SUR LA DÉVELOPPÉE DE L'ELLIPSE.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences; 1877.

1. Lemme. — *Étant données une ellipse* E *et une parabole* P *tangente aux deux axes de cette ellipse, les normales menées à* E, *aux points de contact des tangentes communes à ces deux courbes, concourent en un même point.*

Pour le démontrer, il suffit de remarquer que la polaire réciproque de P relativement à E est une hyperbole passant par le centre de cette conique, par les quatre points de contact et ayant ses asymptotes parallèles aux axes de la conique.

2. Soit N une normale à l'ellipse E; si de chaque point de cette droite on mène les normales à E différentes de N, leurs pieds forment un triangle dont les côtés enveloppent une parabole P *tangente aux axes de* E.

En désignant par O le centre de la conique, par n le pied de la normale N et par n' le point diamétralement opposé à n, je ferai remarquer que le foyer de la parabole est le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur la tangente au point n'; sa directrice est la symétrique de cette perpendiculaire relativement à l'un quelconque des axes. Il en résulte que les cercles circonscrits aux divers triangles dont j'ai parlé plus haut passent tous non seulement par le point n', comme on le sait par un théorème de Joachimsthal, mais encore par un autre point fixe situé sur la tangente en n'.

Cela posé, la normale N, qui est tangente à la développée de l'ellipse, rencontre de nouveau cette courbe en quatre autres points α, β, γ et δ. Considérons, par exemple, le point α, et appe-

lons a le point de l'ellipse dont le centre de courbure est en α; deux des normales menées du point α à E ont leurs pieds confondus en a; par suite, la tangente en a à l'ellipse est tangente à la parabole P, et, comme la même chose a lieu pour les points β, γ et δ, il résulte du lemme énoncé plus haut que les normales doubles abaissées des points α, β, γ et δ concourent en un même point.

En d'autres termes :

Théorème I. — *Si l'on considère une tangente quelconque à la développée d'une ellipse et les quatre points où cette tangente coupe de nouveau la courbe, les tangentes menées en ces points concourent en un même point* p.

3. On peut encore dire que la polaire de chacune des tangentes à la développée se décompose en une conique et un point p.

En général, étant donnée une courbe quelconque de quatrième classe, si l'on représente par $U = 0$ l'équation du quatrième degré qui détermine les directions des tangentes issues du point (x, y, z), et par S et T l'invariant quadratique et l'invariant cubique de U, j'ai montré [*Sur les singularités des courbes de quatrième classe* (*Journal de Mathématiques*, 3^e série, t. I, p. 265)] que les points singuliers de la courbe et les points qui, associés à des coniques, constituent les polaires de droites du plan, satisfaisaient aux trois conditions

$$2S\frac{dT}{dx} - 3T\frac{dS}{dx} = 0, \qquad 2S\frac{dT}{dy} - 3T\frac{dS}{dy} = 0, \qquad 2S\frac{dT}{dz} - 3T\frac{dS}{dz} = 0.$$

En général, le nombre des points satisfaisant à ces trois relations est limité et égal à 73; dans le cas de la développée de l'ellipse, comme l'a remarqué M. Clebsch ([1]), S est un carré parfait, et l'on peut poser $S = h^2$, h étant l'équation d'une conique ayant pour sommets les points de rebroussement de la développée; on a aussi $T = h^3 + w^2$, $w = 0$ étant l'équation des trois tangentes doubles

([1]) *Problem der Normalen für Curven und Flächen zweiter Ordnung* (*Crelle*, t. 62, p. 79).

de la courbe. Les relations précédentes deviennent alors

$$
\begin{aligned}
wh\left(2h\frac{dw}{dx}-3w\frac{dh}{dx}\right) &= wh\left(2h\frac{dw}{dy}-3w\frac{dh}{dy}\right)\\
&= wh\left(2h\frac{dw}{dz}-3w\frac{dh}{dz}\right)=0,
\end{aligned}
$$

et l'on voit qu'elles sont satisfaites pour tous les points des deux courbes $w=0$ et $h=0$. La première équation donne les trois tangentes doubles qui correspondent à l'infinité de points singuliers que possède la développée considérée comme courbe de quatrième classe et du douzième ordre; la seconde donne le lieu des points p que j'ai considérés dans le théorème I.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème II. — *Le lieu des points p est la conique ayant pour sommet les points de rebroussement de la développée.*

4. Le théorème I résulte aussi immédiatement de ce que S est un carré parfait. J'ai démontré, en effet [*Mémoire sur l'application de la théorie des formes binaires à la Géométrie analytique* (*Journal de Mathématiques*, t. I, 3e série, p. 104)], la proposition suivante :

Étant donnée une courbe de quatrième classe K, *une quelconque de ses tangentes est coupée par sa polaire en six points dont deux sont confondus au point de contact, les quatre autres points d'intersection décrivant, lorsque la tangente se déplace, la courbe du quatrième ordre dont l'équation est* $S=0$.

Si S est un carré parfait, les six points d'intersection de la droite avec sa polaire sont confondus deux à deux en trois points, d'où résulte la décomposition de cette polaire en une conique et un point p, et l'on peut remarquer que les tangentes menées du point p à cette conique rencontrent la tangente à la courbe de quatrième classe en deux points situés sur le lieu des points p.

D'autres conséquences intéressantes relativement à la développée de l'ellipse se déduiraient facilement de plusieurs propositions générales sur les courbes de quatrième classe que j'ai données dans les Mémoires cités plus haut.

SUR QUELQUES THÉORÈMES DE JOACHIMSTHAL.

Bulletin de la Société mathématique de France; 1876.

1. Joachimsthal termine ainsi (1) une des Notes nombreuses et élégantes qu'il a publiées sur la théorie des normales à une conique :

Je vais indiquer une proposition qui est fondamentale dans cette théorie :

Théorème. — *Soient p, q, r trois points d'une conique, tels que les normales en ces points concourent en un même point. Si l'on tire, par un sommet* S *de la conique, trois parallèles à pq, qr, rp, le centre de gravité des trois points où ces parallèles rencontrent la courbe est situé sur l'axe qui contient le sommet* S.

La proposition précédente, ainsi que beaucoup d'autres dues au même géomètre, peuvent se déduire très simplement des considérations suivantes.

2. Étant donnés une conique K et deux points fixes A et B, dont le premier A soit sur la courbe, si l'on imagine les divers cercles qui passent par ces deux points, chacun d'eux rencontre la conique en trois points distincts du point A, et il est clair que le triangle déterminé par ces points enveloppe, lorsque le cercle varie, une parabole.

Réciproquement, *si divers triangles, inscrits dans une conique* K, *sont circonscrits à une parabole, les cercles qui leur sont circonscrits passent par deux points fixes, dont l'un est*

(1) *Sur la construction des normales que l'on peut abaisser d'un point donné sur une section conique complètement trouvée* (*Journal de Crelle*, t. 48).

situé sur la conique et dont l'autre, situé en dehors de cette conique, est le foyer de la parabole.

On en déduit immédiatement que :

Si divers triangles, inscrits dans une conique K, *sont circonscrits à une parabole :*

1° *Les centres des cercles circonscrits aux triangles sont situés sur une même droite ;*

2° *Les centres de gravité de ces triangles sont également situés sur une ligne droite.*

3. Soient M un point situé sur une conique K et MN la normale en ce point; si de chaque point m de la droite MN on mène des normales à la courbe, les pieds des normales distinctes de MN formeront un triangle dont les côtés enveloppent évidemment une parabole.

On en conclut que les cercles circonscrits à ces triangles passent par un point fixe de la courbe. Soient a, a' et b, b' les extrémités des axes de la conique, M' et M'' les symétriques du point M relativement à ces axes; si l'on abaisse les normales du point α où MN rencontre aa', les pieds des normales distincts de M sont a, a' et M'; de même, si l'on abaisse les normales du point p où MN coupe bb', les pieds des normales distincts de M sont b, b' et M''. Or il est évident que les cercles circonscrits aux deux triangles aa'M' et bb'M'' se coupent tous deux sur la courbe, au point μ symétrique de M par rapport au centre.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si, en quatre points d'une conique p, q, r, s, les normales concourent en un même point, le cercle circonscrit aux trois points q, r, s passe par le point p' symétrique du point p par rapport au centre de la conique. (Joachimsthal).

On peut remarquer de plus que le centre de gravité du triangle aa'M' et le centre de gravité du triangle bb'M'' sont situés sur le diamètre conjugué du diamètre qui passe par le point M. Donc :

Si les normales menées en trois points p, q, r d'une conique concourent en un même point μ, le centre de gravité du triangle pqr se trouve sur le diamètre conjugué du diamètre qui passe

par le pied de la quatrième normale que l'on peut abaisser du point μ.

4. Il est à remarquer que toutes les propriétés des normales à une même conique sont multiples. Si l'on considère, en effet, le triangle formé par les deux axes et la droite de l'infini, chacun des côtés de ce triangle joue le même rôle relativement aux normales. Cela résulte immédiatement de cette propriété très simple : *Si l'on effectue une transformation homographique de façon qu'aux foyers d'une conique correspondent les deux ombilics* (1) *du plan, les normales à cette conique deviennent après la transformation les normales à la conique transformée.*

En particulier, si l'on prend pour point de départ la proposition de Joachimsthal énoncée plus haut et que l'on peut énoncer ainsi :

Étant donnés sur une conique quatre points p, q, r, s tels, que les normales concourent en un même point, si l'on désigne par p' le point diamétralement opposé à p, les droites rs et qp' sont également inclinées sur les axes,

on en déduira immédiatement la proposition suivante qui, sous une autre forme, a été donnée également par Joachimsthal :

Étant donnés sur une conique quatre points p, q, r, s, tels que les normales concourent en un même point, si l'on désigne par p' le symétrique du point p par rapport à l'un des axes, les droites rs et qp' rencontrent cet axe en deux points situés à égale distance du centre.

5. En conservant les notations précédentes (3), soit MN la normale menée en un point M d'une conique K. De chaque point m de cette droite on peut mener trois normales à la courbe distinctes

(1) J'appelle ici *ombilics* les points imaginaires situés à l'infini et communs à tous les cercles d'un plan; j'appelle de même *ombilicale* la conique imaginaire située à l'infini et commune à toutes les sphères de l'espace.

Les propriétés des normales à une surface du second ordre sont également multiples; si l'on effectue une transformation homographique, de telle sorte qu'à la focale d'une surface du second ordre corresponde l'ombilicale, les normales à la surface ont pour transformées les normales à la surface transformée.

de MN; soient a, b, c les pieds de ces normales. Par un sommet S de la conique, menons des droites parallèles à bc, ca, ab et soient respectivement α, β, γ les points où ces droites coupent la courbe. En remarquant qu'on ne peut mener à la parabole enveloppée par les côtés du triangle abc qu'une tangente parallèle à une direction donnée, on verra facilement que le point α détermine les points associés β et γ; par suite le triangle $\alpha\beta\gamma$ enveloppe une conique que l'on voit immédiatement être une parabole. Le centre de gravité du triangle $\alpha\beta\gamma$ décrit par suite une ligne droite; en plaçant successivement le point m sur chacun des axes, on voit que, pour chacun des triangles correspondants, le centre de gravité est sur l'axe passant par le point S.

La proposition de Joachimsthal que j'ai énoncée au commencemenr de cette Note est donc démontrée.

SUR LES

COURBES UNICURSALES DE TROISIÈME CLASSE.

Bulletin de la Société mathématique de France; 1877.

1. Soient A, B et C trois points d'une conique K et un point P pris arbitrairement dans son plan. Par les quatre points A, B, C et P faisons passer une conique arbitraire H et soit Q le quatrième point où cette conique rencontre K.

Cela posé, étant pris un point M arbitrairement sur K, menons la droite MP et joignons au point Q le point I, où MP coupe une seconde fois la conique H. La droite IQ coupe K en un second point α; joignons-le au point M. La droite $M\alpha$ enveloppe, lorsque le point M se déplace sur la conique, une courbe qui est évidemment de la troisième classe. Si, en effet, on mène la droite MQ rencontrant la conique H au point G, puis la droite GP rencontrant la conique K aux points β et γ, on voit que $M\beta$ et $M\gamma$ sont encore des tangentes à la courbe cherchée. Il est clair, d'ailleurs, que l'on a ainsi toutes les tangentes passant par le point M; donc l'enveloppe est de troisième classe. En faisant coïncider successivement M avec chacun des points A, B, C, on reconnaît facilement que l'enveloppe touche en ces points la conique K, les troisièmes tangentes que de chacun d'eux on peut mener à la courbe se rencontrant au point P.

L'enveloppe fait donc partie du faisceau formé par les courbes de troisième classe touchant aux trois points A, B, C la conique K et tangentes aux droites AP, BP et CP; et il semble d'abord qu'en faisant varier la conique H on pourra engendrer de la façon que j'ai indiquée toutes les courbes du faisceau.

Pour se convaincre qu'il n'en est pas ainsi, il suffit de remarquer que l'une des tangentes issues du point M (celle que j'ai désignée par $M\alpha$) se détermine individuellement et que d'ailleurs les points de la conique K se déterminent individuellement ; l'enveloppe est donc la *courbe unicursale du faisceau*.

Les propriétés les plus simples des coniques montrent en effet que, le point M étant fixe, le point α est parfaitement déterminé, quelle que soit la conique que l'on fasse passer par les points A, B, C et P.

Par suite, dans la génération des tangentes à l'enveloppe, on pourra remplacer la conique H par un système de deux droites. Le point Q étant, par exemple, le point de rencontre AP avec K, on engendrera les diverses tangentes à la courbe de troisième classe en faisant décrire au point I la droite BC.

2. Quelques conséquences intéressantes résultent des considérations qui précèdent. En effet, des trois tangentes que du point M on peut mener à l'enveloppe, deux ($M\alpha$ et $M\beta$) rencontrent la conique K en deux points tels que la corde $\alpha\beta$ qui les joint passe par le point fixe P.

On peut donc énoncer la propriété suivante :

Si une courbe unicursale de troisième classe est tritangente à une conique K, *les trois tangentes que l'on peut mener à cette courbe par un point quelconque de la conique rencontrent de nouveau cette conique en trois points. Un des côtés du triangle formé par ces trois points passe par un point fixe.*

3. Supposons que la conique K soit un cercle ayant P pour centre ; on voit alors que l'angle $\beta M\alpha$ est droit.

Donc :

Si un cercle est tritangent à une courbe de troisième classe unicursale et si les normales, menées au cercle en ces points, sont tangentes à la courbe, deux des tangentes que de chacun des points du cercle on peut mener à la courbe font entre elles un angle droit.

La réciproque est également vraie :

Étant donnée une courbe de troisième classe, si un cercle jouit de la propriété que deux tangentes, menées à la courbe par chacun de ses points, soient à angle droit, la courbe est unicursale ; le cercle touche la courbe en trois points et les normales menées au cercle en ces points sont tangentes à la courbe.

Pour le démontrer, je remarquerai d'abord que, étant pris un point quelconque M sur le cercle, comme deux des tangentes, menées à la courbe par ce point, sont liées par une relation particulière, la troisième tangente se détermine individuellement, donc la courbe est unicursale.

En second lieu, $M\alpha$ désignant la tangente qui passe par le point M et qui se détermine individuellement, il est clair que cette tangente, lorsque le point M se déplace, vient successivement coïncider avec chacune des tangentes à la courbe ; autrement la courbe se décomposerait en une conique et un point.

De là résulte que, une tangente quelconque à la courbe de troisième classe rencontrant le cercle en deux points, des deux perpendiculaires menées en ces points à la tangente l'une au moins est tangente à la courbe.

Menons maintenant une tangente commune au cercle et à la courbe ; cette tangente rencontrant le cercle en deux points confondus, d'après ce que je viens de dire, la normale au cercle sera tangente à la courbe. On ne peut, d'ailleurs, par le centre du cercle, mener que trois tangentes à cette courbe ; donc les points de contact des tangentes communes se réduisent à trois.

Le cercle est donc tritangent à la courbe, et les normales au cercle, en ces points, lui sont également tangentes.

4. Les propositions précédentes se vérifient immédiatement sur les courbes unicursales de troisième classe les plus connues, telles que la *cardioïde* et l'*hypocycloïde à trois points de rebroussement*. On peut se proposer un problème analogue pour les courbes de quatrième classe :

Trouver toutes les courbes de quatrième classe par lesquelles le lieu des sommets des angles droits circonscrits se décompose en un cercle et une courbe résiduelle.

J'examinerai ce problème dans une prochaine communication.

SUR LA CARDIOÏDE.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1878.

1. La cardioïde est l'épicycloïde engendrée par un point d'un cercle mobile qui roule sans glisser sur un cercle de même rayon.

C'est une courbe de troisième classe et du quatrième degré (¹), ayant, par conséquent, une tangente double et trois points de rebroussement; deux de ces points de rebroussement sont les ombilics du plan. Les trois foyers de la courbe se réduisent à un seul foyer F, qui est le point de rencontre des tangentes menées aux ombilics.

La cardioïde peut donc être définie comme une courbe de *troisième classe, ayant une tangente double et un foyer singulier de rebroussement.*

2. Dans tout ce qui suit, je m'appuierai principalement sur les deux propositions suivantes :

Proposition I (²). — *Si, par un point quelconque du plan, on mène les trois tangentes à une courbe de troisième classe, et si l'on joint ce point aux trois foyers de la courbe, les deux faisceaux de droites ainsi obtenus ont même orientation; c'est-à-dire que la somme des angles que chacune des droites du premier faisceau fait avec une direction arbitraire est égale, à un multiple près de* π, *à la somme des angles que font, avec cette même direction, les droites du second faisceau.*

(¹) *Voir* Salmon, *Higher plane curves*, p. 270.

(²) *Voir* ma Note intitulée : *Théorèmes généraux sur les courbes algébriques* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, janvier 1865).

Proposition II (¹). — *Si, par un point quelconque* M *du plan, on mène les trois tangentes à une courbe de troisième classe, le centre harmonique des trois points de contact, relativement au point* M, *est le même que le centre harmonique des trois foyers relativement à ce même point. En d'autres termes, la polaire du point* M, *relativement au triangle formé par les normales menées à la courbe par les trois points de contact des tangentes, se confond avec la polaire du même point relativement au triangle formé par les droites menées par chacun des foyers perpendiculairement à la droite qui le joint au point* M.

3. Les foyers de la cardioïde se confondent tous les trois avec le foyer singulier F de cette courbe. On déduit donc immédiatement de la proposition I le théorème suivant :

Théorème I. — *Si d'un point quelconque* M *on mène les trois tangentes à la cardioïde, la somme des angles que font ces droites avec la droite* MF *est égale à un multiple de* π.

La cardioïde a un troisième point de rebroussement réel R, et, d'après un théorème très connu, la tangente en R passe par le point F. D'un point quelconque de la droite FR, on peut mener trois tangentes à la courbe, dont l'une se confond avec FR. Du théorème précédent il résulte que les deux autres tangentes sont également inclinées sur FR; donc :

La cardioïde est symétrique par rapport à l'axe FR.

4. La proposition II, appliquée à la cardioïde, donne de même le théorème suivant :

Théorème II. — *Si d'un point quelconque* M *on mène les trois tangentes à la cardioïde et les normales aux points de contact, le pied de la perpendiculaire, abaissée du point* M *sur sa polaire relativement au triangle formé par les normales, est le foyer de la courbe.*

(¹) *Voir* ma Note *Sur la détermination du rayon de courbure des lignes planes* (*Bulletin de la Société philomathique*, février 1867).

Ce que l'on peut encore exprimer sous la forme suivante, plus commode dans les applications :

Soient N, N′, N″ *les normales menées aux trois points de contact et* Φ *la droite menée par le point* F *perpendiculairement à* FM; *si, par le point* M, *on mène une sécante arbitraire coupant respectivement les droites* N, N′, N″ *et* Φ *aux points* n, n', n'' *et* φ, *on a, entre ces points, la relation*

$$\frac{3}{M\varphi} = \frac{1}{Mn} + \frac{1}{Mn'} + \frac{1}{Mn''}.$$

5. Supposons, en particulier, que le point soit pris sur la droite FR; désignons par T ce point, par M le point de contact d'une des tangentes, distinctes de TF, que l'on peut mener à la courbe par le point T, enfin par N le point où la normale au point M rencontre l'axe FR. Il est clair que la normale menée par le troisième point de contact rencontrera également au point N l'axe de symétrie. En prenant donc pour sécante l'axe lui-même, l'équation précédente donnera la relation

$$(1) \qquad \frac{3}{TF} = \frac{2}{TN}\ \frac{1}{TR},$$

qui lie entre eux les points de rencontre de l'axe avec la tangente et la normale menées en un point quelconque de la courbe.

6. Soient (*fig.* 1) une cardioïde ayant pour foyer F, pour axe FA, et Aα la tangente double de cette courbe, α étant le point de contact situé au-dessus de l'axe.

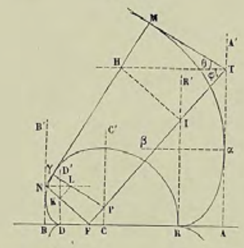
Portons à gauche du foyer F une longueur $FB = \frac{\overline{A\alpha}^2}{FA}$ et à gauche du point A une longueur $AR = \frac{AF}{3}$, puis aux points B, R et A élevons à l'axe des perpendiculaires BB′, RR′ et AA′.

Cela posé, par le point F, menons deux droites rectangulaires quelconques rencontrant respectivement les droites BB′ et AA′ aux points N et T. Au point I, où la droite FT coupe RR′, menons une perpendiculaire à FT et appelons H le point où cette perpendiculaire rencontre la parallèle à l'axe menée par le point T; menons enfin la droite NH.

Je dis que *la perpendiculaire abaissée du point* T *sur* NH *est tangente à la cardioïde, le point de contact étant précisément le pied* M *de cette perpendiculaire, en sorte que* MN *est normale à la courbe.*

Pour le démontrer, je ferai remarquer que, des trois tangentes que l'on peut mener à la courbe par le point T, deux se confon-

Fig. 1.



dent avec la tangente double, leurs points de contact étant d'ailleurs le point α et son symétrique α' par rapport à l'axe. Les normales en ces deux points sont les droites $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$ parallèles à l'axe. La troisième tangente touche la courbe en un point variable avec la position du point T; désignons pour un instant par Δ la normale au point de contact.

Il suit du théorème II que la polaire du point T relativement à la droite NF (cette droite étant considérée comme triple) se confond avec la polaire de ce même point relativement aux droites $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ et Δ.

Les triangles semblables BNF et FAT donnent la relation

$$BN \times AT = BF \times FA = \overline{A\alpha}^2;$$

de là résulte que la polaire du point T, relativement aux droites $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$, est la droite NL menée par le point N parallèlement à l'axe.

La proposition précédente peut, par suite, s'énoncer ainsi :

La polaire du point T *relativement à la droite* Δ *et à la* *droite* NL (*cette dernière étant considérée comme double*) *se confond avec la polaire de ce point relativement à* FN (*cette dernière droite étant considérée comme triple*); *et de là résulte d'abord que la droite* Δ *passe par le point* N.

Pour en déterminer un autre point, menons par le point T une parallèle à l'axe; soient Q [1] le point où cette parallèle rencontre NF, et H le point où elle rencontre Δ.

D'après ce que j'ai dit ci-dessus, on aura

$$\frac{3}{TQ} = \frac{1}{TH}.$$

Menons par le point H une perpendiculaire à FT; en désignant par I' son pied, on voit que les deux triangles FQT et I'HT sont semblables et donnent la proportion

$$\frac{I'T}{FT} = \frac{HT}{TQ} = \frac{1}{3};$$

IT est dans le tiers de FT et le point I' se confond avec le point I.

La proposition précédente est donc entièrement démontrée.

Elle donne un moyen facile de mener à la cardioïde une tangente par un point quelconque de la tangente double, ou encore de lui mener une normale par un point quelconque de la droite BB' qui, il est facile de le voir, passe par les deux points de la courbe où la tangente est parallèle à l'axe.

En particulier, on en déduit le théorème suivant :

Théorème III. — *Si, par un point quelconque de la cardioïde, on mène la tangente et la normale à la courbe et si l'on désigne par* T *le point où la tangente rencontre la tangente double* AA', *par* N *le point où la normale rencontre la droite* BB' *qui joint les points de la courbe où la tangente est parallèle à l'axe, les deux points* T *et* N *sont vus du foyer suivant un angle droit.*

(1) Les points Q et α', ainsi que la droite $\alpha'\beta'$, ne se trouvent pas sur la figure: le lecteur est prié d'y suppléer.

7. Quelques remarques sur ce qui précède ne seront pas inutiles.

Au point α la normale rencontre l'axe à l'infini et la tangente le rencontre au point A; en désignant, pour un instant, par R' le point de rebroussement de la courbe, on aura donc, en vertu de la relation (1),

$$\frac{3}{AF} = \frac{1}{AR'},$$

d'où AR' = AR. Le point R est donc le point de rebroussement.

Si l'on considère l'un des points situés sur la droite BB' et où la tangente est horizontale, le point de rencontre de la tangente avec l'axe est à l'infini et le point de rencontre de la normale est en B. En vertu de la relation (1), on aura donc

$$BR = 3BF, \qquad \text{d'où} \qquad BF = RA = \frac{FA}{3}.$$

Les tangentes que l'on peut mener à la courbe du point T sont, d'une part, la droite TM et, d'autre part, la droite $T\alpha$, cette dernière étant comptée deux fois.

En vertu du théorème I, on a donc

$$\widehat{MTI} + 2\widehat{A'TI} = \text{mult.}\,\pi;$$

ou, si l'on pose,

$$\widehat{HTI} = \varphi \qquad \text{et} \qquad \widehat{MTH} = \theta,$$
$$\theta + 3\varphi = \pi.$$

Au moyen des équations précédentes, il est facile d'établir un grand nombre de relations entre les éléments de la figure 1; je me bornerai à mentionner les suivantes :

$$NM = NF + AB\sin\varphi,$$
$$TF = TM + AB\cos\varphi.$$

8. Le point D étant déterminé par la relation $BD = \frac{BC}{3}$, élevons en ce point une droite DD' perpendiculaire à l'axe; soit K le point où cette perpendiculaire coupe NF. Menons KL perpendiculaire à NF et NL parallèle à l'axe; abaissons enfin, du point de rencontre L de ces deux lignes, une perpendiculaire sur la normale MN.

Je dis que *le point* γ, *où elle rencontre cette normale, est le centre de courbure de la cardioïde au point* M.

Soit, en effet, P le point où cette droite coupe FT, on démontrera aisément, en s'appuyant sur les propositions précédentes, que

$$FP = \frac{1}{9} FT;$$

par suite, le point P décrit, lorsque le point M se déplace sur la courbe, une droite perpendiculaire à l'axe et dont le pied est à une distance

$$FC = \frac{1}{3} FB.$$

En se reportant à ce que j'ai dit plus haut, on voit aisément que la normale NM enveloppe une cardioïde ayant pour tangente double BB′ et pour foyer le point F.

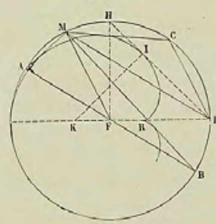
Le point de contact de la normale avec l'enveloppe est le point γ; ce qui démontre la proposition énoncée.

On voit aussi que la développée de la cardioïde est une cardioïde semblable à la proposée, le rapport de réduction étant $\frac{1}{3}$, proposition d'ailleurs bien connue.

9. Un autre mode de génération de la cardioïde mérite d'être signalé.

Soient (*fig.* 2) un cercle ayant pour centre F et un point fixe P

Fig. 2.



pris sur cette courbe. Par le point P menons une sécante quelconque coupant le cercle en M; par le centre F menons une parallèle à cette sécante rencontrant le cercle aux points A et B, joignons enfin MA et MB. Ces droites enveloppent, lorsqu'on fait varier la direction de la sécante, une courbe qui est évidemment de troisième classe et unicursale.

Si l'on cherche les tangentes *isotropes* que, d'après la construction précédente, on peut mener à la courbe, on trouve facilement qu'elles passent par le point F; d'ailleurs la courbe n'est évidemment pas tangente à la droite de l'infini.

On en conclut que cette courbe est de *troisième classe, unicursale, et à foyer singulier triple,* par conséquent c'est une *cardioïde*. Quelques propriétés intéressantes se déduisent du mode de génération que je viens d'indiquer.

Il est facile, en premier lieu, de trouver le point de rebroussement de la courbe. Je remarquerai, à cet effet, que si, au point F, on élève une perpendiculaire au rayon FP, la droite HP est une tangente à la courbe et qui la touche au point I déterminé par la relation

$$HI = \frac{HP}{3}.$$

Au point I, menons la normale à la courbe et soit K le point où elle rencontre l'axe, en désignant par R le point de rebroussement de la cardioïde; on aura, en vertu de la relation (1),

$$\frac{3}{PF} = \frac{2}{PK} + \frac{1}{PR},$$

d'où l'on déduit

$$FR = \frac{FP}{3}.$$

Considérons, en second lieu, un point quelconque M du cercle; si, par F, on mène une parallèle à MP rencontrant le cercle aux points A et B, deux des tangentes que l'on peut mener du point M à la courbe sont les droites MA et MB.

La troisième tangente s'obtiendrait en menant par le point P une parallèle à MF et en joignant au point M le point C où cette parallèle coupe le cercle.

On voit que les deux tangentes MA et MB sont à angle droit; d'où la proposition suivante :

Théorème IV. — *Si, d'un point quelconque du cercle* K *pas-*

sant par le sommet de la cardioïde et ayant pour centre son foyer, on mène les tangentes à la courbe, deux de ces tangentes sont rectangulaires [1].

10. Considérons (*fig.* 2) les deux points M et C qui sont les extrémités d'une corde tangente à la cardioïde; on voit immédiatement sur la figure que l'arc MH est la moitié de l'arc PC.

La cardioïde peut donc être considérée *comme l'enveloppe de la corde qui joint deux points mobiles sur un cercle, ces deux points décrivant le cercle dans le même sens et l'un ayant une vitesse double de la vitesse de l'autre.*

Supposons que les deux points M et C se soient déplacés infiniment peu et soient venus en M′ et C′; désignons par T le point de rencontre de MC et de M′C′. On aura $MM' = \frac{1}{2}CC'$; d'autre part, les triangles semblables MM′T et CC′T donnent

$$\frac{MM'}{CC'} = \frac{MT}{TC'} = \frac{1}{2}.$$

A la limite on a

$$MT = \frac{TC}{2};$$

donc :

Théorème V. — *La corde interceptée par le cercle* K *sur une tangente quelconque à la cardioïde est partagée par le point de contact en deux segments dont l'un est le double de l'autre.*

11. D'autres propriétés des normales à la cardioïde peuvent être déduites par des considérations entièrement différentes de celles qui précèdent, et en s'appuyant seulement sur la propriété suivante :

La cardioïde ayant un axe de symétrie et ayant pour points de rebroussement les ombilics du plan, tout cercle ayant son centre sur l'axe de symétrie ne rencontre la portion de la courbe située au-dessus de l'axe qu'en deux points distincts des ombilics.

[1] *Voir* à ce sujet ma Note *Sur les courbes unicursales de troisième classe*, communiquée à la Société mathématique en novembre 1877.

De là résulte immédiatement la proposition suivante [1] :

Théorème VI. — *Étant pris deux points fixes quelconques* A *et* B *sur la cardioïde, soit* C *un point mobile sur cette courbe; sur les milieux des cordes* CA *et* CB, *élevons respectivement des perpendiculaires à ces cordes et soient* I *et* K *les points où ces perpendiculaires coupent l'axe. Quelle que soit la position du point* C *sur la courbe, la différence*

$$\frac{1}{FI} - \frac{1}{FK}$$

demeure constante.

Démonstration. — Je supposerai, pour fixer les idées, que les points A, B, ainsi que le point mobile C, sont sur la partie de la courbe située au-dessus de l'axe; et, pour plus de clarté, je considérerai d'abord, au lieu de la cardioïde, une *spirique* quelconque, c'est-à-dire une courbe du quatrième ordre, ayant un axe de symétrie et pour points doubles les deux ombilics du plan. Une spirique, comme on le voit aisément, jouit de la propriété qu'un cercle ayant son centre sur l'axe de symétrie ne rencontre la courbe qu'en deux points situés au-dessus de l'axe et distincts des ombilics.

Cela posé, A et B désignant deux points fixes de la spirique et C un point variable sur cette courbe, par les milieux des cordes CA et CB élevons des perpendiculaires à ces droites; soient I et K les points où ces perpendiculaires coupent respectivement l'axe de la spirique.

J'établirai d'abord que les points I et K déterminent sur l'axe, lorsque le point C se déplace, une division homographique.

En effet, le point I étant donné, le point C se trouve au-dessus de l'axe et à l'intersection de la courbe avec le cercle décrit du point I comme centre avec IA pour rayon; ce point est donc parfaitement déterminé, puisque ce cercle ne rencontre la courbe au-dessus de l'axe qu'en deux points distincts des ombilics.

[1] Les considérations qui suivent s'appliquent également aux coniques et aux anallagmatiques du troisième et du quatrième ordre qui ont un axe de symétrie. *Voir* à ce sujet ma Note *Sur les spiriques* (*Bulletin de la Société philomathique*, novembre 1869).

Le point C étant déterminé, le point K l'est également quand on se donne le point I, et l'on prouverait de même qu'à une position du point K correspond une position unique du point I; d'où il résulte que *les points* I *et* K *déterminent sur l'axe des divisions homographiques.*

Cherchons les deux points doubles. Le point C se déplaçant sur une des branches infinies qui passe à un ombilic ω en se rapprochant indéfiniment de cet ombilic, le cercle passant par les points A et C, et symétrique par rapport à l'axe, a pour centre, à la limite, le point où la tangente en ω, à la branche de courbe considérée, perce l'axe, c'est-à-dire le foyer singulier f correspondant à cette branche de courbe. Ce point est, par la même raison, le centre du cercle limite passant par les points B, C et symétrique par rapport à l'axe; f est donc un point double de la division homographique. Le même raisonnement s'appliquerait à la seconde branche de courbe.

Ainsi, quand on considère une *spirique générale, les deux points doubles de la division homographique, formée par les points* I *et* K, *sont les foyers singuliers de la courbe.*

Dans le cas particulier de la *cardioïde,* les points doubles à l'infini deviennent des points de rebroussement et les deux foyers singuliers viennent se réunir au foyer unique F de la courbe. La division homographique formée par les points I et K a donc deux points doubles coïncidents en F; d'où le théorème qu'il fallait démontrer.

12. Supposons que l'on fasse successivement coïncider le point mobile C avec A et avec B; dans le premier cas, la perpendiculaire élevée au milieu de AC se confond avec la normale en A et, dans le second, la perpendiculaire élevée au milieu de BC se confond avec la normale en B.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème VII. — *Étant donnés deux points quelconques* A *et* B *situés sur une cardioïde, menons les normales en ces points et, par le point milieu de la corde* AB, *une perpendiculaire à cette corde; soient respectivement* a, b, i *les points où ces droites rencontrent l'axe, le point* i *et le foyer* F *de la courbe divisent harmoniquement le segment* ab.

En effet, en supposant que le point mobile C vienne successivement coïncider avec le point A et le point B et en appliquant le théorème précédent, on a

$$\frac{1}{\mathrm{FI}} - \frac{1}{\mathrm{F}a} = \frac{1}{\mathrm{F}b} - \frac{1}{\mathrm{FI}},$$

d'où

$$\frac{2}{\mathrm{FI}} = \frac{1}{\mathrm{F}a} + \frac{1}{\mathrm{F}b}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

En particulier, si le point B est un des points où la tangente double touche la cardioïde, le point de rencontre de la normale avec l'axe étant à l'infini, on a cette proposition :

Si l'on désigne par a *le point où la normale en un point* A *de la cardioïde rencontre l'axe, et par* i *le point où cet axe est rencontré par la droite élevée par le milieu de la corde, qui joint* A *à l'un des points où la courbe touche la tangente double, et perpendiculairement à cette corde, le point* a *est le milieu du segment* FI.

13. Je m'arrêterai ici dans cette étude des propriétés des normales à la cardioïde. Dans une prochaine Note, je ferai l'application des mêmes principes à l'étude de diverses courbes remarquables de la troisième classe et de classes plus élevées.

SUR

LES NORMALES AUX SURFACES DU SECOND ORDRE.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1878.

1. Étant donnés une surface du second ordre K ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}-1=0,$$

et un point M ayant pour coordonnées α, β, γ, on sait que l'on peut de ce point mener six normales à la surface, les pieds de ces normales étant déterminés par les équations

$$x=\frac{a\alpha}{a-\rho},\qquad y=\frac{b\beta}{b-\rho},\qquad z=\frac{c\gamma}{c-\rho},$$

où ρ est une des racines de l'équation

$$\frac{a\alpha^2}{(a-\rho)^2}+\frac{b\beta^2}{(b-\rho)^2}+\frac{c\gamma^2}{(c-\rho)^2}-1=0. \tag{1}$$

Ces six points sont d'ailleurs déterminés par l'intersection de K avec la cubique gauche H, définie par les équations

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)xy+\frac{\alpha y}{b}-\frac{\beta x}{a}=0,\qquad \left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)yz+\frac{\beta z}{c}-\frac{\gamma y}{b}=0.$$
$$\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)zx+\frac{\gamma x}{a}-\frac{\alpha z}{c}=0.$$

Cela posé, déterminons les quantités ξ, η, ζ, P, Q, R, X, Y,

Z et G, de telle sorte que l'on ait identiquement

$$\left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{x\xi}{a}+\frac{y\eta}{b}+\frac{z\zeta}{c}-1\right)\\
&\quad\times(x^2+y^2+z^2-2Xx-2Yy-2Zz+G)\\
&\qquad=(x\xi+y\eta+z\zeta+G)\left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}-1\right),\\
&\qquad\quad+(y\xi-x\eta+R)\left[\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)xy+\frac{\alpha y}{b}-\frac{\beta x}{a}\right],\\
&\qquad\quad+(z\eta-y\zeta+P)\left[\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)yz+\frac{\beta z}{c}-\frac{\gamma y}{b}\right],\\
&\qquad\quad+(x\zeta-z\xi+Q)\left[\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)zx+\frac{\gamma x}{a}-\frac{\alpha z}{c}\right].
\end{aligned}\right. \tag{2}$$

On aura, entre ces dix quantités, les neuf relations

$$\left\{\begin{aligned}
2X\xi+\beta\eta+\gamma\zeta&=-(G+a),\\
2Y\eta+\gamma\zeta+\alpha\xi&=-(G+b),\\
2Z\zeta+\alpha\xi+\beta\eta&=-(G+c);
\end{aligned}\right. \tag{3}$$

$$\left\{\begin{aligned}
R\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)&=\frac{(2X-\alpha)\eta}{b}+\frac{(2Y-\beta)\xi}{a},\\
P\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)&=\frac{(2Y-\beta)\zeta}{c}+\frac{(2Z-\gamma)\eta}{b},\\
Q\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)&=\frac{(2Z-\gamma)\xi}{a}+\frac{(2X-\alpha)\zeta}{c};
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

et

$$\left\{\begin{aligned}
Q\gamma-R\beta&=2aX+(G+a)\xi,\\
R\alpha-P\gamma&=2bY+(G+b)\eta,\\
P\beta-Q\alpha&=2cZ+(G+c)\zeta.
\end{aligned}\right. \tag{5}$$

Comme nous disposons de dix quantités indéterminées pour satisfaire à ces neuf relations, on pourra y satisfaire d'une infinité de manières.

Considérons maintenant l'équation (2), elle exprime évidemment que, des six pieds des normales que l'on peut abaisser du point M, quatre sont situés sur la sphère

$$x^2+y^2+z^2-2Xx-2Yy-2Zz+G=0$$

et les deux autres dans le plan

$$\frac{x\xi}{a}+\frac{y\eta}{b}+\frac{z\zeta}{c}-1=0.$$

dont le pôle, par rapport à la surface du second ordre K, a pour coordonnées ξ, η, ζ; et, comme ces quantités renferment un paramètre arbitraire, elles sont les coordonnées d'un point quelconque de la polaire, par rapport à K, de la corde qui joint les pieds des deux dernières normales dont je viens de parler.

2. Désignons par S la sphère dont l'équation est

$$x^2+y^2+z^2-2Xx-2Yy-2Zz+G=0;$$

les coordonnées de son centre sont évidemment X, Y, Z et G est la puissance de l'origine relativement à cette sphère. Elle contient, comme je l'ai dit, quatre des pieds des normales que l'on peut abaisser du point M. Soient D la corde qui joint les pieds des deux autres normales et Δ sa polaire réciproque par rapport à K. D'après une dénomination généralement adoptée, Δ est un *axe* relativement à K et aux surfaces du second ordre, qui forment avec elles un système homofocal; en d'autres termes, les deux droites D et Δ sont perpendiculaires entre elles.

De ce que j'ai dit plus haut il résulte que, si l'on considère ξ, η, ζ comme des coordonnées courantes, la droite Δ est précisément déterminée par les équations (3), ou encore, si l'on pose, pour abréger,

$$(6) \qquad 2X=\alpha+A, \qquad 2Y=\beta+B, \qquad 2Z=\gamma+C,$$

par les suivantes

$$(7) \qquad A\xi+a=B\eta+b=C\zeta+c=\lambda,$$

avec la relation

$$(8) \qquad G+\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta=-\lambda.$$

3. Tirons de (7) les valeurs de ξ, η, ζ et portons-les dans (8); en égalant à zéro le terme constant et le coefficient de λ, il viendra

$$(9) \qquad \frac{\alpha}{A}+\frac{\beta}{B}+\frac{\gamma}{C}+1=0$$

et

$$(10) \qquad G=\frac{\alpha a}{A}+\frac{\beta b}{B}+\frac{\gamma c}{C}.$$

Soient x, y, z les coordonnées d'un quelconque des points où D rencontre la surface du second ordre K, le plan tangent en ce point contient Δ, et son équation est

$$\frac{x\xi}{a}+\frac{y\eta}{b}+\frac{z\zeta}{c}-1=0.$$

Remplaçant, dans cette équation, ξ, η, ζ par leurs valeurs tirées de (7), il vient, en égalant à zéro, le terme constant et le coefficient de λ

$$(11) \qquad \frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{C}+1=0$$

et

$$(12) \qquad \frac{x}{aA}+\frac{y}{bB}+\frac{z}{cC}=0.$$

L'équation (12) est celle du plan diamétral contenant la corde D; le plan, déterminé par l'équation (11), contient le point M en vertu de la relation (9); c'est donc le plan qui passe par les deux normales dont les pieds sont situés sur D; je le désignerai par P.

4. En général, pour abréger le discours, étant donné un plan quelconque ayant pour équation

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}+1=0,$$

j'appellerai *centre* de ce plan le point dont les coordonnées sont p, q, r et *foyer* de ce plan le point où se coupent les deux normales à K qui sont contenues dans ce plan. On voit que le plan P, dont j'ai parlé plus haut, a pour foyer le point M et pour centre le point m dont les coordonnées sont A, B, C.

La notion de *centre d'un plan* se présente fréquemment dans la théorie des normales aux surfaces du second ordre, et, à ce sujet, je rappellerai une élégante proposition due à Joachimsthal :

Étant donnés, sur une surface du second ordre, trois points a, b, c, *tels que les normales en ces points concourent en un même point* M, *le pôle du plan* abc, *relativement à cette surface, est le centre, relativement aux trois axes de la surface,* *du plan qui passe par les pieds des trois autres normales que l'on peut encore abaisser du point* M [1].

5. En adoptant les dénominations qui précèdent, il résulte immédiatement des équations (6) que le centre N de la sphère S est le point milieu du segment Mm.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Le centre de la sphère qui contient les pieds de quatre des normales que l'on peut abaisser d'un point donné M *sur une surface du second ordre* K, *est le milieu du segment qui joint le point* M *au centre du plan qui contient les deux autres normales.*

6. Pour déterminer complètement la sphère S, dont on peut construire le centre au moyen de la proposition précédente, il suffit de connaître la puissance G de l'origine relativement à cette sphère, ou bien encore de connaître la sphère Σ, dont l'équation est

$$x^2+y^2+z^2+G=0.$$

Cette sphère Σ peut être facilement déterminée en s'appuyant sur la propriété suivante

Le point M *et le pôle du plan* P, *relativement à la surface du second ordre* K, *sont deux points conjugués relativement à la sphère* Σ, *en d'autres termes le plan polaire de chacun d'eux, relativement à* Σ, *contient l'autre point.*

Pour démontrer cette propriété, je remarque que le pôle du plan P, relativement à K, a pour coordonnées

$$-\frac{a}{A}; \quad -\frac{b}{B}; \quad -\frac{c}{C};$$

le plan polaire de ce pôle, relativement à Σ, a pour équation

$$\frac{ax}{A}+\frac{by}{B}+\frac{cz}{C}-G=0,$$

[1] JOACHIMSTHAL, *De quibusdam æquationibus quarti et sexti gradus quæ in theoria linearum et superficierum secundi gradus occurrunt* (*Journal de Crelle*, t. 53, p. 172).

et, en vertu de la relation (10), il contient évidemment le point α, β, γ; ce qui démontre la proposition énoncée.

7. La cubique gauche H rencontre la sphère S, d'abord aux quatre points où les normales concourent en M, puis en deux autres points. Je dirai, pour abréger, que la corde qui joint ces deux derniers points est la *corde supplémentaire* de D.

L'examen de l'équation (2) montre immédiatement que la corde supplémentaire est constamment comprise dans le plan

$$x\xi+y\eta+z\zeta+G=0,$$

où ξ, η, ζ désignent les coordonnées d'un point quelconque de Δ.

Remplaçons, dans l'équation précédente, ξ, η, ζ par leurs valeurs tirées de (7), et égalons à zéro le terme constant ainsi que le coefficient de λ; nous aurons les équations suivantes, qui définissent la corde supplémentaire :

$$\frac{ax}{A}+\frac{by}{B}+\frac{cz}{C}-G=0, \tag{13}$$

et

$$\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{C}=0. \tag{14}$$

L'équation (14) montre que le plan diamétral passant par la corde supplémentaire est parallèle au plan P. D'où la proposition suivante :

Les six pieds des normales, que l'on peut d'un point M *abaisser sur une surface du second ordre, sont, ainsi que le point* M *et le centre* O *de la surface, situés sur une même cubique gauche* H.

Si, par le point O, *on mène un plan parallèle au plan qui contient* M *et les pieds de deux quelconques des normales, ce plan coupe la cubique en deux autres points. Ces deux points et les pieds des quatre autres normales sont situés sur une même sphère.*

8. En désignant par ξ, η, ζ des constantes arbitraires, le pôle du plan

$$\frac{x\xi}{a}+\frac{y\eta}{b}+\frac{z\zeta}{c}-1,$$

relativement à K, est le point (ξ, η, ζ), dont le plan polaire, relativement à Σ, a pour équation

$$x\xi + y\eta + z\zeta + G = 0.$$

Il résulte d'ailleurs de ce que j'ai dit plus haut que, si le plan

$$\frac{x\xi}{a} + \frac{y\eta}{b} + \frac{z\zeta}{c} - 1 = 0$$

tourne autour de la corde D, le plan

$$x\xi + y\eta + z\zeta + G = 0$$

tourne autour de la corde supplémentaire.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

La droite Δ et la corde supplémentaire de D *sont polaires réciproques, relativement à la sphère* Σ.

9. Comme, dans la théorie des normales à une surface du second ordre, on a souvent à considérer les centres de divers plans (ces centres étant déterminés relativement aux axes de la surface), il n'est pas inutile d'entrer dans quelques détails relativement aux propriétés de ces points.

En premier lieu, soit, ρ désignant un paramètre variable,

$$(a + \rho a')x + (b + \rho b')y + (c + \rho c')z + d + \rho d' = 0$$

l'équation d'un plan tournant d'une droite fixe.

Pour trouver le lieu décrit par le centre de ce plan, identifions son équation avec l'équation

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} + 1 = 0;$$

il viendra

$$A = \frac{d + \rho d'}{a + \rho a'}, \qquad B = \frac{d + \rho d'}{b + \rho b'}, \qquad C = \frac{d + \rho d'}{c + \rho c'},$$

d'où l'on voit que le centre décrit une cubique gauche passant par les sommets du tétraèdre Θ formé par les plans principaux et le plan à l'infini.

D'où les propositions suivantes :

Le lieu des centres des plans, qui passent par une droite fixe, est une cubique gauche passant par les sommets du tétraèdre Θ; et réciproquement :

Si une cubique gauche passe par les sommets du tétraèdre Θ, *les plans, dont ses divers points sont les centres, passent par une droite fixe.*

En second lieu, considérons une droite quelconque dont un des points soit déterminé par les équations

$$x = \frac{a + \rho a'}{d + \rho d'}, \qquad y = \frac{b + \rho b'}{d + \rho d'}, \qquad z = \frac{c + \rho c'}{d + \rho d'}.$$

Le plan ayant pour centre ce point a pour équation

$$\frac{x}{a + \rho a'} + \frac{y}{b + \rho b'} + \frac{z}{c + \rho c'} + \frac{1}{d + \rho d'} = 0,$$

et il est clair que, quand on fait varier ρ, il enveloppe une cubique gauche ayant pour plans osculateurs les plans qui forment les faces du tétraèdre Θ.

D'où les propositions suivantes :

Les plans, qui ont pour centres les différents points d'une droite, enveloppent une cubique gauche inscrite dans le tétraèdre Θ [1]; et réciproquement

Si une cubique gauche est inscrite dans le tétraèdre Θ, *le lieu des centres de ses divers plans osculateurs est une ligne droite.*

10. Je m'appuierai maintenant sur le lemme qui suit :

Lemme. — *Si les sommets des deux tétraèdres sont situés sur une même cubique gauche, les huit faces de ces tétraèdres sont les plans osculateurs d'une autre cubique gauche.*

Réciproquement, *si les huit faces de deux tétraèdres sont les plans osculateurs d'une même cubique gauche, leurs huit sommets sont situés sur une autre cubique gauche.*

---

[1] J'entends par *cubique gauche inscrite dans un tétraèdre* une cubique ayant pour plans osculateurs les faces de ce tétraèdre.

Il suffit évidemment de démontrer la première partie de ce lemme, la seconde proposition étant corrélative de la première.

Pour la démontrer, je remarque que la cubique, qui contient les sommets des deux tétraèdres, étant une *courbe unicursale*, je puis supposer que les sommets du premier tétraèdre soient déterminés par les racines d'une équation du quatrième degré $f(x) = 0$, et les sommets du second par les racines d'une équation de même degré $F(x) = 0$.

Cela posé, on voit que les racines de l'équation

$$F(x) + \lambda f(x) = 0,$$

où λ désigne un paramètre variable, déterminent sur la cubique les sommets d'une suite de tétraèdres, chaque point de la courbe étant d'ailleurs le sommet d'un seul de ces tétraèdres; d'où il résulte que les faces de tous ces tétraèdres enveloppent une cubique gauche, puisque, par chaque point de la courbe donnée, on ne peut mener que trois plans osculateurs à l'enveloppe.

En particulier, les faces des deux tétraèdres donnés sont des plans osculateurs de cette cubique gauche; la proposition est donc démontrée.

11. Considérons maintenant quatre plans dont les centres soient en ligne droite : d'après ce que j'ai démontré plus haut, les faces du tétraèdre T, déterminé par ces quatre plans, sont les plans osculateurs d'une cubique gauche inscrite dans le tétraèdre Θ. Du lemme précédent il résulte que les sommets des tétraèdres T et Θ sont situés sur une même cubique gauche et, par suite, les plans ayant pour centres les sommets du tétraèdre T passent par une même droite.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si les quatre faces d'un tétraèdre ont leurs centres en ligne droite, les plans qui ont pour centre les sommets du tétraèdre passent par une même droite.

