etc.},$$

$$\frac{\pi\left(\sqrt{(4+2\sqrt{2})}-\sqrt{2}+1\right)}{8} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} + \text{etc.},$$

$$\frac{\pi\left(\sqrt{2}+1+\sqrt{(4-2\sqrt{2})}\right)}{8} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \text{etc.},$$

$$\frac{\pi\left(\sqrt{2}+1-\sqrt{(4-2\sqrt{2})}\right)}{8} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} - \text{etc.}$$

Simili modo ponendo $n = 16$ et m vel 1 vel 3 vel 5 vel 7 ulterius progredi licet hocque modo summae reperientur serierum $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$ etc., in quibus signorum $+$ et $-$ vicissitudines alias leges sequantur.

181. Si in seriebus § 178 inventis bini termini in unam summam colligantur, erit

$$\frac{\pi}{n\sin.\frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{m} + \frac{2m}{nn-mm} - \frac{2m}{4nn-mm} + \frac{2m}{9nn-mm} - \frac{2m}{16nn-mm} + \text{etc.}$$

ideoque

$$\frac{1}{nn-mm} - \frac{1}{4nn-mm} + \frac{1}{9nn-mm} - \text{etc.} = \frac{\pi}{2mn\sin.\frac{m\pi}{n}} - \frac{1}{2mm}.$$

Altera vero series dabit

$$\frac{\pi}{n\,\text{tang.}\frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{m} - \frac{2m}{nn-mm} - \frac{2m}{4nn-mm} - \frac{2m}{9nn-mm} - \text{etc.}$$

hincque

$$\frac{1}{nn-mm} + \frac{1}{4nn-mm} + \frac{1}{9nn-mm} + \text{etc.} = \frac{1}{2mm} - \frac{\pi}{2mn\,\text{tang.}\frac{m\pi}{n}}.$$

Ex his autem coniunctis nascitur haec

$$\frac{1}{nn-mm} + \frac{1}{9nn-mm} + \frac{1}{25nn-mm} + \text{etc.} = \frac{\pi\,\text{tang.}\frac{m\pi}{2n}}{4mn}.$$

Si in hac serie sit $n = 1$ et m numerus par quicunque $= 2k$, ob $\text{tang.}\,k\pi = 0$ erit semper, nisi sit $k = 0$,

$$\frac{1}{1-4kk} + \frac{1}{9-4kk} + \frac{1}{25-4kk} + \frac{1}{49-4kk} + \text{etc.} = 0;$$

sin autem in illa serie fiat $n = 2$ et m fuerit numerus quicunque impar $= 2k+1$, ob $\frac{1}{\text{tang}\,\frac{m\pi}{n}} = 0$ erit

$$\frac{1}{4-(2k+1)^2} + \frac{1}{16-(2k+1)^2} + \frac{1}{36-(2k+1)^2} + \text{etc.} = \frac{1}{2(2k+1)^2}.$$

182. Multiplicentur series inventae per nn sitque $\frac{m}{n}=p$; habebuntur istae formae

$$\frac{1}{1-pp}-\frac{1}{4-pp}+\frac{1}{9-pp}-\frac{1}{16-pp}+\text{etc.}=\frac{\pi}{2p\sin.p\pi}-\frac{1}{2pp},$$

$$\frac{1}{1-pp}+\frac{1}{4-pp}+\frac{1}{9-pp}+\frac{1}{16-pp}+\text{etc.}=\frac{1}{2pp}-\frac{\pi}{2p\,\text{tang.}\,p\pi}.$$

Sit $pp=a$ atque nascentur hae series

$$\frac{1}{1-a}-\frac{1}{4-a}+\frac{1}{9-a}-\frac{1}{16-a}+\text{etc.}=\frac{\pi\sqrt{a}}{2a\sin.\pi\sqrt{a}}-\frac{1}{2a},$$

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{4-a}+\frac{1}{9-a}+\frac{1}{16-a}+\text{etc.}=\frac{1}{2a}-\frac{\pi\sqrt{a}}{2a\,\text{tang.}\,\pi\sqrt{a}}.$$

Dummodo ergo a non fuerit numerus negativus nec quadratus integer, summa harum serierum per circulum exhiberi poterit.

183. Per reductionem autem exponentialium imaginariorum ad sinus et cosinus arcuum circularium supra [§ 138] traditam poterimus quoque summas harum serierum assignare, si a sit numerus negativus. Cum enim sit

$$e^{x\sqrt{-1}}=\cos.x+\sqrt{-1}\cdot\sin.x \quad \text{et} \quad e^{-x\sqrt{-1}}=\cos.x-\sqrt{-1}\cdot\sin.x,$$

erit vicissim posito $y\sqrt{-1}$ loco x

$$\cos.y\sqrt{-1}=\frac{e^{-y}+e^{y}}{2} \quad \text{et} \quad \sin.y\sqrt{-1}=\frac{e^{-y}-e^{y}}{2\sqrt{-1}}.$$

Quodsi ergo $a=-b$ et $y=\pi\sqrt{b}$, erit

$$\cos.\pi\sqrt{-b}=\frac{e^{-\pi\sqrt{b}}+e^{\pi\sqrt{b}}}{2} \quad \text{et} \quad \sin.\pi\sqrt{-b}=\frac{e^{-\pi\sqrt{b}}-e^{\pi\sqrt{b}}}{2\sqrt{-1}}$$

ideoque

$$\text{tang.}\,\pi\sqrt{-b}=\frac{e^{-\pi\sqrt{b}}-e^{\pi\sqrt{b}}}{(e^{-\pi\sqrt{b}}+e^{\pi\sqrt{b}})\sqrt{-1}}.$$

Hinc erit

$$\frac{\pi\sqrt{-b}}{\sin.\pi\sqrt{-b}}=\frac{-2\pi\sqrt{b}}{e^{-\pi\sqrt{b}}-e^{\pi\sqrt{b}}} \quad \text{et} \quad \frac{\pi\sqrt{-b}}{\text{tang.}\,\pi\sqrt{-b}}=\frac{-(e^{-\pi\sqrt{b}}+e^{\pi\sqrt{b}})\pi\sqrt{b}}{e^{-\pi\sqrt{b}}-e^{\pi\sqrt{b}}}.$$

His ergo notatis erit

$$\frac{1}{1+b}-\frac{1}{4+b}+\frac{1}{9+b}-\frac{1}{16+b}+\text{etc.}=\frac{1}{2b}-\frac{\pi\sqrt{b}}{(e^{\pi\sqrt{b}}-e^{-\pi\sqrt{b}})b},$$

$$\frac{1}{1+b}+\frac{1}{4+b}+\frac{1}{9+b}+\frac{1}{16+b}+\text{etc.}=\frac{(e^{\pi\sqrt{b}}+e^{-\pi\sqrt{b}})\pi\sqrt{b}}{2b(e^{\pi\sqrt{b}}-e^{-\pi\sqrt{b}})}-\frac{1}{2b}.$$

Eaedem hae series deduci possunt ex § 162 adhibendo eandem methodum, qua in hoc capite sum usus. Quoniam vero hoc pacto reductio sinuum et cosinuum arcuum imaginariorum ad quantitates exponentiales reales non mediocriter illustratur, hanc explicationem alteri praeferendam duxi.