Et de même :

Si les plans qui ont pour centres les sommets d'un tétraèdre passent par une même droite, les centres des faces de ce tétraèdre sont en ligne droite.

12. Si d'un point quelconque M de l'espace on mène les six normales à la surface du second ordre K, on sait que le point M et les six pieds des normales sont situés sur une même cubique gauche passant par les sommets du tétraèdre Θ. Désignons par p_1, $p_2, p_3, \ldots, p_6$ les pieds de ces normales.

Des considérations qui précèdent il résulte immédiatement que :

Si l'on forme un tétraèdre ayant pour sommets quatre quelconques des sept points M, p_1, p_2, $\ldots$, p_6, *les centres des faces de ce tétraèdre sont en ligne droite.*

13. Considérons une droite quelconque E, normale à une surface de second ordre, ayant pour axes les axes de coordonnées Ox, Oy et Oz. Le lieu des centres des plans qui passent par E est une cubique gauche L passant par les sommets du tétraèdre Θ. Soit M un point quelconque pris sur cette normale; par ce point on peut mener à la surface cinq normales distinctes de E; soient p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5 leurs pieds. Désignons par N_1 le centre de la sphère qui passe par les quatre points p_2, p_3, p_4 et p_5, de même par N_2 le centre de la sphère qui passe par les quatre points p_1, p_3, p_4 et p_5, $\ldots$; désignons enfin par m_1, m_2, m_3, m_4 et m_5 les centres des plans qui, passant par E, contiennent respectivement les points p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5.

D'après ce que je viens de dire, les cinq points m sont situés sur la cubique gauche L; d'ailleurs, comme je l'ai montré précédemment (n° 5), les points N sont respectivement les milieux des segments Mm.

D'où l'on déduit immédiatement les propositions suivantes :

Si d'un point M *on mène cinq normales quelconques à une surface du second ordre, ayant pour centre* O, *les cinq pieds de ces normales peuvent être regardés comme les sommets de cinq tétraèdres; les centres des cinq sphères circonscrites à ces tétraèdres sont situés sur une cubique gauche, passant par le milieu du segment* MO *et par les points situés à l'infini sur les axes de la surface.*

Étant données une droite quelconque E *et trois droites rectangulaires* Ox, Oy *et* Oz, *imaginons toutes les surfaces du* *second ordre ayant ces droites pour axes et normales à* E; *si d'un point* M, *pris arbitrairement sur* E, *on mène à l'une de ces surfaces quatre normales distinctes de* E, *le lieu du centre de la sphère circonscrite au tétraèdre, formé par les pieds des normales, est une cubique gauche passant par le milieu du segment* MO, *et par les trois points à l'infini sur les axes* Ox, Oy *et* Oz.

Il est à remarquer que, si le point M se déplace sur la droite E, la cubique gauche conserve sa forme, chacun de ces points décrivant un segment de droite parallèle à E et égal à la moitié du segment dont le point M s'est déplacé.

14. Je ne développerai pas davantage les conséquences qu'on peut déduire des propositions précédentes, et je terminerai cette Note en établissant quelques formules qui peuvent être utiles dans les recherches sur les normales aux surfaces du second ordre.

Soient ρ' et ρ'' les deux racines de l'équation (1) qui correspondent aux deux normales dont les pieds sont situés sur la droite D, et soit

$$F(\rho) = (\rho - \rho')(\rho - \rho'').$$

En désignant, pour un instant, par ρ l'une quelconque de ces racines, les coordonnées du pied correspondant sont

$$\frac{a\alpha}{a-\rho}, \quad \frac{b\beta}{b-\rho}, \quad \frac{c\gamma}{c-\rho},$$

et l'équation du plan tangent en ce point est

$$\frac{\xi\alpha}{a-\rho} + \frac{\eta\beta}{b-\rho} + \frac{\zeta\gamma}{c-\rho} = 1.$$

Ce plan contient la droite Δ; tirons de (7) les valeurs de ξ, η, ζ et portons ces valeurs dans l'équation précédente. En égalant à zéro le coefficient de λ, on obtiendra la relation

$$\frac{\alpha}{A(a-\rho)} + \frac{\beta}{B(b-\rho)} + \frac{\gamma}{C(c-\rho)} = 0,$$

et cette relation devant être satisfaite pour $\rho = \rho'$ et $\rho = \rho''$, il

vient, après quelques réductions faciles,

$$F(\rho) = \rho^2 - (G + a + b + c)\rho - abc\left(\frac{\alpha}{aA} + \frac{\beta}{bB} + \frac{\gamma}{cC}\right);$$

d'où

$$G = \rho' + \rho'' - a - b - c, \tag{15}$$

et

$$\left\{\begin{aligned} F(a) &= (c-a)(a-b)\frac{\alpha}{A} = (a-\rho')(a-\rho''),\\ F(b) &= (a-b)(b-c)\frac{\beta}{B} = (b-\rho')(b-\rho''),\\ F(c) &= (b-c)(c-a)\frac{\gamma}{C} = (c-\rho')(c-\rho''). \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Puisque ρ'' satisfait à l'équation (1), on a identiquement

$$\frac{a\alpha^2(a-\rho')^2}{(a-\rho')^2(a-\rho'')^2} + \frac{b\beta^2(b-\rho')^2}{(b-\rho')^2(b-\rho'')^2} + \frac{c\gamma^2(c-\rho')^2}{(c-\rho')^2(c-\rho'')^2} = 1;$$

d'où, en remplaçant les dénominateurs par leurs valeurs tirées de (16) et ρ' par ρ,

$$\begin{aligned} &\frac{aA^2}{(a-b)^2(c-a)^2}(a-\rho)^2 \\ &\quad + \frac{bB^2}{(b-c)^2(a-b)^2}(b-\rho)^2 + \frac{cC^2}{(c-a)^2(b-c)^2}(c-\rho)^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Cette équation devant être satisfaite pour $\rho = \rho'$ et $\rho = \rho''$, on en déduit cette nouvelle expression du polynome $F(\rho)$,

$$F(\rho) = \frac{\left[\begin{aligned} &a(b-c)^2A^2(a-\rho)^2 + b(c-a)^2B^2(b-\rho)^2 \\ &\quad + c(a-b)^2C^2(c-\rho)^2 - (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \end{aligned}\right]}{a(b-c)^2A^2 + b(c-a)^2B^2 + c(a-b)^2C^2}.$$

D'où, en vertu des équations (16), les relations suivantes qui déterminent les coordonnées α, β, γ du foyer du plan

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} + 1 = 0,$$

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\alpha}{A} &= \frac{(c-a)(a-b)[bB^2+cC^2-(b-c)^2]}{a(b-c)^2A^2+b(c-a)^2B^2+c(a-b)^2C^2},\\ \frac{\beta}{B} &= \frac{(a-b)(b-c)[cC^2+aA^2-(c-a)^2]}{a(b-c)^2A^2+b(c-a)^2B^2+c(a-b)^2C^2},\\ \frac{\gamma}{C} &= \frac{(b-c)(c-a)[aA^2+bB^2-(a-b)^2]}{a(b-c)^2A^2+b(c-a)^2B^2+c(a-b)^2C^2};\end{aligned}\right.$$

auxquelles on peut joindre la relation

$$(18)\quad G = \frac{\left[\begin{aligned} &a(a-b-c)(b-c)^2A^2\\ &\quad + b(b-c-a)(c-a)^2B^2 + c(c-a-b)(a-b)^2C^2\end{aligned}\right]}{a(b-c)^2A^2+b(c-a)^2B^2+c(a-b)^2C^2}.$$

SUR LES SYSTÈMES DE DROITES

QUI SONT NORMALES

A UNE MÊME SURFACE.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1878.

1. Je renverrai, pour toutes les notations dont je me servirai ici, à ma Note *Sur les formules fondamentales de la théorie des surfaces* (1).

Par chaque point M d'une surface S menons une droite m, dont la position soit définie par l'angle θ qu'elle fait avec la normale MZ à la surface et l'angle φ que fait avec la direction MX sa projection sur le plan tangent.

Les cosinus des angles que font, avec les axes coordonnés, les trois directions MX, MY et MZ, étant respectivement

$$\begin{matrix} \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma,\\ \cos\xi, & \cos\eta, & \cos\zeta,\\ \cos\lambda, & \cos\mu, & \cos\nu,\end{matrix}$$

les cosinus des angles que fera avec les axes la droite m seront respectivement

$$\begin{aligned} &\cos\alpha\sin\theta\cos\varphi + \cos\xi\sin\theta\sin\varphi + \cos\lambda\cos\theta,\\ &\cos\beta\sin\theta\cos\varphi + \cos\eta\sin\theta\sin\varphi + \cos\mu\cos\theta,\\ &\cos\gamma\sin\theta\cos\varphi + \cos\zeta\sin\theta\sin\varphi + \cos\nu\cos\theta;\end{aligned}$$

et, pour que les diverses droites m soient normales à une même

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XI, p. 60.

surface, il sera nécessaire et suffisant que l'expression

$$\Sigma\, dx(\cos\alpha \sin\theta \cos\varphi + \cos\xi \sin\theta \sin\varphi + \cos\lambda \cos\theta)$$

soit une différentielle exacte.

On a

$$dx = \mathrm{E}\, du \cos\alpha + \mathrm{G}\, dv \cos\xi,$$
$$dy = \mathrm{E}\, du \cos\beta + \mathrm{G}\, dv \cos\eta,$$
$$dz = \mathrm{E}\, du \cos\gamma + \mathrm{G}\, dv \cos\zeta;$$

substituant ces valeurs dans l'expression précédente, elle donne

$$\mathrm{E} \sin\theta \cos\varphi . du + \mathrm{G} \sin\theta \sin\varphi . dv;$$

et, pour qu'elle soit une différentielle exacte, il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$(1) \qquad \frac{d}{dv}(\mathrm{E} \sin\theta \cos\varphi) = \frac{d}{du}(\mathrm{G} \sin\theta \sin\varphi).$$

2. L'équation précédente ne renferme que les quantités E et G, dont l'expression ne change pas quand on déforme la surface S.

D'où la conséquence suivante :

Concevons que chaque rayon m conserve une position fixe par rapport au plan tangent en M, c'est-à-dire que sa projection sur ce plan tangent et l'angle qu'il fait avec ce plan demeurent invariables; cela posé, *si les rayons émanant des divers points de* S *sont normaux à une même surface et si l'on déforme* S *de façon que l'élément d'une courbe quelconque tracée sur cette surface concerne la même valeur, chaque plan tangent à la surface entraînant avec lui le rayon correspondant, les divers rayons dans leur nouvelle position sont encore normaux à une même surface.*

3. L'équation (1) étant satisfaite pour certaines valeurs des fonctions φ et θ, elle est encore évidemment satisfaite quand on y remplace $\sin\theta$ par $k \sin\theta$, k désignant une constante arbitraire.

D'où ce beau théorème dû à Dupin :

Si des rayons normaux à une même surface se réfractent sur une surface S, *ils sont encore, après leur réfraction, normaux à une même surface.*

4. Chaque rayon m se projette sur le plan tangent en M, suivant une droite faisant avec la droite MX un angle égal à φ. Toutes ces projections enveloppent des courbes que l'on peut, pour abréger, appeler la *projection du système de rayons sur la surface*. La fonction φ étant connue, on obtiendra l'équation différentielle de cette projection en posant $\varphi = i$; d'où

$$\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang} i = \frac{\mathrm{G}\, dv}{\mathrm{E}\, du}.$$

En remplaçant φ par i dans l'équation (1), il vient

$$\frac{d}{dv}(\mathrm{E} \sin\theta \cos i) = \frac{d}{dv}(\mathrm{G} \sin\theta \sin i),$$

ou encore

$$\frac{d}{dv}(\mathrm{E}\sin\theta)\cos i - \frac{d}{du}(\mathrm{G}\sin\theta)\sin i - \mathrm{E}\sin\theta \sin i \frac{di}{dv} - \mathrm{G}\sin\theta\cos i\frac{di}{du} = 0,$$

ou, en remplaçant respectivement $\cos i$ et $\sin i$ par leurs valeurs,

$$\frac{\mathrm{E}\, du}{ds} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{G}\, dv}{ds},$$

$$\frac{d}{dv}(\mathrm{E}\sin\theta)\,\mathrm{E}\, du - \frac{d}{du}(\mathrm{G}\sin\theta)\,\mathrm{G}\, dv - \mathrm{EG}\sin\theta\, di = 0,$$

ou encore

$$di \sin\theta - \frac{du}{\mathrm{G}}\frac{d}{dv}(\mathrm{E}\sin\theta) + \frac{dv}{\mathrm{E}}\frac{d}{du}(\mathrm{G}\sin\theta) = 0.$$

Si θ est constant, on peut, dans la relation précédente, supprimer le facteur commun $\sin\theta$, et, en remplaçant respectivement $\frac{d\mathrm{E}}{dv}$ et $\frac{d\mathrm{G}}{du}$ par leurs valeurs $-$ GM et EN, elle devient

$$di + \mathrm{M}\, du + \mathrm{N}\, dv = 0;$$

ce qui est précisément l'équation des lignes géodésiques.

D'où la proposition suivante :

Si des rayons émanant de chacun des points d'une surface S *sont normaux à une même surface, et si chacun d'eux fait un angle constant avec le plan tangent au point de* S *dont il émane, la projection du système de rayons sur* S *est un système de lignes géodésiques de cette dernière surface.*

5. La réciproque de cette proposition est également vraie. Considérons sur S un système de lignes géodésiques, nous choisirons les axes des u et des v, de telle sorte que ces lignes géodésiques soient définies par l'équation $v = \text{const.}$ Cela posé, cherchons les systèmes de rayons normaux à une même surface et ayant pour projection le système considéré de lignes géodésiques. Dans ce cas, on peut poser $E = 1$ et $G = F(u)$, et l'angle désigné par φ est égal à zéro, l'équation (1) devient alors

$$\frac{d \sin\theta}{dv} = 0. \tag{2}$$

Cette équation étant identiquement satisfaite quand on fait $\theta = \text{const.}$, la réciproque de la proposition énoncée est démontrée. En particulier, si l'on fait $\theta = 0$, on obtient ce théorème bien connu :

Si l'on considère un système de lignes géodésiques tracées sur une surface, les tangentes aux différents points de ces lignes sont normales à une même surface.

6. On satisfait également à l'équation (2) en prenant pour θ une fonction arbitraire de u.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Étant donnés un système de lignes géodésiques tracées sur une surface et les trajectoires orthogonales de ces lignes, si par chaque point M *d'une de ces lignes on mène une droite située dans le plan tangent à cette ligne en* M *et normal à la surface, l'angle de cette droite avec le plan tangent étant constant le long d'une même trajectoire orthogonale, mais variant du reste d'une façon arbitraire quand on passe de l'une de ces trajectoires à une autre, toutes ces droites sont normales à une même surface.*

SUR LES COURBES DE TROISIÈME CLASSE.

Journal de Mathématiques pures et appliquées; 1878.

I.

1. Soit une courbe de troisième classe $\mathfrak{K}^3 = K^6$, représentée par l'équation tangentielle $F(u, v, w) = 0$; si l'on pose

$$F(\mu, -\lambda, \lambda y - \mu x) = U(\lambda, \mu),$$

l'équation $U(\lambda, \mu) = 0$ est l'équation mixte de la courbe.

En posant $U - (a, b, c, d)$, je prendrai, pour forme canonique de U, l'expression réduite $a\lambda^3 + d\mu^3$; de plus, je représenterai par (A, B, C) le hessien H de U, en sorte que l'on aura

$$A = ac - b^2, \qquad 2B = ad - bc, \qquad C = bd - c^2.$$

La courbe $\mathfrak{K}^3$ est une courbe du sixième ordre K^6, dont l'équation cartésienne s'obtient en égalant à zéro le discriminant Δ de la forme U. En adoptant les notations de mon *Mémoire sur l'application de la théorie des formes binaires à la Géométrie analytique* [1], je représenterai par Θ le contrevariant de F, qui, égalé à zéro, donne l'équation de la cayleyenne G^3 de $\mathfrak{K}^3$.

2. En désignant respectivement par

$$\Pi = (\alpha, \beta, \gamma) = x \qquad \text{et} \qquad \varpi = \lambda q - \mu p = 0$$

l'équation mixte de la conique polaire de la droite de l'infini et l'équation mixte du pôle de cette droite relativement à $\mathfrak{K}^3$, les formules (6) et (11) du Mémoire déjà cité donnent immédiatement,

[1] *Journal de Mathématiques*, 3e série, t. I. Les renvois à ce Mémoire sont indiqués par la désignation (F. B.).

en posant

$$\frac{1}{6}\frac{d\Delta}{dy} = \Delta_1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{6}\frac{d\Delta}{dx} = -\Delta_2 \quad (^1),$$

le système de formules suivant :

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= a\Delta_1 + b\Delta_2 - 2A\Theta, \\ \Delta\beta &= b\Delta_1 + c\Delta_2 - 2B\Theta, \\ \Delta\gamma &= c\Delta_1 + d\Delta_2 - 2C\Theta; \end{aligned}$$

ou, sous forme canonique,

$$(1) \qquad \Delta\alpha = a\Delta_1, \qquad \Delta\beta = -a\,d\Theta, \qquad \Delta\gamma = d\Delta_2,$$

puis

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{da}{dx} = 0, && \frac{db}{dx} = -\alpha, && \frac{dc}{dx} = -2\beta, && \frac{d^2 d}{dx} = -3\gamma, \\ &\frac{da}{dy} = 3\alpha, && \frac{db}{dy} = 2\beta, && \frac{dc}{dy} = \gamma, && \frac{d^2 d}{dy} = 0; \end{aligned} \right.$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\alpha}{dx} = 0, && \frac{d\beta}{dx} = -q, && \frac{d\gamma}{dx} = 2p, \\ &\frac{d\alpha}{dy} = 2q, && \frac{d\beta}{dy} = -p, && \frac{d\gamma}{dy} = 0. \end{aligned} \right.$$

J'y joindrai encore les formules suivantes, que l'on déduit facilement des précédentes, et que j'écris sous forme canonique, en y faisant b et c égaux à zéro :

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dA}{dx} = -2a\beta, && 2\frac{dB}{dx} = -3a\gamma, && \frac{dC}{dx} = -d\alpha, \\ &\frac{dA}{dy} = a\gamma, && 2\frac{dB}{dy} = 3d\alpha && \frac{dC}{dy} = 2d\beta. \end{aligned} \right.$$

On en déduit l'expression de p et de q, en partant de l'identité

$$\Theta = A\gamma + 2B\beta + C\alpha, \qquad \text{(F. B. n° 18)}$$

qui, dérivée successivement par rapport à x et y, donne les deux relations

$$(5) \qquad 3\Theta_1 = a\,dp + a\gamma^2 - d\alpha\beta, \qquad 3\Theta_2 = -a\,dq + d\alpha^2 - a\beta\gamma.$$

(1) En général, Z désignant une fonction de x et de y du degré n, je poserai

$$Z_1 = \frac{1}{n}\frac{dZ}{dy}, \qquad Z_2 = -\frac{1}{n}\frac{dZ}{dx}.$$

3. En représentant par $W(\lambda, \mu) = 0$ l'équation mixte de la hessienne $\mathfrak{H}^3$ de la courbe, on a, sous forme canonique (F. B. n° 9),

$$W = \begin{vmatrix} a\lambda & 0 & \alpha\lambda + \beta\mu \\ 0 & d\mu & \beta\lambda + \gamma\mu \\ \alpha\lambda + \beta\mu & \beta\lambda + \gamma\mu & \lambda q - \mu p \end{vmatrix}$$

$$W = ad\lambda\mu(\lambda q - \mu p) - d\mu(\alpha\lambda + \beta\mu)^2 - a\lambda(\beta\lambda + \gamma\mu)^2,$$

ou, en développant le second membre et en remplaçant p et q par leurs valeurs déduites des équations (5),

$$W = -3(\lambda\Theta_2 + \mu\Theta_1)\lambda\mu - 3\lambda\mu\beta(a\gamma\lambda + d\alpha\mu) - \beta^2(a\lambda^3 d\mu^3);$$

ou encore, en multipliant les deux membres par $a^2 d^2 = \Delta$, et en remplaçant α, β, γ par leurs valeurs,

$$\Delta W = 3ad\lambda\mu\,\frac{ad\lambda(\Theta\Delta_2 - \Delta\Theta_2) + ad\mu(\Theta\Delta_1 - \Delta\Theta_1)}{\Delta} - \Theta^2(a\lambda^3 + d\mu^3);$$

d'où, enfin, en passant de la forme canonique à la forme générale,

$$\Delta W = 6H(\lambda, \mu)\,\frac{(\Theta\Delta_1 - \Delta\Theta_1)(A\lambda + B\mu) + (\Theta\Delta_2 - \Delta\Theta_2)(B\lambda + C\mu)}{\Delta} - \Theta^2 U(\lambda, \mu).$$

Pour abréger, je poserai

$$(6) \quad \tfrac{1}{6}\Delta(\lambda\mathfrak{X} - \mu\mathfrak{Y}) = (\Theta\Delta_1 - \Delta\Theta_1)(A\lambda + B\mu) + (\Theta\Delta^2 - \Delta\Theta_2)(B\lambda + C\mu),$$

où $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ désignent des polynomes du cinquième degré en x et y, et l'équation mixte de la hessienne sera donnée par la formule suivante :

$$(7) \qquad \Delta W(\lambda, \mu) = H(\lambda, \mu)(\lambda\mathfrak{Y} - \mu\mathfrak{X}) - \Theta^2 U(\lambda, \mu).$$

4. L'équation mixte du pôle de la droite de l'infini étant

$$\varpi = \lambda q - \mu p = 0,$$

on déduit, des équations (5), la relation suivante :

$$(8) \quad \Delta^2\varpi = a\Delta_1^2\lambda + d\Delta_2^2\mu + ad[\lambda(\Theta\Delta_2 - 3\Delta\Theta_2) + \mu(\Theta\Delta_1 - 3\Delta\Theta_1)].$$

En désignant toujours par $\Pi = 0$ l'équation de la conique polaire de la droite de l'infini, par $\Pi_\omega = 0$ et $\varpi_\omega = 0$ les équations de la conique polaire et du pôle de la droite

$$\omega = ux + vy + wz = 0,$$

on aura d'abord (F. B., n° 18),

$$(9)\qquad \Delta\Pi_\omega = a\mathfrak{r}\lambda^2 + d\mathfrak{y}\mu^2 - 2ad\omega\,\Theta\lambda\mu,$$

formule où j'ai posé, pour abréger,

$$\mathfrak{r} = -v\Delta + \omega\Delta_1, \qquad \mathfrak{y} = u\Delta + \omega\Delta_2;$$

puis (F. B., n° 11),

$$\varpi_\omega = u\Pi_{\omega,2} - v\Pi_{\omega,1} + \omega(u\Pi_2 - v\Pi_1) + \omega^2\varpi.$$

Substituons, dans cette expression, les valeurs de ϖ, Π_1, Π_2, ..., tirées des relations précédentes, il viendra

$$\Delta^2\varpi_\omega = a\lambda\mathfrak{r}^2 + d\mu\mathfrak{y}^2 - 2\omega\Theta ad(\lambda\mathfrak{y} - \mu\mathfrak{r})$$
$$+ \omega^2 ad[\lambda(\Theta\Delta_2 - \Delta\Theta_2) + \mu(\Theta\Delta_1 - \Delta\Theta_1)],$$

ou encore, en vertu de l'identité (6),

$$(10)\qquad \Delta^2\varpi_\omega = a\lambda\mathfrak{r}^2 + d\mu\mathfrak{y}^2 - 2\omega\Theta ad(\lambda\mathfrak{y} - \mu\mathfrak{r}) + \frac{\omega^2\Delta}{3}(\lambda\mathfrak{Y} - \mu\mathfrak{X}).$$

II.

5. La courbe $\mathfrak{K}^3$ et sa hessienne $\mathfrak{H}^3$ déterminent un faisceau tangentiel; en désignant, pour un instant, par $F_0(u, v, w) = 0$ l'équation tangentielle de la hessienne, et par ρ un paramètre arbitraire, l'une quelconque des courbes de ce faisceau a pour équation tangentielle $F + 6\rho F_0 = 0$; je la désignerai par la notation $\mathfrak{K}_\rho$. Son équation mixte étant $U_\rho = 0$, la relation (7) donne immédiatement

$$(11)\qquad \Delta U_\rho = 6\rho H(\lambda, \mu)(\lambda\mathfrak{Y} - \mu\mathfrak{X}) + (\Delta - 6\rho\Theta^2)U(\lambda, \mu).$$

Les deux courbes du sixième ordre K^6 et $(G^3)^2$ déterminent également un faisceau ponctuel; l'une quelconque des courbes de ce faisceau a pour équation

$$\Delta - 6\rho\Theta^2 = 0;$$

je la désignerai par la notation K_ρ, et je dirai que deux courbes des faisceaux (K_ρ) et $(\mathfrak{K}_\rho)$, données par la même valeur de ρ, sont *correspondantes*.

6. Cherchons d'abord la signification géométrique des polynomes $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ qui s'introduisent, comme on l'a vu, d'une façon si simple et si naturelle, dans la recherche de l'équation mixte de la hessienne.

Soit M un point du plan, dont les coordonnées soient x et y; par ce point passe une courbe du faisceau (K_ρ), la valeur du paramètre ρ correspondant à cette courbe étant déterminée par la relation

$$(12)\qquad \Delta - 6\rho\Theta^2 = 0.$$

Le coefficient angulaire $\frac{\mu'}{\lambda'}$ de la tangente menée, en ce point, à la courbe est donné par la relation

$$\frac{\mu'}{\lambda'} = \frac{\Delta^2 - 6\rho\Theta\Theta_2}{\Delta_1 - 6\rho\Theta\Theta_1}.$$

ou, si l'on remplace ρ par sa valeur déduite de l'équation (12),

$$\frac{\mu'}{\lambda'} = \frac{\Theta\Delta_2 - \Delta\Theta_2}{\Theta\Delta_1 - \Delta\Theta_1}.$$

De là et de l'équation (6) résulte l'identité suivante

$$(13)\qquad \lambda\mathfrak{Y} - \mu\mathfrak{X} = \lambda'(A\lambda + B\mu) + \mu'(B\lambda + C\mu),$$

dont il est facile de voir la signification géométrique.

7. A cet effet, je remarque que, du point M, on peut mener à la courbe $\mathfrak{K}^3$ trois tangentes dont les coefficients angulaires sont déterminés par l'équation $U(\lambda, \mu) = 0$. L'équation $H(\lambda, \mu) = 0$ détermine également les coefficients angulaires de deux droites passant par le même point : je dirai que ces droites sont les *hessiennes du point* M *relativement à la courbe* $\mathfrak{K}^3$. Je dirai encore que la droite passant par le point M et ayant pour coefficient angulaire $\frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}}$ est l'*axe de ce point relativement à la courbe*. Cela posé, de l'équation (12) résulte la proposition suivante :

Si en un point M *du plan on considère l'axe et les hessiennes de ce point relativement à cette courbe, la conjuguée harmonique de l'axe, relativement aux hessiennes, se confond avec la tangente, menée au point* M, *à la courbe du faisceau* K_ρ, *qui passe en ce point.*

8. Imaginons qu'une droite se meuve tangentiellement à la courbe $\mathfrak{K}_\rho$; le lieu des intersections de cette droite avec sa conique polaire relativement à $\mathfrak{K}^3$ s'obtient en éliminant λ et μ entre l'équation mixte de $\mathfrak{K}_\rho$ et l'équation $H(\lambda, \mu) = 0$ (F. B., n° 7); ou bien, en vertu de l'équation (10), en éliminant λ et μ entre les équations

$$H(\lambda, \mu) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\Delta - 6\rho\Theta^2}{\Delta} - U(\lambda, \mu) = 0.$$

Le résultat de l'élimination est évidemment

$$\Delta - 6\rho\Theta^2 = 0.$$

D'où la proposition suivante :

Si une droite se meut tangentiellement à une courbe du faisceau ($\mathfrak{K}_\rho$), *le lieu des points où elle rencontre sa conique polaire, relativement à* $\mathfrak{K}^3$, *est la courbe correspondante du faisceau* (K_ρ).

9. Soit un point M ayant pour coordonnées x et y, et situé sur la courbe K_ρ; comme l'on a

$$\Delta - 6\rho\Theta^2 = 0,$$

il résulte de l'équation (10) que les coefficients angulaires des tangentes menées de ce point à la courbe $\mathfrak{K}_\rho$ sont déterminés par l'équation

$$H(\lambda, \mu)(\lambda\mathfrak{Y} - \mu\mathfrak{X}) = 0.$$

D'où ce théorème :

Les trois tangentes que, d'un point de la courbe $\mathfrak{K}_\rho$, *on peut mener à la courbe correspondante du faisceau* ($\mathfrak{K}_\rho$), *se confondent avec l'axe et les hessiennes de ce point relativement à* $\mathfrak{K}^3$.

10. Considérons une courbe quelconque du faisceau ($\mathfrak{K}_\rho$); une tangente à cette courbe rencontre la courbe correspondante du faisceau (K_ρ) en six points, dont deux sont situés sur la conique polaire de la tangente, relativement à $\mathfrak{K}^3$ (n° 8). On sait, d'ailleurs, en vertu de la proposition précédente, que, par chacun de ces six points, la tangente considérée est un axe ou une hessienne de ce point relativement à $\mathfrak{K}^3$. Il est clair qu'elle est une hessienne pour les deux points situés sur la conique polaire, et seulement pour ces points; elle est donc un axe pour les quatre autres. D'où les conséquences suivantes :

Toute tangente à une courbe du faisceau ($\mathfrak{K}_\rho$) *rencontre la courbe correspondante du faisceau* (K_ρ) *en six points; deux de ces points sont situés sur la conique polaire de la tangente, relativement à* $\mathfrak{K}^3$. *Chacun des quatre autres jouit de la propriété que son axe, relativement à* $\mathfrak{K}^3$, *se confond avec la tangente considérée* (¹).

L'enveloppe des axes, relativement à $\mathfrak{K}^3$, *des divers points d'une courbe quelconque du faisceau* (K_ρ), *est la courbe correspondante du faisceau* ($\mathfrak{K}_\rho$).

11. Considérons un point M du plan ayant pour coordonnées ξ et η; l'équation de sa droite polaire, relativement à la courbe K^6, a pour équation

$$\omega = x\frac{d\Delta}{d\xi} + y\frac{d\Delta}{d\eta} + z\frac{d\Delta}{d\zeta} = 0.$$

Relativement à cette droite, on a

$$u = \frac{d\Delta}{d\xi}, \qquad v = \frac{d\Delta}{d\eta} \qquad \text{et} \qquad w = \frac{d\Delta}{d\zeta},$$

et, par suite,

$$6\mathfrak{x} = \left(x\frac{d\Delta}{d\xi} + y\frac{d\Delta}{d\eta} + z\frac{d\Delta}{d\zeta}\right)\frac{d\Delta}{dy} - 6\Delta\frac{d\Delta}{d\eta},$$
$$6\mathfrak{y} = -\left(x\frac{d\Delta}{d\xi} + y\frac{d\Delta}{d\eta} + z\frac{d\Delta}{d\zeta}\right)\frac{d\Delta}{dx} + 6\Delta\frac{d\Delta}{d\xi}.$$

On voit, par ces formules, que $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$ s'annulent pour $x = \xi$ et $y = \eta$.

Désignons par D la droite précédente, et par m son pôle, relativement à la courbe $\mathfrak{K}^3$; l'équation mixte de ce pôle est (n° 4),

$$a\lambda\mathfrak{x}^2 + d\mu\mathfrak{y}^2 - 2\omega\Theta ad(\lambda\mathfrak{y} + \mu\mathfrak{x}) + \frac{\omega^2\Delta}{3}(\lambda\mathfrak{Y} - \mu\mathfrak{X}) = 0;$$

(¹) Des théorèmes corrélatifs ont évidemment lieu relativement aux courbes du troisième ordre; j'ai déjà donné sans démonstration ces théorèmes dans une Note *Sur les courbes du troisième ordre*, insérée dans le *Bulletin de la Société mathématique*, t. IV, p. 110.

et le coefficient angulaire de la droite Mm est donné par la formule précédente, quand on y fait $x=\xi$ et $y=\eta$. Comme je l'ai fait voir, $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$ s'annulent alors, et le coefficient angulaire cherché est déterminé par l'équation $\lambda\mathfrak{Y}-\mu\mathfrak{X}=0$, où x et y doivent être respectivement remplacés par ξ et η.

D'où la proposition suivante :

Étant donné un point quelconque du plan M, *si l'on désigne par m le pôle, relativement à* $\mathfrak{K}^3$, *de la droite polaire du point* M, *relativement à* K^6, *la droite* Mm *est l'axe du point* M, *relativement à* $\mathfrak{K}^3$.

III.

12. L'équation mixte de la polaire de la droite

$$\omega = ux+vy+wz=0$$

est

$$a\mathfrak{x}\lambda^2+d\mathfrak{y}\mu^2-2ad\omega\Theta\lambda\mu=0.$$

Supposons, comme ci-dessus, que la droite considérée soit la polaire, relativement à K^6, du point dont les coordonnées sont ξ, η, ζ. Les coefficients angulaires des tangentes menées de ce point à la conique polaire de la droite sont déterminés par l'équation précédente quand on y fait $x=\xi$ et $y=\eta$. Les fonctions $\mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$ devenant alors identiquement nulles, l'équation se réduit à $H(\lambda, \mu)=0$.

Donc :

Étant donné un point quelconque M *du plan, si l'on considère la droite polaire de ce point, relativement à la courbe* $\mathfrak{K}^6$, *puis la conique polaire de cette droite, relativement à la courbe* $\mathfrak{K}^3$, *les tangentes menées du point* M *à cette conique sont les hessiennes du point* M, *relativement à* $\mathfrak{K}^3$ (1).

13. Soit M un point du plan ayant pour coordonnées x et y. Supposons ce point placé sur la hessienne de $\mathfrak{K}^3$; on a alors $\Theta=0$,

(1) Il est à peine nécessaire de rappeler que $\mathfrak{K}^3$ et K^6 désignent la même courbe; la première notation étant employée quand on considère cette courbe comme étant de troisième classe, et la seconde quand on la considère comme étant du sixième degré.

et les coefficients angulaires des tangentes, menées du point M à la conique polaire de la droite $\omega=0$, sont déterminés par les racines de l'équation

$$a\mathfrak{x}\lambda^2+d\mathfrak{y}\mu^2=0. \tag{14}$$

Il est facile d'interpréter géométriquement ce résultat. Désignons, pour un instant, par ξ, η, ζ les coordonnées courantes, et soit

$$\eta-y=k(x-\xi)$$

l'équation de la droite qui joint le point M au point où sa droite polaire, relativement à K^6, rencontre la droite $\omega=0$.

Le coefficient k se déterminera en exprimant que les trois droites

$$k\xi+\eta-\zeta(y+kx)=0,$$
$$\xi\frac{d\Delta}{dx}+\eta\frac{d\Delta}{dy}+\zeta\frac{d\Delta}{dz}=0,$$
$$u\xi+v\eta+w\zeta=0$$

se coupent en un même point.

Un calcul facile donne

$$k=\frac{6u\Delta-\omega\dfrac{d\Delta}{dx}}{\omega\dfrac{d\Delta}{dy}-6v\Delta}=\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}},$$

et de l'équation (14) résulte immédiatement la conséquence suivante :

Étant donnée une droite quelconque D *du plan, et étant pris arbitrairement un point* M *sur la cayleyenne de la courbe* $\mathfrak{K}^3$, *désignons par m le point où la droite* D *est rencontrée par la droite polaire du point* M, *relativement à* K^6. *Cela posé, les deux tangentes, que l'on peut du point* M *mener à la conique polaire de* D, *relativement à* $\mathfrak{K}^3$, *sont les deux droites qui constituent la conique polaire de la droite* Mm, *relativement aux trois tangentes que l'on peut mener du point* M *à la courbe* $\mathfrak{K}^3$.

IV.

14. Les coniques polaires, relativement à $\mathfrak{K}^3$, des diverses droites qui passent par un point donné M du plan, sont inscrites

dans un quadrilatère dont les côtés ont pour pôle M. Soient ξ, η, ρ les coordonnées du point M ; il est facile d'obtenir en coordonnées cartésiennes l'équation des côtés de ce quadrilatère.

Considérons, en effet, les deux droites $x - \xi = 0$ et $y - \eta = 0$, qui se croisent au point M ; relativement à la première droite, on aura, en posant, pour abréger, $x - \xi = X$ et $y - \eta = Y$, $\omega = X$, $u = 1$, $v = 0$, et, par suite, $\mathfrak{r} = X\Delta_1$ et $\mathfrak{y} = \Delta + X\Delta_2$. Relativement à la seconde, on aura $\omega = Y$, $u = 0$, $v = 1$ et, par suite,

$$\mathfrak{r} = -\Delta Y \Delta_1 \quad \text{et} \quad \mathfrak{y} = Y\Delta_2;$$

je désignerai ces deux dernières expressions par $\mathfrak{r}'$ et $\mathfrak{y}'$.

Cela posé, les équations mixtes des coniques polaires des droites $X = 0$ et $Y = 0$ sont respectivement

$$\frac{a\mathfrak{r}\lambda^2 + d\mathfrak{y}\mu^2 - 2adX\Theta\lambda\mu}{\Delta^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{a\mathfrak{r}'\lambda^2 + d\mathfrak{y}'\mu^2 - 2adY\Theta\lambda\mu}{\Delta^2} = 0.$$

Si l'on représente par T le résultant de ces deux équations, il est clair que $T = 0$ est l'équation des quatre tangentes communes aux polaires des diverses droites qui se croisent au point M.

Une formule bien connue donne

$$\begin{aligned}\Delta^4 T &= a^2 d^2(\mathfrak{r}\mathfrak{y}' + \mathfrak{y}\mathfrak{r}' - 2ad\Theta^2 XY)^2 \\ &\quad - 4(ad\,\mathfrak{r}\mathfrak{y} - \Delta\Theta^2 X^2)(ad\,\mathfrak{r}'\mathfrak{y}' - \Delta\Theta^2 Y^2) \\ &= a^2 d^2(\mathfrak{r}\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}\mathfrak{r}')^2 + 4\Delta\Theta^2 ad(Y\mathfrak{r} - X\mathfrak{r}')(Y\mathfrak{y} - X\mathfrak{y}').\end{aligned}$$

En remplaçant $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{r}'$ et $\mathfrak{y}'$ par leurs valeurs données ci-dessus, un calcul facile donne

$$\mathfrak{r}\mathfrak{y}' - \mathfrak{y}\mathfrak{r}' = \frac{\Delta}{6}\left(\xi\frac{d\Delta}{dx} + \eta\frac{d\Delta}{dy} + \zeta\frac{d\Delta}{dz}\right),$$

$$Y\mathfrak{y} - X\mathfrak{r}' = X\Delta \quad \text{et} \quad Y\mathfrak{y} - X\mathfrak{y}' = Y\Delta.$$

Il vient donc définitivement

$$\Delta T = \frac{1}{36}\left(\xi\frac{d\Delta}{dx} + \eta\frac{d\Delta}{dy} + \zeta\frac{d\Delta}{dz}\right)^2 + 4\Theta^2 H(X, Y). \tag{15}$$

15. On peut donc remarquer que l'équation

$$\xi\frac{d\Delta}{dx} + \eta\frac{d\Delta}{dy} + \zeta\frac{d\Delta}{dz} = 0$$

représente la polaire P du point M, relativement à la courbe K^6.

De l'équation (15) résulte que les quatre tangentes communes aux coniques polaires des droites qui se croisent au point M rencontrent la cayleyenne de $\mathfrak{K}^3$ aux points où cette courbe rencontre P, les neuf points de rebroussement de $\mathfrak{K}^3$ étant exceptés. Ces points de rencontre sont évidemment, d'ailleurs, au nombre de six, et chacun d'eux doit être compté deux fois.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Les tangentes communes aux coniques polaires des diverses droites qui se croisent en un point M *forment un quadrilère dont les six sommets sont situés à la fois sur la cayleyenne et sur la première polaire du point* M, *relativement à la courbe* K^6.

16. Si l'on considère x, y et z comme des quantités données, coordonnées d'un point N du plan, et ξ, η et ζ comme des coordonnées variables, il est clair que l'équation

$$\frac{1}{36}\left(\xi\frac{d\Delta}{dx} + \eta\frac{d\Delta}{dy} + \zeta\frac{d\Delta}{dz}\right)^2 + 4\Theta^2 H(X, Y) = 0$$

représente le lieu des pôles, relativement à $\mathfrak{K}^3$, des droites que l'on peut mener par le point N. On voit que ce lieu est une conique ; l'équation $H(X, Y) = 0$ représente les hessiennes du point N. Donc :

Le lieu des pôles relativement à $\mathfrak{K}^3$ *des droites qui passent par un point donné* N *est une conique tangente aux deux hessiennes du point* N, *et la corde de contact est la polaire du point* N, *relativement à* K^6.

Si le point N est sur la cayleyenne, $\Theta = 0$, et l'équation précédente se réduit à son premier terme. Donc :

Le lieu des pôles relativement à $\mathfrak{K}^3$ *des droites qui passent par un point donné de la cayleyenne de cette courbe est la polaire de ce point relativement à* K^6.

SUR LA DÉTERMINATION

EN UN POINT D'UNE SURFACE DU SECOND ORDRE,

DES AXES DE L'INDICATRICE

ET

DES RAYONS DE COURBURE PRINCIPAUX.

Journal de Mathématiques pures et appliquées; 1878.

I.

1. Soient une surface de second ordre $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1$ et un point M de cette surface dont les coordonnées soient ξ, η, ζ. On a la relation

$$\frac{\xi^2}{a}+\frac{\eta^2}{b}+\frac{\zeta^2}{c}=1, \tag{1}$$

et les coordonnées d'un point quelconque de la normale menée au point M sont données par les formules

$$x=\xi\left(1+\frac{\lambda}{a}\right),\qquad y=\eta\left(1+\frac{\lambda}{b}\right),\qquad z=\zeta\left(1+\frac{\lambda}{c}\right),$$

où λ détermine un paramètre variable. Je supposerai λ déterminé de telle sorte que le point considéré soit un des centres de courbure principaux de la surface au point M.

En désignant, pour un instant, par x_0, y_0 et z_0 les coordonnées de ce point, les pieds des normales abaissées de ce point sur la surface sont, comme on le sait, déterminés par les équations

$$\frac{x_0-x}{\frac{x}{a}}=\frac{y_0-y}{\frac{y}{a}}=\frac{z_0-z}{\frac{z}{a}}=\rho,$$

où ρ désigne une racine quelconque de l'équation

$$\frac{ax_0^2}{(a+\rho)^2}+\frac{by_0^2}{(b+\rho)^2}+\frac{cz_0^2}{(c+\rho)^2}=1,$$

que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$\frac{(a+\lambda)^2\xi^2}{a(a+\rho)^2}+\frac{(b+\lambda)^2\eta^2}{b(b+\rho)^2}+\frac{(c+\lambda)^2\zeta^2}{c(c+\rho)^2}=1.$$

Puisque, par hypothèse, le point (x_0, y_0, z_0) est un des centres de courbure principaux de la surface au point M, l'équation précédente en ρ doit avoir une racine double égale à λ; cette équation est, en effet, en vertu de la relation (1), identiquement satisfaite quand on y fait $\rho=\lambda$; mais, de plus, la dérivée doit encore s'annuler pour cette valeur; d'où l'équation suivante

$$\frac{\xi^2}{a(a+\lambda)}+\frac{\eta^2}{b(b+\lambda)}+\frac{\zeta^2}{c(c+\lambda)}=0, \tag{2}$$

qui donne les valeurs de λ, déterminant les deux centres de courbure principaux au point M.

2. Les pieds des normales abaissées du point $(x_0, y_0; z_0)$ sur la surface se trouvent sur la cubique gauche déterminée par les équations

$$xy\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\frac{yx_0}{b}-\frac{xy}{a}=0,\qquad yz\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+\frac{zy_0}{c}-\frac{yz_0}{b}=0,$$
$$zx\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)+\frac{xz_0}{a}-\frac{zx_0}{c}=0;$$

multiplions la première de ces équations par z_0, la deuxième par x_0 et la troisième par y_0, il viendra

$$xyz_0\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+yzx_0\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+zxy_0\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)=0,$$

équation du cône ayant pour sommet le centre de la surface et contenant les pieds des normales.

Il est clair que le plan tangent à ce cône au point (ξ, η, ζ) est le plan passant par le centre de la surface et l'axe de l'indicatrice au point M, qui correspond au centre de courbure considéré.

L'équation de ce plan tangent est

$$\sum x\left[\eta z_0\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\zeta y_0\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)\right]=0,$$

ou, en remplaçant x_0, y_0 et z_0 par leurs valeurs et faisant quelques réductions faciles,

$$(3)\qquad (a+\lambda)(b-c)\frac{x}{\xi}+(b+\lambda)(c-a)\frac{y}{\eta}+(c+\lambda)(a-b)\frac{z}{\zeta}=0.$$

3. Soient λ' et λ'' les deux racines de l'équation (2), elles correspondent aux deux axes de l'indicatrice et aux deux centres de courbure principaux corrélatifs.

De ce que je viens de dire il résulte que le plan passant par le centre de la surface et l'un des axes de l'indicatrice a pour équation

$$(4)\qquad (a+\lambda')(b-c)\frac{x}{\xi}+(b+\lambda')(c-a)\frac{y}{\eta}+(c+\lambda')(a-b)\frac{z}{\zeta}=0.$$

Considérons le centre de courbure principal N correspondant à l'autre axe de l'indicatrice; les coordonnées sont données par les formules

$$x=\xi\left(1+\frac{\lambda''}{a}\right),\qquad y=\eta\left(1+\frac{\lambda''}{b}\right),\qquad z=\zeta\left(1+\frac{\lambda''}{c}\right).$$

Soient A, B, C les points où la normale MN rencontre respectivement les plans principaux de la surface Oyz, Ozx et Oxy.

Les coordonnées du point C sont

$$x=\xi\left(1+\frac{c}{a}\right),\qquad y=\eta\left(1+\frac{c}{b}\right),\qquad z=0.$$

Par ce point menons un plan perpendiculaire à la normale et prenons son intersection avec la droite menée, par le point N, parallèlement à l'axe des z. En désignant par C′ ce point, un calcul facile montre que ses coordonnées ont pour valeurs

$$x=\xi\left(1+\frac{\lambda''}{a}\right),\qquad y=\eta\left(1+\frac{\lambda''}{b}\right),\qquad z=\zeta\left(1+\frac{\lambda''}{c}\right)-\frac{c(c+\lambda'')}{\zeta}\mathrm{P},$$

où j'ai posé, pour abréger,

$$\mathrm{P}=\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}.$$

Menons de même, par le point B, un plan perpendiculaire à MN et désignons par B′ le point où ce plan rencontre la droite menée par F parallèlement à l'axe des y; ses coordonnées seront données par les formules

$$x=\xi\left(1+\frac{\lambda''}{a}\right),\quad y=\eta\left(1+\frac{\lambda''}{b}\right)-\frac{b(b+\lambda'')}{\eta}\mathrm{P},\qquad z=\zeta\left(1+\frac{\lambda''}{c}\right).$$

Désignons enfin par A′ le point où la droite menée par le point N, parallèlement à l'axe des x, rencontre le plan mené par A perpendiculairement à MN.

Le plan, passant par le centre O de la surface et les points B′ et C′, a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \xi\left(1+\frac{\lambda''}{a}\right) & \eta\left(1+\frac{\lambda''}{b}\right) & \zeta\left(1+\frac{\lambda''}{c}\right)-\frac{c(c+\lambda'')}{\zeta}\mathrm{P} \\ \xi\left(1+\frac{\lambda''}{a}\right) & \eta\left(1+\frac{\lambda''}{b}\right)-\frac{b(b+\lambda'')}{\eta}\mathrm{P} & \zeta\left(1+\frac{\lambda''}{c}\right) \end{vmatrix}=0,$$

ou, en effectuant les calculs,

$$(5)\qquad \frac{\xi x}{a(a+\lambda'')}+\frac{\eta y}{b(b+\lambda'')}+\frac{\zeta z}{c(c+\lambda'')}=0.$$

Cette équation étant symétrique par rapport aux lettres x, y et z, on en conclut que le plan OB′C′ passe par le point A′. Ainsi, les trois points A′, B′ et C′ sont situés dans un même plan passant par le centre de la surface.

Je dis maintenant que ce plan passe par l'axe de l'indicatrice au point M, qui correspond au centre de courbure principal distinct de N.

L'équation (2) donne en effet l'identité suivante

$$\frac{\xi^2}{a}(b+\lambda)(c+\lambda)+\frac{\eta^2}{b}(c+\lambda)(a+\lambda)+\frac{\zeta^2}{c}(a+\lambda)(b+\lambda)=(\lambda-\lambda')(\lambda-\lambda''),$$

d'où, en faisant $\lambda=-a$,

$$a(a+\lambda'')=-\frac{\xi^2(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+\lambda')(b-c)},$$

et de même

$$b(b+\lambda'') = -\frac{\eta^2(a-b)(b-c)(c-a)}{(b+\lambda')(c-a)},$$
$$c(c+\lambda'') = -\frac{\xi^2(a-b)(b-c)(c-a)}{(c+\lambda')(a-b)}.$$

Portons ces valeurs dans l'équation (5), il viendra

$$\frac{x(a+\lambda')(b-c)}{\xi} + \frac{y(b+\lambda')(c-a)}{\eta} + \frac{z(c+\lambda')(a-b)}{\zeta} = 0;$$

c'est précisément, comme on le voit par la relation (4), l'équation du plan passant par le centre de la surface et l'axe de l'indicatrice conjugué au centre principal de courbure distinct de N. La proposition est donc démontrée.

4. De là résulte immédiatement le théorème suivant :

Théorème I. — *Soient un point* M *situé sur une surface du second ordre,* MT *et* MT′ *les tangentes aux deux lignes de courbure qui se croisent en ce point. Par la droite* MT′ *et le centre de la surface menons un plan* P; *puis, au point où la normale élevée au point* M *rencontre un des plans de symétrie de la surface, un plan perpendiculaire à cette normale. Ce plan coupe le plan* P *suivant une droite; par cette droite menons un plan perpendiculaire au plan de symétrie considéré. Ce dernier plan rencontre la normale au centre de courbure de la section normale de la surface qui est tangente à la droite* MT [1].

5. La normale, menée à la surface par le point M, rencontre les trois points de symétrie de cette surface aux points A, B et C.

Menons par ces points des droites respectivement perpendiculaires à ces plans de symétrie. Ces droites, qui ont pour équation

$$x = \xi\left(1-\frac{c}{a}\right), \quad y = \eta\left(1-\frac{c}{b}\right),$$
$$y = \eta\left(1-\frac{a}{b}\right), \quad z = \zeta\left(1-\frac{a}{c}\right),$$
$$z = \zeta\left(1-\frac{b}{c}\right), \quad x = \xi\left(1-\frac{b}{a}\right),$$

sont trois génératrices d'un hyperboloïde H; je dirai que ces génératrices sont du système (G). Cet hyperboloïde admet un autre système de génération (G′); trois des génératrices de ce système sont, en particulier, déterminées par les équations

$$(6) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= \xi\left(1-\frac{b}{a}\right), & y &= \eta\left(1-\frac{a}{b}\right), \\ y &= \eta\left(1-\frac{c}{b}\right), & z &= \zeta\left(1-\frac{b}{c}\right), \\ z &= \zeta\left(1-\frac{a}{c}\right), & x &= \xi\left(1-\frac{c}{a}\right). \end{aligned}\right.$$

Considérons le centre de courbure N de la surface, situé sur la normale au point N et correspondant à l'axe de l'indicatrice MT.

La génératrice de l'hyperboloïde H, passant par N et appartenant au système (G), se détermine facilement par la condition qu'elle rencontre les droites définies par les équations (6); on trouve ainsi que ses équations sont

$$\frac{x-\xi\left(1+\frac{\lambda''}{a}\right)}{\frac{\xi}{a(a+\lambda'')}} = \frac{y-\eta\left(1+\frac{\lambda''}{b}\right)}{\frac{\eta}{b(b+\lambda'')}} = \frac{z-\zeta\left(1+\frac{\lambda''}{c}\right)}{\frac{\zeta}{c(c+\lambda'')}}.$$

En les comparant à l'équation (5), on en conclut immédiatement que cette génératrice est perpendiculaire au plan OMT′.

D'où la proposition suivante :

Théorème II. — *La normale, menée en un point* M *d'une surface du second ordre, rencontre les plans principaux de cette surface en trois points. Menons respectivement par ces points trois droites* (D) *perpendiculaires aux plans principaux; elles déterminent un hyperboloïde.*

Cela posé, on peut construire deux génératrices de cet

[1] Ce théorème est l'extension aux surfaces du second ordre d'une élégante proposition due à M. Mannheim :

Si, au point où la normale, élevée en un point M *d'une conique, rencontre un axe de cette conique, on mène une droite perpendiculaire à cette normale, la droite, passant par le point de rencontre de cette perpendiculaire avec le diamètre qui aboutit au point* M, *et menée perpendiculairement à l'axe considéré, rencontre la normale au centre du cercle osculateur en* M.

hyperboloïde, appartenant au même système que les droites (D) *et perpendiculaires au diamètre passant par le point* M. *Ces génératrices rencontrent la normale aux deux centres de courbure principaux de la surface relatifs au point* M *et les plans menés par le diamètre, perpendiculairement à ces deux génératrices, coupent le plan tangent en* M, *suivant les axes de l'indicatrice.*

Il est à remarquer qu'en désignant par MT et MT′ les tangentes à l'indicatrice, et par N, N′ les centres de courbure des sections normales correspondantes, le plan mené par OM perpendiculairement à la génératrice de l'hyperboloïde passant par le point N coupe le plan tangent suivant la droite MT′.

II.

6. Les trois axes d'une surface du second ordre étant donnés de position, cette surface est déterminée si l'on se donne un de ses points m et la normale en ce point. Ces données sont donc suffisantes pour obtenir en ce point les directions des axes de l'indicatrice et les centres de courbure principaux.

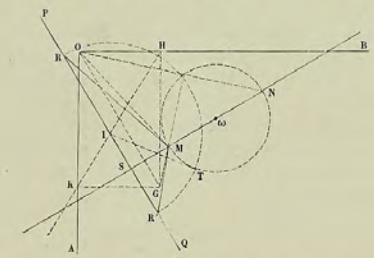
A cet effet, on peut, pour déterminer les axes de l'indicatrice, employer la construction suivante :

Soient OA *et* OB *deux des axes de la surface du second ordre,* M *la projection du point* m *sur le plan de ces axes,* N *et* PQ *les traces sur ce même plan de la normale et du plan tangent au point* M; PQ *est, comme on le sait, perpendiculaire à* MN.

Construisons le point de rencontre G *des hauteurs du triangle* OMN; *puis, de ce point, abaissons des perpendiculaires* GH *et* GK *sur les axes* OA *et* OB. *La droite* KH, *qui joint leurs pieds, rencontre* PQ *au point* I. *Menons du point* I, *au cercle décrit sur* MN *comme diamètre, une droite touchant ce cercle au point* T, *et, du point* I *comme centre, décrivons un cercle ayant* IT *pour rayon : ce cercle rencontre* PQ *en deux points* R *et* R′.

Les droites MR *et* MR′ *sont les projections sur le plan* OAB *des axes de l'indicatrice au point* M.

Démonstration. — Soient mL un des axes de l'indicatrice au point m et F le centre de courbure de la section normale correspondante. Deux des normales, que l'on peut mener du point F à la surface, ont leurs pieds en m et un point m' situé à une distance infiniment petite, sur l'axe mL; on sait d'ailleurs que les pieds



des normales, le point F et les quatre sommets du tétraèdre formé par les plans principaux de la surface et le plan de l'infini, sont situés sur une même cubique gauche. Il en résulte que, si l'on joint le point m au point m', au point F et aux quatre sommets du tétraèdre, on a six droites situées sur un même cône du second ordre.

En d'autres termes, les droites menées par le point m parallèlement aux axes de la surface, la normale en ce point, le diamètre passant par ce point et l'axe de l'indicatrice mT, sont sur un même cône du second ordre. On voit que ce cône est circonscrit à un trièdre trirectangle; par suite, et en vertu d'une proposition bien connue, le deuxième axe mT′ de l'indicatrice au point m, étant perpendiculaire aux deux génératrices mT et mF du cône, est également situé sur ce cône.

Considérons les traces de ces six droites sur le plan OAB; elles sont situées sur une même conique; d'où cette conclusion :

Les traces des axes de l'indicatrice sur le plan OAB sont données par l'intersection de la droite PQ avec l'hyperbole équilatère passant par les points O, M, N, et ayant ses asymptotes parallèles aux droites OA et OB.

Pour construire ces points d'intersection, je remarque que le point G, où se rencontrent les hauteurs du triangle OMN, est situé sur cette hyperbole. Si donc du point G on abaisse des perpendiculaires sur les axes OA et OB, la droite HK, qui joint leurs pieds, est le diamètre de l'hyperbole conjuguée à la direction PQ. En effet, cette droite fait avec les axes des angles égaux à ceux que fait avec ces axes la droite PQ, et, de plus, elle passe par le point milieu de la corde OG de l'hyperbole, corde parallèle à PQ. Le point I, où KH rencontre PQ, est donc le point milieu des deux points R et R', où les axes de l'indicatrice rencontrent la trace du plan tangent.

Pour achever de déterminer ces points, je remarque que l'angle RmR' est droit. Considérons la perpendiculaire abaissée du point m sur PQ; le pied de cette perpendiculaire est le point S, où PQ rencontre MN. On a

$$\overline{SR}.\overline{SR'} = \overline{mS}^2 = \overline{SM}.\overline{SN};$$

ou bien encore, si l'on désigne par ω le centre du cercle décrit sur MN comme diamètre, et par ρ le rayon de ce cercle,

$$\overline{IR}^2 - \overline{IS}^2 = \overline{S\omega}^2 - \rho^2;$$

d'où l'on conclut que les cercles, décrits respectivement sur RR' et MN comme diamètres, se coupent à angle droit; et de là résulte immédiatement la construction que j'ai donnée ci-dessus.

7. Pour déterminer maintenant les projections sur le plan AOB des centres de courbure principaux de la surface au point m, il suffit d'inscrire une parabole dans chacun des quadrilatères formés respectivement par les droites OA, OB, MN, MR et OA, OB, MN, MR'. Les points de contact de ces paraboles avec la droite MN sont les projections cherchées des centres de courbure principaux, et ils se déterminent, comme on le sait, très facilement au moyen de simples lignes droites.

Cette construction est justifiée par le théorème suivant :

Si, sur le plan de deux des axes de symétrie OA *et* OB *d'une surface de second ordre, on projette la normale en un point m de cette surface et l'un des axes de l'indicatrice en ce point, la parabole, tangente aux projections de ces deux droites et aux axes* OA *et* OB, *touche la projection de la normale en un point qui est la projection du centre de courbure de la section normale passant par l'axe de l'indicatrice considérée.*

Démonstration. — Soient mL l'axe de l'indicatrice considérée et F le centre de courbure principal correspondant. Comme je l'ai déjà rappelé, deux des normales que l'on peut abaisser du point F sur la surface ont leurs pieds au point m et au point m' situé à une distance infiniment petite sur ML.

Soit p le pied d'une autre normale quelconque passant par le point F; on sait que les sommets du tétraèdre F$mm'p$ et du tétraèdre formé par les plans principaux de la surface et le plan à l'infini sont situés sur une même cubique gauche.

Par suite, en vertu d'un théorème connu, les faces de ces tétraèdres sont osculatrices d'une autre cubique gauche, et le plan normal principal Fmm' est coupé par les sept autres faces suivant cinq droites tangentes à une même conique.

En d'autres termes, le plan normal principal passant par mL coupe les trois plans principaux de la surface suivant trois droites. Ces trois droites et la normale au point m sont tangentes à une parabole touchant la normale au point F; par suite, les projections des trois droites et de la normale sont tangentes à une parabole touchant la projection de la normale, au point qui est la projection de F; d'où la proposition énoncée ci-dessus.

SUR CERTAINS RÉSEAUX SINGULIERS

FORMÉS

PAR DES COURBES PLANES.

Bulletin de la Société mathématique de France; 1877.

1. Dans tout ce qui suit, je considérerai z, ζ et les quantités analogues comme des quantités égales à l'unité et introduites seulement pour rendre les formules homogènes.

Cela posé, A, B et C désignant trois polynomes du $n^{\text{ième}}$ degré par rapport à x et y et liés par la relation

$$(1) \qquad Ax + By + Cz = 0,$$

on voit qu'en faisant varier ξ et η, l'équation

$$(2) \qquad A\xi + B\eta + C\zeta = 0$$

représente une infinité de courbes du $n^{\text{ième}}$ degré. Ces courbes forment un réseau, et l'on pourra généralement, par deux points pris arbitrairement dans le plan, faire passer une courbe appartenant à ce réseau.

Une telle courbe est déterminée par les valeurs particulières que l'on donne à ξ, η, ζ; il est clair d'ailleurs, en vertu de l'équation (1), que le point M, dont les coordonnées sont ξ, η, ζ, appartient à cette courbe; je dirai que le point M est son point principal.

Une courbe du réseau singulier (2) est évidemment déterminée par son point principal.

2. Toutes les courbes du réseau ont en commun tous les points communs aux courbes $A = 0$ et $C = 0$.

Pour déterminer le nombre de ces points, je remarque que, si l'on désigne respectivement par P et par Q l'ensemble des termes du degré n, par rapport à x et y, dans A et B, on a identiquement, en vertu de la relation (1),

$$Px + Qy = 0.$$

On a donc, U désignant un polynome homogène et du degré $(n-1)$ par rapport à x et y

$$(3) \qquad P = Uy \quad \text{et} \quad Q = -Ux.$$

Cela posé, les courbes $A = 0$ et $B = 0$ se coupent en n^2 points qui, en vertu de (1), se trouvent sur la courbe $Cz = 0$; des relations (3) il résulte, d'ailleurs, que $(n-1)$ de ces points d'intersection se trouvent sur la droite de l'infini $z = 0$; les $(n^2 - n + 1)$ autres points d'intersection se trouvent donc à la fois sur les trois courbes $A = 0$, $B = 0$ et $C = 0$.

D'où la conclusion suivante :

Toutes les courbes du réseau passent par $(n^2 - n + 1)$ points fixes.

Je dirai que ces points sont les pivots du réseau.

3. En vertu des équations (1) et (2), on voit que l'équation d'une quelconque des courbes du réseau peut se mettre sous la forme

$$A(x - \xi) + B(y - \eta) = 0,$$

ξ et η étant les coordonnées de son point principal.

Soit

$$A(x - \xi') + B(y - \eta') = 0$$

une autre courbe du réseau ayant pour point principal (ξ', η'); si A et B ne sont pas nuls en même temps, pour tout point commun aux deux courbes, on aura

$$\frac{y - \eta}{x - \xi} = \frac{y - \eta'}{x - \xi'}.$$

D'où la proposition suivante :

Indépendamment des $(n^2 - n + 1)$ points qui leur sont com-

muns, deux courbes quelconques du réseau se coupent en $(n-1)$ *autres points qui sont situés sur une même droite. Le* $n^{\text{ième}}$ *point où cette droite rencontre l'une quelconque des courbes est le point principal de cette courbe.*

4. De là se déduisent immédiatement quelques corollaires dont la démonstration est immédiate et qu'il suffit d'énoncer :

1° *Si deux courbes du réseau se coupent en* $(n-1)$ *points distincts des pivots, on peut par ces* $(n-1)$ *points faire passer une infinité de courbes du réseau; les points principaux de ces courbes sont situés sur la droite contenant les* $(n-1)$ *points d'intersection.*

2° *Étant donnée une courbe quelconque du réseau ayant pour point principal le point* M *et étant pris arbitrairement dans le plan le point* P, *si l'on mène* PM, *cette droite rencontre la courbe en* $(n-1)$ *points distincts du point* M; *ces* $(n-1)$ *points et le point P sont situés sur une courbe du réseau ayant pour point principal le point* P.

5. Les résultats qui précèdent peuvent encore s'énoncer ainsi : Étant donnée une droite dans le plan, les courbes du réseau, qui ont pour points principaux les différents points de la droite, ont en commun $(n-1)$ points situés sur cette droite; je les appellerai, pour abréger, les *points centraux* de la droite.

Cela posé, on peut énoncer la proposition suivante :

Si une droite tourne autour d'un point fixe, le lieu de ses points centraux est la courbe du réseau ayant ce point fixe pour point principal.

6. Étant pris un point quelconque M dans le plan, imaginons la courbe du faisceau ayant pour point principal le point M et menons par ce point les tangentes à la courbe dont le point de contact est distinct de M.

Je dis que ces droites sont tangentes à une même courbe K. En effet, MA étant l'une de ces tangentes et A le point où elle touche la courbe, si l'on désigne par M_1 un point quelconque de la droite MA : la courbe du réseau ayant M_1 pour point principal passe par

les $(n-1)$ points distincts de M où la première courbe coupe MA : elle rencontre donc MA en deux points confondus en A, et lui est tangente en ce point. Les deux faisceaux de droite émanant du point M et du point M_1 ont donc la droite MA en commun et la proposition est démontrée.

On peut, d'ailleurs, du point M, mener à la courbe du réseau qui a M pour point principal (n^2-n-2) tangentes ayant un point de contact distinct de M.

D'où le théorème suivant :

Si, de chaque point M *du plan, on mène à la courbe du réseau ayant ce point pour point principal les tangentes dont le point de contact est distinct de* M, *toutes ces droites enveloppent une même courbe* K, *qui est de la classe* (n^2-n-2).

7. Supposons le point M choisi de telle sorte que la courbe du réseau, qui a M pour point principal, possède un point double : deux des tangentes issues du point M coïncideront, d'où il suit que le point M est situé sur K.

D'où cette conclusion :

La courbe K *est le lieu des points principaux des courbes du réseau qui possèdent un point double.*

Si la courbe du réseau ayant (ξ, η) pour point principal a un point double, on a simultanément les trois équations

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\xi\frac{dA}{dx}+\eta\frac{dB}{dx}+\zeta\frac{dC}{dx}=0,\\ &\xi\frac{dA}{dy}+\eta\frac{dB}{dy}+\zeta\frac{dC}{dy}=0,\\ &\xi\frac{dA}{dz}+\eta\frac{dB}{dz}+\zeta\frac{dC}{dz}=0;\end{aligned}\right.$$

et l'équation de la courbe K s'obtiendra en éliminant x, y et z entre ces trois relations.

D'où il suit que :

La courbe K *est du degré* $3(n-1)$.

8. Des considérations qui précèdent résulte encore la proposition suivante :

Si, de chaque point M *du plan, on mène à la courbe du ré-*

seau dont ce point est le point principal les tangentes dont le point de contact est distinct de M, les points de contact de toutes ces tangentes sont situés sur une même courbe H, qui est aussi le lieu des points doubles des courbes du réseau.

Il est facile de démontrer analytiquement l'identité de ces deux lieux.

Il est clair, en effet, que l'équation du lieu des points doubles du réseau s'obtient en éliminant ξ, η, ζ entre les équations (4); cette équation est donc

$$\begin{vmatrix} \frac{dA}{dx} & \frac{dB}{dx} & \frac{dC}{dx} \\ \frac{dA}{dy} & \frac{dB}{dy} & \frac{dC}{dy} \\ \frac{dA}{dz} & \frac{dB}{dz} & \frac{dC}{dz} \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} \frac{dA}{dx} & \frac{dB}{dx} & \frac{dC}{dx} \\ \frac{dA}{dy} & \frac{dB}{dy} & \frac{dC}{dy} \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0,$$

ou, encore, puisque l'on a identiquement $C = -Ax - By$,

$$\begin{vmatrix} \frac{dA}{dx} & \frac{dB}{dx} & -A \\ \frac{dA}{dy} & \frac{dB}{dy} & -B \\ A & B & 0 \end{vmatrix} = A^2\frac{dB}{dy} - AB\left(\frac{dB}{dx} + \frac{dA}{dy}\right) + B^2\frac{dA}{dx} = 0.$$

D'autre part, soit

$$(5) \qquad A(x-\xi) + B(y-\eta) = 0$$

l'équation de la courbe du réseau ayant pour point principal le point (ξ, η); l'équation de la tangente au point (x, y) de cette courbe est

$$(X-x)\left[A + \frac{dA}{dx}(x-\xi) + \frac{dB}{dx}(y-\eta)\right] + (Y-y)\left[B + \frac{dA}{dy}(x-\xi) + \frac{dB}{dy}(y-\eta)\right] = 0;$$

en exprimant que cette tangente passe par le point (ξ, η), on aura la relation

$$(\xi - x)A + (\eta - y)B - \frac{dA}{dx}(x-\xi)^2 - \left(\frac{dB}{dx} + \frac{dA}{dy}\right)(x-\xi)(y-\eta) - \frac{dB}{dy}(y-\eta)^2 = 0.$$

Éliminant $(\xi - x)$ et $(\eta - y)$ entre cette relation et la relation (5), il vient

$$A^2\frac{dB}{dy} - AB\left(\frac{dB}{dx} + \frac{dA}{dy}\right) + B^2\frac{dA}{dx} = 0,$$

ce qui est bien l'équation que nous avions trouvée pour le lieu des points doubles du réseau.

La proposition que j'avais énoncée est donc vérifiée, et l'on voit en outre que la courbe H est du degré $3(n-1)$.

9. Soient deux courbes de degré n; supposons que $(n-1)$ de leurs n^2 points d'intersection soient situés sur une même ligne droite, je dis que leurs $(n^2 - n + 1)$ autres points d'intersection sont les pivots d'un réseau singulier de l'espèce de ceux que je viens d'examiner.

En effet, la propriété dont je parle étant projective, on peut supposer que la droite qui renferme $(n-1)$ des points d'intersection est la droite de l'infini; et, en choisissant convenablement les axes, on voit que les équations des deux courbes peuvent se mettre respectivement sous la forme

$$Py + Q = 0 \quad \text{et} \quad Px - Q' = 0,$$

Q et Q' désignant des polynomes du $(n-1)^{\text{ième}}$ degré en x et y, et P un polynome homogène et du même degré par rapport à ces variables. De là résulte immédiatement que l'équation

$$\xi(Q + Py) + \eta(Q' - Px) - \zeta(Qx + Q'y) = 0$$

est celle d'un réseau singulier ayant pour pivots les $(n^2 - n + 1)$ points d'intersection des deux courbes données qui ne sont pas situés à l'infini.

10. De là résulte encore que les courbes du troisième degré,

passant par sept points fixes, forment un réseau singulier du troisième ordre.

La courbe K est alors de la quatrième classe et du sixième degré : c'est donc la courbe la plus générale de la quatrième classe. Je ne m'étendrai pas sur ce sujet; c'est en effet des propriétés de ce réseau particulier que M. Aronhold a déduit la solution du problème suivant : *Construire la courbe de quatrième classe ayant sept points doubles donnés* (ou, pour parler plus exactement, du problème corrélatif : *construire la courbe du quatrième degré ayant pour tangentes doubles sept droites données*). Je renverrai à cet égard au Mémoire de l'illustre géomètre ([1]).

11. On sait que, généralement, les courbes du quatrième ordre qui passent par treize points fixes ont également en commun trois autres points parfaitement déterminés et forment un faisceau ([2]).

On voit néanmoins, par ce qui précède, que si deux courbes du quatrième ordre, passant par treize points donnés, se coupent en trois autres points situés en ligne droite, les courbes qui passent par ces treize points forment un faisceau; en d'autres termes, on peut toujours faire passer une de ces courbes par ces points et deux points pris arbitrairement dans le plan.

On peut, en outre, énoncer la proposition suivante :

Si, des seize points d'intersection de deux courbes du quatrième ordre, trois sont situés en ligne droite, deux courbes quelconques du même ordre passant par les treize autres points d'intersection se rencontrent en trois autres points qui sont également en ligne droite.

([1]) ARONHOLD, *Ueber den gegenseitigen Zusammenhang der 28 Doppeltangenten einer allgemeinen Curve 4ten Grades* (*Monatsbericht der K. P. A. zu Berlin*, 1864, p. 499).

([2]) SALMON, *Higher plane curves*, 2e édition, p. 16.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS

DES

FOYERS DES COURBES ALGÉBRIQUES

ET DES

FOCALES DES CONES ALGÉBRIQUES.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1879.

I.

1. Je m'appuierai sur la proposition suivante, que j'ai donnée dans ma Note *Sur les polaires d'une droite relativement aux courbes et aux surfaces algébriques* ([1]).

Étant données deux courbes quelconques K^m *et* K^n, *de classes respectivement égales à* m *et à* n, *la polaire d'un point quelconque* M, *relativement aux* mn *tangentes communes à ces courbes, est la polaire du même point relativement aux* mn *droites, qui joignent les points de contact des tangentes menées de* M *à* K^m *aux points de contact des tangentes menées du même point à* K^n.

Supposons, pour fixer les idées, que K^m soit une courbe réelle (ou du moins ayant une équation réelle), et soient $F_1, F_2, \ldots, F_m$ ses m foyers réels; supposons, en outre, que K^n se réduise aux deux ombilics I et J du plan ([2]).

Les tangentes communes à K^m et à K^n se composent des sys-

([1]) *Bulletin de la Société mathématique*, t. III, p. 174.

([2]) J'appelle ainsi, pour abréger, les deux points situés à l'infini et communs à tous les cercles du plan.

tèmes de droites isotropes, se croisant aux foyers $F_1, F_2, \ldots, F_m$. Étant donné un point quelconque M du plan, sa polaire relativement aux deux droites isotropes issues du foyer F_i est la droite menée par ce point perpendiculairement à MF_i; donc la polaire de M relativement aux tangentes communes à K^m et à K^n est la polaire de ce point relativement aux m droites menées respectivement par chacun des foyers perpendiculairement à la droite qui joint ce foyer au point M.

Considérons d'autre part les diverses droites isotropes qui passent par les points de contact des tangentes menées du point M à K^n; T désignant l'un quelconque de ces points de contact, la polaire du point M, relativement aux deux droites isotropes se croisant au point T, est la normale menée à la courbe en ce point.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Étant donnée une courbe de m^n classe, la polaire d'un point quelconque M *du plan, par rapport aux droites menées respectivement par chacun des m foyers réels de la courbe perpendiculairement à la droite qui joint ce foyer au point* M, *se confond avec la polaire de ce même point relativement aux droites menées normalement à la courbe aux points de contact des diverses tangentes issues du point* M.

Cette proposition peut encore s'énoncer sous la forme suivante :

Si par un point M, *pris dans le plan d'une courbe de classe m, on mène les nm droites tangentes à la courbe, le centre harmonique des n points de contact relativement au point* M *est le même que le centre harmonique des m foyers réels* (¹).

Mais cet énoncé, plus concis, est souvent d'un usage moins facile dans les applications, et l'autre, comme je le ferai voir, s'étend sans difficulté aux cônes algébriques.

(¹) Voir à ce sujet ma Note *Sur la détermination du rayon de courbure des lignes planes* (*Bulletin de la Société philomathique*, février 1875).

2. Un des cas particuliers les plus intéressants est celui où tous les foyers de la courbe sont à l'infini. On a alors ce théorème :

Si par un point M, *pris dans le plan d'une courbe ayant tous ses foyers à l'infini, on mène les tangentes à la courbe, puis les normales aux points de contact, la polaire du point* M *relativement à ces normales est située à l'infini.*

Ainsi, en particulier, l'hypocycloïde à trois points de rebroussement ayant tous ses foyers à l'infini, on a la proposition suivante :

Si par un point M, *pris dans le plan d'une hypocycloïde à trois points de rebroussement, on mène les tangentes à la courbe, puis les normales aux points de contact, ces normales forment un triangle dont le centre de gravité est le point* M.

3. Comme application, je déduirai de là un beau théorème dû à M. Liouville :

Soient une droite D et une courbe A de degré *m assujettie à la seule condition de ne pas passer par les ombilics du plan.*

Considérons une droite de longueur constante R et se déplaçant de telle sorte qu'une de ses extrémités décrive la droite D, tandis que l'autre décrit la courbe A. L'enveloppe de cette droite est une courbe K ayant tous ses foyers à l'infini; en effet, la droite ne peut passer par un ombilic que quand elle se confond avec la droite de l'infini; dans toute autre position, la longueur interceptée entre le point où elle rencontre D et l'un quelconque des points où elle rencontre A est évidemment nulle, puisque cette courbe ne passe pas par les ombilics.

Soit maintenant un point quelconque M pris sur la droite D; cherchons les tangentes que l'on peut mener de ce point à la courbe K. Je remarque d'abord que D est elle-même une tangente multiple à cette courbe; je désignerai par d, d', ... ses divers points de contact.

En second lieu, si, du point M comme centre avec R comme rayon, nous décrivons un cercle rencontrant la courbe A aux points a, a', a'', ..., les diverses droites Ma, Ma', Ma'', ... seront aussi tangentes à K.

Considérons en particulier une de ces tangentes, Ma par exemple; si au point M nous menons une perpendiculaire à D et au point a une normale à la courbe A, nous savons, en désignant par α le point de rencontre de ces deux droites, que la normale, menée à l'enveloppe de la droite de longueur constante aM au point où elle touche son enveloppe, passe par le point α.

4. Du théorème général que j'ai donné plus haut (n° 1), il résulte que, l'enveloppe K ayant tous ses foyers à l'infini, si l'on construit la polaire du point M relativement aux droites menées en d, d', ... perpendiculairement à D et aux droites menées normalement à K aux points où les droites Ma, Ma', ... touchent cette courbe, cette polaire est située à l'infini.

En particulier, menons par le point M une sécante perpendiculaire à D; elle rencontrera les droites issues des points d, d', ... en des points situés à l'infini et dont il n'y a pas à tenir compte, puis les normales élevées aux points de contact de Ma, Ma', Ma'', ... avec leur enveloppe au point α et en d'autres points analogues α', α'', ...; on aura donc la relation

$$\frac{1}{M\alpha}+\frac{1}{M\alpha'}+\frac{1}{M\alpha''}+\ldots=0.$$

Si l'on remarque maintenant que, la droite D ayant une direction arbitraire, il en est de même de la direction de la sécante qui lui est perpendiculaire, on pourra énoncer ce beau théorème, dû à M. Liouville :

Si, aux différents points où un cercle rencontre une courbe plane, on mène des normales à cette courbe, la polaire du centre du cercle relativement à ces normales est située à l'infini.

5. Je considérerai encore, comme application, un système de coniques homofocales ayant pour foyers les deux points F et F'.

Soit M un point quelconque du plan; considérons les droites passant par les points F et F' et respectivement perpendiculaires aux directions MF et MF'. Si l'on désigne par Δ la polaire du point M relativement à ces deux droites, on voit que :

Si du point M *on mène des tangentes à l'une quelconque des coniques qui ont pour foyers les points* F *et* F', *puis les normales aux points de contact, la polaire des points* M *relativement à ces deux normales est la droite fixe* Δ.

En particulier, la polaire du point M relativement aux deux normales passe par le point de rencontre de ces normales.

D'où le théorème suivant :

Si, d'un point M, *on mène des tangentes à l'une quelconque des coniques qui ont pour foyers les points* F *et* F', *puis les normales aux points de contact, le lieu des points de rencontre de ces normales est une droite.*

Il est clair que cette droite passe par les centres de courbure des deux coniques homofocales qui se croisent au point M.

6. Les deux points F et F' étant donnés, on voit qu'à chaque point M du plan correspond une droite Δ qu'il est facile de construire.

Réciproquement, à chaque droite Δ correspondent, comme on le démontre aisément, trois points M. Si une droite Δ tourne autour d'un point fixe N, le lieu des points M correspondants est une courbe du troisième ordre passant par les ombilics, par conséquent une anallagmatique et de l'espèce particulière que j'ai étudiée sous la dénomination de *cassiniennes* (¹).

Cette courbe H peut évidemment être aussi définie de la façon suivante :

Étant donné un point fixe N du plan, considérons une quelconque des coniques qui ont pour foyers deux points donnés F et F', puis abaissons du point N les quatre normales à la courbe. Les tangentes en ces points forment un quadrilatère complet dont les six sommets décrivent la courbe H lorsque la conique varie.

7. Je rappellerai brièvement la définition et les propriétés principales des cassiniennes.

Une cassinienne est généralement une courbe anallagmatique

(¹) *Sur les cassiniennes planes et sphériques* (*Bulletin de la Société philomathique*, mars 1868).

du quatrième ordre dont les divers points peuvent se distribuer en couples jouissant des propriétés suivantes :

1° Le lieu des conjugués harmoniques d'un point quelconque du plan, relativement à chacun des couples de points conjugués d'une cassinienne, est un cercle.

En particulier, le lieu des points milieux des cordes qui joignent les points conjugués est un cercle.

2° Il existe dans le plan deux points fixes jouissant de la propriété que ces deux points fixes et deux points conjugués quelconques se trouvent sur un même cercle qu'ils partagent harmoniquement.

Dans le cas où le cercle, lieu des points milieux des cordes qui joignent les points conjugués, se réduit à une droite, le degré de la courbe s'abaisse au troisième, et l'on a une cassinienne cubique.

Si l'on joint un point quelconque d'une telle courbe à deux couples de points conjugués, on obtient deux couples de droites ayant mêmes bissectrices.

La courbe H, définie ci-dessus, est une cassinienne cubique, et l'on a la proposition suivante :

Si d'un point fixe N, *pris dans le plan, on abaisse des normales sur l'une quelconque des coniques qui ont pour foyers deux points fixes* F *et* F′, *les tangentes menées en ces points forment un quadrilatère complet. Les trois couples de sommets opposés de ce quadrilatère complet sont trois couples de points conjugués d'une même cassinienne cubique, que ces sommets décrivent quand on fait varier la conique* [1].

---

[1] Les tangentes, menées aux pieds des normales, roulent en même temps sur une parabole fixe.

Considérons, en effet, une conique C et la parabole P qui est l'enveloppe des polaires d'un point donné M par rapport aux diverses coniques qui ont les mêmes foyers que C. Les tangentes communes à C et à P touchent C en quatre points et les normales en ces points passent par le point M.

Cette propriété s'établit aisément en s'appuyant sur une importante proposition due à M. Chasles :

Les pôles d'une droits fixe, par rapport à un système de coniques homofocales, sont situés sur une même ligne droite normale à une des coniques du système.

J'ajouterai que le foyer de la parabole P est le point conjugué harmonique du point M relativement aux foyers de la conique C.

De nombreuses propriétés des normales à un système de coniques homofocales découlent immédiatement de la proposition précédente, mais je n'insisterai pas ici sur ce point, qui demande quelques développements et sur lequel je reviendrai dans un autre article; je me contente de le mentionner en passant.

II.

8. On peut facilement étendre aux cônes algébriques les propositions qui précèdent.

Le théorème fondamental que j'ai rappelé plus haut (n° 1) peut, en effet, s'énoncer de la façon suivante :

Étant donnés deux cônes algébriques C *et* C′ *ayant même sommet* S *et une droite quelconque* D *passant par ce sommet, considérons les divers plans que par la droite* D *on peut mener tangentiellement au cône* C; *soit* (I) *l'ensemble des arêtes de contact. Appelons de même* (I′) *l'ensemble des arêtes de contact des plans menés par* D *tangentiellement au cône* C′; *puis imaginons que par chacune des arêtes* (I) *et chacune des arêtes* (I′) *on fasse passer un plan; on aura ainsi un ensemble de plans que je désigne par* (P).

Cela posé, le plan polaire de la droite D *relativement au système de plans* (P) *se confond avec le plan polaire de cette même droite relativement aux plans tangents aux deux cônes.*

Supposons, pour fixer les idées, que C soit un cône réel (ou du moins ait une équation réelle) et que F_1, F_2, F_3, ... désignent ses droites focales réelles, que de plus C′ soit un cône isotrope.

Les plans tangents communs aux deux cônes sont les plans isotropes passant par les droites F_1, F_2, F_3, ...; le plan polaire de D relativement aux deux plans isotropes qui se coupent suivant l'une quelconque de ces droites, F_1 par exemple, est le plan passant par F_1 et mené perpendiculairement au plan de F_1 et de D.

D'autre part, si T_1, T_2, T_3, ... désignent les arêtes de contact des plans menés par D tangentiellement au cône C, les divers plans dont j'ai désigné ci-dessus l'ensemble par (P) sont les plans isotropes passant par les droites T_1, T_2, T_3, ...; le plan polaire de D relativement aux deux plans isotropes qui se coupent suivant l'une de ces droites, T_1 par exemple, est le plan passant par T_1 mené perpendiculairement au plan de T_1 et de D.

Par suite, on peut énoncer la proposition suivante :

Étant donné un cône algébrique et une droite quelconque D *passant par le sommet de ce cône, par chacune des focales du cône faisons passer un plan perpendiculaire au plan qui contient cette focale et la droite* D; *soit* (P) *l'ensemble des plans ainsi obtenus.*

Cela posé, le plan polaire de D *relativement aux plans* (P) *se confond avec le plan polaire de cette même droite relativement aux plans menés normalement au cône par les arêtes de contact des divers plans que l'on peut par* D *mener tangentiellement à ce cône.*

9. Comme application, considérons l'un quelconque des cônes du second ordre qui ont pour focales réelles deux droites données F et F'. Soient D une droite quelconque passant par le sommet du cône et Δ le plan polaire de D relativement aux plans passant par F et F', et respectivement perpendiculaires aux plans déterminés par les droites FD et les droites F'D.

Si par D on mène deux plans tangents au cône, puis des plans normaux par les arêtes de contact, le plan polaire de D relativement à ces plans normaux est le plan Δ.

En particulier, la droite d'intersection des plans normaux est dans le plan Δ. Donc :

Étant donnés un système de cônes homofocaux du second ordre et une droite fixe passant par le sommet de ce cône, si par cette droite on mène des plans tangents à l'un des cônes du système, puis des plans normaux par les arêtes de contact, la droite suivant laquelle se coupent les deux plans normaux décrit un plan lorsqu'on fait varier le cône.

10. Si par une arête d'un cône on imagine le plan normal à ce cône, puis le plan mené normalement par l'arête infiniment voisine, l'intersection de ces deux plans est l'axe d'un cône de révolution osculateur du cône donné le long de l'arête considérée. Nous l'appellerons l'*axe de courbure* du cône suivant cette arête.

Cela posé, il est clair, d'après ce qui précède, que le plan Δ déterminé comme je l'ai dit, et qui correspond à la droite D, contient les axes de courbure des deux cônes homofocaux du système donné qui se coupent suivant la droite D, et de là découle un moyen simple de construire l'axe de courbure d'un cône du second degré suivant une arête donnée, lorsque l'on connaît les focales de ce cône.

Je ferai même observer que la connaissance du plan Δ fait connaître non seulement l'axe de courbure, mais encore l'accélération de courbure, et que des considérations de tout point semblables s'appliquent aux cônes de tous les degrés; je ne crois pas utile de m'étendre davantage sur ce sujet.

11. Le théorème de M. Liouville, dont j'ai donné plus haut la démonstration (n° 3), s'étend aussi à un cône algébrique quelconque, en considérant l'intersection de ce cône avec un cône de révolution.

On obtiendrait facilement cette généralisation, au moyen des théorèmes précédents, en considérant la surface enveloppée par le plan déterminé par deux droites faisant un angle constant et dont l'un des côtés décrit un cône pendant que l'autre se meut dans un plan passant par le sommet de ce cône.

Mais le théorème auquel on parvient ainsi se complique, à cause du rôle qu'y jouent les plans cycliques du cône; il n'a ni la simplicité ni l'utilité de celui de M. Liouville, et je ne crois pas devoir le mentionner ici.

SUR LA

COURBE ENVELOPPÉE PAR LES AXES DES CONIQUES

QUI PASSENT PAR QUATRE POINTS DONNÉS

ET SUR LES

AXES DES SURFACES DE RÉVOLUTION DU SECOND ORDRE

QUI PASSENT PAR CINQ POINTS DONNÉS.

SUR LES LIGNES SPIRIQUES.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1879.

I.

1. La courbe enveloppée par les axes des coniques qui passent par quatre points donnés est, comme on le sait, une courbe du quatrième degré et de la troisième classe doublement tangente à la droite de l'infini. L'équation d'une telle courbe ne renferme que six constantes arbitraires et, comme quatre points donnés introduisent huit constantes, il en résulte que la même courbe peut être regardée d'une infinité de façons différentes comme l'enveloppe des axes d'une conique assujettie à passer par quatre points. Je me propose de déterminer, pour une courbe donnée de la troisième classe doublement tangente à la droite de l'infini, les divers systèmes de quatre points qui permettent le mode de génération indiqué.

2. Je m'appuierai sur la proposition suivante, que j'ai fait connaître depuis longtemps dans les *Nouvelles Annales :*

Étant donnés sur une conique deux points fixes A *et* B *et un*

point M *mobile sur cette conique, si, aux points milieux des cordes* AM *et* BM, *on élève des perpendiculaires à ces cordes, le segment, intercepté sur l'un quelconque des axes de la conique par ces perpendiculaires, demeure constant quand le point* M *se meut sur la courbe.*

Supposons que le point M vienne successivement coïncider avec deux points donnés C et D de la conique; on aura la proposition suivante :

A, B, C *et* D *étant les sommets d'un quadrangle inscrit dans une conique, aux points milieux des cordes* AC, BC, AD *et* BD, *élevons des perpendiculaires à ces cordes et désignons respectivement par* A', B', A'' *et* B'' *ces perpendiculaires; cela posé, les segments, interceptés sur l'un quelconque des axes de la conique par les perpendiculaires* A' *et* B' *d'une part et par les perpendiculaires* A'' *et* B'' *d'autre part, sont égaux entre eux.*

Il est clair que, le quadrangle ABCD étant donné, on pourrait considérer d'autres cordes que celles que je viens de considérer et qui donneraient lieu à des propositions semblables. En examinant cette question, on voit facilement que ces propositions sont contenues dans le théorème suivant :

A, B, C *et* D *étant les sommets d'un quadrangle inscrit dans une conique, désignons par* α, β, γ *et* δ *les centres des cercles circonscrits aux quatre triangles que l'on peut former avec trois quelconques de ces sommets. Cela posé, les trois couples de côtés opposés du quadrangle formé par les points* α, β, γ *et* δ *interceptent, sur l'un quelconque des axes de la conique, trois segments dont le point milieu est le même.*

3. On sait, par le théorème de Desargues, que généralement les six côtés d'un quadrangle sont coupés par une droite quelconque en six points en involution; on voit ici que les six côtés du quadrangle $\alpha\beta\gamma\delta$ sont coupés, par un axe quelconque d'une des coniques passant par les quatre points A, B, C et D, en six points formant une involution dont un des points doubles est rejeté à l'infini.

Imaginons les deux coniques circonscrites au quadrangle ABCD et tangentes à cet axe; leurs points de contact avec cette droite sont précisément les deux points doubles de l'involution dont je viens de parler; l'une de ces coniques est donc asymptote de l'axe.

En d'autres termes :

Un axe quelconque d'une conique circonscrite au quadrangle ABCD est une asymptote d'une conique circonscrite au quadrangle $\alpha\beta\gamma\delta$.

4. Pour abréger le discours, étant donné un quadrangle quelconque ABCD, je désignerai sous le nom de *quadrangle dérivé* le quadrangle dont les sommets sont les centres des cercles circonscrits aux triangles ABC, BCD, CDA et DAB.

On peut donc dire que :

L'enveloppe des axes des coniques circonscrites à un quadrangle donné est l'enveloppe des asymptotes des coniques circonscrites au quadrangle dérivé.

5. Soient $\alpha\beta\gamma\delta$ un quadrangle donné et K la courbe enveloppée par les asymptotes des coniques circonscrites à ce quadrangle.

Une telle courbe peut être engendrée de cette façon d'une infinité de manières. Considérons, en effet, une quelconque des coniques circonscrites au quadrangle et soient D et D′ ses deux asymptotes; nous dirons que ces deux droites sont deux tangentes conjuguées de la courbe. Cela posé, on sait (¹) que, si l'on considère deux couples quelconques de tangentes conjuguées, ces deux couples se rencontrent en quatre points formant un quadrangle Q et que les asymptotes des coniques circonscrites à ce quadrangle enveloppent la courbe K.

Si donc on construit le quadrangle Q′ ayant pour dérivé le quadrangle Q, les axes des coniques circonscrites à Q′ envelopperont la courbe K, et l'on obtiendra toutes les façons semblables d'engendrer cette courbe en considérant tous les quadrangles qui ont pour dérivés les divers quadrangles Q.

(¹) *Voir* Steiner, *Ueber eine besondere Curve dritter Klasse und vierten Grades* (*Journal de Crelle*, t. 53, p. 231) et Cremona, *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements* (*Ibid.*, t. 64, p. 101).

6. La projection orthogonale d'une courbe K, sur un plan quelconque, est évidemment une courbe de la même espèce.

Soient A, B, C et D quatre points donnés et K l'enveloppe des axes des coniques passant par ces points; désignons par K′ la projection de cette courbe sur un plan P, cette projection peut être considérée comme l'enveloppe des axes des coniques passant par quatre points A′, B′, C′ et D′ que l'on construira de la façon suivante :

Dans le plan du quadrangle ABCD, imaginons le quadrangle dérivé $\alpha\beta\gamma\delta$ et projetons ce dernier quadrangle sur le plan P; soit $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ cette projection. Il est clair, d'après ce que j'ai dit plus haut, que les points cherchés A′, B′, C′ et D′ seront les sommets du quadrangle qui a pour dérivé $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$.

7. Il peut être utile dans certains cas de construire le quadrangle qui a pour dérivé un quadrangle donné $\alpha\beta\gamma\delta$.

Soient A, B, C et D les sommets du quadrangle cherché; en sorte que α désigne, par exemple, le centre du cercle circonscrit au triangle BCD, β le centre du cercle circonscrit au triangle ACD, etc.

On voit immédiatement que le symétrique du point A relativement à la droite $\beta\delta$ est le point C et que le symétrique du point C relativement à la droite $\beta\alpha$ est le point D; on a donc les deux relations suivantes

$$A\beta\gamma + C\beta\gamma = 2\delta\beta\gamma \quad \text{et} \quad C\beta\gamma + D\beta\gamma = 2\alpha\beta\gamma;$$

les points A et D étant d'ailleurs aussi symétriques par rapport à la droite $\beta\gamma$, on a également

$$A\beta\gamma + D\beta\gamma = 0.$$

Chacune des trois relations précédentes doit être vérifiée *à un multiple près de* 2π; on en déduit facilement

$$2A\beta\gamma = 2(\delta\beta\gamma - \alpha\beta\gamma) = 2\delta\beta\alpha,$$

d'où

$$A\beta\gamma = \delta\beta\alpha,$$

relation qui doit être vérifiée *à un multiple près de* π.

Cette dernière relation détermine une droite contenant le point A; la relation

$$A\gamma\delta = \beta\gamma\alpha,$$

que l'on obtient d'une façon analogue, détermine une seconde droite contenant le point que l'on peut ainsi construire facilement.

On construirait de même les autres sommets B, C et D du quadrangle cherché.

8. Dans le cas particulier où le quadrangle $\alpha\beta\gamma\delta$ est formé des sommets d'un triangle et du point de rencontre des hauteurs de ce triangle, on sait que l'enveloppe des asymptotes des coniques qui passent par ces quatre points est une hypocycloïde à trois points de rebroussement.

Le quadrangle ABCD, qui a pour dérivé $\alpha\beta\gamma\delta$, est alors le symétrique de ce dernier quadrangle relativement au centre de l'hypocycloïde.

On voit donc que :

Si l'on considère les trois sommets d'un triangle et le point de rencontre des hauteurs de ce triangle, les asymptotes des coniques passant par ces quatre points enveloppent une hypocycloïde à trois points de rebroussement, tandis que les axes de ces courbes enveloppent la courbe symétrique de cette hypocycloïde relativement à son centre.

II.

9. Considérons une conique quelconque C et un axe A de cette conique; soient M et M′ deux quelconques de ces points. Par le milieu I du segment MM′ menons une perpendiculaire à cette droite et soit H le point où cette perpendiculaire rencontre l'axe. Imaginons maintenant que la conique, en tournant autour de l'axe A, engendre une surface de révolution; les deux points M et M′ engendrent deux parallèles de cette surface et la sphère contenant ces deux parallèles a pour centre le point H. Si donc on prend respectivement sur ces deux parallèles deux points arbitraires m et m', on voit que le plan, mené par le milieu du segment mm' et perpendiculairement à ce segment, passe par le point H.

De cette remarque et de la proposition que j'ai rappelée plus haut (n° 2) résulte immédiatement le théorème suivant :

Étant donnés sur une surface du second ordre de révolution

deux points fixes A *et* B *et un point mobile* M, *si, par les points milieux des cordes* MA *et* MB, *on mène des plans perpendiculaires à ces cordes, le segment que ces plans interceptent sur l'axe de révolution de la surface est un segment dont la longueur demeure constante lorsque le point* M *se déplace.*

La même propriété a lieu évidemment relativement à une courbe quelconque tracée sur une surface de révolution du second ordre, lorsque l'on considère sur cette courbe deux points fixes A et B et un point mobile M.

En particulier :

Une courbe quelconque étant tracée sur une surface de révolution du second ordre, considérons deux points quelconques M *et* N *situés sur cette courbe. Menons les plans normaux à la courbe aux points* M *et* N *et désignons respectivement par* m *et* n *les points où ces plans normaux rencontrent l'axe de révolution de cette surface; soit de plus* H *le point où le plan mené par le milieu de la corde* MN *et perpendiculairement à cette corde rencontre cet axe. Cela posé, le point* H *est le milieu du segment* mn.

10. Considérons une *ellipsimbre droite* (¹), c'est-à-dire la courbe résultant de l'intersection de deux surfaces du second ordre ayant trois axes communs que l'on peut appeler les axes de l'ellipsimbre.

On sait que cette courbe peut être placée sur une surface du second ordre de révolution ayant l'une quelconque de ces trois droites pour axe de révolution.

Donc :

Étant donnée une ellipsimbre droite et deux points quelconques M *et* N *pris sur cette courbe, les plans menés normalement à la courbe aux points* M *et* N *interceptent sur les trois axes de l'ellipsimbre trois segments; le plan passant par leurs points milieux passe par le point milieu de la corde* MN *et lui est perpendiculaire.*

(¹) Expression employée d'abord par Frézier et adoptée par M. de la Gournerie dans ses *Recherches sur les surfaces tétraédrales.*

11. Soit S une surface de révolution du second ordre ayant pour axe la droite Δ, et soient A, B, C et D quatre points quelconques situés sur cette surface. Les plans menés par les milieux des cordes AB et BC et perpendiculairement à ces cordes interceptent sur l'axe Δ un segment qui (n° 9) est égal au segment intercepté sur la même droite par les plans menés, par les milieux des cordes AD et DC, perpendiculairement à ces cordes; d'autres propositions semblables s'obtiendraient en considérant les diverses droites qui joignent deux à deux les sommets du tétraèdre ABCD.

Ces diverses propositions peuvent être résumées dans le théorème suivant :

A, B, C *et* D *étant les sommets d'un tétraèdre inscrit dans une surface de révolution du second ordre, considérons les perpendiculaires abaissées sur les faces de ce tétraèdre par le centre de la sphère qui lui est circonscrite; les trois couples de plans opposés que l'on peut mener par ces quatre droites interceptent sur l'axe de la surface trois segments dont le point milieu est le même.*

En d'autres termes :

Si l'on désigne par ε *le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre* ABCD *et si l'on mène par le point* ε *une parallèle à l'axe* Δ, *le cône du second degré, ayant pour sommet* ε *et contenant la parallèle dont je viens de parler ainsi que les perpendiculaires aux faces du tétraèdre, est asymptote à l'axe* Δ.

Le plan passant par Δ *et le sommet* ε *est donc tangent au cône.*

12. Les axes des diverses surfaces de révolution du second ordre que l'on peut mener par quatre points donnés A, B, C et D forment un complexe dont il est facile de trouver, d'après ce qui précède, les propriétés les plus essentielles.

Désignons, comme ci-dessus, par ε le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD et par A', B', C' et D' les perpendiculaires abaissées du point ε sur les faces du tétraèdre.

Les droites du complexe, situées dans un plan donné P, s'obtiendront facilement; si l'on appelle α', β', γ' et δ' les points où ce

plan est percé par les droites A', B', C' et D', ce sont les asymptotes des coniques passant par les quatre points α', β', γ' et δ'. Ainsi *les droites du complexe, situées dans le plan* P, *enveloppent la courbe de troisième classe étudiée dans le* § I.

Pour obtenir les droites du complexe passant par un point donné O, imaginons les divers cônes du second ordre qui renferment les droites α', β', γ' et δ', et par O menons les plans tangents à ces cônes; *les arêtes de contact forment un cône du troisième degré qui, transporté parallèlement à lui-même, de sorte que son sommet vienne en* O, *donnera le cône du complexe.*

On voit que ce cône ne varie pas et se déplace parallèlement à lui-même lorsque le point O se meut sur une droite passant par le centre ε de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

13. Étant donné un système de cinq points A, B, C, D et E, il est facile de déterminer une surface de révolution du second ordre passant par ces points et ayant pour axe une droite parallèle à une droite donnée Δ.

Soient, en effet, α, β, γ, δ et ε les centres des sphères circonscrites aux cinq tétraèdres que l'on peut former avec les cinq points donnés, α étant par exemple le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre BCDE, β le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ACDE, etc.

Par le point α, menons une parallèle Δ' à Δ et imaginons le cône du second ordre (α) ayant pour sommet α et pour arêtes les droites Δ', $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$ et $\alpha\varepsilon$; par le point β, menons de même une parallèle Δ'' à Δ et imaginons le cône du second ordre (β), ayant pour sommet le point β et ayant pour arêtes les droites Δ'', $\beta\alpha$, $\beta\gamma$, $\beta\delta$ et $\beta\varepsilon$. Ces deux cônes, comme on le voit, ayant en commun la génératrice $\alpha\beta$, se coupent en outre suivant une cubique gauche.

Cela posé, les plans tangents menés respectivement aux cônes (α) et (β) le long des arêtes Δ' et Δ'' se coupent suivant une droite qui est l'axe d'une surface de révolution du second ordre passant par les points A, B, C, D et E.

14. On déduit encore de là la proposition suivante :

Cinq points étant donnés sur une surface de révolution du second ordre, les cinq centres des sphères circonscrites aux cinq *tétraèdres que l'on peut former en considérant quatre quelconques de ces points sont sur une cubique gauche ayant pour asymptote l'axe de la surface.*

D'où l'on conclut que le système de droites formé par les axes des diverses surfaces de révolution du second ordre passant par cinq points donnés se confond avec le système formé par les asymptotes des cubiques gauches passant par cinq autres points fixes, ces derniers points étant les centres des sphères circonscrites aux tétraèdres déterminés par les cinq premiers points.

III.

15. Les théorèmes qui précèdent sont des cas particuliers de théorèmes plus généraux relatifs aux lignes spiriques et aux surfaces de révolution engendrées par la rotation de ces lignes autour de leur axe.

On appelle *ligne spirique* ([1]) une courbe plane du quatrième ordre qui possède un axe de symétrie et qui a pour points doubles les deux ombilics du plan.

Cette courbe a deux foyers singuliers situés sur son axe de symétrie. Si ces deux foyers coïncident, la courbe est un ovale de Descartes; dans le cas où l'un des foyers singuliers est rejeté à l'infini, la courbe devient une *cataspirique* et elle n'est plus que du troisième degré. Enfin, si les deux foyers singuliers sont rejetés à l'infini, la courbe devient simplement une conique.

Cela posé, je m'appuierai sur la propriété suivante, que j'ai énoncée dans ma Note *Sur quelques propriétés des lignes spiriques* (*loc. cit.*) :

Étant donnés deux points fixes A *et* B *situés sur une spirique et un point* M *mobile sur cette courbe, si, par les milieux des cordes* MA *et* MB, *on mène des droites respectivement perpendiculaires à ces cordes, ces perpendiculaires déterminent sur*

([1]) *Voir*, sur la théorie des lignes spiriques, le Mémoire de M. de la Gournerie, *Sur les lignes spiriques*, inséré dans le *Journal de Liouville*, 2e série, t. XIV; ma Note *Sur quelques propriétés des lignes spiriques*, insérée dans le *Bulletin de la Société philomathique* (novembre 1869) et ma Note *Sur la cardioïde* (*Nouvelles Annales*, 1878).

l'axe de la courbe deux divisions homographiques dont les points doubles sont les foyers singuliers situés sur cet axe.

D'où la proposition suivante :

Un quadrangle étant inscrit dans une spirique, les trois couples de côtés opposés du quadrangle dérivé rencontrent l'axe de la courbe en six points en involution, les deux points doubles de cette involution partagent harmoniquement le segment déterminé par les deux foyers singuliers situés sur l'axe.

Ce que l'on peut encore énoncer ainsi :

Un quadrangle étant inscrit dans une spirique, les sommets du quadrangle dérivé et les deux foyers singuliers, situés sur l'axe de la courbe, sont sur une même conique.

16. Considérons la surface de révolution Σ engendrée par la rotation d'une spirique autour de son axe de symétrie; nous obtiendrons facilement les théorèmes qui suivent :

Une surface Σ étant circonscrite à un tétraèdre ABCD, *si, du centre de la sphère circonscrite à ce tétraèdre, on abaisse des perpendiculaires sur les quatre faces, ces quatre perpendiculaires et les droites qui joignent le centre de la sphère aux deux foyers singuliers de Σ sont situées sur un même cône du second ordre.*

Une surface Σ passant par cinq points donnés, considérons les centres des cinq sphères circonscrites aux tétraèdres que l'on peut former en prenant quatre quelconques des points donnés; ces cinq centres et les deux foyers singuliers de la surface Σ sont situés sur une même cubique gauche.

SUR LA RELATION QUI EXISTE ENTRE UN CERCLE

CIRCONSCRIT A UN TRIANGLE

ET LES ÉLÉMENTS D'UNE CONIQUE INSCRITE DANS CE TRIANGLE.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1879.

1. Soit un triangle inscrit dans un cercle C et circonscrit à une conique K; si cette conique est une parabole, on sait que son foyer est sur le cercle.

Laissant ce cas de côté, j'énoncerai la proposition suivante :

Soient F *et* G *les deux foyers de la conique,* F' *le point réciproque du foyer* F *relativement au cercle et* O *le centre de ce cercle; si, par le point* F, *on mène une droite parallèle à* OG, *cette droite rencontre* GF' *en un point* R *tel que le produit* GR × GF' *est égal au carré de l'axe qui renferme les deux foyers.*

2. Pour démontrer cette proposition, je remarque que l'on peut, d'après un théorème bien connu et dû à Poncelet, inscrire dans le cercle C une infinité de triangles circonscrits à la conique. En désignant par I et J les deux ombilics du plan, on sait que le cercle passe par ces deux points; on peut donc construire un triangle inscrit dans le cercle circonscrit à K, et dont l'ombilic I soit l'un des sommets. A cet effet, je mène par les foyers F et G les droites isotropes FI et FJ qui sont tangentes à la conique; ces droites rencontrent respectivement le cercle aux points m et n, et la droite mn est tangente à K.

3. Je rappellerai ici quelques notions très simples que j'ai

exposées dans une Note publiée précédemment dans les *Nouvelles Annales* (1). Un point quelconque A étant donné dans le plan, menons les deux droites isotropes AI et AJ qui se croisent en ce point, et désignons respectivement par a et par a' les points réels situés sur ces droites.

Il est clair que ces points sont parfaitement déterminés quand m se donne le point A; réciproquement, ces points déterminent complètement le point A, et l'on peut dire que aa' est son segment représentatif, a étant l'origine du segment et a' en étant l'extrémité.

Ceci posé, *si trois points sont en ligne droite, les deux triangles formés respectivement, par les origines des segments représentatifs de ces points et leurs extrémités, sont semblables et inversement placés.*

En second lieu, *si un point imaginaire est situé sur un cercle réel, les extrémités de son segment représentatif sont réciproques par rapport à ce cercle.*

4. Il résulte de là que, si l'on désigne respectivement par F' et G' les points réciproques des foyers F et G relativement au cercle C, les points m et n ont respectivement pour segments représentatifs FF' et GG'.

Je construis maintenant le point symétrique du point P relativement à la droite mn. A cet effet, par le point F, je mène la droite isotrope FI qui passe par le point m, puis par le point m la droite isotrope mJ qui contient le point réel F'; je mène ensuite la droite isotrope FJ, puis, en appelant p le point où elle rencontre la droite mn, la droite isotrope pI, et le point φ, où se rencontrent mJ et pI, est le point cherché. Si R est le point réel situé sur pI, on voit que son segment représentatif est RF'.

Pour obtenir le point R, je remarque que les trois points p, m et n étant en lignes droites et étant respectivement représentés par les segments RF, FF' et GG', les triangles RFG et FF'G' sont semblables et inversement placés. D'où il suit que le point R est

(1) *Sur l'emploi des imaginaires en Géométrie* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. IX; 1870).

l'intersection de la droite GF' avec la droite menée par le point F parallèlement à GG'. Si l'on remarque en effet que le quadrilatère $FGF'G'$ est inscriptible dans un cercle, on en conclut sans peine que les angles $\widehat{FGR}$ et $\widehat{F'G'F}$ sont égaux comme inscrits dans un même arc de circonférence; par la même raison, l'angle $\widehat{F'FG'}$ est égal à l'angle $\widehat{F'GG}$ et ce dernier est égal par construction à l'angle $\widehat{FRG}$. Les angles $\widehat{FRG}$ et $\widehat{F'FG'}$ sont donc aussi égaux; par suite, les triangles RFG et $FF'G'$ sont semblables, et, comme ils sont évidemment inversement placés, le point R est le point réel situé sur la droite isotrope pI.

5. Le point φ étant symétrique de F relativement à la droite mn, qui est une tangente de la conique K, est situé sur le cercle décrit autour du foyer G comme centre avec un rayon égal à l'axe de la conique qui contient ce foyer.

Le point φ est d'ailleurs représenté par le segment RF'; on en conclut d'abord que la droite RF' passe par le point G, ce qui résulte de la construction même par laquelle on a déterminé le point R, puis que le produit $GR \times GF'$ est égal au carré de l'axe dont je viens de parler.

D'où la proposition que j'ai énoncée au commencement de cette Note.

6. Cette proposition peut s'énoncer d'une façon un peu différente :

Construisons le cercle passant par le point F' *et tangent en* G *à la droite* OG; *si l'on désigne par* Φ *le second point de rencontre de ce cercle avec l'axe* FG, *par* H *le centre de la conique, par* $2a$ *la longueur de l'axe de cette courbe qui renferme les foyers* F *et* G *et par* $2b$ *la longueur de l'autre axe, on a la relation*

$$\text{(1)} \qquad HF.H\Phi = a^2 + b^2,$$

en sorte que les points F *et* Φ *sont réciproques relativement au cercle qui est le lieu des points d'où l'on voit la conique sous un angle droit.*

On peut remarquer, en effet, que la droite FR étant parallèle à la droite OG, le quadrilatère $FRF'\Phi$ est inscriptible dans une circonférence de cercle; on a donc

$$GF.G\Phi = GR.GF' = 4a^2,$$

d'où, par une transformation facile, la relation énoncée ci-dessus.

7. Comme application, proposons-nous, étant donné un point O du plan, de construire un cercle ayant ce point pour centre et dans lequel on puisse inscrire un triangle circonscrit à la conique K.

Construisons le point Φ déterminé par la relation (1), et faisons passer par les points Φ et G un cercle qui touche la droite OG. Ce cercle rencontre la droite OF en deux points F' et F''; de là deux solutions du problème proposé.

En premier lieu, on a comme solution le cercle relativement auquel les points F et F' sont réciproques, et son rayon R' est déterminé par la relation

$$R'^2 = OF.OF'.$$

On a comme seconde solution le cercle relativement auquel les points F et F'' sont réciproques, et son rayon R'' est déterminé par la relation

$$R''^2 = OF.OF''.$$

8. En faisant le produit des équations précédentes, il vient

$$R'^2R''^2 = \overline{OF}^2.OF'.OF''.$$

On a d'ailleurs, en vertu d'une propriété du cercle bien connue,

$$OF'.OF'' = OG^2;$$

d'où

$$R'R'' = OF.OG.$$

Ainsi, *le problème proposé a deux solutions et le produit des rayons des cercles qui y satisfont est égal au produit des distances du centre donné aux deux foyers de la conique.*

9. On peut transformer encore d'une autre façon la relation

$$GR \times GF' = 4a^2.$$

Les deux triangles semblables $OF'G$ et $FF'R$ donnent en effet

$$GR = OF \times \frac{GF'}{OF'};$$

d'où la relation

$$\frac{OF.GF'^2}{OF'} = 4a^2.$$

En désignant par R le rayon du cercle, par u et v les longueurs OF et OG et enfin par ω l'angle FOG, on a

$$\frac{OF}{OF'} = \frac{u^2}{R^2},$$

et

$$GF'^2 = OG^2 + OF'^2 - 2OG.OF'\cos\omega = v^2 + \frac{R^4}{u^2} - \frac{2R^2v\cos\omega}{u};$$

de là

$$(u^2v^2 + R^4 - 2R^2uv\cos\omega) = 4a^2R^2.$$

On a d'ailleurs, dans le triangle OFG,

$$4c^2 = u^2 + v^2 - 2uv\cos\omega,$$

en désignant par $2c$ la distance des foyers F et G.

Éliminant $\cos\omega$ entre les équations précédentes, il vient

$$(R^2 - u^2)(R^2 - v^2) = 4b^2R^2.$$

10. Si l'on suppose que, les foyers F et G venant à coïncider, la conique se réduise à un cercle, en posant

$$u = v = D \quad \text{et} \quad b = r,$$

on obtiendra la relation suivante :

$$R^2 - D^2 = 2Rr,$$

qui, comme on le sait, est due à Euler.

SUR LA RELATION QUI EXISTE ENTRE UN CERCLE

CIRCONSCRIT A UN QUADRILATÈRE

ET LES ÉLÉMENTS D'UNE CONIQUE INSCRITE DANS CE QUADRILATÈRE.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1879.

1. Dans tout ce qui suit, pour abréger les démonstrations, je supposerai que l'on considère une conique et un cercle *réels* (ou du moins dont les équations soient réelles). Les résultats obtenus s'étendent évidemment au cas où ces courbes seraient imaginaires; il suffirait d'ailleurs de quelques modifications légères pour appliquer au cas général les considérations sur lesquelles je m'appuie.

2. Je supposerai d'abord que la conique donnée soit une parabole P. En désignant par C le cercle donné, on sait, d'après Poncelet, que si l'on peut circonscrire à P un quadrilatère dont les sommets soient situés sur C, on peut lui circonscrire une infinité de quadrilatères jouissant de la même propriété. Le sommet d'un de ces quadrilatères peut être pris arbitrairement sur le cercle.

Soit I un des ombilics du plan, les deux tangentes menées de ce point à la parabole sont, d'une part la droite de l'infini qui rencontre le cercle à l'autre ombilic J, et d'autre part la droite FI qui passe par le foyer de la parabole. Les tangentes issues du point J sont la droite de l'infini et la droite FJ. Désignons respectivement par α et β les points où les droites isotropes FI et FJ rencontrent le cercle; il est clair que l'on obtiendra la condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse inscrire dans le cercle un quadrilatère circonscrit à la parabole, en exprimant que la droite $\alpha\beta$ est tangente à P, ou bien que le symétrique de F relativement à cette droite est sur la directrice de P.

Ce point symétrique est évidemment le point réciproque de F relativement au cercle C; d'où la proposition suivante :

Étant donnés le cercle C *et une parabole* P, *si l'on peut inscrire dans le cercle un quadrilatère circonscrit à la parabole, le point réciproque du foyer de* P *relativement au cercle est situé sur la directrice de cette courbe.*

3. On sait [1] que, si l'on considère un quelconque des quadrilatères circonscrits à P et inscrits dans C, le point de rencontre Q des diagonales de ce quadrilatère est fixe et ne dépend pas de la position du quadrilatère considéré; c'est d'ailleurs le point de rencontre de deux cordes communes aux deux courbes.

Si l'on considère, comme précédemment, le quadrilatère $IJ\alpha\beta$, on voit que le point fixe Q est l'intersection des droites isotropes βI et αJ; *ce point est donc le réciproque de* F *relativement au cercle* C, *et il est situé sur la directrice.*

4. En particulier, si d'un point M, pris dans le plan de la parabole, on lui mène deux tangentes qui touchent cette courbe aux points A et B, on sait que l'on peut inscrire dans le cercle déterminé par les trois points M, A et B une infinité de quadrilatères circonscrits à P; on peut donc, relativement à ce cercle, énoncer les propositions suivantes :

Le point réciproque du foyer de P, *relativement au cercle* C *circonscrit au triangle* MAB, *est sur la directrice de* P; *il est le point d'intersection de la corde* AB *commune aux deux courbes, de la corde qui passe par leurs deux autres points de rencontre et de la tangente menée en* M *au cercle* C.

5. Considérons maintenant une conique K quelconque ayant pour foyers réels les points F et G; je désignerai par $2a$ la longueur de l'axe contenant ces foyers, par $2b$ la longueur de l'autre axe, et par $2c$ la distance FG, en sorte qu'entre ces quantités on a, suivant la notation habituelle, la relation

$$a^2 - b^2 = c^2.$$

[1] Poncelet, *Propriétés projectives*, t. I, p. 351.

Puisque l'on peut inscrire dans le cercle C une infinité de quadrilatères circonscrits à la conique K, on peut choisir arbitrairement sur ce cercle le sommet d'un de ces quadrilatères. Prenons l'ombilic I; les tangentes menées de ce point à la conique passent par les foyers F et G et rencontrent respectivement le cercle en deux points α et β; en vertu de la propriété énoncée, il existe sur ce cercle un troisième point δ, tel que les droites $\alpha\delta$ et $\beta\delta$ sont tangentes à la conique K.

Déterminons d'abord le point symétrique de F relativement à $\alpha\delta$. Je mène à cet effet par le point F la droite isotrope du système (I) qui rencontre $\alpha\delta$ au point α, puis par le point α la droite isotrope du système J; je mène en second lieu par le point F la droite isotrope du système J qui rencontre $\alpha\delta$ en un point ε, puis par le point ε la droite isotrope du système I. Les droites αJ et εI se coupent en un point φ qui est le symétrique du point F.

Pour déterminer le segment représentatif de ce point imaginaire, je remarque que les points α, δ et ε sont en ligne droite. Le segment représentatif du point α est FF', si l'on désigne par F' le réciproque du foyer F relativement au cercle C; le segment représentatif du point φ a pour extrémité le point F' et pour origine un point R qu'il s'agit de déterminer. Quant au point δ, comme il se trouve sur le cercle C, il est représenté par un segment DD' dont les extrémités sont deux points réciproques relativement à ce cercle; le point ε a d'ailleurs pour segment représentatif RF.

Puisque les points α, δ et ε sont en ligne droite, les deux triangles FRD et F'FD' sont semblables et inversement placés, et, le quadrilatère FF'DD' étant inscriptible, on voit immédiatement que le point R est le point de rencontre de F'D avec la droite menée par le point F parallèlement à OD.

6. Semblablement, si l'on désigne par γ le symétrique de G relativement à $\beta\delta$ et par G' le réciproque de G relativement au cercle C, on voit que γ est représenté par le segment SG', en appelant S le point de rencontre de G'D avec la droite menée par le point G parallèlement à OD.

Je ferai remarquer maintenant que, la droite $\alpha\delta$ étant tangente à la conique K, le point φ est situé sur le cercle réel décrit du point G comme centre avec un rayon égal à $2a$; donc :

1° La droite F′D passe par le point G;

2° On a la relation

$$\mathrm{GR.GF'} = 4a^2.$$

De même, la droite $\beta\delta$ étant tangente à la conique K, le point γ est situé sur le cercle réel décrit du point F comme centre avec un rayon égal à $2a$; donc :

1° La droite G′D passe par le point F;

2° On a la relation

$$\mathrm{FS.FG'} = 4a^2.$$

7. De là résulte que le point D est l'intersection des droites FG′ et GF′ et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Considérons un cercle* C *et une conique* K *jouissant de la propriété que l'on puisse inscrire dans le cercle un quadrilatère circonscrit à la conique; soient* O *le centre du cercle,* F′ *et* G′ *les points réciproques relativement au cercle des foyers* F *et* G *de la conique,* D *le point de rencontre des droites* FG′ *et* GF′.

Si l'on désigne par R *le point de rencontre de* F′G *avec la droite menée par* F *parallèlement à* OD, *le produit* GR.GF′ *est égal au carré de l'axe de* K *qui contient les foyers* F *et* G.

8. On obtient ainsi la relation

$$\mathrm{GR.GF'} = 4a^2, \tag{1}$$

qu'il est aisé de transformer de façon à ne mettre en évidence que le rayon du cercle et les côtés du triangle OFG.

Soit en effet R le rayon du cercle, et posons, pour abréger,

$$\mathrm{OF} = u, \qquad \mathrm{OG} = v, \qquad \widehat{\mathrm{FOG}} = \omega,$$

$$\widehat{\mathrm{OFG'}} = \widehat{\mathrm{OGF'}} = \alpha \quad \text{et} \quad \widehat{\mathrm{OF'G}} = \widehat{\mathrm{OG'F}} = \beta.$$

La relation (1) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\mathrm{GF'(GD + DR)} = 4a^2.$$

Or on a évidemment

$$\mathrm{GF'} = \frac{\mathrm{OF'}.\sin\omega}{\sin\alpha}, \qquad \mathrm{GD} = \mathrm{GG'}\,\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)},$$

et les deux triangles semblables OF′D et FF′R donnent

$$\mathrm{DR} = \mathrm{OF}\,\frac{\mathrm{DF'}}{\mathrm{OF'}} = \frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{OF'}}\,\frac{\mathrm{FF'}\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

En remarquant que

$$\mathrm{OF'} = \frac{\mathrm{R}^2}{\mathrm{OF}} = \frac{\mathrm{R}^2}{u},$$

on déduit de là

$$4a^2 = \frac{\mathrm{R}^2\sin\omega}{u\sin\alpha}\left(\mathrm{GG'}\sin\beta + \frac{u^2}{\mathrm{R}^2}\,\mathrm{FF'}\sin\alpha\right)\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)};$$

et comme

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{OG'}} = \frac{uv}{\mathrm{R}^2},$$

on a

$$\begin{aligned} 4a^2 &= \frac{\sin\omega}{\sin(\alpha-\beta)}(v.\mathrm{GG'} + u.\mathrm{FF'}) \\ &= \frac{\sin\omega}{\sin(\alpha-\beta)}\left[v\left(\frac{\mathrm{R}^2}{v} - v\right) + u\left(\frac{\mathrm{R}^2}{u} - u\right)\right] \\ &= \frac{\sin\omega}{\sin(\alpha-\beta)}(2\mathrm{R}^2 - u^2 - v^2). \end{aligned}$$

9. On trouve aisément

$$\frac{\sin\omega}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{\mathrm{R}^4 - 2\mathrm{R}^2uv\cos\omega + u^2v^2}{\mathrm{R}^4 - u^2v^2};$$

on en déduit la relation

$$4a^2(\mathrm{R}^4 - u^2v^2) = (2\mathrm{R}^2 - u^2 - v^2)(\mathrm{R}^4 - 2\mathrm{R}^2uv\cos\omega + u^2v^2).$$

On a d'ailleurs

$$4c^2 = u^2 + v^2 - 2uv\cos\omega;$$

en éliminant $\cos\omega$ entre les deux équations qui précèdent, il viendra enfin

$$4a^2(\mathrm{R}^4 - u^2v^2) = (2\mathrm{R}^2 - u^2 - v^2)[(\mathrm{R}^2 - u^2)(\mathrm{R}^2 - v^2) + 4c^2\mathrm{R}^2].$$

10. Si l'on suppose que la conique se réduise à un cercle, les foyers F et G étant confondus, on devra faire $c = 0$, et en posant

$$u = v = \mathrm{D}, \qquad a = r,$$

on obtiendra la relation suivante :

$$(\mathrm{R}^2 - \mathrm{D}^2)[2r^2(\mathrm{R}^2 + \mathrm{D}^2) - (\mathrm{R}^2 - \mathrm{D}^2)^2] = 0.$$

11. Comme je l'ai rappelé plus haut, si l'on considère un quadrilatère quelconque circonscrit à la conique K et inscrit dans le cercle C, les diagonales de ce quadrilatère se coupent en un point fixe.

Pour déterminer ce point fixe, je considère en particulier le quadrilatère $I\alpha\delta\beta$; le point fixe cherché se trouve sur la droite δI, et, comme il est évidemment réel, il se confond avec le point D. On peut d'ailleurs facilement vérifier que ce point est sur la diagonale $\alpha\beta$; cela résulte immédiatement de la similitude des triangles FDG et F'DG'.

Ainsi :

Le point de rencontre fixe des diagonales des quadrilatères circonscrits à la conique K *et au cercle* C *est le point de rencontre des droites* FG' *et* GF'.

12. Les considérations qui précèdent s'appliquent évidemment au cas où le polygone, que l'on peut circonscrire à la conique et inscrire dans le cercle, a un nombre de côtés supérieur à quatre; mais les résultats deviennent alors beaucoup plus compliqués, et je me contenterai d'examiner le cas particulier où, la conique étant une parabole P, on peut lui circonscrire un pentagone inscrit dans un cercle C.

Si nous prenons pour sommet de ce pentagone l'ombilic I, des deux tangentes que l'on peut de ce point mener à la parabole, l'une est la droite de l'infini qui rencontre le cercle à l'ombilic J, l'autre coupe le cercle en un point α. Par l'ombilic J, on peut mener à P une tangente distincte de la droite de l'infini; je désignerai par β le point où elle rencontre C. Cela posé, il est clair que, si l'on peut inscrire dans le cercle un pentagone circonscrit à la parabole, les tangentes à ce cercle, menées par les points α et β (et distinctes des droites isotropes αI et βJ), doivent se couper en un point γ de ce cercle. D'ailleurs, les points α et β étant évidemment *imaginairement conjugués*, il en est de même de ces deux tangentes; le *point* γ *est donc réel*.

Nous devons maintenant exprimer que la droite $\alpha\gamma$ est tangente à la parabole.

A cet effet, je remarque que le point α est représenté par le segment FF', si l'on appelle F le foyer de la parabole et F' son réciproque relativement au cercle. Cherchons le symétrique de F relativement à la droite $\alpha\gamma$; pour cela, je considère la droite isotrope du système J qui passe par le point α; puis, par le point F je mène la droite isotrope du même système qui rencontre $\alpha\gamma$ en un point ε; enfin par le point ε je mène la droite isotrope du système I.

Les droites αJ et εI se coupent en un point φ qui est le symétrique cherché, et le segment représentatif de φ est RF', si l'on désigne par R le point réel situé sur la droite εI.

13. D'ailleurs, les points α, ε et γ étant en ligne droite, les deux triangles $FF'\gamma$ et $RF\gamma$ sont semblables, et par suite le point R est le point d'intersection de $F'\gamma$ par la droite menée par F parallèlement à $O\gamma$.

Si maintenant on remarque que le point φ, représenté par le segment RF', est sur la directrice de la parabole, on en conclut d'autre part que R est le symétrique de F' relativement à cette directrice.

D'où la proposition suivante :

Soit donnée une parabole à laquelle on peut circonscrire un pentagone inscrit dans le cercle; construisons le point F', *réciproque par rapport au cercle, du foyer* F *de la parabole, puis le point* R *symétrique du point* F' *par rapport à la directrice de cette parabole; cela posé, le point de rencontre de* F'R *avec la droite menée par le centre du cercle parallèlement à* FR *est situé sur le cercle.*

14. Si l'on désigne par γ ce point de rencontre, par O le centre du cercle et r son rayon, les deux triangles semblables FF'R et $OF'\gamma$ donnent la proportion

$$\frac{O\gamma}{FR} = \frac{OF'}{OF'F};$$

et comme

$$OF' = \frac{r^2}{OF} \qquad \text{et} \qquad O\gamma = r,$$

on en déduit la relation suivante :

$$r^2 - OF^2 = r.FR.$$

15. En terminant cette Note, je ferai encore remarquer avec quelle facilité les considérations dont j'ai fait usage conduisent au beau théorème de M. Faure, relativement aux triangles conjugués par rapport à une conique.

Considérons, en effet, un cercle circonscrit à un triangle conjugué relatif à une conique K; on sait que l'on peut, dans ce cercle, inscrire une infinité d'autres triangles jouissant de la même propriété. Prenons l'ombilic I comme sommet d'un de ces triangles, et soient α et β les points de rencontre de K avec la polaire de cet ombilic; ces points sont évidemment sur le cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique, en sorte que, en désignant par O le centre de K et par a et b les demi-axes de cette conique, on a la relation

$$O\beta^2 = O\alpha^2 = a^2 + b^2.$$

Soient γ et δ les deux autres sommets du triangle conjugué dont le premier sommet est I; par définition, les points γ et δ se trouvent sur la droite $\alpha\beta$ et divisent harmoniquement le segment $\alpha\beta$; on a donc

$$O\gamma . O\delta = O\alpha^2 = a^2 + b^2,$$

et, comme $O\gamma . O\delta$ est évidemment la puissance du centre O relativement au cercle C, le théorème est démontré.

SUR

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES HOMOFOCALES.

Bulletin de la Société mathématique de France; 1879.

I.

1. Je considère, dans un plan, un système de coniques homofocales; soient Ox et Oy les axes de ces coniques, F et F′ leurs foyers réels communs, que je supposerai situés sur l'axe Ox; les deux foyers imaginaires communs Φ et Φ' seront, par suite, situés sur l'axe Oy. Pour abréger, j'appellerai simplement *conique du système* une conique ayant pour foyers les points F, F′, Φ et Φ'.

Étant donné un point quelconque M du plan, deux coniques du système se croisent en ce point; désignons par N et N′ les centres des deux cercles qui osculent respectivement ces deux coniques au point M, et par μ la droite qui joint ces deux points. Cette droite est parfaitement déterminée quand on se donne le point M et les deux foyers F et F′; je dirai que c'est l'axe du point M.

2. Réciproquement, étant donnée une droite μ du plan, il existe trois points M, M′ et M″ pour lesquels cette droite est un axe.

Si l'on considère la conique du système qui touche la droite μ, *et que l'on désigne respectivement par* α *et* β *les points où la normale menée au point de contact rencontre les axes* Ox *et* Oy, *les trois points* M, M′ *et* M″, *qui ont pour axe la droite* μ, *sont situés sur le cercle* A *passant par les points* α, β *et le centre* O *commun aux coniques du système.*

3. On sait que toutes les propriétés des normales et des centres

de courbure d'une conique sont triples; les normales à une conique demeurent, en effet, normales à la transformée de cette conique quand on effectue une transformation homographique qui, aux deux ombilics du plan ([1]), fait correspondre deux des foyers indépendants de cette conique.

De la proposition précédente, on déduit donc immédiatement les théorèmes qui suivent :

La conique qui, passant par le point β *et les deux foyers* F *et* F′, *a pour asymptotes l'axe* Oy *et la droite* $\alpha\beta$ *contient les trois points* M, M′ *et* M″.

La conique qui, passant par le point α *et les deux foyers* Φ *et* Φ', *a pour asymptotes l'axe* Ox *et la droite* $\alpha\beta$ *contient également les trois points* M, M′ *et* M″.

4. Les trois points qui ont pour axe la droite μ sont, comme on le voit, les trois points communs aux deux coniques dont je viens de parler et au cercle A défini précédemment (2).

Mais on peut aussi les déterminer par l'intersection de ce cercle et d'une conique avec une conique ayant pour axes les droites Ox et Oy.

Désignons, en effet, par C la conique du système qui touche la droite μ et par K la conique dont les sommets coïncident avec les points de rebroussement de la développée de C; nous pourrons énoncer la propriété suivante :

Les points M, M′ *et* M″, *qui ont pour axe la droite* μ, *sont situés sur la conique* K; *le quatrième point de rencontre de cette conique et du cercle* A *est le point* O′ *qui, sur le cercle, est diamétralement opposé au centre* O *commun aux coniques du système.*

5. *Le point* O′, *diamétralement opposé au point* O *sur le cercle* A, *est le conjugué harmonique du point* O *relativement aux points* M, M′ *et* M″.

[1] Je désigne ainsi les points imaginaires situés à l'infini et communs à tous les cercles tracés dans le plan.

6. *Le triangle* MM′M″ *est circonscrit à la conique* C *du système qui touche la droite* μ.

7. Considérons l'hyperbole équilatère H, qui a pour centre le point O et dont l'axe transverse, dirigé suivant Oy, a pour longueur FF′; nous pourrons énoncer la proposition suivante :

Le triangle MM′M″ *est autopolaire relativement à l'hyperbole* H.

8. Soit M′M″ un côté quelconque du triangle MM′M″; du point O abaissons une perpendiculaire sur ce côté, et désignons par M_0 le point symétrique, par rapport au point O, du pied de cette perpendiculaire.

Le point M_0 *est situé sur l'axe* μ *du point* M, *et la droite* MT_0 *est perpendiculaire à cet axe.*

9. Étant donnée une conique C du système, on voit que, si la droite μ roule sur cette conique, les points correspondants M, M′ et M″ décrivent la conique K, tandis que les côtés du triangle MM′M″ roulent tangentiellement à C elle-même.

D'où les propositions suivantes :

Étant donnée une conique quelconque C *du système, désignons par* K *la conique dont les sommets coïncident avec les points de rebroussement de la développée de* C.

Cela posé, en appelant O′ *un point quelconque de* K *et* O *le centre commun aux courbes du système, si, sur* OO′ *comme diamètre, on décrit un cercle, ce cercle rencontre les axes en deux points; la droite qui joint ces deux points est normale à la conique* C.

Ce cercle rencontre de nouveau K *en trois autres points; chacun de ces points a pour axe une même droite tangente à* C.

Les côtés du triangle formé par ces points sont circonscrits à C.

Ce triangle est autopolaire relativement à l'hyperbole équilatère H.

10. Les coniques C et K, qui figurent dans l'énoncé des propo-

sitions qui précèdent, ont entre elles des relations qui méritent d'être étudiées.

Entre autres propositions, je rappellerai la suivante, que j'ai déjà fait connaître, il y a quelques années, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (1) :

Si d'un point de la conique K *on mène des tangentes à la développée de la conique* C, *les quatre points de contact sont en ligne droite, et la droite qui joint ces points de contact est normale à la courbe* C.

II.

11. Soit M un point quelconque du plan; par ce point passent deux coniques du système. En désignant par N et N′ les centres des cercles qui osculent ces coniques au point donné, je dirai que N et N′ correspondent au point M.

Réciproquement, étant donné un point N du plan, on peut chercher combien de points M lui correspondent, c'est-à-dire combien existent de cercles ayant le point M pour centre et osculateurs d'une conique du système.

12. Pour résoudre cette question, je m'appuierai sur les considérations suivantes :

Étant donné un point N du plan, si de ce point on mène les normales à une conique du système, les tangentes aux points de contact touchent une parabole P tangente aux axes de la conique. Cette parabole est la même quelle que soit la conique du système que l'on considère; elle est l'enveloppe des polaires du point N relativement aux diverses coniques qui ont pour foyers les points F et F′.

13. Pour le démontrer, je m'appuierai sur cette importante proposition, due à M. Chasles :

Le lieu des pôles d'une droite relativement aux coniques qui forment un système homofocal est une droite qui rencontre la

(1) *Sur la développée de l'ellipse* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, janvier 1875).

droite donnée au point où elle touche la conique du système qui lui est tangente.

Soient P l'enveloppe des polaires dont je viens de parler (on voit immédiatement que c'est une parabole tangente aux axes), C une conique du système, et T une tangente commune à C et à P. En désignant par M le point où elle touche C, on voit que le lieu des pôles de T relativement aux coniques du système est la droite menée par M normalement à C; en vertu du théorème de M. Chasles que je viens de rappeler, cette droite passe par le point N; donc NM est normale à la conique C.

Réciproquement, abaissons du point N une normale à la conique C, et soit M le pied de cette normale. En désignant par T la tangente menée en ce point, on voit que le lieu des pôles de T relativement aux coniques du système est la droite MN. Il y existe donc une conique du système pour laquelle le pôle de T se confond avec le point N; par suite, la droite T est tangente à la parabole P.

La proposition que j'ai énoncée est donc entièrement établie (1).

14. Le foyer de la parabole P peut se déterminer aisément. On peut, en effet, la définir de la façon suivante :

Si autour du point N *on fait tourner une transversale, et que par son pôle on mène une perpendiculaire à cette droite, l'enveloppe de ces perpendiculaires est la parabole* P (2).

Pour avoir le foyer de la parabole, il faut chercher les droites isotropes tangentes à cette courbe. On les obtiendra si l'on considère les transversales isotropes passant par le point N. En désignant par I l'un des ombilics du plan, soit NI l'une de ces transversales; menons par les foyers F et F′ des parallèles à cette droite.

(1) On démontrerait de même que :

Si d'un point N *de l'espace on mène les normales à une surface du second ordre, les pieds des normales sont les points de contact des plans qui touchent la surface et sont osculateurs de la cubique gauche enveloppée par les plans polaires de* N, *relativement aux diverses surfaces du second ordre qui ont les mêmes focales que la surface donnée.*

(2) CHASLES, *Traité des sections coniques*, p. 145.

Le foyer φ de la parabole se trouve sur la droite isotrope conjuguée harmonique de NI relativement aux deux droites dont je viens de parler; des conséquences analogues se déduiraient de la considération de la transversale isotrope passant par le second ombilic J.

On peut donc énoncer la propriété suivante :

Le foyer de la parabole P *est le conjugué harmonique du point* N *relativement aux deux foyers* F *et* F' *communs à toutes les courbes du système.*

J'ajouterai que :

La directrice de cette parabole est la droite ON *qui joint le point* N *au centre commun des coniques du système.*

15. Du théorème précédent résultent immédiatement les conséquences suivantes :

Si l'on imagine, dans le plan des deux axes Ox *et* Oy, *deux droites quelconques* D *et* D', *le foyer de la parabole qui touche ces quatre droites a pour conjugué harmonique, relativement aux foyers* F *et* F', *le point de rencontre des normales menées aux deux courbes du système qui touchent* D *et* D'.

Et, si l'on suppose que les droites D et D' viennent se confondre :

Si en un point M *d'une conique on mène la tangente, et si l'on imagine la parabole qui touche cette tangente au point* M *et en outre est tangente aux axes de la conique, le conjugué harmonique du foyer de cette parabole, relativement aux deux foyers de la courbe, est le centre du cercle qui oscule cette courbe au point* M.

16. Cela posé, pour trouver les points M correspondant à un point donné M, construisons le point M_0, conjugué harmonique de M relativement aux deux foyers F et F', et imaginons la parabole P, qui a pour foyer le point M_0 et pour directrice la droite OM.

Il est clair, par ce qui précède, que :

Les points N *correspondant au point* M *sont les pieds des normales abaissées de ce dernier point sur la parabole* P.

Ces points sont donc au nombre de trois, et, si l'on désigne par I le milieu du segment M_0M, ils s'obtiendront en cherchant l'intersection de P avec le cercle décrit sur M_0I comme diamètre.

17. Le triangle formé par ces trois points jouit de diverses propriétés intéressantes, parmi lesquelles je me bornerai à mentionner la suivante :

Le triangle formé par les trois points correspondant à un point donné du plan est circonscrit à une conique du système.

Je me réserve de revenir sur ce sujet et d'étendre aux surfaces homofocales du second ordre les résultats contenus dans cette Note.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS

DE

L'HYPOCYCLOÏDE A TROIS POINTS DE REBROUSSEMENT.

Bulletin de la Société mathématique de France; 1879.

I.

1. Soient OX et OY deux axes rectangulaires, et X, Y les coordonnées d'un point quelconque M du plan relativement à ce système d'axes; posons

$$X + Yi = x \quad \text{et} \quad X - Yi = y;$$

nous pouvons considérer x et y comme de nouvelles coordonnées du point M. On voit que les équations $x = \alpha$ et $y = \beta$, où α et β désignent des quantités constantes arbitraires, représentent les diverses droites isotropes du plan; je désignerai donc, pour abréger, le système de coordonnées que je viens de définir sous le nom de *coordonnées isotropes*.

Dans un pareil système, le coefficient angulaire d'une droite faisant avec l'axe OX un angle donné V est égal à e^{-2Vi}; l'équation de l'axe OX est

$$x = y,$$

et l'équation d'un cercle de rayon R et ayant pour centre le point (α, β) est

$$(x - \alpha)(y - \beta) = R^2.$$

2. Étant donnée une courbe de $n^{\text{ième}}$ classe, les coefficients angulaires des tangentes que d'un point (x, y) on peut mener à cette courbe sont donnés par une équation homogène du degré n,

$$U(\lambda, \mu) = 0;$$

dans cette équation, $\frac{\mu}{\lambda}$ désigne le coefficient angulaire de la tangente issue du point (x, y), et les coefficients du polynome U sont des fonctions entières de x et de y.

L'équation précédente est, en me servant d'une dénomination que j'ai déjà employée dans plusieurs travaux antérieurs [1], l'*équation mixte de la courbe*.

3. L'hypocycloïde à trois points de rebroussement étant définie comme une courbe de troisième classe qui touche aux deux ombilics la droite de l'infini, on voit immédiatement que son équation mixte est de la forme

$$a\lambda^3 + b\lambda^2\mu + c\lambda\mu^2 + d\mu^3 + \lambda\mu(\lambda y - \mu x) = 0.$$

Cherchons le lieu des points du plan d'où l'on voit l'hypocycloïde sous un angle droit; il faut, pour cela, exprimer que l'équation précédente a deux racines égales et de signes contraires.

Le lieu cherché a donc pour équation

$$(c - x)(b + y) = ad;$$

elle représente, comme on le sait, un cercle. En mettant en évidence le rayon R de ce cercle et les coordonnées α et β de son centre, je poserai

$$c = \alpha, \quad b = -\beta, \quad a = Re^{-\varphi i} \quad \text{et} \quad d = -Re^{\varphi i}.$$

L'équation mixte de la courbe deviendra donc

$$(1) \qquad Re^{-\varphi i}\lambda^3 - \beta\lambda^2\mu + \alpha\lambda\mu^2 - Re^{\varphi i}\mu^3 + \lambda\mu(\lambda y - \mu x) = 0.$$

4. Je vais chercher maintenant l'équation mixte des diverses hypocycloïdes qui touchent l'axe OX et qui rencontrent cet axe en deux autres points équidistants de l'origine O.

L'axe OX étant tangent à la courbe, une des tangentes issues de l'origine a pour coefficient angulaire l'unité; l'équation (1) est donc satisfaite quand on y fait

$$x = 0, \quad y = 0 \quad \text{et} \quad \lambda = \mu,$$

[1] *Mémoire de Géométrie analytique*, 2e série, t. XVII.

d'où l'équation de condition

$$\alpha - \beta = \mathrm{R}e^{\varphi i} - \mathrm{R}e^{-\varphi i}.$$

Considérons un point de l'axe OX situé à une distance de l'origine égale à z, en sorte que les coordonnées de ce point soient

$$x = y = z;$$

les coefficients angulaires des tangentes issues de ce point sont donnés par l'équation (1), dans laquelle on a remplacé x et y par z. Si l'on divise cette équation par $\lambda - \mu$ (ce qui revient à faire abstraction de la tangente OX), on trouve aisément que, en posant

$$u = \mathrm{R}e^{-\varphi i} - \beta = \mathrm{R}e^{\varphi i} - \alpha,$$

les coefficients angulaires des deux autres tangentes sont déterminés par l'équation

$$\mathrm{R}e^{-\varphi i}\lambda^2 + (u + z)\lambda\mu + \mathrm{R}e^{\varphi i}\mu^2 = 0.$$

En laissant de côté le point où la courbe est tangente à OX, on obtiendra les deux autres points où elle rencontre cette droite en exprimant que l'équation précédente a deux racines égales, ce qui donne la relation

$$(u + z)^2 = 4\mathrm{R}^2.$$

Si maintenant on remarque que, les deux points d'intersection dont je viens de parler étant à égale distance de l'origine O, les deux valeurs obtenues pour z doivent être égales et de signes contraires, on en conclut

$$u = \mathrm{R}e^{-i\varphi} - \beta = \mathrm{R}e^{i\varphi} - \alpha = 0,$$

d'où

$$\alpha = \mathrm{R}e^{i\varphi} \quad \text{et} \quad \beta = \mathrm{R}e^{-i\varphi}.$$

Ainsi le centre ω du cercle K, lieu des sommets des angles droits circonscrits à l'hypocycloïde, est situé sur la droite qui fait avec l'axe OX un angle égal à φ et à une distance égale à R, c'est-à-dire au rayon de ce cercle. En désignant par A et A′ les deux points de rencontre de OX avec la courbe, on voit ainsi que ce cercle passe par le milieu O du segment AA′ et que ce segment a une longueur constante égale à 4R, propositions bien connues.

5. En remplaçant dans l'équation (1) α et β par leurs valeurs

l'équation mixte de l'hypocycloïde prend la forme suivante :

$$(2) \qquad \mathrm{R}(\lambda - \mu)(e^{-i\varphi}\lambda^2 + e^{i\varphi}\mu^2) + \lambda\mu(\lambda y - \mu x) = 0,$$

et l'équation qui donne les coefficients angulaires des tangentes issues d'un point de l'axe OX ($x = y = z$) devient

$$(3) \qquad \mathrm{R}e^{-i\varphi}\lambda^2 + z\lambda\mu + \mathrm{R}e^{i\varphi}\mu^2 = 0.$$

En particulier, les tangentes issues du point A′, pour lequel on a $z = -2\mathrm{R}$, sont déterminées par l'équation

$$\left(e^{-\frac{i\varphi}{2}}\lambda - e^{\frac{i\varphi}{2}}\mu\right)^2 = 0,$$

d'où l'on voit que la tangente menée au point A′ fait avec l'axe OX un angle égal à $\frac{\varphi}{2}$.

Si donc on prend sur le cercle K le point O′ diamétralement opposé au point O, cette tangente est précisément la droite A′O′; la droite O′A est également tangente à l'hypocycloïde au point A, et ces deux droites, conformément à une proposition bien connue, sont rectangulaires entre elles.

6. On voit que l'on peut, par les points A et A′, mener une infinité d'hypocycloïdes tangentes à l'axe OX; toutes ces courbes sont d'ailleurs égales entre elles, puisque la longueur du segment AA′ détermine le rayon du cercle K et par suite la grandeur de la courbe elle-même. On les obtiendra toutes en donnant à φ toutes les valeurs possibles dans l'équation (2).

Soient deux de ces courbes H_φ et $\mathrm{H}_{\varphi+\theta}$ caractérisées par deux valeurs de l'angle φ différant entre elles de l'angle θ; si l'on désigne par ω et ω_1 les centres des cercles des points desquels on voit respectivement ces courbes sous un angle droit, on voit que l'angle $\omega \mathrm{O} \omega_1$ est précisément égal à θ.

D'un point M situé sur l'axe OX et à une distance du point O égale à z, menons aux deux courbes K_φ et $\mathrm{K}_{\varphi+\theta}$ les tangentes distinctes de l'axe.

Les coefficients angulaires de ces tangentes sont respectivement déterminés par les deux équations

$$\mathrm{R}e^{-i\varphi}\lambda^2 + z\lambda\mu + \mathrm{R}e^{i\varphi}\mu^2 = 0$$

et

$$\mathrm{R}e^{-i(\varphi+\theta)}\lambda^2 + z\lambda\mu + \mathrm{R}e^{i(\varphi+\theta)}\mu^2 = 0;$$

ceux des tangentes menées à $\mathrm{H}_{\varphi+\theta}$ se déduisent évidemment de ceux des tangentes menées à H_φ, en les multipliant par le facteur constant $e^{-\theta i}$; en d'autres termes, les tangentes à $\mathrm{H}_{\varphi+\theta}$ s'obtiennent en faisant tourner de l'angle $\frac{\theta}{2}$ les tangentes à H_φ.

D'où la proposition suivante :

Si l'on considère une droite quelconque D *tangente à une hypocycloïde à trois points de rebroussement, et si l'on imagine un angle de grandeur constante dont le sommet décrit cette droite tandis qu'un de ses côtés demeure tangent à la courbe, le second côté de cet angle enveloppe une autre hypocycloïde égale à la première, tangente à la droite* D *et passant par les deux points où cette droite coupe la première hypocycloïde.*

Ce que l'on peut encore énoncer ainsi :

Soit une hypocycloïde à trois points de rebroussement qui se déplace sans changer de forme, en restant tangente à une droite fixe D *et en passant par un point fixe de cette droite* (auquel cas elle passe nécessairement par un autre point fixe situé sur la même droite); *par différents points de* D *menons des tangentes à la courbe, et imaginons que, pendant le déplacement de cette courbe, ces droites lui demeurent tangentes; pour deux positions quelconques de l'hypocycloïde mobile, les angles décrits par les tangentes autour des points fixes de* D *sont tous égaux entre eux.*

7. J'ajouterai que dans le mouvement les points de contact décrivent des cercles, ce que, du reste, des considérations géométriques très simples rendent évident. Considérons, en effet, un point M situé sur l'axe OX, à une distance de l'origine égale à z. En désignant simplement par μ le coefficient angulaire d'une des tangentes menées de ce point à la courbe (ce qui revient à faire $\lambda = 1$), l'équation de cette tangente est

$$(4) \qquad \frac{y-z}{x-z} = \mu,$$

et l'on a la relation

$$(5) \qquad \mathrm{R}e^{i\varphi}\mu^2 + z\mu + \mathrm{R}e^{-i\varphi} = 0.$$

Les coordonnées du point de contact s'obtiendront en résolvant par rapport à x et y l'équation (4) et l'équation suivante, que l'on en déduit en la dérivant par rapport à z :

$$\frac{y-x}{(x-z)^2} = \frac{d\mu}{dz}.$$

De l'équation (5) on déduit d'ailleurs

$$(2\mathrm{R}e^{i\varphi}\mu + z)\frac{d\mu}{dz} + \mu = 0,$$

d'où

$$\frac{d\mu}{dz} = -\frac{\mu}{\sqrt{z^2 - 4\mathrm{R}^2}}$$

et

$$(6) \qquad \frac{y-x}{(x-z)^2} + \frac{\mu}{\sqrt{z^2 - 4\mathrm{R}^2}} = 0.$$

Pour obtenir le lieu des points de contact, il faut éliminer φ et μ entre les équations (4), (5) et (6), ou simplement μ entre les équations (4) et (6), qui ne renferment pas φ.

On obtient ainsi l'équation

$$(x-z)(y-z) + (y-x)\sqrt{z^2 - 4\mathrm{R}^2} = 0,$$

que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$\left(y - z - \sqrt{z^2 - 4\mathrm{R}^2}\right)\left(x - z + \sqrt{z^2 - 4\mathrm{R}^2}\right) = 4\mathrm{R}^2 - z^2.$$

Elle représente deux cercles tangents au point M à l'axe OX; leurs centres sont situés à l'intersection de la perpendiculaire élevée à l'axe en ce point avec le cercle décrit sur AA' comme diamètre.

8. Si l'on considère, comme précédemment, les deux hypocycloïdes H_φ et $\mathrm{H}_{\varphi+\theta}$, on voit que le sommet d'un angle circonscrit à ces deux courbes et ayant pour valeur $\frac{\theta}{2}$ décrit un lieu dont fait partie la tangente commune OX; on peut rechercher si cette droite constitue à elle seule le lieu complet.

Je remarque, à cet effet, que les coefficients angulaires des tangentes menées du point (x, y) à la courbe H_φ sont déterminés par l'équation

$$(2) \qquad R(\lambda-\mu)(e^{-i\varphi}\lambda^2+e^{i\varphi}\mu^2)+\lambda\mu(\lambda y-\mu x)=0,$$

et ceux des tangentes menées du même point à la courbe $H_{\varphi+\theta}$ par l'équation

$$R(\lambda'-\mu')(e^{-i(\varphi+\theta)}\lambda'^2+e^{i(\varphi+\theta)}\mu'^2)+\lambda'\mu'(\lambda' y-\mu' x)=0.$$

Si les deux tangentes font l'angle donné $\frac{\theta}{2}$, on a

$$\frac{\lambda'}{\mu'}=\frac{\lambda e^{\frac{\theta i}{2}}}{\mu e^{-\frac{\theta i}{2}}},$$

et l'équation précédente devient

$$(7) \quad R\left(e^{\frac{\theta i}{2}}\lambda-e^{-\frac{\theta i}{2}}\mu\right)(e^{-i\varphi}\lambda^2+e^{i\varphi}\mu^2)+\lambda\mu\left(e^{\frac{\theta i}{2}}y\lambda-e^{-\frac{\theta i}{2}}x\mu\right)=0.$$

Reste à éliminer λ et μ entre les relations (2) et (7); en éliminant entre elles l'expression $e^{-i\varphi}\lambda^2+e^{i\varphi}\mu^2$, il vient

$$\frac{e^{\frac{\theta i}{2}}\lambda-e^{-\frac{\theta i}{2}}\mu}{\lambda-\mu}=\frac{e^{\frac{\theta i}{2}}\lambda y-e^{-\frac{\theta i}{2}}\mu x}{\lambda y-\mu x}$$

et, en effectuant les calculs,

$$(y-x)\left(e^{\frac{\theta i}{2}}-e^{-\frac{\theta i}{2}}\right)=0.$$

La tangente OX constitue donc bien à elle seule le lieu du sommet de l'angle constant circonscrit aux deux courbes.

9. Les hypocycloïdes H_φ et $H_{\varphi+\theta}$ qui touchent toutes les deux l'axe OX ont, en outre, deux autres tangentes communes; pour avoir leur équation, il suffit d'éliminer λ et μ entre l'équation (2) et l'équation

$$(8) \qquad R(\lambda-\mu)(e^{-i(\varphi+\theta)}\lambda^2+e^{i(\varphi+\theta)}\mu^2)+\lambda\mu(\lambda y-\mu x)=0.$$

Éliminant d'abord $\lambda y-\mu x$ entre ces égalités, il vient

$$\lambda^2 e^{-i\varphi}(1-e^{-i\theta})+\mu^2 e^{i\varphi}(1-e^{i\theta})=0,$$

d'où, par une transformation facile,

$$\frac{\lambda}{\mu}=\pm e^{\varphi+\frac{\theta}{2}}.$$

Les angles que font ces deux tangentes avec l'axe OX sont donc égaux à $\frac{\varphi}{2}+\frac{\theta}{4}$ et à $\frac{\varphi}{2}+\frac{\theta}{4}+\frac{\pi}{4}$; ces deux droites sont à angle droit. De là une construction qui permet de les obtenir aisément. Soient, en effet, K et K_1 les cercles des points desquels on voit respectivement sous un angle droit les courbes H_φ et $H_{\varphi+\theta}$; ces cercles, indépendamment du point O, se coupent encore en un second point M. Ce point est nécessairement le point de rencontre des tangentes cherchées, puisqu'elles sont rectangulaires entre elles. Si maintenant nous prolongeons le rayon OM jusqu'en son point de rencontre N avec le cercle décrit sur AA′ comme diamètre, il résulte des considérations précédentes que les deux tangentes communes qui se croisent au point M sont parallèles aux droites NA et NA′.

D'où encore la proposition suivante :

Soit une hypocycloïde à trois points de rebroussement qui passe par deux points donnés A *et* A′ *et est tangente à la corde* AA′; *sur cette corde comme diamètre décrivons un cercle* B *et considérons le cercle* K, *lieu des points d'où l'on voit l'hypocycloïde sous un angle droit. Ce cercle passe, comme on le sait, par le point* O, *milieu de la corde* AA′, *et, en outre, est tangent au cercle* C.

Étant pris un point quelconque M *sur le cercle* K, *si l'on prolonge le rayon* OM *jusqu'en son point de rencontre* N *avec le cercle* C, *les droites menées par le point* M *parallèlement aux droites* NA *et* NA′ *sont les deux tangentes rectangulaires entre elles que de ce point on peut mener à la courbe.*

10. Les diverses hypocycloïdes qui, passant par les deux points A et A′, sont tangentes à la corde AA′, étant identiques entre elles, on peut les obtenir toutes par le déplacement d'une de ces courbes dans le plan.

Pour avoir une idée nette de ce déplacement, il faut chercher le lieu des centres instantanés de rotation dans le plan et le lieu décrit par ces centres relativement à la courbe mobile.

La courbe roulant sur les deux points A et A′, les normales menées en ces points sont respectivement perpendiculaires aux droites AO′ et A′O′, et par conséquent se coupent sur le cercle C décrit sur AA′ comme diamètre au point diamétralement opposé à O′; le lieu des centres instantanés de rotation dans le plan est donc le cercle C, dont le rayon est égal à 2R. On sait d'ailleurs que les normales aux extrémités de la corde AA′ se coupent sur le cercle passant par les trois points de rebroussement de l'hypocycloïde, cercle dont le rayon est égal à 3K.

D'où la conclusion qui suit :

Étant pris sur un cercle C *de rayon égal à* 2R *deux points diamétralement opposés* A *et* A′, *si l'on fait rouler ce cercle dans l'intérieur d'un cercle* C′ *de rayon égal à* 3R, *on sait que les deux points* A *et* A′ *décrivent une même hypocycloïde à trois points de rebroussement inscrite dans le cercle* C′. *A un instant quelconque du mouvement, les points* A *et* A′ *sont situés sur l'hypocycloïde, tandis que la droite* AA′ *lui est tangente; si à cet instant on fixe le cercle* C, *et si l'on fait rouler sur ce cercle le cercle* C′ *en entraînant avec lui la courbe, cette courbe, dans son déplacement, passe constamment par les points fixes* A *et* A′ *et demeure tangente à la droite* AA′.

II.

11. Les résultats qui précèdent peuvent se déduire aisément de quelques propositions très simples et purement géométriques.

Considérons, à cet effet, une ellipse E située dans l'espace et dont la projection orthogonale sur un plan donné P soit un cercle C. Prenons arbitrairement sur cette courbe un point fixe A et un point mobile M. Si par le milieu I de la corde AM nous menons un plan perpendiculaire à cette corde, il coupe le plan P suivant une droite dont l'enveloppe est une courbe H que l'on peut aussi évidemment définir comme le lieu des centres des sphères symétriques par rapport au plan P et tangentes à l'ellipse E.

Je dis d'abord que la courbe H est une hypocycloïde à trois points de rebroussement.

Soit D une droite située dans le plan P; si d'un point quelconque N de cette droite comme centre on décrit une sphère

passant par le point A, cette sphère coupe le plan Q de l'ellipse suivant un cercle passant par le point A et par le point A′ qui lui est symétrique par rapport à la projection orthogonale de D sur le plan Q.

Il est clair que le point N est sur la courbe H si ce cercle est tangent à l'ellipse, et, comme par les points A et A′ on peut mener quatre cercles tangents à E, il en résulte que la courbe K est du quatrième ordre.

Soit N un point quelconque du plan P; de ce point comme centre décrivons une sphère passant par le point A; cette sphère coupe le plan Q suivant un cercle rencontrant l'ellipse au point A et en trois autres points B, C et D. Les plans menés respectivement par les milieux des cordes AB, AC et AD coupent le plan P suivant des droites tangentes à H et se croisant au point donné N. La courbe H est donc de la troisième classe.

Si le point N est rejeté à l'infini dans une direction quelconque, la sphère dont je viens de parler se réduit au plan mené par A perpendiculairement à cette direction, et, comme ce plan ne coupe E qu'en un point, il est clair qu'on ne peut mener à la courbe H qu'une tangente parallèle à une direction donnée. Cette courbe est donc doublement tangente à la droite de l'infini, et les points de contact sont situés sur les perpendiculaires menées aux asymptotes de la projection de l'ellipse sur le plan P. Cette projection étant un cercle, ces asymptotes, ainsi que leurs perpendiculaires, sont des droites isotropes. La courbe H est donc de troisième classe et doublement tangente, aux ombilics, à la droite de l'infini; par suite, c'est une hypocycloïde à trois points de rebroussement.

12. Cette hypocycloïde a, comme on le sait, trois points de rebroussement α, β, γ qui sont les sommets d'un triangle équilatéral, et le centre du cercle circonscrit à ce triangle est le point de concours des tangentes de rebroussement.

Considérons l'un quelconque α de ces points de rebroussement; les tangentes que l'on peut de ce point mener à la courbe étant toutes les trois confondues en une seule droite, la sphère passant par A et décrite du point α comme centre coupe le plan Q suivant un cercle passant par A et osculateur de l'ellipse E en un point α';

la projection sur le plan Q de la tangente de rebroussement au point α est d'ailleurs la droite menée par le milieu de la corde $A\alpha$ et perpendiculairement à cette corde.

Si maintenant on remarque que les trois tangentes de rebroussement sont concourantes, on obtiendra la proposition suivante, due à Steiner :

Étant donné sur une ellipse un point quelconque A, *on peut déterminer trois cercles osculateurs de cette courbe qui passent par le point* A; *les trois points de contact et le point* A *sont sur un même cercle.*

D'après ce que je viens d'exposer, on peut ajouter que :

Si l'ellipse se projette orthogonalement sur un plan donné P *suivant une circonférence de cercle, les droites menées perpendiculairement au plan de l'ellipse par les trois points de contact rencontrent le plan* P *en trois points qui sont les sommets d'un triangle équilatéral, et la droite menée par le centre du cercle circonscrit aux trois points de contact, et perpendiculairement à son plan, rencontre le plan* P *au centre du cercle circonscrit à ce triangle équilatéral.*

13. Prenons sur l'ellipse E un autre point fixe B; à ce point correspond une seconde hypocycloïde H'. Cherchons les tangentes communes aux courbes H et H'.

Je désigne par F et G les deux axes de l'ellipse, par f et g les droites suivant lesquelles le plan P est coupé par les plans menés respectivement par F et G et normalement au plan Q. Les droites f et g sont évidemment perpendiculaires entre elles, puisque F est parallèle au plan P.

Cela posé, si des points A et B on mène dans le plan Q des perpendiculaires à F, cet axe les divise en deux parties égales; il en résulte que f est une tangente commune à H et H', et les mêmes considérations s'appliquent à la droite g. Les deux courbes ont donc déjà en commun deux tangentes rectangulaires entre elles.

Considérons maintenant la corde AB et le plan mené par son point milieu perpendiculairement à sa direction; il coupe le plan P suivant une droite D qui est aussi tangente aux deux hypocycloïdes.

14. Les points de contact de cette droite s'obtiendront évidemment en prenant son intersection avec les plans menés en A et en B normalement à l'ellipse.

Pour obtenir les autres points où elle rencontre les deux courbes, je mène par les points A et B un cercle tangent à l'ellipse; on peut mener deux de ces cercles, et leurs points de contact m et m' sont diamétralement opposés. Si l'on construit les axes [1] de ces deux cercles, il est clair qu'ils rencontrent D en deux points appartenant à la fois à H et H'. Soient n et n' ces deux points; on voit que les hypocycloïdes ont une corde commune à laquelle elles sont toutes les deux tangentes : *elles sont donc égales entre elles.*

On peut remarquer que les droites menées aux points n et n' tangentiellement à la courbe H sont les traces de deux plans perpendiculaires aux cordes Am et Am'; elles sont donc perpendiculaires à leurs projections sur le plan P, et, comme la projection du diamètre mm' passe par le centre du cercle C, on voit que ces projections sont rectangulaires; il en est donc de même des deux tangentes aux points n et n', ce qui est une proposition bien connue.

15. Lorsque le point A se déplace sur l'ellipse, l'hypocycloïde qui lui correspond demeure, comme je viens de le montrer, invariable de forme en restant tangente aux deux droites fixes f et g. Je dis que la droite qui joint les deux points de contact est la trace sur le plan P du plan normal à l'ellipse au point A.

Menons, en effet, par le point A les cordes Aa et Ab, respectivement perpendiculaires aux axes F et G. Le point où la droite f touche l'hypocycloïde H est le point de rencontre du plan P avec l'axe du cercle bitangent à l'ellipse aux points A et a. Si donc au point A on mène le plan normal à cette courbe, il contient ce point de contact; par une raison semblable, il contient l'autre point de contact. La proposition que je voulais démontrer est donc établie.

16. Si le point A se déplace infiniment peu sur l'ellipse, l'hypocycloïde H roule sur les deux droites f et g; la droite qui joint les deux points de contact est une corde commune aux deux courbes

[1] J'appelle, pour abréger, *axe d'un cercle* la droite passant par le centre de ce cercle et perpendiculaire à son plan.

et, de plus, leur est tangente; par suite, elle a une longueur constante.

Donc :

Les traces, sur le plan P, *des plans normaux à l'ellipse* E *enveloppent une hypocycloïde à quatre points de rebroussement. Le lieu des centres des sphères doublement tangentes à l'ellipse se compose des deux tangentes doubles de rebroussement de cette hypocycloïde.*

17. Au lieu de considérer une ellipse, j'aurais pu considérer une biquadratique quelconque, ayant pour plan de symétrie le plan P et située sur un cylindre dont la base est un cercle situé dans ce plan.

Sans rien changer aux démonstrations qui précèdent, on obtiendrait facilement les propositions qui suivent :

Étant donnée une biquadratique résultant de l'intersection d'un cylindre droit, ayant pour base un cercle situé dans un plan P, *avec une surface quelconque du second ordre ayant ce plan pour plan de symétrie, le lieu des centres des sphères qui, passant par les extrémités d'une corde de la courbe perpendiculaire au plan* P, *sont doublement tangentes à cette courbe, est une hypocycloïde* H *à trois points de rebroussement située dans le plan de symétrie.*

Si l'on considère les diverses cordes de la courbe perpendiculaires au plan P, *les diverses hypocycloïdes qui leur correspondent sont identiques et ne diffèrent que par leur position dans le plan.*

Les traces sur le plan de symétrie des plans normaux à la biquadratique enveloppent une hypocycloïde à quatre points de rebroussement.

Les centres des sphères quadruplement tangentes à la biquadratique décrivent les deux droites rectangulaires qui constituent les tangentes doubles de rebroussement de cette dernière hypocycloïde.

18. La considération des trois points de rebroussement de l'hypocycloïde H conduit, relativement aux biquadratiques douées d'un plan de symétrie, à un théorème analogue à celui qui a été donné par Steiner relativement aux coniques et que j'ai rappelé plus haut.

Comme il est facile de le voir, il n'est pas besoin de supposer que la projection de la biquadratique sur le plan de symétrie soit un cercle, et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Étant donnée une biquadratique quelconque ayant pour plan de symétrie un plan donné P, *par les extrémités d'une corde quelconque de cette courbe perpendiculaire au plan* P, *on peut mener trois sphères qui ont avec la courbe un double contact du second ordre; les six points de contact et les extrémités de la corde sont sur une même sphère dont le centre est dans le plan de symétrie.*

Si la biquadratique se projette suivant un cercle sur le plan de symétrie, on peut ajouter que :

Les centres des trois sphères qui ont un double contact sont les sommets d'un triangle équilatéral, et le centre de la sphère qui contient les points de contact est le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

19. Je reviens maintenant au cas précédemment étudié de l'ellipse E, quoique les considérations suivantes s'appliquent encore sans modification au cas plus général où l'on considère une biquadratique.

J'ai montré que, quand le point A se déplaçait sur l'ellipse, l'hypocycloïde H se déplaçait, sans changer de forme, dans le plan P.

Pour étudier la loi de ce déplacement, je remarque que, en désignant respectivement par φ et γ les points où H touche les droites f et g, la droite $\varphi\gamma$ a une longueur constante, que j'appellerai 4R. Les normales à la courbe menées aux points φ et γ se rencontrent en un point dont la distance au point d'intersection de f et de g est constante et égale à 4R. Le centre instantané de rotation décrit donc dans le plan un cercle de rayon égal à 4R. On sait d'ailleurs que, relativement à la courbe, il décrit le cercle qui lui est circonscrit et dont le rayon est égal à 3R.

On peut, par suite, se représenter ainsi qu'il suit le déplacement de l'hypocycloïde dans son plan :

Imaginons un cercle K *de rayon égal à* 4R, *puis deux autres cercles* K′ *et* K″ *de rayons respectivement égaux à* 3R *et à* 2R *et qui touchent tous les deux* K *au même point* M. *Si l'on considère le diamètre* Δ *du cercle* K″ *qui passe par le point* M, *et si l'on fait rouler ce cercle dans le cercle* K′, *supposé fixe, en entraînant avec lui ce diamètre, on sait que cette droite enveloppe une hypocycloïde* H *à trois points de rebroussement inscrite dans le cercle* R′.

Si maintenant on suppose que, cette courbe restant invariablement liée au cercle K′, *on fasse rouler ce cercle dans le cercle* R, *l'hypocycloïde prendra successivement les diverses positions qui correspondent aux diverses positions du point* A *sur l'ellipse.*

Si, de plus, on imagine que le cercle K″ *roule, en même temps que le cercle* K′, *dans l'intérieur du cercle* K, *et de façon qu'ils le touchent tous les deux toujours au même point, la droite* Δ, *dans ce mouvement, enveloppera l'hypocycloïde à quatre points de rebroussement qui est l'enveloppe des traces des plans normaux à l'ellipse, tandis que ses extrémités décriront les axes de cette hypocycloïde.*

20. Considérons les deux hypocycloïdes H et H′ qui correspondent à deux points donnés A et B de l'ellipse E.

Soit R un point quelconque de cette ellipse; les plans menés respectivement par les milieux des deux cordes AB et BR et normalement à ces cordes coupent le plan P suivant deux droites β et γ respectivement tangentes aux courbes H et H′.

Si, comme précédemment, nous appelons D la droite suivant laquelle le plan P est coupé par le plan mené par le milieu de AB et perpendiculairement à cette corde, nous savons que D est à la fois une tangente commune et une corde commune à H et à H′. D'ailleurs, les perpendiculaires élevées aux points milieux des côtés d'un triangle se coupant en un même point, il en résulte que les tangentes β et γ se rencontrent en un point de D. Elles sont, du reste, perpendiculaires aux projections sur le plan P des cordes AR et BR, et, comme ces cordes font un angle constant (leur point de rencontre décrit, en effet, le cercle C, tandis qu'elles tournent autour de points fixes de ce cercle), il en est de même de ces tangentes.

D'où le théorème suivant, que j'ai déjà démontré plus haut :

Si l'on considère une droite quelconque tangente à une hypocycloïde à trois points de rebroussement, et si l'on imagine un angle de grandeur constante dont le sommet décrit cette droite, tandis qu'un de ses côtés demeure tangent à la courbe, le second côté de cet angle enveloppe une hypocycloïde égale à la première.

21. Les considérations géométriques très simples dont je me suis servi trouvent d'ailleurs, dans d'autres questions, des applications intéressantes. Je me bornerai ici à énoncer la proposition suivante :

Supposons que le sommet d'un angle de grandeur constante décrive une droite D, *tandis que ses côtés enveloppent deux courbes* K *et* K′; *pour une position donnée de l'angle, soient respectivement* a *et* a′ *les points de contact des deux côtés.*

Cela posé, si l'on construit l'hypocycloïde à trois points de rebroussement qui oscule la courbe K *au point* a *et touche la droite* D, *puis l'hypocycloïde qui oscule la courbe* K′ *au point* a′ *et touche également la droite* D, *ces deux hypocycloïdes sont égales et rencontrent* D *aux deux mêmes points.*

SUR LA GÉOMÉTRIE DE DIRECTION.

Bulletin de la Société mathématique de France; 1879-80.

I. — Définition des directions et des cycles.

1. Considérons une droite quelconque située dans un plan; on peut supposer qu'elle soit décrite dans un sens déterminé par un point mobile. J'appellerai *direction* une droite définie ainsi par sa position et par le sens dans lequel elle est supposée décrite.

L'angle que fait une direction avec une autre direction arbitraire est évidemment défini à un multiple près de 2π.

A chaque droite Δ du plan correspondent deux *directions opposées*, que je désignerai par les notations $+\Delta$ et $-\Delta$; D étant une direction arbitraire donnée, je désignerai par $-$D la direction opposée.

2. Les deux directions correspondant à une droite isotrope doivent être considérées comme confondues entre elles; en d'autres termes, une direction isotrope se confond avec son opposée.

3. J'appellerai *cycle* un cercle défini non seulement par sa position, mais encore par le sens dans lequel on peut le supposer décrit par un point mobile.

A un cercle quelconque C du plan correspondent deux *cycles opposés*, que je désignerai par les notations $+$C et $-$C; K étant un cycle arbitraire donné, je désignerai par $-$K le cycle opposé.

4. Une direction est tangente à un cycle si la droite correspondant à la direction est tangente au cercle correspondant au cycle et si, en outre, sur l'élément commun au cercle et à la droite, le sens de la direction est le même pour le cycle et pour la direction.

Si les sens sont inverses, je dirai que la direction est une tangente *apparente* du cycle.

Un cycle doit être considéré comme l'enveloppe des directions qui lui sont tangentes. En particulier, le cycle peut se réduire à un point P, qui est l'enveloppe des directions menées par ce point; si une direction quelconque passe par le point P, il est clair qu'il en est de même de la direction opposée.

Réciproquement, si deux directions opposées $+\Delta$ et $-\Delta$ sont tangentes à un cycle, ce cycle se réduit à un point situé sur la droite Δ.

5. Des définitions qui précèdent il résulte immédiatement qu'on ne peut mener à un cycle qu'une tangente parallèle à une direction donnée et que deux cycles n'ont que deux tangentes communes, par conséquent n'ont qu'un seul centre de similitude.

Trois cycles, pris deux à deux, ont trois centres de similitude qui sont en ligne droite.

On ne peut mener qu'un seul cycle tangent à trois directions données; l'expression de *cycle inscrit dans un triangle donné* aura donc une signification parfaitement déterminée.

II. — Rapport anharmonique de quatre directions. — Faisceaux et réseaux de directions. — Faisceaux en involution. — Réseaux en involution.

6. Étant données quatre directions arbitraires A, B, C, D et étant tracé un cycle arbitraire dans le plan, menons à ce cycle des tangentes parallèles à ces directions, et soient respectivement a, b, c, d leurs points de contact. J'appellerai *rapport anharmonique* de ces quatre directions, et je désignerai par la notation R(A, B, C, D), le rapport anharmonique des quatre points a, b, c, d, lesquels sont situés sur un même cercle.

7. J'appelle *faisceau de directions* un système de directions passant par un point fixe O.

Un faisceau de directions conjuguées deux à deux est en *involution*, si le rapport anharmonique de quatre quelconques d'entre elles est égal au rapport anharmonique des directions conjuguées.

Dans un faisceau en involution, il y a deux directions qui coïncident avec leurs conjuguées : ce sont les directions doubles du faisceau. En les désignant par P et P′, et par A et A′ deux directions conjuguées quelconques, on voit que les directions P, P′ et A, A′ sont harmoniques.

Les centres des cycles tangents aux directions P et P′ décrivent une droite qui est la bissectrice de ces deux directions et que j'appellerai l'*axe* du faisceau; l'involution est déterminée quand on se donne les deux directions doubles P et P′, ou encore quand on se donne le sommet O du faisceau et un cycle tangent aux directions doubles. On peut ainsi facilement déterminer une involution, même quand les directions doubles sont imaginaires.

Soit R la droite menée par le point O perpendiculairement à l'axe du faisceau; il est aisé de voir que les deux directions $+R$ et $-R$ sont conjuguées : je dirai que c'est la *droite double* du faisceau.

8. Considérons un faisceau en involution ayant pour sommet le point O, P et P′ pour directions doubles, et R pour droite double. Menons par O une droite quelconque Δ, et soient D et D′ les conjuguées des directions opposées $+\Delta$ et $-\Delta$; je dirai que D et D′ sont deux directions *associées* du faisceau.

Les directions associées du faisceau forment une involution ayant même axe et même droite double que l'involution donnée; ses directions doubles sont les conjuguées harmoniques des directions isotropes relativement à P et P′.

9. *Étant donnée une suite de cycles tangents à deux directions fixes quelconques* Q *et* Q′, *si, par un point* O *pris arbitrairement dans le plan, on mène des tangentes à ces cycles, ces tangentes forment un faisceau en involution.*

Les directions doubles de ce faisceau sont évidemment les tangentes menées par le point O aux deux cycles qui, passant par ce point, touchent les deux directions fixes. La droite double est la droite qui joint le point O au point de rencontre des directions Q et Q′.

10. J'appellerai *réseau de directions* un système de directions tangentes à un même cycle.

Un réseau est en involution si les points de contact des directions avec le cycle forment une involution; dans tout réseau en involution, il y a deux directions doubles. Deux directions conjuguées quelconques et les deux directions doubles sont conjuguées harmoniques.

Quatre directions forment un système harmonique lorsque, étant tangentes à un même cycle, leurs points de contact forment un système harmonique. Par suite, pour obtenir la conjuguée harmonique d'une direction B relativement à deux directions données A et A′, il suffit d'inscrire un cycle dans le triangle déterminé par les directions A, A′ et B. Joignons le point de rencontre de A et A′ avec le point de contact de B : la droite ainsi obtenue rencontre le cycle en un second point, et la direction menée tangentiellement en ce point est la conjuguée cherchée.

11. *Étant donnés une suite de cycles tangents à deux directions fixes quelconques et un cycle fixe* K, *si l'on mène les tangentes communes au cycle fixe et aux cycles variables, ces tangentes communes forment un réseau en involution.*

Les directions doubles de cette involution se détermineront en construisant les deux cycles tangents à K et aux directions fixes.

III. — Longitude de quatre directions. — Systèmes projectifs.

12. Étant données quatre directions A, B, C et D, désignons respectivement par α, β, γ et δ les intersections de A avec B, de B avec C, de C avec D et de D avec A. Cela posé, la longueur

$$\alpha\beta - \beta\gamma + \gamma\delta - \delta\alpha$$

est complètement définie en valeur absolue et en signe; le segment $\alpha\beta$, étant compté en effet sur la direction B, dont le sens est déterminé, a une valeur bien déterminée, et il en est de même des autres segments.

J'appellerai *longitude* des quatre directions A, B, C, D la longueur dont je viens de parler, et je la désignerai par la notation

$$L(A, B, C, D).$$

13. *Lorsque quatre directions sont tangentes à un même cycle, leur longitude est nulle.*

Réciproquement :

Si la longitude de quatre directions est nulle, elles sont tangentes à un même cycle.

14. Deux groupes de quatre directions sont dits *projectifs* si leurs rapports anharmoniques sont égaux, ainsi que leur longitude.

Deux systèmes de directions sont dits *projectifs* si, étant prises quatre directions quelconques du premier système et les directions correspondantes du second système, les deux groupes ainsi obtenus sont projectifs.

Tous les théorèmes qui ont lieu relativement à deux systèmes de points homographiques situés sur une même ligne droite s'appliquent également à deux systèmes projectifs de directions.

15. De ce que j'ai dit plus haut (nº 13) il résulte immédiatement que, si quatre directions d'un des systèmes sont tangentes à un même cycle, les directions correspondantes dans l'autre système sont également tangentes à un même cycle.

A un cycle (ou un point) du premier système correspond donc un cycle (ou un point) dans le second système.

16. Étant donnés deux cycles C et K, on peut leur mener deux tangentes communes : j'appellerai *distance tangentielle* des deux cycles la longueur comprise entre les deux points de contact sur l'une des tangentes communes; cette distance n'est déterminée qu'en valeur absolue.

Considérons deux figures projectives; soient C et K deux cycles appartenant à la première figure, A une de leurs tangentes communes touchant respectivement ces cycles aux points α et δ. Désignons par B une tangente à C infiniment voisine de A et passant par le point α, par D une tangente à K infiniment voisine de A et passant par le point δ, enfin par C une direction arbitraire, par β le point d'intersection de B et de C, et par γ le point d'intersection de D et de C.

La longitude des quatre directions A, B, C et D a pour expression

$$L(A, B, C, D) = \alpha\beta - \beta\gamma + \gamma\delta - \delta\alpha;$$

on peut remarquer que $\beta\gamma$ est infiniment petit et qu'en négligeant les infiniment petits on a

$$\alpha\beta = \alpha\varepsilon, \qquad \gamma\delta = \varepsilon\delta;$$

on a donc, en négligeant les infiniment petits,

$$L(A, B, C, D) = \alpha\varepsilon + \varepsilon\delta - \delta\alpha = 2\alpha\delta.$$

Si maintenant on remarque que, dans deux figures projectives, la longitude de quatre directions quelconques est égale à la longitude des quatre directions correspondantes, on pourra énoncer le théorème fondamental suivant :

Étant donnés, dans deux figures projectives, deux cycles C *et* K *appartenant à la première figure, soient* T *une tangente commune à ces deux cycles, c et k les points où cette tangente touche respectivement les cycles. Désignons par* C′ *et* K′ *les cycles correspondants dans la seconde figure, par* T′ *la tangente commune qui correspond à* T, *et par c′ et k′ les points où elle touche* C′ *et* K′.

Cela posé, la longueur ck est égale en grandeur et en signe à c′k′. C'est ce que j'exprimerai d'une façon plus concise (mais moins nette) en disant que *la distance tangentielle de deux cycles est égale à la distance tangentielle des deux cycles correspondants.*

IV. — Involution.

17. Étant donnés trois couples de directions conjuguées (A, A′), (B, B′) et (C, C′), je dirai qu'ils forment une involution si quatre quelconques de ces directions et les quatre directions conjuguées sont projectives. On peut toujours déterminer deux directions P et P′ telles que ces directions forment avec les trois couples donnés un système harmonique.

Ces directions sont les directions doubles de l'involution, et il est facile de les déterminer quand on se donne deux couples tels que (A, A′) et (B, B′) [1].

18. Un système de droites conjuguées est dit *en involution* si, étant prises quatre quelconques de ces directions, ces directions et les directions conjuguées forment un système projectif.

Il y existe alors deux directions P et P′, telles que P, P′, et deux directions conjuguées quelconques forment un système harmonique.

Une involution peut se définir au moyen des deux directions doubles P et P′, ou encore (ce qui sera préférable si ces directions sont imaginairement conjuguées) au moyen du point de rencontre de ces directions et d'un quelconque des cycles qui leur sont tangents.

En appelant O le point de rencontre des deux directions doubles P et P′, la droite passant par ce point, et qui est le lieu des centres des cycles tangents à P et à P′, sera dite l'*axe de l'involution*, la droite passant par ce même point perpendiculairement à l'axe la *droite double de l'involution*.

19. *Tous les théorèmes relatifs à un système de points en involution sur une même droite ont lieu relativement à un système de directions en involution.*

V. — Transformation par directions réciproques.

20. Soient O un point fixe et K un cycle pris arbitrairement dans le plan, P et P′ les tangentes (réelles ou imaginaires) que du point O on peut mener au cycle K; à chaque direction D du plan on peut faire correspondre une direction D′ telle que les directions D, D′ et P, P′ fassent un système harmonique.

Je désignerai cette transformation sous le nom de *transformation par directions réciproques;* il est clair, en effet, qu'à la direction D′ correspond la direction D.

[1] Je laisse de côté la solution de ce problème et des problèmes analogues; elle ne présente aucune difficulté, mais exigerait, pour être claire, d'assez nombreuses figures. Le lecteur y suppléera facilement.

Les deux droites P et P′ seront les deux directions doubles de la transformation, la droite qui joint le point O au centre de K l'axe de la transformation, et la droite R, menée par O perpendiculairement à l'axe, la droite double de la transformation.

Si une direction mobile Δ enveloppe une courbe M, la direction conjuguée (ou réciproque) Δ′ enveloppera une courbe M′ qui sera dite la *transformée* ou la *réciproque* de M.

21. Il est clair, d'après ce que j'ai dit plus haut sur l'involution, qu'un système de directions et le système transformé sont projectifs; on voit donc immédiatement que *tout cycle a pour réciproque un cycle (ou un point).*

Si deux cycles C *et* K *ont pour réciproques les cycles* C′ *et* K′, *la distance tangentielle des deux cycles* C *et* K *est égale à la distance tangentielle des cycles* C′ *et* K′ [1].

22. *Deux directions réciproques rencontrent la droite double* R *en deux points équidistants du centre* O *de la transformation.*

23. Étant donnée une droite quelconque Δ, à cette droite correspondent les deux directions opposées + Δ et − Δ, auxquelles correspondent, après la transformation, deux directions D et D′ : je dirai que ces deux directions sont *associées*. Ainsi :

Deux directions sont associées si leurs réciproques sont opposées.

Un cycle se transforme généralement en un autre cycle; il peut, dans certains cas, se transformer en un point, et je dirai alors que c'est un *cycle singulier*.

24. *Les tangentes communes à deux cycles singuliers ont pour réciproques deux directions opposées et, par suite, sont deux droites associées.*

[1] Cette proposition, des plus importantes dans la théorie de la transformation par directions réciproques, est analogue à la propriété suivante : *L'angle sous lequel se coupent deux cercles se conserve après une transformation par rayons vecteurs réciproques.*

Réciproquement :

Tout cycle tangent à deux directions associées est un cycle singulier; un cycle est singulier, si les tangentes qu'il a en commun avec un autre cycle singulier quelconque sont des directions associées.

En particulier, le point O, centre de la transformation, est un cycle singulier; pour qu'un cycle soit singulier, il faut donc et il suffit que les tangentes qu'on peut lui mener par le point O soient des directions associées.

25. Soient Q et Q′ les conjuguées harmoniques des directions isotropes, relativement aux droites P et P′; il résulte de ce qui précède que :

Pour qu'un cycle soit singulier, il faut et il suffit que les tangentes qu'on peut lui mener du point O *constituent avec les directions* Q *et* Q′ *un système harmonique.*

26. *Étant donné un cycle singulier quelconque, pour qu'un autre cycle soit singulier, il faut et il suffit que leur centre de similitude soit sur la droite* R.

Deux droites associées quelconques se coupent sur la droite R.

Chaque point de la droite R *doit être regardé comme un cycle singulier, le point correspondant étant le symétrique du point donné relativement au point* O.

27. *Soient* C *et* C′ *deux cycles réciproques quelconques; désignons par* C″ *le symétrique de* C′ *relativement à l'axe de la transformation : les deux cycles* C *et* C″ *ont pour axe radical la droite double* R.

28. Étant donné un cercle quelconque K, à ce cercle correspondent deux cycles opposés $+$K et $-$K; en désignant par C et C′ leurs transformés, je dirai que C et C′ sont deux *cycles associés*.

29. La transformation par directions réciproques me paraît, dans l'étude de la Géométrie plane, devoir être employée avec avantage à côté de la transformation par rayons vecteurs réci-

proques (il est évident que cette dernière transforme un cycle en un autre cycle ou une direction).

On peut toujours effectuer la transformation de telle sorte qu'à deux directions données D et D′ correspondent deux directions opposées $+\Delta$ et $-\Delta$; on voit qu'alors aux cycles tangents à D et à D′ correspondent des points de la droite Δ.

Comme application, proposons-nous le problème suivant :

Mener un cycle tangent à trois cycles donnés.

Construisons les tangentes communes à deux des cycles, et effectuons une transformation telle que ces deux tangentes se transforment en deux directions opposées : les deux cycles dont je viens de parler se transformeront alors en deux points, et le problème sera ramené immédiatement au suivant, qui a deux solutions :

Mener par deux points un cycle tangent à un cycle donné.

Plus généralement, on peut toujours effectuer une transformation, de telle sorte que trois cycles donnés se transforment en trois points [1].

VI. — Cas particuliers importants de la transformation par directions réciproques.

30. Deux cas particuliers sont particulièrement à remarquer.

En premier lieu, les deux directions doubles P et P′ peuvent être opposées; il est facile de voir alors que la réciproque d'une direction donnée est sa symétrique par rapport à la droite commune qui contient les deux directions.

Deux figures réciproques sont alors symétriques par rapport à l'axe de la transformation.

En second lieu, les deux directions doubles peuvent être des directions isotropes. En désignant, comme plus haut, par O le point de rencontre de ces directions, on voit aisément que la réci-

[1] Depuis que cette Note a été communiquée à la Société, j'ai reconnu qu'il était utile de modifier légèrement la définition précédente de la transformation par directions réciproques; je développerai ce point dans une prochaine Communication.

proque d'une direction donnée est sa symétrique par rapport au point O.

Deux figures réciproques sont alors symétriques par rapport au point O.

VII. — Courbes en involution. — Hypercycles.

31. Considérons une transformation par directions réciproques définie par ses deux directions doubles P et P′, et une courbe M (j'entends ici par courbe une suite de points se suivant dans un sens déterminé, en sorte qu'en chaque point de cette courbe la tangente ait une *direction déterminée*).

La courbe M sera dite *en involution* si, D désignant une direction quelconque tangente à cette courbe et D′ la réciproque de D, la direction D′ est elle-même tangente à M.

Les tangentes à M sont ainsi conjuguées deux à deux, de telle sorte que chaque couple de tangentes conjuguées et les deux directions fondamentales P et P′ constituent un système harmonique.

32. Étant donnée une courbe en involution, considérons une direction A prise arbitrairement dans le plan et ses conjuguées harmoniques relativement aux couples de tangentes conjuguées de la courbe : ces conjuguées enveloppent une courbe A′.

En considérant une autre direction B, on aurait une autre courbe B′, enveloppe des conjuguées harmoniques de B relativement aux couples de tangentes conjuguées de la courbe. Cela posé, si A′ est un cycle, je dis que B′ est également un cycle.

On peut, en effet, énoncer cette proposition :

Étant donné un système de directions en involution, les conjuguées harmoniques de deux directions quelconques relativement aux couples de directions conjuguées de l'involution forment deux systèmes projectifs (¹).

(¹) Comme je l'ai dit plus haut, tous les théorèmes relatifs aux systèmes de points situés en ligne droite ont leurs analogues relativement aux systèmes de directions dans un même plan; la proposition sur laquelle je m'appuie ici découle immédiatement de la proposition bien connue qui suit :

Si quatre couples de points sont en involution, les conjugués harmoniques

Il résulte de là que B′ et A′ sont deux courbes projectives, ce qui démontre la proposition.

33. J'appellerai *hypercycle* une courbe en involution M jouissant de la propriété énoncée. Une telle courbe sera donc définie par les deux directions fondamentales P et P′, par une direction A et par le cycle K, qui est l'enveloppe des conjuguées harmoniques de A relativement aux tangentes conjuguées de M; je dirai que le cycle K est le *cycle polaire* de la direction A.

On voit qu'à chaque direction du plan correspond un cycle polaire, et l'on démontrera facilement les propositions suivantes :

Si K *est le cycle polaire d'une direction donnée* A *relativement à un hypercycle* M, *le cycle polaire de toute tangente à* K *est tangent à la direction* A.

Les tangentes communes aux cycles polaires de deux directions opposées + D *et* — D *ont pour cycles polaires deux points de la droite* D.

On conclut de là qu'il y existe une infinité de directions dont les cycles polaires se réduisent à des points.

34. Il est clair qu'un hypercycle M se transforme en un hypercycle M′ par une transformation par directions réciproques; si P et P′ sont les deux directions fondamentales de M, les réciproques de P et de P′ sont les directions fondamentales de M′.

De là résulte que, si P et P′ sont réelles, on peut toujours effectuer une transformation réelle de telle sorte que les réciproques de P et P′ soient opposées, et par suite que la transformée ait un axe de symétrie.

Si, au contraire, P et P′ sont imaginairement conjuguées, on peut effectuer une transformation réelle de telle sorte que les réciproques de P et de P′ soient deux directions isotropes, et alors la transformée a un centre de symétrie.

d'un point de la droite, pris à volonté, relatifs aux quatre couples de points, ont toujours le même rapport anharmonique, quel que soit ce point (Chasles, *Traité des sections coniques*, p. 99).

SUR LA
TRANSFORMATION PAR DIRECTIONS RÉCIPROQUES.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences; 1881.

Dans une Note insérée dans le *Bulletin de la Société mathématique* (*Sur la Géométrie de direction*, t. VIII, p. 196), j'ai fait connaître une transformation nouvelle qui présente la plus grande analogie avec la transformation par rayons vecteurs réciproques; je me propose d'exposer brièvement comment on peut l'étendre à l'espace.

1. Une surface S, étant donnée, partage l'espace en deux régions, et l'on peut fixer arbitrairement celle de ces régions que l'on regarde comme extérieure à la surface; je désignerai sous le nom de *semi-surface* une surface ainsi définie. A un plan correspondent, par exemple, deux semi-plans que l'on peut appeler *opposés* et que l'on doit regarder comme deux semi-surfaces distinctes; à une surface correspondent également deux demi-sphères opposées.

Pour que deux demi-surfaces se touchent en un point, il faut non seulement qu'elles aient même tangente en ce point, mais encore que les régions extérieures aux deux surfaces soient les mêmes dans le voisinage de ce point. De là résultent immédiatement les propositions suivantes :

On ne peut mener à une semi-sphère qu'un semi-plan parallèle à un semi-plan donné; une semi-sphère est déterminée par la condition qu'elle touche quatre semi-plans donnés, et un semi-cône de révolution par la condition qu'il touche trois semi-plans donnés.

Cela posé, la transformation par directions réciproques est entièrement définie par les conditions suivantes :

Deux semi-plans réciproques se coupent sur un plan fixe que j'appellerai *plan fondamental;* deux couples de semi-plans réciproques forment un système de quatre semi-plans tangents à un semi-cône de révolution.

La transformation est évidemment déterminée quand on se donne le plan fondamental et deux semi-plans réciproques.

2. Voici les propriétés fondamentales de cette transformation :

A un système de semi-plans parallèles correspond un système de semi-plans parallèles; à une semi-sphère correspond une semi-sphère qui peut se réduire à un point; à un semi-cône de révolution, une semi-surface de même nature qui peut se réduire à un cylindre de révolution ou à une droite.

On peut toujours effectuer une transformation telle que quatre semi-sphères données se transforment en quatre points.

Si trois semi-surfaces touchent un semi-plan aux points a, b, c et si les semi-surfaces réciproques touchent le semi-plan réciproque aux points α, β, γ, les triangles abc et $\alpha\beta\gamma$ sont égaux.

Les lignes de courbure des semi-surfaces sont conservées dans la transformation.

Deux cas sont particulièrement à remarquer. En premier lieu, si le plan fondamental est à l'infini, la transformée est une semi-surface parallèle à la semi-surface donnée; en second lieu, si un cône isotrope a pour réciproque un cylindre droit dont l'axe est perpendiculaire au plan fondamental, on a la transformation remarquable due à M. Bonnet [1].

3. Si l'on prend une surface algébrique quelconque et si l'on fixe arbitrairement la région que l'on regarde comme extérieure, la semi-surface ainsi obtenue ne forme généralement un être géométrique que si on lui adjoint la semi-surface opposée; elle doit être considérée comme une semi-surface composée de deux feuillets superposés et opposés entre eux, ces feuillets formant les deux

[1] *Note sur un genre particulier de surfaces réciproques* (*Comptes rendus*, t. XLII, p. 485).

nappes de l'enveloppe d'une sphère de rayon infiniment petit dont le centre décrit la surface. Une quadrique, par exemple, doit être regardée comme une semi-quadrique de quatrième classe. Cependant quelques semi-surfaces, composées d'une seule nappe, forment un être géométrique distinct : telles sont celles qui proviennent du plan, de la sphère, et en général de toutes les anticaustiques des surfaces algébriques.

4. La transformée d'une semi-surface S est une anticaustique; abaissons, en effet, de chaque point M de S une perpendiculaire MP sur le plan fondamental, et prenons sur MP un point M′ tel que le rapport de M′P à MP soit constant : le point M′ décrit une surface S′. Cela posé, si, l'indice de réfraction étant convenablement choisi, des rayons perpendiculaires au plan fondamental se réfractent sur S′, la réciproque de S est une des catacaustiques de S′; on obtiendra du reste toutes ses catacaustiques en déplaçant le plan fondamental parallèlement à lui-même.

Il résulte de là que l'on sait déterminer les lignes de courbure des anticaustiques de S′ si l'on sait les déterminer pour la semi-surface S. En particulier, si S′ est une semi-quadrique, il en est de même de S, et l'on voit que l'on peut obtenir les lignes de courbure des anticaustiques des surfaces du second ordre, les rayons incidents étant parallèles, proposition que j'avais déjà démontrée dans mon Mémoire *Sur une surface de quatrième classe*, etc. (*Journal de Mathématiques*, 3e série, t. II, p. 145).

M. Darboux qui, dans une Note présentée à l'Académie dans sa dernière séance, a bien voulu rappeler ce résultat, a démontré de plus que ces anticaustiques sont les surfaces les plus générales de la quatrième classe, qui ont pour ligne double l'ombilicale.

Des propositions qui précèdent il résulte qu'elles peuvent être considérées comme les transformées des semi-quadriques; or, si l'on considère une semi-surface quelconque Σ de quatrième classe ayant pour ligne double l'ombilicale, et pour autre ligne double la conique k, on voit que chaque point M de k est le sommet de deux semi-cônes de révolution circonscrits à Σ; tous ces semi-cônes peuvent, par une transformation convenable, être transformés en droites se partageant en deux systèmes tels qu'une droite quelconque de l'un des systèmes rencontre toutes les droites de l'autre

système. D'où il suit que la transformée est une semi-quadrique, ce qui démontre le beau théorème de M. Darboux; on voit également, comme l'a énoncé ce géomètre, que Σ peut être, de quatre façons différentes, considérée comme anticaustique d'une quadrique.

La surface la plus générale de quatrième classe, qui a pour ligne double l'ombilicale, est donc la transformée par directions réciproques d'une semi-quadrique, et un grand nombre de ses propriétés métriques se déduisent immédiatement des propriétés des génératrices rectilignes des quadriques et des propriétés des cônes de révolution qui leur sont circonscrits.

TRANSFORMATIONS PAR SEMI-DROITES RÉCIPROQUES.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1882.

1. Une droite étant donnée, on peut supposer qu'elle soit décrite dans un certain sens par un point mobile; une telle droite, déterminée ainsi par sa position et le sens dans lequel elle est décrite, est désignée sous le nom de *semi-droite;* ce sens est indiqué sur la figure par une flèche placée près de la droite (*fig.* 1).

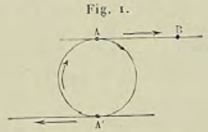
Une même droite pouvant être décrite dans deux sens différents détermine deux semi-droites distinctes, que l'on appelle *semi-droites opposées.*

2. Un cercle étant donné, on peut supposer également qu'il soit décrit dans un certain sens par un point mobile; un tel cercle, déterminé ainsi par sa position et le sens dans lequel il est décrit, est désigné sous le nom de *cycle;* ce sens est indiqué sur la figure par une flèche placée près de la circonférence du cycle.

Un même cercle, pouvant être décrit dans deux sens différents, détermine deux cycles distincts que l'on appelle *cycles opposés.*

3. En un point A d'un cycle, la tangente doit être considérée,

Fig. 1.



le long de l'élément infiniment petit commun au cycle, comme décrite dans le même sens que le cycle; la tangente au point A est donc une semi-droite bien déterminée.

De là résultent les conséquences suivantes :

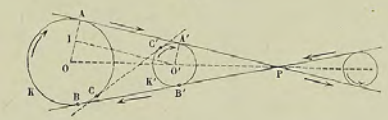
1° *On ne peut mener à un cycle donné qu'une tangente parallèle à une semi-droite donnée.*

Il est clair, en effet, qu'on peut mener au cercle déterminé par le cycle deux tangentes parallèles à la droite déterminée par la semi-droite donnée; mais, si l'on désigne par A et par A' les points de contact de ces tangentes, on voit que les tangentes en ces points ont des directions opposées; une seule d'entre elles est donc parallèle à la semi-droite donnée.

2° *Deux cycles donnés ont deux tangentes communes et n'en ont que deux.*

Sur la *fig.* 2, on voit que les semi-droites AA' et BB' sont tangentes à la fois aux deux cycles K et K'. Les cercles déterminés par ces cycles ont quatre tangentes communes, dont deux sont précisément AA' et BB'; si l'on considère une quelconque des

Fig. 2.



deux autres, par exemple CC', il est aisé de voir que, quel que soit le sens dans lequel on suppose décrite cette droite, elle ne peut toucher les deux cycles donnés, d'après la définition donnée du contact d'un cycle et d'une semi-droite.

Deux cycles ont donc seulement deux tangentes communes; leur point de rencontre P est le centre de similitude des deux cycles.

Ce centre de similitude est unique [1].

[1] Une proposition bien connue peut, par suite de cette définition, s'énoncer de la façon suivante :

Étant donnés trois cycles, les trois centres de similitude de ces cycles pris deux à deux sont en ligne droite.

La distance AA′, comprise sur l'une des tangentes communes entre les points de contact avec les cycles, est la *distance tangentielle des cycles;* elle n'est déterminée qu'en valeur absolue, mais non en signe.

4. Le rayon d'un cycle sera regardé comme positif si ce cycle est décrit dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre, comme négatif dans le cas contraire.

Par suite, en désignant par T la distance tangentielle des deux cycles dont les centres sont O et O′, la *fig.* 2 montre immédiatement que, en désignant par D la distance des centres, on a la relation

$$T^2 = D^2 - (R - R')^2.$$

Cette formule détermine, dans tous les cas possibles, la distance tangentielle de deux cycles; en particulier, si nous considérons deux cycles opposés, si le rayon d'un de ces cycles est R, l'autre est $-$ R; d'ailleurs, la distance de leurs centres est nulle; on a donc, dans ce cas,

$$T^2 = -4R^2.$$

5. Une semi-droite étant donnée, ainsi qu'un point P, le cycle qui a pour centre ce point et qui touche la semi-droite est bien déterminé; la distance du point P à la semi-droite est le rayon de ce cycle : elle est donc déterminée en grandeur et en signe.

6. Un point doit être considéré comme un cycle d'un rayon infiniment petit; toutes les semi-droites passant par ce point doivent être considérées comme tangentes à ce cycle.

7. Étant données deux semi-droites quelconques, on peut construire une infinité de cycles qui leur soient tangents; les centres de ces cycles sont situés sur une même droite que l'on appellera la *bissectrice des semi-droites.*

Si, le point P d'intersection des semi-droites restant fixe, l'angle que font ces semi-droites diminue indéfiniment, en sorte qu'elles tendent toutes les deux à se confondre avec leur bissectrice, les rayons de tous les cycles inscrits diminuent indéfiniment et à la limite se réduisent à des points, tandis que les deux semi-droites deviennent deux semi-droites opposées.

On voit ainsi que les cycles qui touchent deux semi-droites opposées sont les divers points de la droite qu'elles déterminent.

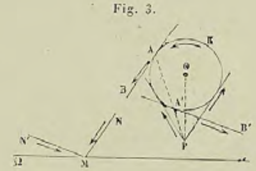
8. Il résulte aussi de ce qui précède qu'un cycle assujetti à toucher trois semi-droites données est entièrement déterminé. Son centre est le point de rencontre des trois bissectrices des semi-droites prises deux à deux.

MÉTHODE DE TRANSFORMATION PAR SEMI-DROITES RÉCIPROQUES.

9. Considérons une droite fixe Ω; traçons dans le plan un cycle quelconque K ayant pour centre le point O et, sur la perpendiculaire abaissée du point O sur la droite Ω, prenons un point arbitraire P (*fig.* 3).

Cela posé, à chaque semi-droite MN du plan on peut faire cor-

Fig. 3.



respondre une autre semi-droite de la façon suivante : menons au cycle K la tangente AB parallèle à MN, joignons le point de contact A au point P, et, au point A′ où la droite ainsi obtenue rencontre le cycle, menons la tangente A′B′; menons enfin, par le point M où la semi-droite donnée coupe la droite fixe Ω, une semi-droite MN′ parallèle à A′B′.

MN′ correspond ainsi à MN, et il est clair, en examinant les constructions effectuées, que MN correspond réciproquement à MN′; on dit que ces deux semi-droites sont réciproques.

Il résulte évidemment de ce qui précède que :

1° *Deux semi-droites réciproques se coupent sur la droite* Ω *que l'on appelle l'*axe de transformation;

2° *Des semi-droites parallèles ont pour réciproques des semi-droites parallèles.*

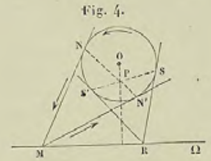
10. Si, du point P, on mène des tangentes au cycle K, on voit que les semi-droites parallèles à ces tangentes sont leurs réciproques à elles-mêmes. Il y a donc deux séries de semi-droites parallèles qui se transforment en elles-mêmes; ces semi-droites font des angles égaux avec l'axe de transformation. Il est toutefois à remarquer que ces semi-droites ne sont réelles que si le point P est extérieur au cycle K.

11. Théorème. — *Deux couples quelconques de semi-droites réciproques sont tangents à un même cycle.*

Soient, en effet, Ω l'axe de transformation, MN et MN′ deux semi-droites réciproques, SK une semi-droite quelconque du plan (*fig.* 4).

Construisons le cycle qui touche les semi-droites MN, MN′ et SR; menons la droite NN′ qui joint les points de contact de MN

Fig. 4.



et de MN′, et désignons par P le point où cette droite coupe la perpendiculaire abaissée du point O sur l'axe Ω. Il est clair, d'après ce qui précède, que la transformation qui a pour axe Ω et dans laquelle MN correspond à MN′ peut être définie au moyen du cycle K et du point P. Si maintenant on remarque que P est le pôle de la droite Ω relativement au cycle K, on voit que la tangente RS′ est la réciproque de SR; les deux couples de semi-droites réciproques MN et MN′, RS et RS′ sont deux tangentes au cycle K, ce qui démontre la proposition énoncée.

12. La transformation par semi-droites réciproques est aussi caractérisée par les deux propriétés suivantes :

Deux semi-droites réciproques se coupent sur l'axe de transformation; deux couples de semi-droites réciproques sont tangents à un même cycle (¹).

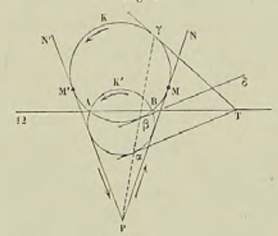
Il est clair que la transformation est entièrement définie quand on se donne l'axe de transformation et deux semi-droites réciproques D et D′. Pour obtenir la réciproque d'une semi-droite quelconque Δ, que l'on construise le cycle tangent à D, D′ et Δ, et que, par le point M où Δ coupe l'axe de transformation, on mène la deuxième tangente au cycle, cette tangente sera la semi-droite cherchée.

13. Considérons une courbe K comme l'enveloppe d'une semi-droite mobile Δ, la réciproque Δ′ de Δ enveloppera une courbe K′ qu'on appelle la *transformée de la courbe* K.

Théorème. — *Quand on effectue une transformation par semi-droites réciproques, un cycle a pour transformé un autre cycle.*

Soit Ω l'axe de transformation, et considérons un cycle quel-

Fig. 5.



conque K coupant l'axe aux points A et B. Menons à ce cycle des tangentes MN et M′N′ parallèles à la direction des semi-droites

(¹) La transformation par rayons vecteurs réciproques est également caractérisée par les deux propriétés suivantes :

Deux points réciproques sont situés sur une droite passant par le pôle de transformation;

Deux couples de points réciproques sont situés sur un même cercle.

qui, dans la transformation, sont leurs réciproques à elles-mêmes, et désignons par P le point de rencontre de ces droites (*fig.* 5).

Cela posé, construisons le second cycle K′ qui, passant par les points A et B, touche les semi-droites PM et PM′; je dis que le cycle K′ est le transformé de K.

On voit en effet que la transformation est définie par l'axe Ω, le cycle K et le point P (9).

Par le point P, menons une sécante quelconque coupant le cycle K′ au point α et le cycle K aux points β et γ. On sait que les tangentes menées en α et γ se coupent en un point T de l'axe radical Ω des deux cycles; d'ailleurs, $\beta\delta$ est parallèle à αT : il résulte donc de la définition donnée plus haut (9) que αT et γT sont deux semi-droites réciproques. L'enveloppe des réciproques des semi-droites qui enveloppent K est donc le cycle K′ : ce qu'il fallait démontrer.

14. On voit ainsi qu'un cycle K a pour réciproque un cycle K′. La relation qui existe entre deux cycles réciproques est caractérisée par les deux propriétés suivantes :

1° *Leur axe radical est l'axe de transformation;*

2° *Leurs tangentes communes sont parallèles à deux directions fixes,* à savoir aux directions des semi-droites qui se transforment en elles-mêmes.

Désignons respectivement par R et R′ les rayons des deux cycles (ces quantités étant données en grandeur et en signe) et par D et D′ les distances de leurs centres à l'axe ([1]).

La première propriété donne la relation suivante

$$D^2 - D'^2 = R^2 - R'^2,$$

et la deuxième, la relation

$$D - D' = \alpha(R - R'), \tag{1}$$

où α désigne une constante caractérisant la transformation; d'où

([1]) On doit ici considérer l'axe de transformation comme une semi-droite, en lui donnant un sens arbitraire, de sorte que D et D′ sont aussi déterminées en grandeur et en signe.

encore, en combinant ces deux relations,

$$D + D' = \frac{1}{\alpha}(R + R'). \tag{2}$$

On en déduit

$$D' = \frac{D(\alpha^2 + 1) - 2\alpha R}{1 - \alpha^2}$$

et

$$R' = \frac{2\alpha D - R(1 + \alpha^2)}{1 - \alpha^2}.$$

Le cycle K′ est ainsi complètement déterminé, quand le cycle K est donné, puisque l'on connaît la distance de son centre à l'axe et son rayon.

Remarques. — Le cycle K′ se réduit à un point, si $R' = 0$, ce qui exige que l'on ait

$$R\alpha^2 - 2\alpha D + R = 0,$$

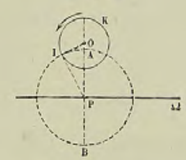
d'où

$$\alpha = D \pm \sqrt{D^2 - R^2}.$$

Il en résulte qu'un cycle étant donné, ainsi que l'axe de transformation, on peut toujours déterminer le module α de la transformation, de façon que ce cycle ait pour transformé un point, dans le cas où ce cycle ne coupe pas l'axe. En désignant, en effet, par R son rayon et par D la distance de son centre à l'axe, on voit que, $D^2 - R^2$ étant positif, l'équation précédente détermine pour le module α deux valeurs réelles.

Soit K (*fig.* 6) le cycle donné; de son centre O abaissons une

Fig. 6.



perpendiculaire OP sur l'axe de transformation, et de son pied P comme centre décrivons le cercle qui coupe orthogonalement le cycle donné. Ce cercle coupe la droite OP en deux points A et B;

on prouvera aisément qu'il existe une transformation telle que les tangentes au cycle K aient pour réciproques les semi-droites qui se croisent au point A. Il existe également une autre transformation dans laquelle le point B est le réciproque du cycle K.

Une transformation étant définie par l'axe de transformation Ω et par le module α, il y existe une infinité de cycles qui ont pour transformés des points; ils sont définis par la relation

$$\frac{R}{D} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+1}.$$

Leur propriété caractéristique est que *leur rayon varie proportionnellement à la distance de leur centre à l'axe;* elle présente une grande importance dans l'application de la transformation par semi-droites réciproques à la théorie des anticaustiques par réfraction.

15. Théorème. — *La distance tangentielle de deux cycles est égale à la distance tangentielle des deux cycles correspondants.*

Considérons, en effet, deux cycles; désignons respectivement par R et r leurs rayons, par D et d les distances de leur centre à l'axe de transformation, par p la projection sur cet axe de la droite qui joint leurs centres, et par T leur distance tangentielle; on aura évidemment

$$T^2 = p^2 + (D-d)^2 - (R-r)^2.$$

Soient de même R' et r' les rayons des cycles transformés, D' et d' les distances de leurs centres à l'axe, et T' leur distance tangentielle. Si l'on remarque que deux cycles réciproques ont leurs centres sur une même perpendiculaire à l'axe, il est clair que l'on a

$$T'^2 = p^2 + (D'-d')^2 - (R'-r')^2.$$

Or les formules données plus haut donnent aisément

$$D'-d' = \frac{(D-d)(\alpha^2+1) - 2\alpha(R-r)}{1-\alpha^2},$$

$$R'-r' = \frac{2\alpha(D-d) - (\alpha^2+1)(R-r)}{1-\alpha^2}.$$

Substituant ces valeurs dans l'expression précédente, il viendra, toutes réductions faites,

$$T'^2 = p^2 + (D-d)^2 - (R-r)^2 = T^2;$$

ce qui démontre la proposition énoncée ([1]).

APPLICATIONS DE LA MÉTHODE.

16. Soient trois cycles K, K' et K'' ayant respectivement pour centre les points O, O' et O''. Soient P'' le centre de similitude des cycles O et O', P' le centre de similitude des cycles O et O''. Supposons que la droite P'P'' ne coupe pas le centre O; en prenant cette droite pour axe de transformation, nous pourrons toujours, en choisissant convenablement le module de la transformation, transformer le cycle O en un point ω. Les deux tangentes P''A et P''B auront pour transformées les semi-droites opposées déterminées par les points P'' et ω; le cycle K', étant tangent à P''A et P''B, aura pour transformé un cycle tangent à ces demi-droites opposées, et, par conséquent, un point ω' qui sera l'intersection de P''ω avec la perpendiculaire abaissée de O' sur l'axe P'P''.

Les deux tangentes P'C et P'D (*fig.* 7) auront pour transformées les semi-droites opposées déterminées par la droite P'ω, et il est clair que le cycle O'', qui touche P'C et P'D, aura pour transformé le point ω'', où P'ω rencontre la perpendiculaire abaissée de O'' sur l'axe P'P''. Si l'on considère maintenant les deux tangentes communes aux cycles K'K'', elles auront pour transformées les semi-droites opposées déterminées par les points ω' et ω''. D'où il résulte que ces tangentes se coupent au point P où la droite $\omega'\omega''$ rencontre P'P'', et de là une démonstration nouvelle de cette proposition rappelée plus haut : *Les trois centres de similitude de*

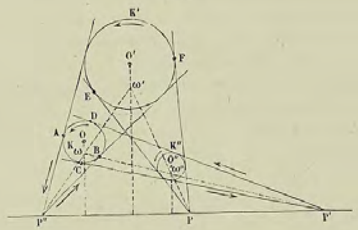
([1]) Relativement à la transformation par rayons vecteurs réciproques, le théorème analogue est le suivant : *L'angle sous lequel se coupent deux cercles est égal à l'angle sous lequel se coupent les cercles correspondants.*

Ce théorème s'étend à deux courbes quelconques, et de même dans la transformation par semi-droites réciproques :

Si une semi-droite Δ touche deux courbes aux deux points a et b, et si la semi-droite réciproque Δ' touche les courbes transformées aux points a' et b', les deux longueurs ab et $a'b'$ sont égales.

trois cycles considérés deux à deux sont en ligne droite; il suit de là également que *si trois cycles sont tels que la droite, qui contient leurs centres de similitude, ne les rencontre pas, on*

Fig. 7.



peut, par une transformation par semi-droites réciproques, les transformer en trois points (¹).

17. La transformation par semi-droites réciproques peut servir, comme la transformation par rayons vecteurs réciproques, soit à simplifier la solution de certains problèmes, soit à généraliser diverses propriétés des figures.

18. Pour en donner un exemple simple, considérons le problème suivant : *Construire un cycle touchant trois cycles donnés.*

Supposons que les cycles donnés K, K′ et K″ soient tels que la droite qui contient leurs centres de similitude ne les coupe pas, nous pouvons, d'après ce qui précède, en prenant cette droite pour axe de transformation, transformer les cycles donnés en trois points ω, ω′ et ω″. Le cercle passant par ces points détermine deux cycles opposés H et H′ dont les réciproques seront les solutions du problème. Deux cycles opposés rencontrant l'axe de transformation aux mêmes points, il en est de même de leurs réciproques;

(¹) La propriété analogue dans la théorie de la transformation par rayons vecteurs réciproques est la suivante : *Lorsque deux cercles se coupent, on peut toujours les transformer en deux droites.*

d'où il suit que le problème proposé a deux solutions, et que l'axe radical des deux cycles qui satisfont à la question est l'axe de similitude des cycles donnés.

Le problème de *mener un cercle tangent à trois cercles donnés* se ramène immédiatement au précédent. On peut, en effet, donner à un des cercles un sens arbitraire, de façon à le transformer en un cycle; on transformera également les deux autres cercles en cycles en fixant leur direction, ce qui pourra se faire de quatre façons différentes. A chaque groupe de cycles correspondent deux solutions; le problème proposé aura donc en tout huit solutions.

19. Un point décrivant dans un sens déterminé une semi-droite ou un cycle, si l'on emploie la transformation par rayons vecteurs réciproques, on voit que le point transformé décrit une autre semi-droite ou un autre cycle (lequel peut se réduire à une semi-droite quand le pôle de transformation est sur le cycle considéré).

On peut souvent, avec avantage, employer simultanément la transformation par rayons vecteurs réciproques et la transformation par semi-droites réciproques. Ainsi, en général, *étant donnés cinq cycles, on peut, par deux transformations successives, les transformer en deux semi-droites et en trois points.* En effet, si deux des cycles se coupent, par une première transformation par rayons vecteurs réciproques, on pourra les transformer en deux semi-droites. Les trois autres cycles ayant pour transformées K, K′ et K″, si l'axe de similitude de ces cycles ne les rencontre pas, on pourra, par une transformation par semi-droites réciproques, les transformer en trois points, tandis que les semi-droites se transformeront en semi-droites.

SUR LES HYPERCYCLES.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences; 1882.

1. Une droite étant donnée, on peut la supposer décrite par un point mobile dans un sens déterminé; je désignerai une pareille droite, dont la position et la direction sont données, sous le nom de *semi-droite* [1]. A une droite donnée correspondent deux semi-droites ayant des directions différentes, et que j'appellerai *semi-droites opposées*.

Je désignerai sous le nom de *cycle* un cercle décrit dans un sens donné; en un point d'un cycle, la tangente est une semi-droite parfaitement déterminée. A un cercle correspondent deux cycles opposés. Il résulte immédiatement de ces définitions qu'à un cycle donné on ne peut mener qu'une tangente parallèle à une semi-droite donnée, que deux cycles n'ont que deux tangentes communes et un seul centre de similitude, qu'un cycle tangent à trois semi-droites données est complètement déterminé. Le rayon d'un cycle sera regardé comme positif si le point qui le décrit se meut dans le sens des aiguilles d'une montre, comme négatif dans le cas contraire. La distance d'un point à une semi-droite est égale au rayon du cycle qui a pour centre ce point et touche la semi-droite; elle est donc déterminée en grandeur et en signe.

Deux couples de semi-droites (A, A') et (B, B') forment un système harmonique si elles touchent un même cycle et si les points de contact divisent harmoniquement le cycle; A' est dite la *conjuguée harmonique* de A relativement à B et B'.

[1] Dans une Note précédemment publiée, *Sur la Géométrie de direction* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. VIII, p. 196), j'ai désigné la semi-droite sous le nom de *direction*; j'ai cru devoir modifier cette expression, le mot *direction* ayant en Géométrie un sens très précis.

Un point doit être considéré comme un cycle de rayon infiniment petit.

2. Si l'on considère une courbe algébrique comme l'enveloppe d'une semi-droite, elle ne constitue pas, en général, un être géométrique; il faut lui adjoindre la même courbe, enveloppée par la semi-droite opposée. On doit la considérer comme composée de deux courbes opposées, qui sont l'enveloppe d'un cycle de rayon infiniment petit; en sorte qu'en chaque point il y a deux tangentes opposées et que l'on doit considérer comme distinctes.

Certaines courbes algébriques (le cercle, par exemple) constituent elles-mêmes, quand on attribue à leurs tangentes un sens déterminé, un être géométrique. Un des caractères distinctifs de ces courbes, que j'appellerai *courbes de direction*, consiste en ce que l'enveloppe d'un cercle de rayon constant, dont le centre décrit la courbe, se décompose en deux courbes distinctes. Il en est de même des courbes que je désigne sous le nom d'*hypercycles;* elles comprennent l'hypocycloïde à quatre points de rebroussement, la parabole ainsi que les courbes qui leur sont parallèles, et plus généralement toutes les anticaustiques de la parabole, les rayons incidents étant parallèles.

Étant donnée une tangente quelconque A à un hypercycle, il lui correspond une autre tangente A' telle que A, A' et deux semi-droites fixes P et P' (que l'on peut appeler les *semi-droites fondamentales* de la courbe) forment un système harmonique. Je dirai que deux tangentes telles que A et A' constituent un couple de tangentes conjuguées.

Cela posé, l'hypercycle est défini par la propriété suivante : les conjuguées harmoniques d'une semi-droite du plan D, par rapport aux couples de tangentes conjuguées de la courbe, enveloppent un cycle K.

L'hypercycle est aussi entièrement déterminé quand on se donne les semi-droites D, P et P' et le cycle K, et l'on peut, en s'appuyant sur la définition précédente, construire autant de couples de tangentes conjuguées qu'on le veut. On peut, en particulier, remarquer que tout cycle touchant les semi-droites fondamentales a quatre tangentes communes avec l'hypercycle; elles constituent deux couples de tangentes conjuguées, et peuvent se construire avec la règle et le compas. Le *cercle* déterminé par le *cycle* a quatre autres tangentes communes avec l'hypercycle; mais ces quatre tangentes ne constituent pas des couples de tangentes conjuguées et ne peuvent pas se construire au moyen de la règle et du compas.

3. La propriété la plus importante de l'hypercycle est la suivante : Soient A et A′ un couple de tangentes conjuguées et a leur point de rencontre, B et B′ un autre couple de tangentes conjuguées et b leur point de rencontre; T désignant une tangente quelconque à l'hypercycle, appelons respectivement α, α', β et β' les points où T rencontre les semi-droites A, A′, B et B′. Cela posé, on peut énoncer cette proposition : quelle que soit la tangente considérée, la longueur

$$\alpha a + \alpha' a + b\beta + b\beta' - \beta\alpha - \beta'\alpha'$$

a une valeur constante en grandeur et en signe.

La même proposition peut encore s'énoncer de la façon suivante :

Menons les cycles qui touchent respectivement les semi-droites A, A′ et T et les semi-droites B, B′ et T; si l'on désigne par α_0 et β_0 leurs points de contact avec T, la longueur $\alpha_0\beta_0$ a, en grandeur et en signe, une valeur constante.

4. Cette valeur constante de la distance des points de contact α_0 et β_0 varie suivant les couples de tangentes conjuguées que l'on considère. A chaque couple de tangentes conjuguées en correspond toujours un autre, tel que la constante dont je viens de parler soit nulle; je dirai que ces deux couples sont *conjoints*.

Ainsi, étant donnés un hypercycle et deux couples conjoints de tangentes conjuguées A, A′ et B, B′, si l'on construit deux cycles K_a et K_b tangents entre eux et touchant respectivement A, A′ et B, B′, la tangente commune aux deux cycles est tangente à l'hypercycle.

Autrement, si deux cycles roulent l'un sur l'autre, l'un d'eux touchant deux semi-droites A et A′, l'autre touchant deux autres semi-droites B et B′, la tangente commune aux deux cycles enveloppe un hypercycle, et tout hypercycle peut être ainsi engendré d'une infinité de manières.

5. Un hypercycle étant donné, il existe deux systèmes de cycles

qui lui sont doublements tangents. Le centre de similitude de deux cycles, pris arbitrairement dans l'un des systèmes, est situé sur une droite fixe $O\omega_0$, passant par le point de rencontre O des semi-droites fondamentales P et P′; parmi les cycles du système, il y en a un, Ω, qui touche ces semi-droites. Dans l'autre système existe également un cycle Θ qui touche P et P′; deux cycles appartenant à ce système ont leur centre de similitude sur une droite fixe $O\theta_0$. Je désignerai les cycles Ω et Θ sous le nom de *cycles principaux*, et les droites $O\omega_0$ et $O\theta_0$ sous le nom d'*axes de l'hypercycle*. Les axes et les droites déterminés par les semi-droites fondamentales constituent un faisceau harmonique.

Un cycle inscrit dans P et P′ a, en commun avec l'hypercycle, deux couples de tangentes conjuguées; ces tangentes forment un quadrilatère dont deux sommets sont situés sur la polaire de O, relativement au cycle considéré. Les quatre autres sommets sont distribués deux à deux sur les axes de la courbe.

Le lieu des centres des cycles doublement tangents qui appartiennent au même système que Ω est une parabole Π_ω, et la courbe peut être considérée comme une anticaustique par réfraction de cette parabole, les rayons incidents étant perpendiculaires à la droite $O\omega_0$. A l'autre système de cycles doublement tangents correspond une autre parabole Π_θ, en sorte que, généralement, l'hypercycle peut être considéré de deux façons différentes, comme l'anticaustique d'une parabole.

Dans certains cas particuliers, ces paraboles peuvent se réduire à des droites; dans le cas où l'un des deux axes est rejeté à l'infini, l'hypercycle est une courbe parallèle à une parabole.

6. L'hypercycle a été précédemment défini par les propriétés suivantes : les tangentes se distribuent par couples, de telle sorte que deux tangentes appartenant à un même couple (tangentes conjuguées) et les deux semi-droites fondamentales forment un système harmonique; les conjuguées harmoniques d'une semi-droite fixe D, par rapport aux couples de tangentes conjuguées, enveloppent un cycle K.

Le même hypercycle peut être ainsi défini d'une infinité de façons; on peut, en effet, énoncer la propriété fondamentale suivante :

Étant donnée une semi-droite quelconque Δ, *les conjuguées harmoniques des tangentes à ce cycle, relativement aux couples de tangentes conjuguées, enveloppent un cycle* Π.

Je désignerai ce cycle sous le nom de *cycle polaire* de la semi-droite Δ; les propriétés de ces cycles présentent la plus grande analogie avec les propriétés des pôles des droites dans la théorie des coniques.

Voici les principales de ces propriétés :

Si une semi-droite Δ a pour cycle polaire le cycle Π, les cycles polaires de toutes les tangentes à Π sont tangents à Δ.

Le cycle polaire d'une tangente à l'hypercycle touche cette courbe au point de contact de la tangente.

En désignant par Π et Π' les cycles polaires de deux semi-droites Δ et Δ', on voit que les cycles polaires des tangentes communes à Π et Π' touchent Δ et Δ'. Il en résulte qu'il y a deux cycles polaires qui touchent deux semi-droites données (ou qui touchent une semi-droite en un point donné); en particulier, il y a deux cycles polaires ayant un centre donné.

Si les deux semi-droites Δ et Δ' sont opposées, les tangentes communes à Π et Π' ont pour cycles polaires deux points; il y a donc une infinité de semi-droites dont les cycles polaires se réduisent à des points. Le lieu de ces points est une conique H, ayant pour asymptotes les semi-droites fondamentales, et l'enveloppe des semi-droites correspondantes est un cycle $\mathfrak{K}$.

Si une semi-droite se déplace parallèlement à elle-même, les cycles polaires demeurent tangents à deux semi-droites parallèles aux semi-droites fondamentales P et P'; le point de rencontre de ces semi-droites est situé sur la conique H.

Réciproquement, si par un point quelconque de H on mène deux parallèles à P et P', tout cycle inscrit dans ces semi-droites est un cycle polaire de l'hypercycle.

7. Il ne sera peut-être pas inutile, pour éviter toute difficulté dans l'application des propositions précédentes, de présenter quelques observations sur certaines formes singulières sous lesquelles peut se présenter un cycle.

Un système de semi-droites parallèles détermine un point à l'infini et sur une droite donnée se trouvent deux points à l'infini, correspondant aux deux semi-droites déterminées par la droite. Au point de vue où nous sommes placés, nous devons donc considérer les points à l'infini comme situés sur une conique aplatie, et se réduisant à la portion de la droite de l'infini comprise entre les deux ombilics du plan. A tout point de la *conique de l'infini* correspond ainsi un système de semi-droites parallèles.

L'ensemble de deux points α et β de la conique de l'infini (défini par les parallèles à deux semi-droites fixes A et B) doit être considéré comme un cycle. Les tangentes à ce cycle, menées par un point M du plan, sont les semi-droites tracées par ce point parallèlement à A et B. Le centre de ce cycle est le point situé à l'infini sur la bissectrice des deux semi-droites A et B, et j'entends par là la droite qui est le lieu des centres des cycles tangents à A et à B.

En s'appuyant sur les définitions précédentes, on peut dire que le cycle polaire d'une semi-droite parallèle à P se compose de deux points de la conique de l'infini, l'un de ces points étant situé sur la semi-droite P'. Semblablement, le cycle polaire d'une semi-droite parallèle à P' se compose de deux points à l'infini, dont l'un est situé sur P.

8. Étant donnés deux cycles A et A', désignons par a et a' les points où ils touchent une des tangentes communes, par b et b' leurs points de contact avec l'autre tangente commune, par α et β les points milieux des segments aa' et bb'. Je dirai que le cycle K qui touche les tangentes communes aux points α et β est le cycle moyen des cycles donnés et que A' est le symétrique du cycle A relativement au cycle K.

Cette notion a de fréquentes applications. Étant donnés deux couples de semi-droites (A, A') et (B, B'), proposons-nous, par exemple, de déterminer les deux semi-droites qui forment un système harmonique avec A et A', ainsi qu'avec B et B'. A cet effet, construisons le cycle moyen des cycles inscrits respectivement dans les semi-droites A, A', B et A, A', B', puis le cycle moyen des cycles inscrits respectivement dans les semi-droites B, B', A et B, B', A'; cela posé, les tangentes communes aux deux cycles moyens dont je viens de parler sont les semi-droites cherchées.

9. Un hypercycle est complètement déterminé quand on se

donne deux couples de tangentes conjuguées (A, A′) et (B, B′) et une tangente quelconque T. Si l'on détermine d'abord, comme je viens de le dire, les deux semi-droites qui forment avec (A, A′) et (B, B′) des systèmes harmoniques, on aura les semi-droites fondamentales de la courbe. Que l'on construise ensuite la conjuguée harmonique A_0 de T relativement à (A, A′), puis sa conjuguée harmonique B_0 relativement à (B, B′), le cycle polaire de T sera déterminé, puisqu'il doit toucher T, A_0 et B_0.

L'hypercycle est donc bien défini, puisque l'on connaît ses deux semi-droites fondamentales et le cycle polaire d'une semi-droite du plan, et l'on peut en construire autant de tangentes qu'on le veut.

10. Soit (A, A′) un couple de tangentes conjuguées de l'hypercycle; leurs cycles polaires ont en commun deux tangentes communes B et B′. Ces semi-droites constituent un couple de tangentes conjuguées de la courbe; leurs cycles polaires sont tangents à A et A′.

Les deux couples de tangentes conjuguées (A, A′) et (B, B′) sont conjoints; en d'autres termes, si deux cycles respectivement inscrits dans les semi-droites A, A′ et B, B′ roulent l'un sur l'autre en demeurant constamment tangents, la tangente commune enveloppe l'hypercycle défini par les couples conjoints de tangentes.

11. Si une semi-droite roule sur un cycle K, le lieu du centre de son cycle polaire est une conique. Si l'on considère les cycles polaires de deux tangentes quelconques à ce cycle, leur centre de similitude est situé sur une droite fixe D. Il en résulte que l'enveloppe des cycles est un anticaustique par réfraction de conique, les rayons incidents étant perpendiculaires à la droite D.

En particulier, les cycles polaires de toutes les semi-droites qui passent par un point P ont leur centre sur une droite Δ. A chaque point P du plan correspond ainsi une droite Δ; si plusieurs points sont sur la droite A, les droites Δ correspondantes passent par un point fixe Q auquel correspond la droite A. Le système des points P et des droites Δ constitue donc deux systèmes corrélatifs.

12. Soient K un cycle quelconque inscrit dans les deux semi-

droites fondamentales, Ω et Θ les cycles principaux de la courbe, Ω_k et Θ_k les symétriques de K relativement à Ω et Θ; ces cycles sont aussi évidemment inscrits dans les deux semi-droites fondamentales. En désignant par ω_1 et θ_1 les points où Ω et Θ touchent respectivement A, la longueur $\omega_1\theta_1$ est parfaitement déterminée en grandeur et en signe; j'appellerai cette longueur p le *paramètre de la courbe;* il est clair que la distance entre les points où Ω_k et Θ_k touchent A est égale à $2p$.

Cela posé, si une semi-droite roule sur K, son cycle polaire demeure constamment tangent à Ω_k et Θ_k. Si l'on désigne par ω et ω′ les tangentes à la courbe menées aux points où elle touche Ω et si l'on se donne la semi-droite D, son cycle polaire sera entièrement déterminé, puisqu'il touche Ω_k au point de contact de ce cycle avec la conjuguée harmonique de D relativement aux semi-droites ω et ω′.

On peut ainsi déterminer aisément le cycle polaire d'une semi-droite donnée. Réciproquement, un cycle étant donné, il est facile de reconnaître si c'est un cycle polaire et, dans ce cas, de construire la semi-droite correspondante.

Que l'on mène à ce cycle les tangentes parallèles aux semi-droites fondamentales, le cycle, d'après une proposition énoncée plus haut, sera un cycle polaire si le point de rencontre de ces tangentes est sur la conique H lieu des cycles polaires qui se réduisent à des points.

Autrement : que l'on mène les deux cycles D_ω et D_θ qui touchent K et les semi-droites fondamentales; si la longueur comprise sur A entre les points de contact de ces cycles est égale à $2p$, le cycle est un cycle polaire. Les symétriques de D_ω et D_θ pris respectivement par rapport à Ω et Θ se confondent alors en un même cycle; et, D′ désignant la tangente commune à D_ω et Ω en leur point de contact, la conjuguée harmonique de D′ relativement à ω et à ω′ a précisément K pour cycle polaire.

Il résulte de ce qui précède que, si deux cycles D_ω et D_θ inscrits dans les deux semi-droites fondamentales sont tels què la distance entre leurs points de contact avec A soit égale à $2p$, tout cycle tangent à D_ω et D_θ est un cycle polaire. Les deux points de rencontre de ces cycles sont donc des cycles polaires qui se réduisent à des points, et sont par suite situés sur la conique H.

Les propriétés précédentes conduisent à un assez grand nombre de propriétés des coniques, parmi lesquelles j'énoncerai seulement la suivante :

Étant donnée une conique, attribuons un sens quelconque à ses deux asymptotes A et A'. Par un point M quelconque de la conique, menons deux parallèles Q et Q' aux semi-droites A et A'; par un autre point N pris arbitrairement sur la conique, menons les deux cycles R et R' qui sont tangents à A et A'. Cela posé, les deux semi-droites Q et Q' et les cycles R et R' sont tangents à un même cycle K; l'axe radical de R et de R' est la droite qui joint les points de contact de K avec les semi-droites Q et Q'; la tangente à la conique au point M et les tangentes menées à K aux points où ce cycle touche R et R' concourent en un même point.

13. Soient D une semi-droite quelconque du plan et K son cycle polaire; menons à ce cycle la tangente D' qui est parallèle à D. La semi-droite, menée parallèlement à D et D' et qui en est également distante, est la tangente à l'hypocycle qui est parallèle à D.

14. Une des propriétés les plus utiles de l'hypercycle est la suivante :

Considérons les quatre tangentes communes A, B, C et D qui touchent à la fois la courbe et un cycle donné, et soient C' et D' les tangentes conjuguées de deux quelconques d'entre elles, C et D; les quatre semi-droites A, B, C' et D' sont également tangentes à un même cycle.

Soient A et B deux tangentes fixes de la courbe; inscrivons un cycle quelconque K dans ces semi-droites et soient C et D les deux autres tangentes communes au cycle et à l'hypercycle. Il résulte de la proposition précédente qu'en désignant par C' et D' les conjuguées de C et D, C' et D' sont tangentes à un cycle K' inscrit dans A et B. Le cycle moyen K_0 des deux cycles K et K' est fixe, quel que soit le cycle K que l'on considère, et il est complètement déterminé quand on se donne les deux tangentes A et B; c'est le cycle inscrit dans A et B et qui touche deux tangentes conjuguées (dans le cas où A et B sont elles-mêmes conjuguées, c'est le cycle qui touche ces tangentes et les semi-droites fondamentales); si les

deux tangentes A et B viennent se confondre, le cycle moyen K_0 correspondant est le cycle polaire de la tangente.

Il résulte de là que la courbe est entièrement définie quand on se donne deux tangentes quelconques A et B, le cycle moyen correspondant K_0 et les deux semi-droites fondamentales. Il est facile en effet de construire les tangentes communes à l'hypercycle et à un cycle quelconque K inscrit dans A et B; que l'on construise le cycle K' symétrique du cycle K relativement au cycle K_0. L'enveloppe des conjuguées harmoniques des tangentes à K' relativement aux semi-droites fondamentales est un cycle K'' et les deux tangentes communes à K et à K'' seront les droites cherchées.

De là résulte en particulier un moyen facile de construire le cercle osculateur en un point a de la courbe. A désignant la tangente en ce point, construisons la tangente conjuguée A', puis le centre G du cercle qui touche A' et la courbe au point a; cela posé, α désignant le centre du cycle polaire de la tangente A, le centre du cercle osculateur cherché est le symétrique du point G relativement à α. Un hypercycle a un seul foyer F qui est un foyer singulier; la somme des distances du foyer à deux tangentes conjuguées quelconques est constante.

15. Le cas particulier où les semi-droites A et B sont opposées mérite un examen spécial. L'hypercycle peut être défini comme une courbe de quatrième classe et du sixième ordre ayant trois tangentes doubles dont l'une est la droite de l'infini et passant par les ombilics du plan. Les tangentes doubles sont des *tangentes doubles apparentes;* car, aux points de contact, la courbe a des directions opposées; en réalité, on doit les considérer comme des tangentes distinctes, mais opposées.

Les quatre points doubles de la courbe déterminent trois couples de droites correspondant respectivement aux tangentes doubles; les deux droites dont l'ensemble correspond à la droite de l'infini sont les *axes* de la courbe et se croisent au point O, qui est l'intersection des semi-droites fondamentales, lesquelles passent d'ailleurs par les points de contact de la droite de l'infini avec l'hypercycle.

Soient A et B les deux autres tangentes doubles de la courbe et R leur point de rencontre; la droite menée par le point O perpendiculairement à la bissectrice des semi-droites fondamentales (j'entends par là le lieu des centres des cycles inscrits dans ces deux semi-droites) rencontre respectivement A et B en deux points a et b dont le milieu est précisément le point O. Désignons par α et β les milieux des segments Ra et Rb, nous pourrons énoncer la propriété suivante : Si une tangente à la courbe coupe A et B aux points α_1 et β_1 et si nous déterminons les points α_2 et β_2 qui sont respectivement les symétriques de α_1 et β_1 relativement à α et β, la semi-droite $\alpha_2\beta_2$ est tangente à la courbe et est la conjuguée de la tangente $\alpha_1\beta_1$.

La tangente double A rencontre la courbe en deux points distincts des points de contact; ces points sont équidistants du point α et les tangentes sont conjuguées. Une propriété analogue a lieu relativement à la tangente double B.

La courbe est entièrement déterminée quand on se donne les deux semi-droites fondamentales, une des tangentes doubles A et le point α; on peut énoncer en effet la proposition suivante :

Inscrivons dans les deux semi-droites fondamentales un cycle quelconque K; désignons par a' le point où la corde de contact coupe la tangente double A, par a le point symétrique du point a' relativement au point α. Cela posé, les tangentes menées du point a à la courbe sont parallèles aux tangentes que l'on mène du point α au cycle K.

Cette construction permet de déterminer facilement les tangentes parallèles à une direction donnée ou émanant d'un point quelconque de la tangente double, et par suite tous les éléments importants de la courbe.

16. Avant d'exposer de nouvelles propriétés de l'hypercycle, je rappellerai d'abord quelques notions fondamentales relativement à la transformation par semi-droites réciproques.

Cette transformation est complètement définie par les propriétés suivantes :

Deux semi-droites réciproques se coupent sur une droite fixe Δ que l'on peut appeler *axe de transformation; deux couples* quelconques de semi-droites réciproques sont tangents à un même cycle.

J'ajouterai que deux couples de semi-droites harmoniques ont

pour réciproques deux couples de semi-droites harmoniques et que la distance tangentielle de deux cycles est égale à la distance tangentielle des cycles réciproques; j'entends ici par distance tangentielle de deux cycles la longueur comprise sur l'une quelconque des deux tangentes communes entre leurs points de contact.

Cela posé, il résulte de la définition même des hypercycles que ces courbes ont pour transformées par semi-droites réciproques d'autres hypercycles; les semi-droites fondamentales de la transformée étant les transformées des semi-droites fondamentales de la courbe donnée.

Aux tangentes conjuguées de cette courbe correspondent les tangentes conjuguées de la transformée, etc. Je ferai remarquer à ce sujet qu'une tangente double de la proposée étant une tangente double apparente a pour transformées deux tangentes ordinaires de la transformée.

Considérons un cycle quelconque K inscrit dans les deux semi-droites fondamentales; il a en commun avec la courbe quatre tangentes qui se coupent deux à deux sur l'un des axes $O\omega_0$. Effectuons une transformation par semi-droites réciproques, de telle sorte que ce cycle se transforme en un point : les quatre tangentes auront pour transformées deux couples de semi-droites opposées; de telle sorte que, relativement à la courbe transformée, deux couples de tangentes conjuguées se composeront de semi-droites opposées.

Si l'on coupe ces tangentes par une tangente quelconque rencontrant ces deux couples aux points α, α' et β, β', on a, d'après une propriété générale énoncée plus haut,

$$\alpha a + \alpha' a + b\beta + b\beta' - \alpha\beta - \alpha\beta' = \text{const.}$$

Or, dans ce cas particulier, les points α et β se confondent, ainsi que les points α' et β'; αa est opposée à $b\beta$ et $\alpha' a$ à $b\beta'$; on a donc $\alpha\beta = \alpha'\beta' = 0$, $b\beta = \alpha a$ et $b\beta' = \alpha' a$, et par suite

$$\alpha a + \alpha' a = \text{const.};$$

d'où il suit que la courbe transformée est une parabole.

Ainsi (si l'on admet des transformations imaginaires), tout hypercycle, sauf un cas particulier que j'examinerai plus loin, est la transformée par semi-droites réciproques d'une parabole.

17. La transformation peut se faire de deux façons différentes, correspondant aux deux axes de la courbe. Les paraboles résultant de la transformation ont même paramètre; sa valeur est égale au paramètre p de l'hypercycle.

La proposition précédente est au fond identique avec une de celles que j'ai énoncées plus haut, à savoir que l'hypercycle peut être considéré comme une anticaustique par *réfraction* d'une parabole, les rayons incidents étant perpendiculaires à l'un des axes [1]; mais la forme actuelle a l'avantage de montrer immédiatement comment on peut étendre à l'hypercycle les propriétés connues de la parabole.

La parabole elle-même peut être considérée comme un hypercycle composé de deux branches opposées, en sorte qu'en chaque point de la parabole passent deux tangentes distinctes, et la théorie que j'ai exposée précédemment fournit un grand nombre de propriétés nouvelles de cette conique.

Le cycle polaire d'une semi-droite du plan Δ, relativement à une parabole P, peut se construire facilement. Du pôle A de Δ, relativement à P, abaissons une perpendiculaire sur Δ et prenons son point de rencontre B avec l'axe de la courbe; le cycle cherché D a AB pour diamètre et son sens est entièrement déterminé par cette remarque qu'au point A la tangente est parallèle à Δ. On voit par cette construction que deux semi-droites opposées ont des cycles polaires opposés.

Les semi-droites fondamentales sont opposées et déterminées par la position de l'axe; deux tangentes conjuguées sont donc symétriques par rapport à l'axe.

18. Il y a un cas particulier remarquable, dans lequel il est évidemment impossible de transformer un hypercycle en une parabole; c'est celui où son paramètre p est nul. La courbe est alors de la troisième classe et je la désignerai sous le nom d'*hypercycle*

[1] *Voir* à ce sujet ma Note *Sur la transformation par directions réciproques* (*Comptes rendus*, t. XCII, p. 71).

cubique; elle peut être définie comme une courbe de troisième classe ayant une tangente double, touchant la droite de l'infini et passant par les ombilics du plan.

Sa propriété caractéristique consiste en ce que tous les cycles polaires touchent une des demi-droites fondamentales P; celle-ci est elle-même tangente à la courbe, et je l'appellerai *tangente fondamentale*. L'autre semi-droite fondamentale est parallèle et de sens contraire à la tangente Θ à la courbe qui passe par le point de contact de celle-ci avec la droite de l'infini.

Un hypercycle étant défini par ses semi-droites fondamentales, une semi-droite Δ et son cycle polaire, cet hypercycle est de troisième classe si ce cycle polaire touche une des semi-droites fondamentales et tous les autres cycles polaires touchent également cette semi-droite.

Un hypercycle cubique étant donné, ses semi-droites fondamentales ne sont pas déterminées. Prenons arbitrairement une tangente Δ à cette courbe, nous pourrons la regarder comme une tangente fondamentale et lui adjoindre une semi-droite Δ' antiparallèle à Θ, de telle sorte qu'à chaque tangente T de la courbe en corresponde une autre T' constituant avec celle-ci et le couple (Δ, Δ') un système harmonique.

Tous les théorèmes généraux donnés précédemment relativement à l'hypercycle général s'appliquent à l'hypercycle cubique, mais l'application peut en être faite d'une infinité de manières, puisqu'il y a une infinité de modes de groupement des tangentes.

L'hypercycle cubique se relie encore à la parabole d'une façon étroite; c'est, en effet, une anticaustique *par réflexion* de parabole, les rayons incidents étant parallèles, et elle peut être d'une infinité de façons considérée comme une anticaustique d'une pareille courbe.

19. Les propositions relatives aux tangentes communes à un cycle et un hypercycle sont notablement modifiées quand la courbe est de la troisième classe, puisque dans ce cas il n'y a plus que trois tangentes communes.

J'énoncerai ici le théorème important qui suit : T et T' désignant deux tangentes quelconques conjuguées dans un mode de groupement caractérisé par la tangente fondamentale $D\tilde{\delta}$, A et B deux autres tangentes *quelconques*, construisons les cycles K et K′ qui touchent respectivement A, B, T et A, B, T′; cela posé, le cycle [1] moyen de K et K′ est tangent à D.

Considérons en particulier le mode de groupement où les tangentes isotropes issues du foyer F de la courbe sont conjuguées et appelons Δ la tangente fondamentale correspondante (cette tangente est celle que l'on peut mener du pied de la perpendiculaire abaissée du foyer sur la tangente double); nous pourrons énoncer la proposition qui suit et qui donne une propriété de *deux tangentes quelconques :*

Étant données deux tangentes quelconques A *et* A′ *à l'hypercycle, soient m le centre du cycle tangent aux semi-droites* A, A′ *et* Δ, *et* α *le point de rencontre de* A *et* A′; *la droite menée par m perpendiculairement à $m\alpha$ passe par le foyer* F *de la courbe.*

En voici quelques conséquences : imaginons que, A restant fixe, A′ se déplace tangentiellement à la courbe; en désignant par a le point de rencontre de A et de Δ, le point m décrit la bissectrice am des deux semi-droites A et Δ (droite qui, comme je l'ai déjà rappelé plusieurs fois, est entièrement déterminée), et la bissectrice $m\alpha$ des deux tangentes A et A′ enveloppe une parabole P ayant F pour foyer.

Or de là résulte immédiatement que l'hypercycle peut être considéré comme l'enveloppe des cycles qui touchent A et ont leur centre sur la parabole P; en d'autres termes, l'hyperbole est une anticaustique par réflexion de la parabole P, les rayons incidents étant perpendiculaires à la tangente A.

La courbe peut donc être considérée d'une infinité de manières comme anticaustique de parabole; toutes les paraboles ont pour foyer F, et les tangentes menées aux sommets sont tangentes à l'enveloppe des bissectrices telles que $m\alpha$; c'est précisément celle

(¹) Je rappelle que le cycle moyen de deux cycles ayant respectivement pour centre les points a et b, pour rayon R et R′, est le cycle ayant pour centre le point milieu du segment ab et pour rayon $\frac{R+R'}{2}$.

des paraboles considérées qui correspond à une direction des rayons lumineux perpendiculaires à Δ.

Cette parabole π a pour tangente au sommet la normale menée à la courbe au point où elle touche Δ; elle peut être également considérée comme le lieu des projections du foyer F sur les normales à l'hypercycle.

20. Je mentionnerai enfin un élégant théorème de Géométrie élémentaire qui résulte immédiatement de la proposition précédente :

Étant données quatre semi-droites quelconques A, B, C *et* Δ, *désignons par a, b, c les sommets du triangle déterminé par les côtés* A, B, C (a étant l'intersection de B et de C, etc.), *et par* α, β, γ *les centres des cycles inscrits dans les triangles déterminés par les côtés* B, C *et* Δ, C, A *et* Δ, A, B *et* Δ; *cela posé, les droites menées par les points* α, β *et* γ, *et respectivement perpendiculaires aux droites* αa, βb *et* γc, *se coupent en un même point.*

Ce point est, en effet, le foyer de l'hypercycle cubique déterminé par les cinq conditions suivantes, à savoir qu'il touche les semi-droites A, B, C, et que Δ soit la tangente fondamentale correspondant aux tangentes issues du foyer.

SUR LES

ANTICAUSTIQUES PAR RÉFLEXION DE LA PARABOLE

LES RAYONS INCIDENTS ÉTANT PARALLÈLES.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1883.

1. J'appelle *bissectrice* de deux semi-droites données la droite parfaitement déterminée qui est le lieu des cycles tangents à ces demi-droites; la droite menée par leur point de rencontre et perpendiculairement à la bissectrice sera désignée sous le nom de *bissectrice impropre*.

Deux semi-droites sont symétriques par rapport à leur bissectrice impropre; je dirai qu'elles sont *anti-symétriques* par rapport à leur bissectrice.

Ces définitions étant posées, je m'appuierai sur les lemmes suivants :

Lemme I. — *Quatre semi-droites étant données, si l'on considère trois à trois ces semi-droites, on obtient quatre triangles; les centres des cycles inscrits dans ces triangles sont sur un même cercle.*

Considérons en effet (*fig.* 1) les quatre semi-droites AB, BE, EA et CF. Les bissectrices des côtés du triangle ABC le coupent au point δ, celle du triangle BCD au point α, celles du triangle EDF au point β et celles du triangle CFA au point γ. Pour établir que ces quatre points sont sur une même circonférence, il suffit d'établir que l'angle $\alpha\delta\beta$ est égal à l'angle $\alpha\gamma\beta$.

On a évidemment

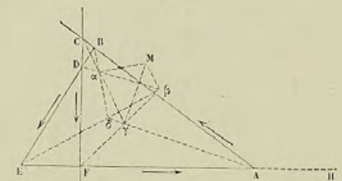
$$\widehat{\alpha\delta\lambda} = \widehat{\mathrm{BE}\delta} + \widehat{\mathrm{EB}\delta} = \tfrac{1}{2}\,\widehat{\mathrm{BEA}} + \tfrac{1}{2}\,\widehat{\mathrm{EBA}} - \tfrac{1}{2}\,\widehat{\mathrm{BAH}};$$

d'autre part, on a

$$\widehat{\alpha\gamma\beta} = \widehat{\mathrm{FC}\gamma} + \widehat{\mathrm{CF}\gamma} = \tfrac{1}{2}\,\widehat{\mathrm{FCA}} + \tfrac{1}{2}\,\widehat{\mathrm{CFA}} = \tfrac{1}{2}\,\widehat{\mathrm{BAH}}.$$

La proposition est donc démontrée.

Fig. 1.



2. Sur la circonférence $\alpha\gamma\beta\delta$, considérons le point M diamétralement opposé au point δ, on voit que les droites $\mathrm{M}\alpha$, $\mathrm{M}\beta$ et $\mathrm{M}\gamma$ sont respectivement perpendiculaires aux droites $\mathrm{B}\alpha$, $\mathrm{E}\beta$ et $\mathrm{A}\gamma$. Or α est le centre du cycle qui touche les semi-droites AB, BE et CF, β le centre du cycle qui touche les semi-droites BE, AE et CF, et γ le centre du cycle qui touche les semi-droites AE, AB et CF. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Lemme II. — *Étant données quatre semi-droites* D, D′, D″ *et* Δ, *soient* α, α', α'' *les centres des cycles inscrits respectivement dans les triangles déterminés par les semi-droites* (D′, D″, Δ), (D″, D, Δ) *et* (D, D′, Λ); *désignons par* β *le point de rencontre de* D′ *et* D″, *par* β' *le point de rencontre de* D″ *et de* D *et enfin par* β'' *le point de rencontre de* D *et* D′.

Cela posé, les droites menées par les points α, α', α'' *et perpendiculaires respectivement aux droites* $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, $\alpha''\beta''$ *concourent en un même point.*

3. Considérons maintenant deux semi-droites fixes Λ et Δ et une semi-droite mobile B assujettie à la condition suivante, à sa-

voir que, p désignant le point de rencontre de Λ et de Δ, q le centre du cycle inscrit dans le triangle formé par les semi-droites A, A et Δ, la droite menée par q perpendiculairement à pq passe par un point fixe F.

La semi-droite B enveloppera dans son mouvement une courbe parfaitement déterminée; elle est de l'espèce de celles que j'ai appelées *hypercycles* et de la troisième classe; c'est donc un *hypercycle cubique*. Dans tout le cours de cette Note, quand il n'y aura aucune confusion à craindre, je la désignerai simplement sous le nom d'*hypercycle*; comme je le montrerai plus tard, le point fixe F est le foyer de cette courbe [1].

4. Un hypercycle étant ainsi défini par les deux semi-droites Λ et Δ, considérons une autre tangente quelconque à la courbe C; en désignant par r le point de rencontre de Λ et de C, par s le centre du cycle tangent aux semi-droites Λ, C et Δ, il suit de la définition de la courbe que la droite menée par s perpendiculairement à rs passe par le foyer de la courbe. Soient maintenant α le point de rencontre des tangentes C et B, β le centre du cycle tangent à B, C et Δ, il résulte du lemme II que la droite menée par β perpendiculairement à βα passe également par le foyer F.

Nous pouvons donc énoncer cette propriété fondamentale.

Théorème I. — *Étant données deux tangentes quelconques de l'hypercycle, considérons le centre du cycle qui touche ces deux tangentes et la semi-droite Δ; les droites, qui joignent ce centre au foyer de la courbe et au point de rencontre des tangentes, sont perpendiculaires entre elles.*

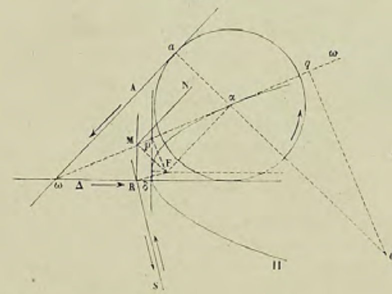
5. Considérons une tangente Λ (*fig.* 2) à un hypercycle H et a le point où elle touche la courbe; la tangente infiniment voisine Λ′ passe par le point A et la bissectrice de deux semi-droites Λ et Λ′ est la normale menée au point a; soit α le point où cette normale rencontre la bissectrice des semi-droites Λ et Δ; d'après le théo-

(1) *Voir* à ce sujet ma Note *Sur les hypercycles* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séances des 20 mars, 3, 10 et 24 avril 1882).

rème précédent, la droite Fα est perpendiculaire à la normale et, par suite, parallèle à Λ. D'où la proposition suivante :

Étant donnée une tangente Λ *à l'hypercycle* H, *que par le foyer* F *de la courbe on mène une parallèle à* Λ, *et que l'on*

Fig. 2.



prenne son point de rencontre α *avec la bissectrice des semi-droites* Λ *et* Δ; *que du point* α *on abaisse ensuite une perpendiculaire de la tangente* Λ, *le pied* a *de cette perpendiculaire est le point de contact de* Λ *avec la courbe.*

6. La semi-droite Δ est tangente à la courbe. Supposons en effet (*fig.* 2) l'hypercycle défini par la semi-droite Δ et une tangente quelconque Λ. Soit ωω′ la bissectrice des demi-droites Λ et Δ; abaissons du point F une perpendiculaire Fp sur ωω′, puis, du point p, une perpendiculaire $p\delta$ sur Δ. Si nous imaginons une semi-droite Δ′ infiniment voisine de Δ et passant par le point d, la bissectrice de Δ et de Λ est la droite ωω′, le centre du cycle tangent à Λ, Δ et Δ′ est évidemment le point p et, comme pF est perpendiculaire à pω, il résulte du théorème I que Δ′ (et par suite Δ) est tangente à l'hypercycle; son point de contact est le point Λ.

Je dirai que Δ est la tangente principale de la courbe.

Dans la démonstration précédente, Λ est une tangente quelconque de l'hypercycle; lorsque cette tangente varie, on voit que la bissectrice $\omega\omega'$ enveloppe une parabole Π ayant F pour foyer, et $p\delta$ pour tangente au sommet : cela résulte immédiatement de ce que l'angle $Fp\omega$ est un angle droit.

Il est aisé de voir que la droite $\omega\omega'$ touche la parabole Π au point α; de ce point, comme centre, décrivons un cycle touchant à la fois Δ et A; son enveloppe, lorsque A se déplace tangentiellement à l'hypercycle, et que le point α décrira la parabole Π, se compose de la semi-droite Δ et de l'hypercycle H : on peut donc dire que *le lieu des centres des cycles, qui touchent l'hypercycle et la tangente fondamentale* Δ, *est la parabole* Π.

En d'autres termes :

L'hypercycle H *est une anticaustique* (¹) *par réflexion de la parabole* Π, *les rayons incidents étant perpendiculaires à l'axe de cette parabole.*

Remarque. — On voit que la parabole Π est le lieu des points α; il en résulte que *la parabole* Π *est le lieu des projections du foyer* F *sur les normales à l'hypercycle.*

7. *Tangentes que l'on peut mener à la courbe par un point situé sur une tangente donnée.*

Soient un hypercycle H défini par son foyer F, sa tangente principale Δ et une tangente quelconque A; soit, de plus, $\omega\omega'$ la bissectrice des semi-droites A et Δ. Étant pris sur A un point quelconque M, si nous imaginons une tangente quelconque menée de ce point à la courbe, il suit du théorème I que, du centre du cycle inscrit dans cette tangente, A et Δ, on doit voir sous un angle droit le segment MF. Soit MF comme diamètre décrivant un cercle, et soient α, β les points où ce cercle coupe la bissectrice $\omega\omega'$; il est clair, d'après ce qui précède, que les tangentes que, du point M, on peut mener à la courbe (et qui sont distinctes de A), sont les *antisymétriques* de A relativement aux droites $M\alpha$ et $M\beta$.

Remarque I. — Il résulte de la construction précédente que par chaque point du plan passent trois tangentes à la courbe : l'hypercycle est donc une courbe de la troisième classe.

(¹) Dans la suite de cette Note, chaque fois que je parlerai d'une anticaustique, sans rien mentionner de plus, je supposerai expressément que les rayons incidents sont parallèles.

Remarque II. — Par le foyer F, menons une droite qui soit parallèle à la bissectrice $\omega\omega'$ et qui rencontre A au point p; soit q le point symétrique de p relativement au point ω, intersection de A et de Δ. Si, sur qF comme diamètre, nous décrivons un cercle rencontrant la bissectrice $\omega\omega'$ aux points α et β, le centre de ce cercle est évidemment sur cette bissectrice; l'angle $\alpha q\beta$ est par conséquent droit, et les deux tangentes, que du point q on peut mener à l'hypercycle (indépendamment de la tangente A), sont des semi-droites opposées : cela résulte immédiatement de la construction donnée ci-dessus.

Ces deux tangentes sont distinctes, ainsi que leurs points de contact; la droite qui correspond à ces deux semi-droites opposées est donc une *tangente double* de la courbe; mais elle doit être considérée comme une *tangente double apparente* (¹).

L'hypercycle, étant de la troisième classe et ayant une tangente double, est du quatrième degré.

Remarque III. — Supposons que le cercle décrit sur MF comme diamètre soit tangent à la bissectrice $\omega\omega'$; les points α et β étant confondus, il en est de même des droites $M\alpha$ et $M\beta$; par suite, les tangentes menées du point M à la courbe (et distinctes de A) sont confondues. Le point M est donc situé sur la courbe; d'où la conclusion suivante :

Soit P *le pied de la perpendiculaire abaissée du foyer* F *sur la tangente* A; *par les deux points* F *et* P *on peut mener deux cercles tangents à la bissectrice de* A *et de la tangente fondamentale, les points où ces cercles coupent* A *sont les deux points (distincts du point de contact) où cette tangente coupe l'hypercycle.*

(¹) Au point de vue où nous sommes placé ici, une semi-droite est tangente double d'une courbe, si, en deux de ses points, elle a même direction que cette courbe; c'est alors une *tangente double effective*. Mais, si une droite est telle, qu'en la prenant d'abord dans un sens déterminé elle touche la courbe et qu'elle la touche encore en la prenant dans le sens inverse, on a une *tangente double apparente*.

Lorsqu'on effectue une transformation par directions réciproques, une tangente double effective a pour transformée une tangente double effective, tandis qu'une tangente double apparente (qui résulte de la superposition de deux tangentes opposées) a pour transformées deux tangentes ordinaires distinctes.

8. *Tangente parallèle à une semi-droite donnée.* — L'hypercycle étant défini comme précédemment par son foyer F, la tangente fondamentale Δ et une tangente quelconque A, proposons-nous de mener à cette courbe une tangente parallèle à une semi-droite donnée D.

Construisons à cet effet la bissectrice (D, A) (1) et menons par le foyer F une perpendiculaire à (P, A); par le point β, où cette perpendiculaire coupe la bissectrice (A, Δ), menons une parallèle à (D, A) rencontrant au point α la tangente A. Il résulte du théorème I que l'antisymétrique de A relativement à la droite $\alpha\beta$ est une tangente à la courbe qui est évidemment parallèle à la semi-droite donnée D.

On peut donc mener une tangente et une seule, qui soit parallèle à la semi-droite donnée; comme on peut mener également une tangente parallèle à la semi-droite opposée, il en résulte que, par un point situé à l'infini, on peut généralement mener deux tangentes à la courbe. La courbe étant de troisième classe, on voit qu'elle est nécessairement tangente à la droite de l'infini.

Deux cas particuliers sont à remarquer : si la droite donnée est antiparallèle à Δ, les bissectrices (D, A) sont (Δ, A) perpendiculaires, et le point β est répété à l'infini. La tangente antiparallèle à Δ étant rejetée à l'infini, on voit que le point de contact de l'hypercycle avec la droite de l'infini est sur Δ; en d'autres termes :

La tangente principale est la tangente que l'on peut mener à la courbe par le point où elle touche la droite de l'infini.

Considérons, en second lieu, le cas où D est une direction isotrope; je ferai remarquer à ce sujet qu'*une semi-droite isotrope doit être considérée comme se confondant avec son opposée* (2).

Si donc on considère un des ombilics du plan (c'est-à-dire des deux points imaginaires communs à tous les cercles du plan), on voit que par ce plan on ne peut mener à la courbe qu'une tangente

(1) Ici et comme dans tout ce qui suit, je désigne, pour abréger, par la notation (P, Q) la bissectrice de deux semi-droites données P et Q.

(2) On voit qu'il n'y a pas besoin de distinguer le sens dans lequel est décrite une droite isotrope; ainsi *droite isotrope* et *semi-droite isotrope* ont exactement la même signification.

distincte de la droite de l'infini : d'où il résulte que ce point est situé sur la courbe.

L'hypercycle est donc une courbe de la troisième classe et du quatrième degré, tangente à la droite de l'infini et passant par les ombilics. Elle a un seul foyer, qui est un foyer singulier; la construction donnée ci-dessus montre aisément que ce foyer est le point F (1).

Réciproquement, toute courbe de la troisième classe et du quatrième degré qui touche la droite de l'infini et passe par les ombilics du plan est un hypercycle.

9. Voici encore une conséquence de la construction donnée ci-dessus. Une tangente A étant donnée, cherchons à déterminer la tangente A' parallèle à la direction opposée. La bissectrice (A, A') est une droite parallèle à A, et la perpendiculaire abaissée du foyer F sur cette droite rencontre la bissectrice $\omega\omega'$ au point M (*fig.* 2) : d'où il résulte que A' est l'antisymétrique A par rapport à la droite MN menée par le point M parallèlement à A.

Or l'enveloppe de cette droite est aisée à trouver; l'angle $MF\alpha$ étant droit, le point M décrit la directrice de la parabole Π, et l'angle NMF étant également droit, MN enveloppe une parabole Π', qui a pour foyer F et pour tangente au sommet la directrice MR de la parabole Π.

Je ferai remarquer que la droite RS, menée par le point R perpendiculairement à RF, est la tangente double de la courbe.

10. L'hypercycle étant défini comme enveloppe d'une semi-droite mobile est, comme le cycle, une *courbe de direction;* je veux dire par là qu'en chacun de ses points la tangente est déterminée de position et de direction.

Considérons un cycle C et le cercle K déterminé par ce cycle; le cercle K étant de seconde classe et l'hypercycle de la troisième, ces deux courbes ont en commun six tangentes dont la direction est déterminée, puisqu'elles touchent l'hypercycle. De ces six

(1) Il suffit de remarquer que la bissectrice d'une semi-droite donnée et d'une droite isotrope est cette droite isotrope elle-même.

demi-droites, trois seulement sont tangentes à C, les autres étant tangentes au cycle opposé.

Ainsi, *un cycle et un hypercycle ont trois tangentes communes.*

11. *Détermination des tangentes communes à un cycle qui touche une tangente à l'hypercycle.* — Considérons un cycle C qui touche une tangente A à l'hypercycle; il a en commun, avec cette courbe, deux tangentes que l'on peut déterminer par la règle et le compas.

A cet effet, Δ désignant la tangente principale de la courbe, F son foyer et $\omega\omega'$ la bissectrice (A, D), appelons O le centre du cycle donné, et qui est ainsi bien défini; sur OF comme diamètre, décrivons un cercle K qui coupe $\omega\omega'$ aux points γ et δ; joignons $O\alpha$ et $O\beta$, et soient γ' et δ' les points où ces droites rencontrent la tangente A.

Cela posé, on vérifiera facilement que les tangentes menées des points α' et β' au cycle C sont les tangentes cherchées.

12. *Construction du cycle osculateur en un point donné.* — Soit (*fig.* 2) à construire le cycle osculateur au point a où la tangente A touche la courbe. Si le cycle C est osculateur, les points γ' et δ' doivent se confondre avec le point a, et par conséquent les points γ et δ avec le point α. Le cercle K touche donc la bissectrice $\omega\omega'$ au point α, et son centre est déterminé, puisqu'il est, en outre, sur la droite élevée par le milieu du segment $F\alpha$ perpendiculaire à ce segment.

De là la construction simple suivante :

F*p étant la perpendiculaire abaissée du foyer* F *sur la bissectrice* $\omega\omega'$, *déterminons le point* q *symétrique de* p *par rapport à* α *et au point* q, *menons une droite perpendiculaire à* $\omega\omega'$: *le point* O *où cette droite rencontre la normale est le centre du cycle osculateur de la courbe au point* a.

13. *Lieu des centres des cycles qui touchent l'hypercycle et une tangente donnée de cette courbe.* — En conservant les mêmes notations que ci-dessus, supposons que le cycle qui a pour centre le point O soit tangent à l'hypercycle; les deux points γ'

et δ' seront alors confondus, ainsi que les points γ, δ. Le cercle décrit sur OF comme diamètre touche donc $\omega\omega'$; son centre O', étant également distant du point F et de $\omega\omega'$, décrit une parabole ayant F pour foyer et $\omega\omega'$ comme directrice, et, par suite, le centre O décrit une parabole P ayant F pour foyer et $\omega\omega'$ pour tangente au sommet.

La même proposition peut s'énoncer de la façon suivante :

L'hypercycle est une anticaustique de la parabole P, *les rayons incidents étant perpendiculaires à la tangente* A.

Un hypercycle peut être ainsi considéré d'une infinité de façons comme une anticaustique de parabole; toutes les paraboles qui correspondent à ce mode de génération sont homofocales, et leurs tangentes au sommet enveloppent la parabole H.

14. Il résulte également de là le théorème suivant, qui exprime une propriété de six semi-droites quelconques tangentes à un même hypercycle :

Théorème II. — *Si six semi-droites* A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 *et* A_6 *sont tangentes à un même hypercycle, les cinq bissectrices* (A_1, A_2), (A_1, A_3), (A_1, A_4), (A_1, A_5) *et* (A_1, A_6) *sont tangentes à une même parabole.*

Le foyer de cette parabole est le foyer de l'hypercycle.

15. Comme je l'ai dit plus haut, l'hypercycle est une courbe de direction; en d'autres termes, en chaque point de cette courbe, la tangente est déterminée non seulement en position, mais encore en direction. Il en est de même du cycle; mais une courbe algébrique, prise au hasard, n'est pas une courbe de direction.

Étant donnée une courbe algébrique K de classe n, si, en la supposant décrite dans un certain sens, on peut la transformer en une courbe de direction K_0, il faut que, étant donné un cycle quelconque C, des $2n$ tangentes communes à K et à C, n soient seulement des tangentes effectives à K_0, les n autres étant des tangentes apparentes.

De là résulte que l'équation qui détermine les tangentes communes à K et à C doit, par l'extraction d'une simple racine carrée, se ramener à la résolution des deux équations du degré n; et, comme (en coordonnées rectangulaires) l'équation tangentielle d'un cercle quelconque est

$$u^2 + v^2 = (\alpha u + \beta v + \gamma)^2,$$

il en résulte que l'équation tangentielle la plus générale d'une courbe de direction est de la forme

$$F^2(u, v) = (u^2 + v^2)\,\Phi^2(u, v),$$

F et Φ désignant deux fonctions rationnelles de u et de v.

16. Lorsque l'équation d'une courbe algébrique K du degré n n'est pas de la forme que je viens d'indiquer (telle est, par exemple, une conique quelconque différente du cercle), pour la transformer en une courbe de direction, il faut la considérer comme double, et comme le résultat de la superposition de deux courbes opposées qui sont l'enveloppe d'un cycle de rayon infiniment petit dont le centre décrit la courbe K.

Une telle courbe doit être considérée comme double; en chacun de ses points on peut mener deux tangentes qui sont des semi-droites opposées, et, au point de vue où nous sommes placés, elle est de la classe $2n$.

17. Étant données une courbe algébrique quelconque K et une semi-droite Δ, considérons les cycles qui, ayant leur centre sur K, sont tangents à Δ; ils enveloppent évidemment une courbe de direction G qui est une anticaustique de K, les rayons incidents étant perpendiculaires à Δ.

Ainsi toute anticaustique d'une courbe algébrique est une courbe de direction; réciproquement, étant donnée une courbe de direction quelconque G, elle est une anticaustique d'une infinité de courbes algébriques que l'on déterminera de la façon suivante.

Étant prises arbitrairement une semi-droite Δ et une tangente quelconque T à la courbe G, que l'on construise la bissectrice (T, Δ); lorsque T se déplace tangentiellement à G, la droite (T, Δ) enveloppe une courbe algébrique K, qui est le lieu des centres des cycles qui touchent à la fois Δ et la courbe G.

Si la courbe G est une courbe double, en chaque point M de

cette courbe, on peut mener deux tangentes opposées, et si N désigne le point où elles rencontrent Δ, par N passent deux bissectrices rectangulaires entre elles, dont l'enveloppe est la courbe K.

Dans ce cas, l'enveloppe des cycles tangents à Δ et ayant leur centre sur K est la *courbe double* G, chaque point M de G étant le point de contact de deux cycles tangents à Δ et ayant leur centre sur K; ou, si l'on veut encore, chaque point de G étant situé sur deux rayons réfléchis sur K.

18. On peut encore énoncer les résultats qui précèdent sous la forme suivante : G désignant une courbe algébrique, traçons dans le plan une droite arbitraire D, menons une tangente T à G et construisons les deux bissectrices rectangulaires des droites T et D; cela posé, lorsque T se déplace tangentiellement à la courbe, ces bissectrices enveloppent une autre courbe. Si cette dernière courbe se décompose en deux autres, on peut transformer la courbe G en une courbe de direction en donnant en chacun de ses points une direction à la tangente. On retrouverait ainsi la condition analytique que j'ai donnée plus haut, à savoir que l'équation en coordonnées tangentielles d'une courbe de direction est de la forme $F^2(u, v) = (u^2 + v^2)\,\Phi^2(u, v)$.

Les courbes parallèles à une courbe de direction et l'enveloppe de ses normales sont également des courbes de direction; il en est de même des caustiques par réflexion des courbes algébriques, les rayons incidents étant parallèles.

19. Considérons une courbe de direction G qui est l'enveloppe des cycles dont les centres décrivent la courbe K, tandis qu'ils demeurent tangents à une semi-droite Δ.

Effectuons une transformation par semi-droites réciproques; soient G_0 la transformée de G, et Δ_0 la semi-droite transformée de Δ. G_0 peut être considéré comme l'enveloppe de cycles tangents à Δ_0, et dont les centres parcourent une courbe K_0.

Il est aisé d'établir que K_0 est une transformée homographique de K, la transformation étant de telle nature que la droite de l'infini se correspond à elle-même.

Prenons en effet pour axe des x l'axe de la transformation, et pour axe des y une droite perpendiculaire. Soient x, y les coordonnées du centre d'un cycle tangent à Δ et à G, et r son rayon; soient X, Y les coordonnées du cercle transformé et R son rayon. On aura les formules suivantes [1] :

$$Y = x, \qquad Y - y = \alpha(R - r), \qquad Y + y = \frac{1}{\alpha}(R + r);$$

en éliminant R entre les deux dernières relations, il vient

$$Y = \frac{(\alpha^2 - 1)y - 2\alpha r}{\alpha^2 + 1}.$$

Si maintenant on remarque que le cercle de rayon r demeure tangent à une semi-droite fixe du plan, on voit que, *en grandeur et en signe*, r est exprimé par une fonction linéaire de x et de y.

On a donc une relation de la forme

$$Y = Ax + By + C,$$

où A, B, C désignent des constantes, et cette formule, jointe à la formule $X = x$, démontre la proposition énoncée.

Une transformation homographique, qui conserve la droite de l'infini, transformant une conique en conique et une parabole en parabole, il en résulte qu'une anticaustique de conique se transforme, par une transformation par directions réciproques, en une anticaustique de conique, et qu'un hypercycle (qui est une anticaustique de parabole) a pour transformée un autre hypercycle [2].

20. *Un hypercycle est déterminé quand on se donne cinq de ses tangentes.* — Cinq tangentes A, B, C, D, E étant en effet données, que l'on construise, par exemple, les quatre bissectrices (A, B), (A, C), (A, D), (A, E), et la parabole P tangente à ces quatre droites; il est clair, d'après ce qui précède, que l'hypercycle est l'enveloppe des cycles qui touchent A, et dont le centre décrit P; son foyer est du reste le foyer de P.

La proposition précédente signifie qu'il y existe un seul hyper-

(1) *Voir* le *Traité de Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse, 5e édition, p. 270, et *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. I, p. 550.

(2) Sur ce point et sur d'autres propriétés de l'hypercycle, *voir* ma Note *Sur les hypercycles*, insérée dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séances des 20 et 27 mars, 3, 10 et 24 avril 1882.

cycle touchant *cinq semi-droites données*, mais il y existe seize hypercycles touchant *cinq droites données*. Ayant en effet attribué un sens arbitraire à l'une des droites pour la transformée en semi-droites, on peut attribuer à chacune des quatre autres un sens arbitraire, ce qui donne lieu à seize combinaisons différentes.

21. *Indépendamment de la droite de l'infini, deux hypercycles quelconques* H *et* H' *ont quatre tangentes communes.* — Soient, en effet, H_0 la courbe H' considérée indépendamment de son sens; H_0 et H, étant toutes les deux de troisième classe, ont neuf tangentes communes. Abstraction faite de la droite de l'infini, il en reste huit autres qui sont tangentes soit à H, soit à la courbe H_1 opposée à H. Deux hypercycles ne peuvent d'ailleurs, d'après le théorème précédent, avoir plus de quatre tangentes communes; des huit tangentes considérées, quatre sont donc tangentes à H et quatre tangentes à H_1, ce qui démontre la proposition énoncée.

22. *Faisceaux d'hypercycles.* — Je dirai que l'ensemble des hypercycles qui touchent quatre semi-droites données constitue un faisceau.

Il est clair, d'après ce qui précède, que, parmi les hypercycles d'un faisceau, il n'y en a qu'un qui touche une semi-droite donnée; on prouvera facilement qu'il y en a quatre qui passent par un point donné.

Le lieu des foyers des hypercycles du faisceau déterminé par quatre semi-droites données A, B, C, D est le cercle qui contient (lemme I) les centres des cycles inscrits dans les triangles que l'on détermine en considérant trois à trois les semi-droites données.

Considérons en effet les bissectrices (A, B), (A, C) et (A, D); on voit que les foyers des hypercycles du faisceau sont les foyers des paraboles tangentes à ces trois droites; or, d'après un théorème connu, le lieu de ces foyers est le cercle circonscrit au triangle formé par ces droites, d'où la proposition énoncée.

23. *Hypercycles exceptionnels.* — Un point d à l'infini étant défini par un système (D) de semi-droites parallèles entre elles, on peut considérer l'ensemble du point d et d'un cycle quelconque C comme constituant un hypercycle. Les tangentes que l'on peut, d'un point quelconque M du plan, mener à cet hypercycle exceptionnel se composent des tangentes menées du point M au cycle et de la semi-droite menée par M parallèlement au système (D).

Étant donné un tel hypercycle exceptionnel (d, C), si l'on mène à C une tangente antiparallèle au système (D) (¹), cette tangente est la tangente principale du cycle exceptionnel, et la droite correspondante en est la tangente double.

C'est ce que l'on verra facilement sur la *fig.* 2, en supposant que le foyer F se rapproche indéfiniment de la bissectrice $\omega\omega'$ et vient se placer sur cette droite, auquel cas l'hypercycle se réduit à un cycle et à un point à l'infini.

24. Un faisceau déterminé par quatre semi-droites A, B, C, D renferme quatre cycles exceptionnels, à savoir :

Celui qui est déterminé par le cycle inscrit dans A, B, C et le point à l'infini sur D, celui qui est déterminé par le cycle inscrit dans B, C, D et le point situé à l'infini sur A, celui qui est déterminé par le cycle inscrit dans C, D, A et le point situé à l'infini sur B, et enfin celui qui est déterminé par le cycle inscrit dans D, A, B et le point à l'infini sur C.

La considération de ces cycles exceptionnels est d'une grande importance dans la théorie des faisceaux d'hypercycles, théorie sur laquelle j'aurai occasion de revenir.

(¹) Je rappellerai que deux semi-droites sont dites *antiparallèles* lorsque, les droites qu'elles déterminent étant parallèles, elles sont dirigées en sens inverse.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CYCLES.

Nouvelles Annales de Mathématiques, 1883.

1. Étant donnés deux cycles A et B, menons-leur une tangente commune; la distance comprise entre les points de contact de cette semi-droite est la distance tangentielle des deux cycles. Elle n'est évidemment déterminée qu'en valeur absolue; dans tout ce qui suit, je la désignerai simplement sous le nom de *distance des deux cycles*.

On sait que, si l'on effectue une transformation par semi-droites réciproques, la distance de deux cycles est égale à la distance des deux cycles correspondants.

2. Étant donnés trois cycles A, B et C, on peut chercher de quelle façon sont distribués dans le plan les cycles équidistants de ces trois cycles. Si nous effectuons une transformation par semi-droites réciproques, de telle sorte que, les cycles α, β et γ correspondant aux cycles donnés, α et β soient opposés, il suffira évidemment de résoudre le problème proposé relativement à la nouvelle figure.

Il est aisé de voir que les cycles équidistants de deux cycles opposés α et β se réduisent aux points du plan. Désignant, en effet, par R et $-$R les rayons des cycles opposés, par ρ le rayon d'un cycle équidistant de α et de β, par d la distance de son centre au centre commun de α et de β, on a

$$d^2-(R-\rho)^2=d^2-(R+\rho)^2,$$

d'où

$$R\rho=0;$$

et, comme R est supposé différent de zéro, il suit nécessairement

$$\rho = 0,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Les cycles équidistants de α, β et γ devant se réduire à des points, on les obtiendra tous en considérant les divers points de l'axe radical D des cycles α et γ; et de là, si l'on revient à la première figure, on voit que les cycles équidistants de trois cycles donnés A, B, C sont tangents à deux semi-droites fixes Δ et Δ' qui sont les transformées des deux semi-droites opposées définies par la droite D. Ces deux semi-droites passent d'ailleurs par les points p et q, intersections des cycles α et γ, lesquels points peuvent être considérés comme les cycles tangents à α, β et γ.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Les cycles équidistants de trois cycles donnés A, B *et* C *touchent deux semi-droites fixes* Δ *et* Δ', *qui sont les tangentes communes aux deux cycles qui sont tangents à* A, B *et* C.

J'appellerai ces semi-droites les *semi-droites radicales* des cycles A, B et C; leur point de rencontre est évidemment le centre radical des trois cycles.

3. Proposons-nous de trouver les cycles équidistants de quatre cycles donnés, A, B, C et D. Dans ce but effectuons une transformation par semi-droites réciproques, de telle sorte que α, β, γ et δ correspondent respectivement à A, B, C et E, α et β soient des cycles opposés.

Les cycles équidistants de α et de β se réduisant aux points du plan, il est clair qu'il n'y a qu'un seul cycle qui soit équidistant des cycles α, β, γ et δ : c'est le centre radical des cycles α, γ et δ; et de là, en revenant à la figure primitive, on peut conclure que :

Il n'y a dans le plan qu'un seul cycle équidistant de quatre cycles donnés A, B, C *et* D.

Je le désignerai sous le nom de *cycle radical* des cycles A, B, C et D.

4. Le cycle radical de A, B, C et D étant équidistant de A, B

et C touche les semi-droites radicales de ces trois cycles; d'où la proposition suivante :

Étant donnés quatre cycles, les semi-droites radicales de trois quelconques de ces cycles touchent leur cycle radical; en groupant de toutes les façons possibles trois à trois les quatre cycles donnés, on a donc quatre systèmes de deux semi-droites qui touchent le cycle radical.

Un cas particulièrement remarquable est le suivant :

Soient A_1, A_2, A_3 et A_4 quatre semi-droites données; A_i désignant l'une quelconque d'entre elles, appelons K_i le cycle qui touche les trois autres. Nous déterminerons ainsi quatre cycles K_1, K_2, K_3 et K_4; soit K leur cycle radical.

Il résulte de ce qui précède que K est tangent aux trois semi-droites radicales de K_1, K_2 et K_3; or ces cycles touchent tous les trois la semi-droite A_4 et il est aisé de voir que, quand trois cycles sont tangents à une même semi-droite Δ, leurs deux semi-droites radicales se confondent entre elles ou, pour parler plus exactement, se composent de deux semi-droites se coupant en leur centre radical et différant infiniment peu de la semi-droite menée en ce point parallèlement à la semi-droite Δ.

On conclut de là que le cycle K passe par le centre radical de K_1, K_2 et K_3 et est tangent à la semi-droite menée par ce point parallèlement à A_4.

D'où la proposition suivante :

Si l'on considère de toutes les façons possibles trois quelconques des cycles K_1, K_2, K_3 *et* K_4 *et leur centre radical, on obtient quatre points qui sont sur un même cycle* K *et les tangentes menées à ce cycle en ces points sont respectivement parallèles aux semi-droites* A_1, A_2, A_3 *et* A_4.

Ce cycle K *est le cycle radical de* K_1, K_2, K_3 *et* K_4.

5. Les quatre cycles K_i qui sont ainsi déterminés par les semi-droites A_1, A_2, A_3 et A_4 jouissent d'un grand nombre de propriétés remarquables. J'énoncerai ici la suivante :

Si, parallèlement à une semi-droite donnée Δ, *on mène des tangentes à* K_1, K_2, K_3 *et* K_4, *le rapport anharmonique de ces* *quatre semi-droites est constant quelle que soit la direction de* Δ.

Pour démontrer cette proposition, j'énoncerai d'abord le lemme suivant dont l'application est fréquente :

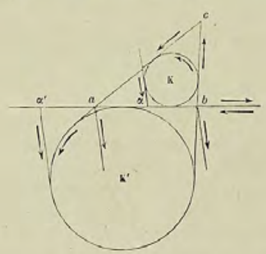
LEMME. — *Si l'on effectue une transformation par semi-droites réciproques, à quatre semi-droites parallèles entre elles correspondent également quatre semi-droites parallèles.*

Le rapport anharmonique de celles-ci est égal au rapport anharmonique des quatre premières.

La démonstration de ce lemme résulte immédiatement de ce que deux semi-droites correspondantes se coupent au même point de l'axe de transformation.

Cela posé, je remarque que l'on peut toujours effectuer une transformation par semi-droites réciproques, de telle façon que deux semi-droites données aient pour transformées deux semi-droites opposées; le théorème que nous voulons démontrer étant projectif, il suffira donc de le démontrer dans ce cas.

Soient donc (*fig.* 1) ca, bc, ab et ba quatre semi-droites



données ([1]), K le cycle tangent à bc, ca et ab, K' le cycle tangent

([1]) Lorsque je désigne une semi-droite par deux lettres, l'ordre dans lequel sont placées ces lettres indique le sens de la semi-droite; ainsi PQ désigne une semi-droite décrite par un point mobile allant du point P au point Q. Il en résulte que PQ et QP sont deux semi-droites opposées.

ba, ca et bc. Il est clair que le cycle tangent à ca, ab et ba se réduit au point a et que le cycle tangent à bc, ab et ba se réduit au point b.

Cela posé, menons aux deux cycles K et K' des tangentes parallèles à une semi-droite prise arbitrairement et soient respectivement α et α' les points où ces tangentes coupent la droite ab. Les points α et α' se correspondent de façon qu'à un point α correspond un seul point α' et réciproquement à un point α' correspond un seul point α. En effet, si l'on se donne par exemple le point α, on ne peut par ce point mener au cycle K qu'une seule tangente distincte de ab; d'autre part, on ne peut mener au cycle K' qu'une seule tangente qui soit parallèle à celle-ci; le point α' où elle coupe ab est donc déterminé.

Il résulte de là que les points α et α' déterminent sur la droite ab deux divisions homographiques dont les points doubles sont évidemment les points a et b, et par suite, en vertu d'une propriété bien connue, le rapport anharmonique des quatre points α, α', a et b est constant. Il en est évidemment de même du rapport anharmonique des tangentes passant par les points α et α' et des parallèles à ces tangentes menées par les points a et b. En d'autres termes, le rapport anharmonique des semi-droites, menées parallèlement à la semi-droite prise arbitrairement et tangentiellement aux cycles K, K', a et b, est constant; ce qui démontre la proposition énoncée.

6. Étant données deux semi-droites quelconques Δ et Δ', circonscrivons à K_1 un angle dont les côtés soient parallèles à Δ et Δ', et soit P_1 le sommet de cet angle.

Soient de même P_2, P_3 et P_4 les sommets des angles analogues circonscrits aux cycles K_2, K_3 et K_4. Le rapport anharmonique de quatre côtés de ces angles étant égal au rapport anharmonique des quatre autres, il suit de la proposition fondamentale de la théorie des coniques que *les quatre points* P_i *sont sur une conique ayant ses asymptotes parallèles à* Δ *et à* Δ'.

En particulier, supposons que Δ et Δ' soient deux droites isotropes de système différent; les points P_i sont les centres des cycles K_i. On peut donc énoncer la proposition suivante, que j'ai déjà démontrée directement dans une Note antérieure [1] :

Les centres des cycles K_i sont situés sur un même cercle.

7. J'énoncerai encore la proposition suivante :

Étant donnés deux cycles K et K′, si l'on considère quatre cycles quelconques H_1, H_2, H_3 et H_4 doublement tangents à K et à K′, et si, à ces quatre cycles, on circonscrit des angles ayant leurs côtés parallèles aux deux tangentes communes à K et à K′, les quatre sommets de ces angles sont sur une conique ayant leurs asymptotes parallèles à ces tangentes communes.

Pour démontrer cette proposition, il suffit de faire voir que le rapport anharmonique des semi-droites, menées tangentiellement aux cycles K_i parallèlement à l'une des tangentes est égal au rapport anharmonique des semi-droites menées à ces cycles parallèlement à l'autre tangente; et, comme cette propriété est projective, il suffit de la démontrer dans un cas particulier. Or on peut toujours effectuer une transformation par directions réciproques, de telle sorte que les cycles K et K′ soient opposés entre eux; les cycles H_i se réduisent alors à quatre points du cercle K_0 déterminé par K et K′; les deux tangentes communes à K et à K′ sont des droites isotropes et l'on sait, par la propriété fondamentale du cercle, que les droites isotropes d'un système qui passent par ces quatre points ont leur rapport anharmonique égal au rapport anharmonique des droites isotropes de l'autre système qui passent par les mêmes points.

La proposition est donc entièrement démontrée.

Une conique dont la direction des asymptotes est donnée étant déterminée par trois de ses points, la proposition précédente peut s'énoncer ainsi qu'il suit :

Si l'on considère tous les cycles H qui touchent deux cycles donnés K et K′ et si, à chacun des cycles H, on circonscrit un angle dont les côtés soient parallèles aux tangentes communes à K et à K′, le lieu du sommet de cet angle est une conique dont les asymptotes sont parallèles à ces deux tangentes.

[1] *Sur les anticaustiques par réflexion de la parabole* (*Nouvelles Annales*), même tome, p. 16.

Il est facile de voir que cette conique a effectivement ces deux tangentes pour asymptotes et qu'elle passe par les points d'intersection des cycles K et K′; d'où encore la proposition suivante :

Étant donnée une conique quelconque, attribuons un sens quelconque aux asymptotes de cette conique de façon à les transformer en deux semi-droites Δ et Δ′. Cela posé, considérons deux points quelconques M et N de la conique; par le point M, on peut mener deux cycles tangents à Δ et à Δ′; par N on peut mener deux parallèles à Δ et Δ′ : ces deux cycles et ces deux parallèles sont tangents à un même cycle P.

J'ajouterai que la corde qui joint les points de contact de P avec Δ et Δ′ est l'axe radical des cycles qui, passant par M, touchent ces deux semi-droites.

8. Il est aisé de voir que le théorème précédent peut encore s'énoncer ainsi qu'il suit :

Par deux points donnés γ et δ, on peut mener deux cercles K et K′ qui touchent un cercle donné C; par les points où la droite $\gamma\delta$ rencontre C, menons des tangentes à ce cercle, soit ε leur point de rencontre. Par les points γ, δ et ε, faisons passer une conique ayant ses asymptotes parallèles aux tangentes dont je viens de parler; les asymptotes de cette conique sont deux tangentes communes à K et à K′.

On peut généraliser ce théorème en faisant une transformation homographique de telle sorte que les ombilics du plan deviennent deux points quelconques α et β; on obtient alors la proposition suivante :

Étant donnés deux points quelconques α et β sur une conique C, par deux points γ et δ du plan et les points α et β on peut mener deux coniques K et K′ qui touchent C; par les points où la droite $\gamma\delta$ coupe C, menons des tangentes à cette conique et soit ε leur point de rencontre; soient de plus λ et μ les points où la corde $\alpha\beta$ rencontre ces tangentes. Cela posé, si l'on con-

struit la conique déterminée par les cinq points λ, μ, γ, δ *et* ε, *les tangentes menées à cette conique aux points* λ *et* μ *sont deux tangentes communes à* K *et à* K′ [1].

9. En particulier, supposons que les points γ et δ soient les ombilics du plan; la proposition précédente pourra s'énoncer ainsi qu'il suit :

Étant donnés sur une conique C *deux points* α *et* β, *on peut par ces points mener deux cercles qui touchent* C; *ces deux cercles ont pour tangentes communes les tangentes menées au cercle qui passe par le centre de la courbe et les points où la droite* $\alpha\beta$ *coupe les asymptotes, aux points situés sur la droite* $\alpha\beta$.

Il est d'ailleurs évident que ces tangentes communes aux deux cercles se coupent en un de leurs centres de similitude.

10. Proposons-nous maintenant le problème suivant (proposé cette année comme sujet de la composition d'admission à l'École Polytechnique) :

Étant donnés deux cercles K *et* K′ *se coupant aux points* α *et* β, *construire les diverses coniques qui, passant par* α *et* β, *touchent ces cercles.*

Construisons deux tangentes communes à K et à K′ passant par un de leurs centres de similitude, puis le cercle H qui touche ces tangentes en leurs points de rencontre avec la droite $\alpha\beta$. En désignant par λ et μ ces deux points, il est clair, d'après la proposition précédente, que si l'on prend un point O quelconque sur le cercle H et si l'on joint $O\lambda$ et $O\mu$, la conique qui, passant par les points α et β, a pour asymptotes $O\lambda$ et $O\mu$ touche les deux cercles K et K′.

Le lieu des centres des coniques cherchées est donc le cercle H, et l'on voit que l'angle formé par les asymptotes de toutes ces coniques est constant.

---

[1] La détermination des deux autres tangentes communes à K et à K′ donnerait lieu à des recherches intéressantes.

Un théorème analogue au précédent a lieu à l'égard des coniques qui touchent une conique donnée, deux tangentes à cette conique et deux droites données.

En considérant les deux tangentes communes qui passent par le second centre de similitude, on obtiendrait un autre système de solutions, le lieu des centres de ces coniques étant un second cercle ayant, comme il est facile de le voir, même centre que le premier.

SUR LES

COURBES DE DIRECTION DE LA TROISIÈME CLASSE.

Nouvelles Annales de Mathématiques, 1883.

I.

1. Étant donnée une semi-droite quelconque Δ, si l'on considère l'ensemble des semi-droites qui lui sont parallèles, on peut les regarder comme concourant en un même point situé à l'infini et que je désignerai par Δ_∞. Les semi-droites parallèles à la semi-droite opposée $-\Delta$ (1) peuvent être regardées comme concourant en un même point $-\Delta_\infty$ situé à l'infini.

Ces deux points doivent être considérés comme distincts, et, si l'on appelle D la droite définie par les semi-droites Δ et $-\Delta$, on voit que D renferme deux points situés à l'infini, à savoir Δ_∞ et $-\Delta_\infty$.

Nous considérerons les points à l'infini comme situés sur une conique infiniment aplatie et ayant pour sommets les ombilics du plan, et, pour plus de clarté, j'appellerai le point Δ_∞ un *semi-point*, en sorte que la *conique de l'infini* sera le lieu des semi-points du plan.

Un *point* de la *droite de l'infini* doit être considéré comme la réunion de deux semi-points opposés.

Si l'on imagine un cycle variable qui touche constamment deux semi-droites opposées Δ et $-\Delta$, ce cycle, lorsque son centre est rejeté à l'infini, se réduit aux deux semi-points Δ_∞ et $-\Delta_\infty$.

Un semi-point peut être considéré comme une courbe de direc-

(1) En général, D désignant une semi-droite quelconque, j'appellerai $-$D la semi-droite opposée.

tion de la classe *un*; il n'y a du reste pas d'autre courbe de direction qui soit de cette classe.

Les courbes de direction de la deuxième classe ne comprennent que les cycles; je me propose, dans cette Note, d'étudier les courbes de direction de la troisième classe.

2. Soit μ le nombre des tangentes que l'on peut mener à une courbe de direction de la troisième classe et parallèlement à une semi-droite donnée; comme on peut lui mener également μ tangentes parallèles à la semi-droite opposée, il résulte de là que, par un point de la droite de l'infini, on peut mener à la courbe 2μ tangentes distinctes de cette droite. En désignant par ρ le nombre des points de contact de la droite de l'infini et de la courbe, on a donc

$$2\mu + \rho = 3,$$

et, comme ρ ne peut être égal à 3, il en résulte que $\rho = 1$ et $\mu = 1$.

Ainsi la courbe considérée touche la droite de l'infini; une semi-droite isotrope coïncidant avec son opposée, on voit en outre que les deux tangentes (distinctes de la droite de l'infini) que l'on peut, d'un ombilic du plan, mener à la courbe, sont confondues; la courbe passe donc par les deux ombilics.

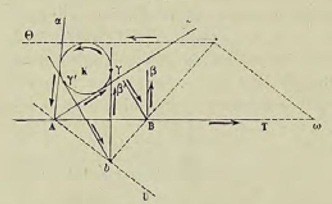
3. Il est clair qu'on ne peut mener à une courbe de direction de la troisième classe qu'une seule tangente T parallèle à une semi-droite donnée. Traçons dans le plan un cycle arbitraire K et menons à ce cycle une tangente Θ parallèle à T; je dirai que cette tangente est l'image de T. Si l'on imagine un nombre quelconque de tangentes à la courbe considérée et si l'on mène tangentiellement à K des tangentes parallèles, ces dernières (ou si l'on veut encore leurs points de contact) formeront l'image des tangentes à la courbe. On voit qu'une tangente à la courbe est déterminée quand on se donne son image sur le cycle K.

4. Considérons une courbe de direction de la troisième classe H et une tangente quelconque T à cette courbe. Par chaque point de cette semi-droite, on peut mener à la courbe deux tangentes distinctes de T; soient αA et Aα' les tangentes issues d'un point quelconque A de T. Inscrivons dans ces deux semi-droites un cycle

quelconque K sur lequel nous ferons l'image des tangentes à H.

Soit B un autre point quelconque de T; désignons par $B\beta$ et $\beta'B$ les tangentes issues de ce point et soient γb et $\gamma' b$ leurs images sur le cycle fixe K. Il est clair que si l'on se donne la semi-droite $b\gamma$, la tangente $B\beta$ est déterminée et, par suite, le point B ainsi que la deuxième tangente $B\beta'$ et son image $b\gamma'$. Des deux

Fig. 1.



tangentes au cycle K, $b\gamma$ et $b\gamma'$, l'une étant déterminée quand on se donne l'autre, il en résulte qu'elles forment un système en involution et que leur point de rencontre b décrit une droite du plan. Cette droite U passe du reste par le point A, puisque les tangentes $A\alpha$ et $A\alpha'$ se confondent avec leurs images.

A chaque point B de la droite T correspond un point b de la droite U; les points B et b déterminent donc sur ces droites des divisions homographiques et, comme le point A se correspond évidemment à lui-même, on en conclut que la droite Bb passe par un point fixe du plan.

Pour déterminer la position de ce point fixe, je remarquerai que, si le point B s'éloigne à l'infini sur la tangente T, l'une des tangentes que l'on peut de ce point mener à la courbe est la tangente opposée à T. Si donc nous menons au cycle K la tangente Θ antiparallèle à T, le point b est situé sur cette semi-droite et la droite bB se confond avec Θ qui, par suite, contient le point fixe cherché.

Soit P ce point fixe; par ce point menons une droite parallèle à U et coupant T au point ω. Le point ω' où $P\omega$ rencontre U étant situé à l'infini, les tangentes menées de ω' au cycle K sont oppo-

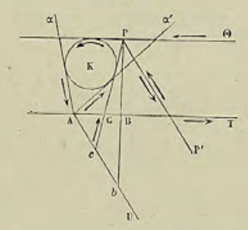
sées et ont pour directions celles déterminées par la droite $P\omega$; il résulte donc de ce qui précède que les tangentes issues de ω sont les deux semi-droites opposées déterminées par la droite $P\omega$, qui est ainsi *une tangente double apparente de la courbe*.

Ainsi la courbe de direction de la troisième classe la plus générale passe par les ombilics du plan, touche la droite de l'infini et a une tangente double apparente; c'est donc un hypercycle cubique, ou, en d'autres termes, une anticaustique par réflexion de la parabole, les rayons incidents étant parallèles.

5. La proposition que je viens de démontrer peut encore s'énoncer de la façon suivante :

Considérons une tangente quelconque T à un hypercycle cubique H; d'un point A, pris arbitrairement sur cette semi-droite,

Fig. 2.



menons les deux tangentes à la courbe $A\alpha$ et $A\alpha'$ qui sont distinctes de T, puis inscrivons dans ces semi-droites un cycle quelconque K.

Menons à ce cycle la tangente Θ antiparallèle à T et soit P le point où cette tangente rencontre la tangente double PP' de la courbe; soit de plus AU la droite menée par A parallèlement à P.

Cela posé, *si, par le point fixe* P, *on mène une sécante arbitraire coupant respectivement* T *et* U *aux points* B *et* b, *les tangentes que l'on peut mener à l'hypercycle par le point* B *sont parallèles aux tangentes menées du point* b *au cycle* K.

6. Par le point P menons au cycle K la tangente PCc qui est distincte de Θ; il est clair, d'après la proposition précédente, que

cette semi-droite est également tangente à l'hypercycle, et qu'en faisant varier le cycle K, qui est assujetti à la seule condition de toucher les tangentes $A\alpha$ et $A\alpha'$, on obtiendra ainsi toutes les tangentes à la courbe.

Remarquons maintenant que le cycle qui touche à la fois les tangentes $A\alpha$, $A\alpha'$, PC est précisément le cycle K, que celui qui touche PC et les deux tangentes opposées PP′ et P′P se réduit au point P; enfin que, des deux tangentes communes à ces cycles, l'une est C et l'autre la semi-droite Θ dont la direction reste constante, quelle que soit la tangente PC considérée; nous pourrons alors énoncer la proposition fondamentale suivante :

Théorème I. — *Soient* A, A′ *et* B, B′ *deux couples de tangentes à un hypercycle cubique* H *et* T *une tangente quelconque à cette courbe; construisons les deux cycles qui touchent respectivement* A, A′ *et* T, B, B′ *et* T; *ces deux cycles ont* T *pour tangente commune, la seconde tangente commune* Θ *est parallèle à une semi-droite fixe.*

Il suffit, pour démontrer ce théorème, de remarquer qu'une transformation par semi-droites réciproques transforme un hypercycle cubique en une courbe de même espèce et que l'on peut toujours effectuer la transformation de telle sorte que les tangentes B et B′ se transforment en une tangente double apparente de la courbe transformée; auquel cas le théorème résulte immédiatement des remarques qui précèdent.

6. Le théorème précédent donne une propriété remarquable de *six tangentes quelconques* à un hypercycle. En voici d'autres conséquences :

Étant donnés deux couples de semi-droites fixes A, A′ et B, B′ et une direction fixe Θ_0, menons une semi-droite quelconque Θ parallèle à Θ_0, puis construisons les cycles qui touchent respectivement A, A′ et Θ, B, B′ et Θ. Ces cycles, qui touchent Θ, ont en outre une deuxième tangente commune T; cette tangente, lorsque Θ se déplace parallèlement à elle-même, enveloppe un hypercycle cubique tangent à A, A′, B et B′.

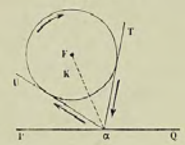
Si l'on fait varier la direction Θ_0, on déterminera ainsi tous les

hypercycles cubiques qui touchent les quatre semi-droites A, A′, B et B′.

7. Comme application, supposons que les tangentes A et A′ soient les tangentes isotropes issues du foyer F de la courbe et que les tangentes B et B′ soient les semi-droites opposées définies par la tangente double apparente PQ.

En désignant par T une tangente quelconque à l'hypercycle, on voit que le cycle, qui touche T et les droites isotropes issues de F,

Fig. 3.



est le cycle K qui a précisément F pour centre; le cycle qui touche T, B et B′ se réduit au point de rencontre α de T et de PQ. La seconde tangente commune à ces deux cycles est la semi-droite U qui est l'antisymétrique de T par rapport à la droite αF.

On peut donc énoncer la proposition suivante, qu'il serait très facile du reste de démontrer directement :

Un hypercycle ayant pour foyer le point F *et pour tangente double la droite* PQ, *si* α *désigne le point où une semi-droite quelconque* T *tangente à la courbe coupe la droite* PQ, *l'antisymétrique de* T *relativement à la droite* Fα *a une direction constante.*

II.

8. Étant données quatre semi-droites quelconques A_1, A_2, A_3 et A_4, construisons les bissectrices (A_1, A_2), (A_1, A_3), (A_1, A_4) [1]; les foyers des paraboles qui touchent ces trois droites sont les foyers

[1] Je rappelle que je désigne par la notation (C, D) la bissectrice de deux semi-droites données C et D, c'est-à-dire la *droite parfaitement déterminée* qui est le lieu des centres des cycles qui touchent ces semi-droites.

des hypercycles cubiques qui touchent les semi-droites données; on sait d'ailleurs, par un théorème connu, que le lieu des foyers de ces paraboles est le cercle circonscrit au triangle déterminé par les trois bissectrices.

Ainsi le lieu des foyers des hypercycles cubiques qui touchent quatre semi-droites données est un cercle K, et, comme il est facile de le voir, ce cercle est celui qui contient les centres des quatre cycles inscrits dans les triangles que l'on peut former avec les semi-droites données en les prenant trois à trois.

Soient K_1, K_2 et K_3 trois de ces cycles et α_1, α_2, α_3 leurs centres; F désignant le foyer de l'un quelconque H des hypercycles qui touchent les semi-droites données A_1, A_2, A_3 et A_4, il résulte de ce qui précède que F, α_1, α_2 et α_3 sont situés sur le cercle K.

En d'autres termes, si l'on appelle I et J les deux ombilics du plan, le rapport anharmonique des semi-droites FI, α_1I, α_2I et α_3I est égal au rapport anharmonique des semi-droites FJ, α_1J, α_2J et α_3J; ce que l'on peut encore énoncer de la façon suivante :

Si l'on mène à l'hypercycle H et aux cycles K_1, K_2 et K_3 des tangentes parallèles à une droite isotrope d'un système, puis des tangentes parallèles à une droite isotrope de système différent, les deux systèmes de semi-droites ainsi obtenues ont même rapport anharmonique.

Remarquons maintenant qu'une transformation par semi-droites réciproques transforme un hypercycle cubique en une courbe de même espèce, que le rapport anharmonique de quatre semi-droites parallèles se conserve après la transformation et que la transformation peut toujours être choisie de façon que deux semi-droites prises arbitrairement aient pour transformées des droites isotropes : nous en conclurons immédiatement que la proposition précédente subsiste pour des directions quelconques prises dans le plan.

D'où le théorème suivant :

Théorème II. — *Soient* A_1, A_2, A_3 *et* A_4 *quatre semi-droites et* K_1, K_2, K_3 *les cycles inscrits dans les triangles que l'on peut former en adjoignant successivement à* A_4 *deux quelconques des semi-droites* A_1, A_2 *et* A_3; *soit de plus* H *un hypercycle cubique quelconque qui touche les semi-droites données. Cela posé, si l'on mène à la courbe et aux trois cycles des tangentes parallèles à une direction quelconque, le rapport anharmonique de ces quatre semi-droites est constant.*

On peut encore l'énoncer ainsi qu'il suit :

Théorème III. — *Étant donnés trois cycles qui touchent une même semi-droite* Δ, *si une semi-droite* T *se déplace de telle sorte que le rapport anharmonique de cette semi-droite et des tangentes, menées aux trois cycles dans une direction parallèle, ait une valeur constante* k, T *enveloppe un hypercycle cubique tangent à* Δ *et aux trois semi-droites qui touchent à la fois deux des cycles donnés* ([1]).

Remarque. — En faisant varier le nombre k, on déterminera ainsi tous les hypercycles qui touchent les quatre semi-droites dont je viens de parler.

9. Considérons le faisceau des hypercycles cubiques qui touchent quatre semi-droites données A_1, A_2, A_3 et A_4. Soient Δ et Δ′ deux semi-droites prises arbitrairement; à chacune des courbes du faisceau on peut circonscrire un angle, et un seul, dont les côtés soient parallèles à Δ et à Δ′; il résulte de ce qui précède que *le lieu du sommet de cet angle est une conique dont les asymptotes sont parallèles à* Δ *et à* Δ′.

En particulier, quand les semi-droites Δ et Δ′ viennent à se confondre, on obtient la proposition suivante :

Si, à chacune des courbes du faisceau, on mène une tangente parallèle à une semi-droite donnée Δ, *le lieu du point de contact est une parabole dont l'axe est parallèle à* Δ.

III.

10. L'étude des courbes de direction de la troisième classe se rattache à un autre genre de considérations d'une grande importance dans la théorie générale des courbes de direction.

([1]) Si les trois cycles donnés n'étaient pas tangents à une même semi-droite, l'enveloppe de T serait un hypercycle de la quatrième classe.

Étant donnée dans un plan fixe une droite quelconque D, on peut, par cette droite, mener deux plans isotropes qui sont distincts si la droite n'est pas elle-même une droite isotrope; nous rattacherons respectivement ces deux plans aux deux semi-droites Δ et $-\Delta$ déterminées par la droite D.

Ainsi, par toute semi-droite du plan, passera *un plan isotrope parfaitement déterminé*. Cela posé, étant donnée une courbe quelconque de direction K, si l'on imagine les divers plans isotropes qui contiennent les tangentes à cette courbe, ces plans envelopperont une surface Σ; en d'autres termes, si l'on considère la *développable isotrope* [1] *complète* qui est circonscrite à K, cette développable se décompose en deux surfaces distinctes, qui correspondent à K et à la courbe qui lui est opposée.

11. Il résulte de là que la classification des courbes planes de direction se ramène à la classification des surfaces développables isotropes.

Étant donnée une surface développable isotrope Σ de classe r, tout plan sécant P la coupe suivant une courbe de direction K qui est de la même classe. Je ferai remarquer en outre qu'en désignant par Θ l'arête de rebroussement de Σ la projection orthogonale de Θ sur le plan P est la développée de la courbe K suivant laquelle le plan coupe la développable.

Les cônes isotropes qui ont pour sommets les divers points de Θ coupent le plan P suivant les cycles osculateurs de la courbe K.

12. On voit, en particulier, que l'étude des courbes de direction de la troisième classe se ramène à celle des développables isotropes de troisième classe et ces courbes sont toutes de la même espèce, puisqu'il n'y a qu'une seule espèce de développables de la troisième classe.

[1] J'appelle *développable isotrope* une surface développable dont toutes les génératrices sont des droites isotropes et dont, par suite, les plans osculateurs sont des plans isotropes. *Voir*, à ce sujet, mon *Mémoire sur l'emploi des imaginaires en Géométrie* (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. XI, 1872).

Des considérations analogues à celles que je développe ici ont été employées par M. Stephanos dans diverses Communications orales faites à la *Société mathématique de France*.

Soient Θ une cubique gauche isotrope et Σ la développable isotrope dont elle est l'arête de rebroussement; on voit que toute section plane de Σ est un hypercycle cubique (en d'autres termes, une anticaustique par réflexion de la parabole, les rayons incidents étant parallèles); la projection orthogonale de Θ sur un plan quelconque est par suite une caustique de parabole.

13. Comme application, considérons un hypercycle cubique K; soient Σ la développable qui est l'enveloppe des plans isotropes, qui contiennent les diverses tangentes à l'hypercycle, et Θ la cubique gauche qui forme son arête de rebroussemant.

Considérons trois tangentes quelconques A, B et C à l'hypercycle; désignons respectivement par a, b et c les points où elles touchent la courbe et par α, β et γ les points où les plans isotropes menés par A, B et C touchent la cubique Θ. Ces plans osculateurs de Σ se coupent en un point δ qui, d'après un théorème connu, est situé dans le plan déterminé par les trois points α, β et γ; soit T la droite suivant laquelle ce plan coupe le plan P de l'hypercycle K.

Les cônes isotropes ayant respectivement pour sommets α, β et γ coupent le plan P suivant les trois cycles R_a, R_b et R_c qui osculent K aux points a, b et c, et l'axe de similitude de ces trois cycles est évidemment la droite T. Le cône isotrope ayant pour sommet le point δ a pour trace sur le plan P le cycle inscrit dans le triangle ABC et, comme le point δ est dans le plan $\alpha\beta\gamma$, il en résulte que le centre de similitude de ce cycle et de l'un quelconque des cycles R_a, R_b et R_c est situé sur T.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Étant donnés trois points quelconques a, b, c d'un hypercycle cubique, si l'on imagine les cycles R_a, R_b et R_c qui osculent la courbe en ces points et le cycle R qui touche les tangentes menées en ces mêmes points, les six centres de similitude de ces quatre cycles considérés deux à deux sont sur une même droite.

14. On doit remarquer en particulier le cas où le plan, qui contient les points α, β et γ, est un plan isotrope; la proposition précédente peut alors s'énoncer ainsi qu'il suit :

Étant donnés un hypercycle cubique K et une semi-droite *arbitraire Δ située dans son plan; il y a trois cycles osculateurs de K qui touchent Δ. Les tangentes menées aux points d'osculation et la semi-droite Δ sont tangentes à un même cycle.*

15. J'énoncerai encore le corollaire suivant :

Si, par un point quelconque P, pris dans le plan d'un hypercycle cubique K, on mène des tangentes à la courbe et si l'on considère les trois cycles qui l'osculent aux points de contact, l'axe de similitude de ces trois cycles passe par le point P.

SUR L'APPLICATION DES INTÉGRALES
ELLIPTIQUES ET ULTRA ELLIPTIQUES
A LA THÉORIE DES COURBES UNICURSALES.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences; 1883.

1. En désignant par t un paramètre variable, considérons une courbe unicursale dont la tangente soit déterminée par l'équation

$$xf(t)+y\varphi(t)+\theta(t)=0,$$

où $f(t)$, $\varphi(t)$ et $\theta(t)$ désignent des polynomes entiers. L'expression de la distance d'un point quelconque du plan à cette tangente renferme le radical $\sqrt{f^2(t)+\varphi^2(t)}$, que j'écrirai sous la forme $P(t)\sqrt{F(t)}$, en mettant en évidence la partie rationnelle. Si $F(t)$ est une constante, la distance d'un point du plan à la tangente est déterminée en grandeur et en signe; alors la courbe est de l'espèce de celles que j'ai étudiées sous le nom de *courbes de direction*. Dans le cas contraire, la courbe doit être considérée comme double, en sorte qu'en chaque point on peut mener deux tangentes qui sont des semi-droites opposées.

Une tangente étant donnée (en position et en direction), il lui correspond non seulement une valeur du paramètre t, mais encore une valeur déterminée du radical $\sqrt{F(t)}$. Si la courbe est une ellipse ou une hyperbole, $F(t)$ est du quatrième degré; en considérant ces coniques comme enveloppes de semi-droites, on doit donc dire qu'elles sont du genre *un*, et il y existe, à ce point de vue, une infinité d'autres courbes unicursales du genre *un*, à savoir celles pour lesquelles on a

$$f^2(t) + \varphi^2(t) = P^2(t)\,F(t),$$

$F(t)$ étant un polynome du troisième ou du quatrième ordre.

Soient K une conique donnée, A et B deux tangentes fixes à cette courbe. Menons une tangente quelconque T et construisons le cycle bien déterminé qui touche A, B et T; ce cycle et la conique ont en commun une quatrième tangente Θ et il est clair, d'après cette construction, que Θ est parfaitement déterminée quand on se donne T et réciproquement; ces deux tangentes forment une involution sur la courbe.

T étant déterminée par le paramètre t et une valeur de $\sqrt{F(t)}$, soient Θ et $\sqrt{F(\theta)}$ les valeurs du paramètre et du radical correspondant à la tangente Θ; il résulte immédiatement de ce qui précède que l'on doit avoir des relations de la forme

$$\theta = \Phi\left[t, \sqrt{F(t)}\right], \qquad \sqrt{F(\theta)} = \Psi\left[t, \sqrt{F(t)}\right],$$

où Φ et Ψ désignent des fonctions rationnelles, et, en même temps,

$$t = \Phi\left[\theta, \sqrt{F(\theta)}\right], \qquad \sqrt{F(t)} = \Psi\left[\theta, \sqrt{F(\theta)}\right].$$

Ces relations font prévoir le rôle que jouent dans cette question les fonctions elliptiques. En général, si l'on a une courbe quelconque de direction dont l'équation renferme des paramètres variables et si l'on considère les tangentes communes à cette courbe et à la conique H, on déduit du théorème d'Abel la relation

$$\frac{dt}{\sqrt{F(t)}} + \frac{dt'}{\sqrt{F(t')}} + \frac{dt''}{\sqrt{F(t'')}} + \ldots = 0,$$

où les quantités $t, \sqrt{F(t)}, t', \sqrt{F(t')}, \ldots$ sont déterminées par les diverses tangentes communes. Considérant en particulier les cycles qui touchent les tangentes fixes A et B, on a, par suite,

$$\frac{dt}{\sqrt{F(t)}} + \frac{d\theta}{\sqrt{F(\theta)}} = 0.$$

Les tangentes correspondantes T et Θ se coupent en un point M dont il est aisé d'avoir le lieu; si l'on désigne par α et β les points

où T est rencontrée par les tangentes correspondant à T et à la semi-droite opposée $-$T, on voit que T ne rencontre le lieu qu'aux points α et β; d'où il suit que le lieu est une conique. D'ailleurs, si T est isotrope, comme elle se confond avec son opposée, les points α et β sont confondus : donc cette droite touche le lieu qui est ainsi une conique ayant les mêmes foyers que H. Cette conique passe d'ailleurs par le point de rencontre des tangentes fixes A et B et elle est entièrement déterminée par la condition que la bissectrice [1] de A et de B lui est tangente.

On retrouve ainsi une proposition donnée déjà par Chasles, mais avec moins de précision; les signes des radicaux qui entrent dans la relation (1) sont, comme on le voit, parfaitement déterminés par les directions des tangentes considérées.

2. Il résulte de ce qui précède que, si l'on détermine chaque tangente à la conique H par l'argument d'une fonction elliptique, la condition nécessaire et suffisante pour que quatre tangentes touchent un même cycle est que la somme des arguments soit congrue à zéro, suivant les deux périodes de la fonction. Comme un hypercycle cubique est déterminé par cinq tangentes, on peut énoncer également cette proposition : *Pour que six tangentes à* H *touchent un même hypercycle cubique, il faut et il suffit que la somme de leurs arguments soit nulle.*

En particulier, le problème de construire un cycle osculateur d'une conique [2] qui touche une tangente donnée se ramène à la résolution de l'équation $\sin \operatorname{am} 3x = \sin \operatorname{am} \alpha$.

---

[1] Je rappelle que je nomme *bissectrice* de deux semi-droites la droite parfaitement déterminée qui est le lieu des centres des cycles qui touchent ces semi-droites.

[2] Dans le cas de la parabole, le polynome $F(t)$ est du second degré : cette courbe est donc du genre zéro et l'on ne peut plus mener que trois cycles osculateurs qui touchent une tangente donnée. Cette tangente et les tangentes menées aux points d'osculation touchent un même cycle, proposition analogue à la suivante, due à Steiner : *Il y a trois cercles osculateurs à une conique, qui passent par un point de cette courbe; ce point et les trois points d'osculation sont sur un même cercle.*

Étant donnée une parabole, on peut du reste, à chaque tangente menée à cette courbe, faire correspondre un point d'une hyperbole, de telle sorte que, quand quatre tangentes à la parabole touchent un même cycle, les quatre points correspondants de l'hyperbole sont sur un même cercle.

3. Des considérations entièrement analogues s'appliquent aux intégrales ultra-elliptiques. On peut aussi étudier des courbes non unicursales et déterminer leur genre quand on les considère comme enveloppes de semi-droites; dans l'espace, les courbes gauches donnent lieu à une étude et à des propositions semblables et, bien que cette extension se présente d'elle-même très aisément, je reviendrai sur ce sujet, si l'Académie veut bien me le permettre.

SUR LES

ANTICAUSTIQUES PAR RÉFRACTION DE LA PARABOLE

LES RAYONS INCIDENTS ÉTANT PERPENDICULAIRES A L'AXE.

Nouvelles Annales de Mathématiques; 1885.

I.

1. L'hypercycle est la transformée, par semi-droites réciproques, de la parabole; c'est une courbe de direction de la quatrième classe et dont l'équation la plus générale, en coordonnées tangentielles et les axes étant rectangulaires, est de la forme

$$(\alpha u + \beta v + \gamma)^2(u^2 + v^2) = (\mathrm{A}u^2 + 2\mathrm{B}uv + \mathrm{C}v^2 + 2\mathrm{D}u + 2\mathrm{E}v)^2.$$

Ses propriétés les plus importantes sont les suivantes :

1° Les tangentes à la courbe peuvent être associées deux par deux, de telle sorte que deux tangentes conjuguées quelconques et deux semi-droites fixes (les semi-droites fondamentales de la courbe) forment un système harmonique ([1]).

2° L'enveloppe des conjuguées d'une semi-droite D, par rapport à tous les couples de tangentes conjuguées, est un cycle K que j'appellerai le *cycle polaire* de D.

Il est clair qu'un hypercycle est entièrement déterminé quand on se donne les semi-droites fondamentales, une droite quelconque du plan et son cycle polaire.

([1]) Deux couples de semi-droites forment un système harmonique, quand elles touchent un même cycle et que leurs points de contact partagent harmoniquement la circonférence.

Sur les propriétés mentionnées dans le texte, *voir* mon Mémoire sur les hypercycles (*Comptes rendus*, mars et avril 1882); dans toute la suite de cette Note, les renvois à ce Mémoire seront simplement indiqués par la lettre H.

3° Le cycle polaire d'une tangente touche cette tangente en son point de contact avec la courbe.

4° En désignant par A, A′ et B, B′ deux couples quelconques de tangentes conjuguées, si l'on considère une tangente mobile quelconque T et si l'on construit les cycles inscrits dans les triangles AA′T et BB′T, la longueur comprise sur T entre les points de contact est constante en grandeur et en ligne ([1]).

2. Je rappellerai encore cette proposition importante :

A, B, C et D désignant les quatre tangentes communes à un cycle et à un hypercycle, si l'on considère les tangentes conjuguées C′ et D′ de deux quelconques d'entre elles C et D, les semi-droites A, B, C′ et D′ touchent un même cycle.

En voici quelques conséquences : étant prises arbitrairement cinq semi-droites P, Q, A, B, C du plan, il existe un hypercycle généralement bien déterminé pour lequel P et Q sont les semi-droites fondamentales et qui touche A, B, C.

Soient D la quatrième tangente que cette courbe a en commun avec le cycle inscrit dans le triangle ABC, et A′, B′, C′, D′ les conjuguées harmoniques de A, B, C, D relativement à P et à Q; il résulte de la proposition précédente que les semi-droites A, B, C′, D′ touchent un même cycle et il en est de même des semi-droites A, B′, C, D′ et des semi-droites A′, B, C, D′.

Les cycles inscrits dans les triangles ABC′, AB′C et A′BC touchent donc tous les trois la semi-droite D′; ce qui permet de déterminer la quatrième tangente commune D.

3. On peut encore énoncer la proposition suivante :

Si l'on désigne par (A, A′), (B, B′), (C, C′) *trois couples de semi-droites formant une involution, les cycles inscrits dans les triangles* ABC′, AB′C *et* A′BC *touchent une même semi-droite.*

Supposons, en particulier, que les semi-droites doubles de l'involution soient les droites isotropes passant par un point O du plan, deux semi-droites conjuguées sont alors symétriques par rapport au point O; d'où cette conclusion

Si (A, A′), (B, B′) *et* (C, C′) *sont trois couples de semi-droites symétriques par rapport à un point* O *du plan, les cycles inscrits dans les triangles* ABC′, AB′C *et* A′BC *touchent une même semi-droite.*

Le même théorème aurait encore lieu si la symétrie des couples avait lieu par rapport à une droite quelconque du plan.

[1] II, n° 14.

II.

4. Une parabole peut être considérée comme un hypercycle et comme une courbe double; en chacun de ses points on peut mener deux tangentes qui sont des semi-droites opposées. Ses semi-droites fondamentales sont les semi-droites opposées déterminées par l'axe de la courbe; il en résulte que deux tangentes conjuguées sont *symétriques* par rapport à l'axe.

Toutes les propriétés des hypercycles appartiennent donc à la parabole et constituent des propriétés nouvelles de cette courbe.

5. Transformons une parabole par semi-droites réciproques en prenant pour axe de transformation l'axe de la courbe elle-même; il est clair que les semi-droites fondamentales de la transformée seront encore les semi-droites opposées déterminées par l'axe et que les tangentes conjuguées seront symétriques par rapport à cet axe.

Réciproquement tout hypercycle jouissant de la propriété, que deux tangentes conjuguées sont symétriques par rapport à une droite D, est la transformée d'une parabole P ayant cette droite pour axe; l'axe de transformation est également D.

Un point quelconque M de la parabole a pour transformé un cycle K dont le centre décrit une parabole P′ ayant pour axe D, tandis que son rayon varie proportionnellement à sa distance à l'axe; la transformée est donc une des anticaustiques par réfraction de la parabole P′, lorsque les rayons incidents sont perpendiculaires à l'axe.

Je la désignerai sous le nom d'*anticaustique principale*.

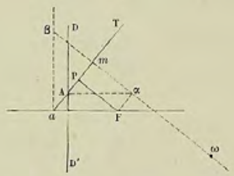
6. Ainsi les anticaustiques principales sont les hypercycles pour lesquels les semi-droites fondamentales sont opposées.

Considérons une telle courbe et soit F le point où une tangente isotrope coupe son axe, la tangente symétrique étant la seconde droite isotrope qui passe par ce point, on voit que F est le foyer de la courbe et que les droites isotropes, qui se croisent en ce point, forment un couple de tangentes conjuguées.

Menons une tangente parallèle à une direction perpendiculaire à l'axe, sa symétrique lui est opposée; nous avons donc une tangente double apparente perpendiculaire à l'axe, et les deux semi-droites opposées qu'elle détermine constituent également un couple de tangentes conjuguées.

Soient (*fig.* 1) une anticaustique principale ayant F pour foyer et DD′ comme tangente double, AT une tangente quelconque à

Fig. 1.



cette courbe. Les deux droites opposées DD′ et D′D formant un système de tangentes conjuguées, on voit que le cycle qui touche ces tangentes et la tangente AT se réduit au point A où cette tangente coupe DD′; son point de contact avec ce cycle est également le point A. D'autre part, le cycle qui touche les droites isotropes issues du point F et la tangente AT est le cycle qui a pour centre F; son point de contact avec AT est donc le pied P de la perpendiculaire abaissée du point F.

D'une proposition fondamentale énoncée plus haut, il résulte d'ailleurs, puisque les droites isotropes issues du point F constituent un système de tangentes conjuguées, que *la distance* AP *est constante en grandeur et en signe;* ainsi :

Toute anticaustique principale peut être considérée comme l'enveloppe d'un des petits côtés d'un triangle rectangle de forme invariable dont l'extrémité, située sur l'hypoténuse, décrit une droite, tandis que l'autre petit côté passe par un point fixe.

Les autres anticaustiques étant des courbes parallèles à l'anticaustique principale, on peut énoncer encore la proposition suivante :

Soit ABCD *un quadrilatère de forme invariable, dans lequel les deux angles* B *et* C *sont droits; si l'on déplace ce quadrilatère de façon que le côté* BC *passe par un point fixe* F *et que le sommet* A *décrive une droite* Δ, *le côté* CD *enveloppe une anticaustique d'une parabole ayant pour foyer le point* F, *les rayons incidents étant perpendiculaires à l'axe.*

7. La proposition que je viens de démontrer peut s'énoncer ainsi :

Si, du foyer d'une anticaustique principale, on abaisse une perpendiculaire à une tangente à cette courbe, la distance Δ, comprise entre le pied de cette perpendiculaire et le point où la tangente rencontre la tangente double, est constante.

Plusieurs cas particuliers sont à remarquer : dans le cas où $\Delta = 0$, la courbe se réduit à une parabole; quand la tangente double passe par le foyer, la courbe a alors le foyer pour centre.

Enfin, quand Δ est égal à la distance du foyer à la tangente double (c'est le cas de la *réflexion*), la classe de la courbe s'abaisse et elle devient un *hypercycle cubique*, ou plus exactement elle se décompose en un hypercycle cubique et un semi-point situé à l'infini sur la perpendiculaire abaissée du foyer sur la tangente double.

De là une propriété nouvelle de l'hypercycle cubique, que l'on peut énoncer ainsi :

Si des rayons, menés parallèlement à une direction quelconque, se réfléchissent sur une parabole, parmi toutes les anticaustiques correspondantes, il y en a une qui a un axe de symétrie; si, du foyer de la parabole, on mène une perpendiculaire à une tangente quelconque à cette courbe, la distance, comprise entre le pied de cette perpendiculaire et le point où *la tangente rencontre la tangente double, est constante et égale à la distance du foyer à cette tangente double.*

8. Soit une anticaustique principale ayant pour foyer le point F et pour tangente double la droite DD′.

Considérons (*fig.* 1) une tangente AT à cette courbe et construisons le cycle polaire de cette semi-droite; nous savons qu'il lui est tangent. Il touche également la conjuguée harmonique de AT relativement aux deux tangentes opposées DD′ et D′D, qui constituent un couple de tangentes conjuguées; le centre de ce cycle est donc sur la droite menée par le point A perpendiculairement à DD′. Ce cycle touche la conjuguée harmonique de AT relativement aux deux droites isotropes issues du point F (ces droites forment en effet un couple de tangentes conjuguées); et, comme cette conjuguée est la symétrique de AT relativement au point F, le centre cherché est sur la droite menée par le point F parallèlement à AT.

Ce centre est donc le point α et, le cycle polaire d'une tangente touchant cette semi-droite en son point de contact avec la courbe, on voit que le point de contact de AT est le pied m de la perpendiculaire abaissée du point α.

On serait arrivé à ce résultat en considérant l'anticaustique comme l'enveloppe du côté d'un triangle rectangle de forme invariable dont un sommet A décrit la droite DD′ pendant que le côté PF passe par le point fixe F; il est clair, en effet, que le centre instantané de rotation de la figure est le point α que j'ai déterminé précédemment.

Pour construire le centre de courbure correspondant au point m, je remarque que, la tangente conjuguée de AT étant la symétrique relativement à l'axe de la courbe, le cycle, qui touche l'anticaustique au point m et la conjuguée de AT, a son centre au point de rencontre de la normale $m\alpha$ avec la droite, menée parallèlement à DD′, par le point a où la tangente AT rencontre l'axe.

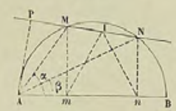
En désignant par β ce point de rencontre, il résulte d'un théorème, que j'ai donné dans mon Mémoire sur les hypercycles, que le centre de courbure cherché est le point ω symétrique de β par rapport à α.

III.

9. Une anticaustique principale étant donnée, il importe de construire la parabole sur laquelle se sont réfractés les rayons.

Pour la solution de cette question, je démontrerai d'abord quelques lemmes préliminaires. Un cercle étant décrit sur un segment AB comme diamètre (*fig.* 2), soient m et n les projections

Fig. 2.



sur ce diamètre de deux points M et N de la courbe, et P la projection sur la droite MN de l'extrémité A du diamètre. Cela posé,

Lemme I. — On a l'égalité

$$\frac{\overline{PN}^2}{\overline{Pn}^2} = \frac{Bm}{Bn}.$$

Lemme II. — En désignant par I le milieu de la corde MN, on a

$$Im = In = IP;$$

en d'autres termes,

$$\overline{AP}^2 = Am.An.$$

10. Pour les démontrer, je remarque que l'angle APM étant droit, l'angle $\widehat{PAN}$ est égal à l'angle $\widehat{MAB}$; faisons, pour un instant,

$$\widehat{MAB} = \alpha, \qquad \widehat{NAB} = \beta.$$

Les deux triangles PAN et NAn donnent

$$\frac{\overline{PN}^2}{\overline{Nn}^2} = \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} = \frac{\overline{Mm}^2.\overline{AN}^2}{\overline{AM}^2.\overline{Nn}^2} = \frac{Am.Bm.An.AB}{Am.AB.An.Bn} = \frac{Bm}{Bn}.$$

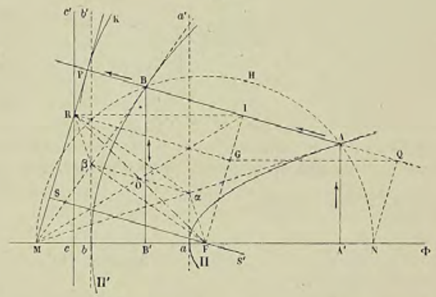
En second lieu, le triangle APN donne

$$\overline{\mathrm{AP}}^2 = \overline{\mathrm{AN}}^2.\cos^2\alpha = \frac{\overline{\mathrm{AN}}^2.\overline{\mathrm{A}m}^2}{\overline{\mathrm{AM}}^2} = \frac{\mathrm{A}n.\mathrm{AB}.\mathrm{A}m^2}{\mathrm{A}m.\mathrm{AB}} = \mathrm{A}m.\mathrm{A}n.$$

C. Q. F. D.

11. Considérons maintenant deux paraboles Π et Π′ (*fig.* 3) ayant le point F pour foyer et pour sommets respectifs les deux points a et b de la droite FΦ.

Fig. 3.



Par un point quelconque M de cette droite, menons une tangente à chacune des paraboles et soient respectivement A et B leurs points de contact; on sait que le cercle, ayant pour centre le foyer F et passant par le point M, contient les points A et B; j'appellerai N le point où il rencontre de nouveau l'axe FΦ.

Du point M abaissons une perpendiculaire MP sur la droite AB, et, par le point I milieu du segment AB, menons une parallèle à l'axe qui rencontre MP au point R, il est clair que la figure MRIF est un parallélogramme.

Soient maintenant α et β les milieux respectifs des segments MA et MB; la droite αβ est évidemment parallèle à AB et partagée en parties égales par la droite MI en son point milieu O; d'où il suit que la figure RβFα est un parallélogramme.

Ainsi les segments Rβ et αF sont égaux et parallèles; c, b et a

étant les pieds des perpendiculaires abaissées sur l'axe des points R, β et α, on a donc

$$\mathrm{F}c = \mathrm{F}a + \mathrm{F}b;$$

d'où il résulte que Fc est constant et que, quand le point M varie, le point R décrit la droite cc'.

J'abaisse maintenant du point F la perpendiculaire FS sur la droite MP, du point R la perpendiculaire RG sur la droite FI et du point N la perpendiculaire NQ sur la droite AB; il est clair que RS est égal à FG, et encore à NQ, car il est aisé de voir que la figure GQFN est un parallélogramme.

Or, en désignant par A′ et B′ les pieds des perpendiculaires abaissées sur l'axe des points A et B, il suit du lemme II que l'on a

$$\overline{\mathrm{NQ}}^2 = \overline{\mathrm{RS}}^2 = \mathrm{NA'}.\mathrm{NB'} = \frac{\mathrm{F}a.\mathrm{F}b}{4}.$$

D'où il suit que la longueur RS est constante lorsque le point M se déplace; nous avons ainsi un triangle rectangle RSF dont un petit côté passe constamment par le point F, tandis que l'autre petit côté est constant et que le sommet R décrit la droite cc'.

Il en résulte donc, d'après ce que j'ai démontré plus haut, que RS enveloppe une anticaustique principale de parabole; le centre instantané de rotation étant d'ailleurs évidemment le point I, la tangente RS touche son enveloppe au point P.

12. Soit K l'hypercycle symétrique enveloppé par RS; si, du point A comme centre, on décrit un cercle ayant AP pour rayon, il est clair que son enveloppe est la courbe K; or, il résulte du lemme I que l'on a

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AA'}} = \sqrt{\frac{\mathrm{NB'}}{\mathrm{NA'}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{F}b}{\mathrm{F}a}}.$$

D'où il suit que ce rapport est constant et que K est l'anticaustique principale de la parabole Π, les rayons incidents étant perpendiculaires à l'axe et le module de réfraction étant

$$\sqrt{\frac{\mathrm{F}b}{\mathrm{F}a}}.$$

On démontrerait de même que K est l'anticaustique principale de la parabole Π′, les rayons incidents étant perpendiculaires à l'axe et le module de réfraction étant

$$\sqrt{\frac{\mathrm{F}a}{\mathrm{F}b}}.$$

13. Il est maintenant facile de résoudre le problème suivant :

Un hypercycle K est l'enveloppe du côté RS d'un triangle rectangle RSS′, dont le côté SS′ passe constamment par le point fixe F (*fig.* 3), dont le côté RS a une longueur constante et dont le sommet R décrit la droite cc'; trouver les paraboles pour lesquelles cette courbe est une anticaustique principale.

A cet effet, que du point F on abaisse une perpendiculaire à cc' rencontrant le côté RS en M, et que de ce même point comme centre on décrive un cercle H passant par M; que l'on détermine le point de rencontre I de la droite menée par F perpendiculairement à SS′ et de la droite menée par R perpendiculairement à cc', puis que par I on mène une droite Δ parallèle à SS′. Cela posé, si l'on imagine les deux paraboles qui, ayant F pour foyer et ayant leur axe perpendiculaire à cc', passent respectivement par les points de rencontre de Δ et du cercle H, on obtiendra les deux paraboles pour lesquelles K est une anticaustique principale.

Il est à remarquer que ces deux paraboles ne sont pas toujours réelles; elles seront imaginaires si la droite Δ et le cercle H ne se rencontrent pas.

SUR LA

RÉDUCTION EN FRACTIONS CONTINUES

D'UNE

FRACTION QUI SATISFAIT A UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE

DU PREMIER ORDRE

DONT LES COEFFICIENTS SONT RATIONNELS [1].

Journal de Mathématiques pures et appliquées; 1885.

I.

1. Je considère une série z, ordonnée suivant les puissances décroissantes de x et qui satisfait identiquement à l'équation différentielle linéaire

$$\mathrm{W}z' = 2\mathrm{V}z + \mathrm{U}, \tag{1}$$

où U, V et W désignent des polynomes entiers, et je me propose d'étudier son développement en fractions continues.

La série z peut, d'ailleurs, être divergente pour toute valeur de x; rien n'empêche de la réduire en fractions continues; il sera seulement nécessaire de déterminer pour quelles valeurs de x les réduites forment une suite convergente et quelle est la fonction dont elles donnent la valeur.

Dans tout ce qui suit, étant donné un polynome ou une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x, j'appellerai *degré du polynome* ou *de la série* le degré de son premier terme,

[1] Ce Mémoire aurait dû figurer à la fin du Tome I.

et je représenterai simplement par la notation $\left(\frac{1}{x^n}\right)$, en faisant abstraction de ses coefficients, une série commençant par un terme du degré $-n$.

2. Cela posé, on sait que, f_n désignant un polynome entier de degré n, on peut toujours disposer des $(n+1)$ coefficients qu'il renferme, de telle sorte que, φ_n désignant la partie entière de zf_n, le développement de l'expression $z - \frac{\varphi_n}{f_n}$ commence par un terme du degré de $\frac{1}{x^{2n+1}}$; une telle fraction $\frac{\varphi_n}{f_n}$ se nomme une *réduite de* z. Pour certaines valeurs du nombre entier n, il peut même arriver que l'approximation soit plus grande et que le premier terme du développement de $z - \frac{\varphi_n}{f_n}$ soit d'un degré inférieur à celui de $\frac{1}{x^{2n+1}}$; dans ce cas, il y a surapproximation.

En général, on aura donc, d'après la définition des réduites,

$$z = \frac{\varphi_n}{f_n} + \left(\frac{1}{x^{2n+\rho+1}}\right),$$

où ρ désigne un nombre entier positif ou zéro; de là

$$z' = \frac{\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n}{f_n^2} + \left(\frac{1}{x^{2n+\rho+2}}\right)$$

et, en portant ces valeurs de z et z' dans la relation (1),

$$\mathrm{U} + 2\mathrm{V}\frac{\varphi_n}{f_n} - \mathrm{W}\frac{\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n}{f_n^2} + 2\mathrm{V}\left(\frac{1}{x^{2n+\rho+1}}\right) - \mathrm{W}\left(\frac{1}{x^{2n+\rho+2}}\right) = 0$$

ou encore

$$\mathrm{U}f_n^2 + 2\mathrm{V}\varphi_n f_n - \mathrm{W}(\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n) = f_n^2\left[\mathrm{V}\left(\frac{1}{x^{2n+\rho+1}}\right) + \mathrm{W}\left(\frac{1}{x^{2n+\rho+2}}\right)\right].$$

Soit μ le degré de la série $\mathrm{V}\left(\frac{1}{x}\right) + \mathrm{W}\left(\frac{1}{x^2}\right)$; il est clair que le premier membre de cette égalité est un polynome entier; il en est de même du second, qui est du degré $(\mu - \rho)$; on pourra donc poser, en désignant par A_n une constante dont la valeur dépendra du nombre entier n et par Θ_n un polynome entier du degré $\mu - \rho$,

$$\mathrm{U}f_n^2 + 2\mathrm{V}\varphi_n f_n - \mathrm{W}(\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n) = \mathrm{A}_n \Theta_n. \tag{2}$$

Θ_n est un polynome entier du degré $\mu - \rho$, il est, par conséquent, d'un degré égal ou inférieur à μ. En général, il est du degré μ, et son degré ne s'abaisse que quand, pour certaines valeurs du nombre n, il y a surapproximation. Le maximum d'approximation aura lieu pour $\rho = \mu$, auquel cas Θ est une constante; une approximation plus grande ne peut avoir lieu : autrement, Θ étant nul, on voit que z serait égal à la fonction rationnelle $\frac{\varphi_n}{f_n}$, cas que j'écarte expressément.

3. Réciproquement, si l'on peut déterminer deux polynomes entiers φ_n et f_n, tels que le premier membre de l'égalité (2) se réduise à un polynome du degré μ ou d'un degré inférieur, $\frac{\varphi_n}{f_n}$ est une réduite de la série z.

Ayant posé, en effet,

$$z = \frac{\varphi_n}{f_n} + u,$$

d'où

$$z' = \frac{\varphi'_n f_n - f'_n \varphi_n}{f_n^2} + u',$$

l'identité (2) devient

$$\frac{\mathrm{A}_n \Theta_n}{f_n^2} = \mathrm{U} + 2\mathrm{V}z - \mathrm{W}z' - 2\mathrm{V}u - \mathrm{W}u'$$

ou encore, par suite de l'équation (1),

$$\frac{\mathrm{A}_n \Theta_n}{f_n^2} = -2\mathrm{V}u - \mathrm{W}u'.$$

Le premier membre de cette égalité est au plus du degré de

$$\frac{1}{x^{2n+1}}\left(\mathrm{V} + \frac{\mathrm{W}}{x}\right),$$

et le second, du degré

$$u\left(\mathrm{V} + \frac{\mathrm{W}}{x}\right);$$

d'où il résulte que u est au plus de degré de $\frac{1}{x^{2n+1}}$, et, par suite, $\frac{\varphi_n}{f_n}$ est une réduite de la série z.

4. Toute la question se réduit ainsi à la solution par des polynomes entiers de l'équation (2), le polynome Θ_n étant d'un degré au plus égal à μ; et, tout d'abord, j'en déduirai que f_n satisfait à une équation linéaire du second ordre.

A cet effet, je forme l'équation

$$My'' - Ny' + Py = 0,$$

qui a pour solutions

$$y_1 = f_n \quad \text{et} \quad y_2 = e^{-2\int \frac{V}{W}dx}(\varphi_n - zf_n).$$

En posant, pour abréger,

$$\omega = y'_1 y_2 - y'_2 y_1,$$

on a, d'après une formule connue,

$$\frac{N}{M} = \frac{d}{dx}\log\omega;$$

or un calcul facile donne

$$\omega = e^{-2\int \frac{V}{W}dx}\,\frac{Uf_n^2 + 2V\varphi_n f_n - W(\varphi'_n f_n - f'_n\varphi_n)}{W},$$

et, en tenant compte de l'identité (2),

$$\omega = e^{-2\int \frac{V}{W}dx}\,\frac{A_n\Phi_n}{W};$$

d'où

$$\frac{N}{M} = \frac{\Theta'_n}{\Theta_n} - \frac{W'}{W} - \frac{2V}{W};$$

et de là résulte immédiatement que l'équation cherchée est de la forme

$$W\Theta_n y'' + [(2V + W')\Theta_n - W\Theta'_n]y' + K_n y = 0. \tag{3}$$

Cette équation doit, d'ailleurs, être satisfaite quand on y fait $y = f_n$; K_n est donc un polynome entier dont le degré est indépendant du nombre n.

5. Supposons maintenant que, K_n et Θ_n désignant des polynomes entiers dont le dernier soit d'un degré égal ou inférieur à μ, un polynome entier f_n satisfasse à l'équation (3), je dis que l'on

peut déterminer le polynome U qui figure dans l'équation différentielle (1), de telle sorte que la série z qui satisfait à cette équation ait une réduite dont le dénominateur soit f_n.

Soient, en effet, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ les diverses racines de l'équation $f_n(x) = 0$; décomposons en éléments simples la fraction $\frac{A_n\Theta_n}{Wf_n^2}$, et posons

$$\frac{A_n\Theta_n}{Wf_n^2} = \frac{G_n}{W} + \sum\frac{p_\alpha}{(x-\alpha)^2} + \sum\frac{q_\alpha}{x-\alpha}.$$

Pour avoir les coefficients p_α et q_α, il faut diviser

$$A_n[\Theta_n(\alpha) + \Theta'_n(\alpha)h]$$

par

$$f'_n(\alpha)\{W(\alpha)f'_n(\alpha) + [W(\alpha)f''_n(\alpha) + W'(\alpha)f'_n(\alpha)]h\};$$

or, $f_n(x)$ satisfaisant à l'équation (3), on a évidemment

$$\Theta_n(\alpha)[W(\alpha)f''_n(\alpha) + W(\alpha)f'_n(\alpha)] = f'_n(\alpha)[W(\alpha)\Theta'_n(\alpha) - 2V(\alpha)\Theta_n(\alpha)];$$

le diviseur devient, par suite,

$$f'^2_n(\alpha)\left[W(\alpha) + \frac{W(\alpha)\Theta'_n(\alpha) - 2V(\alpha)\Theta_n(\alpha)}{\Theta_n(\alpha)}h\right],$$

et le quotient

$$\frac{A_n\Theta_n(\alpha)}{f'^2_n(\alpha)W(\alpha)}\left[1 + \frac{2V(\alpha)}{W(\alpha)}h\right];$$

d'où l'on déduit la relation suivante

$$q_\alpha = 2p_\alpha\frac{V(\alpha)}{W(\alpha)}.$$

Je pose maintenant

$$\sum\frac{p_\alpha}{x-\alpha} = \frac{\varphi_n}{f_n},$$

$$\sum\frac{q_\alpha}{x-\alpha} = \frac{P_n}{f_n},$$

en sorte que l'on ait

$$\frac{A_n\Theta_n}{Wf_n^2} = \frac{G_n}{W} + \frac{P_n}{f_n} - \frac{d}{dx}\frac{\varphi_n}{f_n} \quad [1]; \tag{4}$$

[1] Il résulte d'une remarque importante due à M. Hermite que la détermination des polynomes G_n, P_n et φ_n n'exige pas la résolution de l'équation $f_n = 0$.

et je considère l'expression

$$\frac{P_n}{f_n} - 2\frac{V}{W}\frac{\varphi_n}{f_n} = \sum \left(q_\alpha - \frac{2V}{W}p_\alpha\right)\frac{1}{x+\alpha}.$$

L'identité démontrée plus haut,

$$q_\alpha = 2\frac{V(\alpha)}{W(\alpha)}p_\alpha,$$

montre que cette expression ne devient infinie pour aucun des zéros de f_n; on a donc, H_n désignant un polynome entier,

$$(5) \qquad \frac{P_n}{f_n} - \frac{2V}{W}\frac{\varphi_n}{f_n} = \frac{H_n}{W}.$$

Éliminons P_n entre les identités (4) et (5), il viendra, après avoir chassé le dénominateur,

$$A_n\Theta_n = (G_n + H_n)f_n^2 + 2V\varphi_n f_n = W(\varphi'_n f_n - f'_n\varphi_n);$$

et de là résulte la proposition que je voulais démontrer.

Θ_n étant, en effet, d'un degré au plus égal à μ, il est clair que $\frac{\varphi_n}{f_n}$ est une réduite de la série z qui satisfait à l'équation différentielle

$$Wz' = 2Vz + G_n + H_n.$$

II.

6. Pour déterminer complètement l'équation différentielle à laquelle satisfait le dénominateur f_n d'une réduite, il est nécessaire de connaître les polynomes Θ_n et K_n qui y figurent.

Afin de trouver leur expression ou de montrer au moins comment on peut les calculer par voie de récurrence, je m'appuierai sur les considérations suivantes :

On sait qu'entre les termes de deux réduites consécutives on a la relation suivante

$$\varphi_{n+1}f_n - f_{n+1}\varphi_n = A_{n+1}.$$

A_{n+1} étant une constante dont on peut choisir arbitrairement la valeur, puisque les deux termes de la réduite ne sont déterminés qu'à un facteur constant près; je supposerai que cette constante est précisément celle que j'ai introduite dans l'identité (2).

Cela posé, de la relation précédente et de la relation

$$(6) \qquad \varphi_n f_{n-1} - f_n\varphi_{n-1} = A_n$$

qui s'en déduit, on tire

$$(A_n\varphi_{n+1} + A_{n+1}\varphi_{n-1})f_n = (A_n f_{n+1} + A_{n+1}f_{n-1})\varphi_n;$$

d'où, en posant

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = R_n,$$

les formules suivantes, où Q_n est un polynome du premier degré,

$$(7) \qquad \begin{cases} f_{n+1} - Q_n f_n + R_n f_{n-1} = 0, \\ \varphi_{n+1} - Q_n\varphi_n + R_n\varphi_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Portons maintenant, dans la relation (2), la valeur de A_n tirée de l'équation (6), cette relation pourra se mettre sous la forme suivante

$$(Uf_n + V\varphi_n - W\varphi'_n + \Theta_n\varphi_{n-1})f_n = (\Theta_n f_{n-1} - Wf'_n - Vf_n)\varphi_n;$$

d'où ces formules, où Ω_n désigne un polynome entier,

$$(8) \qquad \begin{cases} Wf'_n = (\Omega_n - V)f_n + \Theta_n f_{n-1}, \\ W\varphi'_n = (\Omega_n + V)\varphi_n + \Theta_n\varphi_{n-1} + Uf_n. \end{cases}$$

7. Ω_n est un polynome entier dont il est facile de déterminer le degré; on déduit, en effet, de la première des formules (8),

$$\Omega_n = V + W\frac{f'_n}{f_n} - \Theta_n\frac{f_{n-1}}{f_n};$$

il en résulte que le terme du degré le plus élevé de ce polynome est le premier terme du développement de l'expression $V + \frac{nW}{x}$; la fraction $\Theta_n\frac{f_{n-1}}{f_n}$ est, en effet, du degré de $V\left(\frac{1}{x^2}\right) + W\left(\frac{1}{x^3}\right)$.

8. En dérivant la première des identités (7) et en multipliant par W le résultat obtenu, il vient

$$Wf'_{n+1} - WQ_n f'_n - WQ'_n f_n + WR_n f'_{n-1} = 0$$

on a, d'ailleurs, les identités

$$\begin{aligned} W f'_{n+1} &= (\Omega_{n+1} - V) f_{n+1} + \Theta_{n+1} f_n, \\ W f'_n &= (\Omega_n \;\; - V) f_n \;\; + \Omega_n \;\; f_{n-1}, \\ W f'_{n-1} &= (\Omega_{n-1} - V) f_{n-1} + \Omega_{n-1} f_{n-2}; \end{aligned}$$

portant ces valeurs dans la relation précédente, on a

$$\begin{aligned} (\Omega_{n+1} - V) f_{n+1} &+ [\Theta_{n+1} - WQ'_n - Q_n(\Omega_n - V)] f_n \\ &+ [R_n(\Omega_{n-1} - V) - Q_n \Theta_n] f_{n-1} + R_n \Omega_{n-1} f_{n-2} = 0, \end{aligned}$$

puis, en remplaçant f_{n+1} par sa valeur $Q_n f_n - R_n f_{n-1}$,

$$\begin{aligned} &[Q_n(\Omega_{n+1} - \Omega_n) - WQ'_n + \Theta_{n+1}] f_n \\ &\quad - [R_n(\Omega_{n+1} - \Omega_{n-1}) + Q_n \Theta_n] f_{n-1} + R_n \Theta_{n-1} f_{n-2} = 0. \end{aligned}$$

On a, d'ailleurs,

$$f_n - Q_{n-1} f_{n-1} + R_{n-1} f_{n-2} = 0;$$

d'où les deux formules suivantes :

$$(9) \qquad Q_n(\Omega_{n+1} - \Omega_n) + \Theta_{n+1} - \frac{R_n}{R_{n-1}} \Theta_{n-1} = WQ'_n,$$

$$(10) \qquad R_n(\Omega_{n+1} - \Omega_{n-1}) = \frac{R_n}{R_{n-1}} Q_{n-1} \Theta_{n-1} - Q_n \Theta_n.$$

9. On déduit de la première des identités (8)

$$W f''_n = (\Omega_n - V - W') f'_n + (\Omega'_n - V') f_n + \Theta_n f'_{n-1} + \Theta'_n f_{n-1}$$

ou, en multipliant par W et remplaçant $W f'_n$ et $W f'_{n-1}$ par leurs valeurs,

$$\begin{aligned} W^2 f''_n = [&(\Omega_n - V - W')(\Omega_n - V) + W(\Omega'_n - V')] f_n \\ &+ [\Theta_n(\Omega_n + \Omega_{n-1} - 2V - W') + W\Theta'_n] f_{n-1} + \Theta_n \Theta_{n-1} f_{n-2}; \end{aligned}$$

portons cette valeur et la valeur précédemment trouvée de $W f'_n$ dans la relation

$$W_2 \Theta_n f''_n + [(2V + W')\Theta_n - W\Theta'_n] W f'_n + K_n W f_n = 0;$$

il viendra, toutes réductions faites,

$$\begin{aligned} \{\Theta_n(\Omega_n^2 - V^2) + W[\Theta_n(\Omega'_n - V') - \Theta'_n(\Omega_n - V) + K_n]\} f_n& \\ + \Theta_n^2(\Omega_n + \Omega_{n-1}) f_{n-1} + \Theta_n^2 \Theta_{n-1} f_{n-2} &= 0. \end{aligned}$$

Le polynome qui multiplie W dans le coefficient de f_n est évidem-

ment divisible par Θ_n; posant donc

$$\Theta_n(\Omega'_n - V') - \Theta'_n(\Omega_n - V) + K_n = -\Theta_n S_n,$$

d'où l'on déduit

$$(11) \qquad K_n = \Theta'_n(\Omega_n - V) - \Theta_n(\Omega'_n - V') - \Theta_n S_n,$$

l'identité précédente deviendra

$$(\Omega_n^2 - V^2 - WS_n) f_n + \Theta_n(\Omega_n + \Omega_{n-1}) f_{n-1} + \Theta_n \Theta_{n-1} f_{n-2} = 0,$$

où S_n désigne un polynome entier.

Ayant, d'ailleurs, la relation

$$f_n - Q_{n-1} f_{n-1} + R_{n-1} f_{n-2} = 0,$$

on déduit de là les formules suivantes :

$$(12) \qquad \Omega_n^2 - V^2 - \frac{\Theta_n \Theta_{n-1}}{R_{n-1}} = WS_n,$$

$$(13) \qquad \Omega_n + \Omega_{n-1} = -\frac{\Theta_{n-1} Q_{n-1}}{R_{n-1}}.$$

10. De la relation (12) résulte l'égalité

$$W(S_{n+1} - S_n) = (\Omega_{n+1} - \Omega_n)(\Omega_{n+1} + \Omega_n) - \frac{\Theta_{n+1}\Theta_n}{R_n} + \frac{\Theta_n \Theta_{n-1}}{R_{n-1}}$$

ou, en remplaçant $\Omega_{n+1} + \Omega_n$ par sa valeur déduite de l'identité (13),

$$W(S_{n+1} - S_n) = \Theta_n \left[-\frac{\Theta_{n+1}}{R_n} + \frac{\Theta_{n-1}}{R_{n-1}} - \frac{Q_n}{R_n}(\Omega_{n+1} - \Omega_n) \right]$$

ou encore, en vertu de (9),

$$W(S_{n+1} - S_n) = -\frac{WQ'_n \Theta_n}{R_n};$$

d'où enfin

$$(14) \qquad S_{n+1} - S_n = -\frac{Q'_n \Theta_n}{R_n}.$$

III.

11. Je résumerai ici les conséquences très simples de l'analyse un peu longue qui précède.

On a, entre les termes des diverses réduites, les relations suivantes :

$$(7)\qquad \begin{cases} f_{n+1} - Q_n f_n + R_n f_{n-1} = 0, \\ \varphi_{n+1} - Q_n \varphi_n + R_n \varphi_{n-1} = 0; \end{cases}$$

$$(8)\qquad \begin{cases} W f'_n = (\Omega_n - V) f_n + \Theta_n f_{n-1}, \\ W \varphi'_n = (\Omega_n + V) \varphi_n + \Theta_n \varphi_{n-1} + V f_n, \end{cases}$$

où R_n désigne un nombre que l'on peut choisir arbitrairement, Θ_n un polynome entier du degré μ, Ω_n un polynome entier du degré $\mu + 1$ dont le terme du degré le plus élevé est le premier terme du développement de $V + \frac{nW}{x}$, et Q_n un polynome du premier degré.

Ces polynomes sont reliés entre eux par les relations suivantes :

$$(9)\qquad Q_n(\Omega_{n+1} - \Omega_n) + \Theta_{n+1} - \frac{R_n}{R_{n-1}} \Theta_{n-1} = W Q'_n,$$

$$(13)\qquad \Omega_{n+1} + \Omega_n = -\frac{\Theta_n Q_n}{R_n};$$

on a, en outre, l'égalité suivante, où S_n est un polynome entier,

$$(12)\qquad \Omega_n - V^2 - \frac{\Theta_n \Theta_{n-1}}{R_{n-1}} = W S_n.$$

On peut ajouter que, si l'on pose, pour abréger,

$$K_n = \Theta'_n(\Omega_n - V) - \Theta_n(\Omega'_n - V') - \Theta_n S_n,$$

f_n satisfait à l'équation différentielle du second ordre

$$(3)\qquad W\Theta_n y'' + [(2V + W')\Theta_n - W\Theta'_n] y' + K_n y = 0.$$

12. Je me propose maintenant de montrer que les relations (9) et (13) suffisent pour déterminer par voie récurrente les polynomes Q_n, Θ_n et Ω_n, et, à cet effet, j'établirai le lemme suivant :

LEMME. — *Si des polynomes f_n, φ_n, Q_n, Θ_n, Ω_n et les nombres R_n sont liés entre eux par les relations (7), (9) et (13) et si l'on définit deux suites de polynomes A_n et B_n par les égalités suivantes :*

$$A_n = (\Omega_n - V) f_n - W f'_n + \Theta_n f_{n-1},$$
$$B_n = (\Omega_n + V) \varphi_n - W \varphi'_n + \Theta_n \varphi_{n-1},$$

on a, entre trois polynomes consécutifs de chacune des suites, les relations

$$A_{n+1} - Q_n A_n + R_n A_{n-1} = 0$$

et

$$B_{n+1} - Q_n B_n + R_n B_{n-1} = 0.$$

Démonstration. — Je ne m'occuperai que des polynomes A_n, la marche à suivre étant exactement la même pour les polynomes B_n.

On a, en vertu même de la définition donnée,

$$W f'_n = (\Omega_n - V) f_n + \Theta_n f_{n-1} - A_n$$

et de même

$$W f'_{n+1} = (\Omega_{n+1} - V) f_{n+1} + \Theta_{n+1} f_n - A_{n+1},$$
$$W f'_{n-1} = (\Omega_{n-1} - V) f_{n-1} + \Theta_{n-1} f_{n-2} - A_{n-1}.$$

Portons ces valeurs dans l'égalité

$$W f'_{n+1} = Q_n W f'_n + W Q'_n f_n + R_n W f'_{n-1}$$

qui résulte immédiatement de la première des équations (7); il viendra

$$\begin{aligned} (\Omega_{n+1} - V) f_{n+1} &+ [\Theta_{n+1} - W Q'_n - Q_n(\Omega_n - V)] f_n \\ &+ [R_n(\Omega_{n-1} - V) - Q_n \Theta_n] f_{n-1} \\ &+ R_n \Theta_{n-1} f_{n-2} - A_{n+1} + Q_n A_n - R_n A_{n-1} = 0 \end{aligned}$$

ou, en remplaçant f_{n+1} par sa valeur $Q_n f_n - R_n f_{n-1}$,

$$\begin{aligned} &[Q_n(\Omega_{n+1} - \Omega_n) + \Theta_{n+1} - W Q'_n] f_n \\ &\quad - [R_n(\Omega_{n+1} - \Omega_{n-1}) + Q_n \Theta_n] f_{n-1} \\ &\quad + R_n \Theta_{n-1} f_{n-2} - A_{n+1} + Q_n A_n - R_n A_{n-1} = 0 \end{aligned}$$

ou encore, en vertu des identités (9) et (13),

$$\begin{aligned} &\frac{R_n}{R_{n-1}} \Theta_{n-1} f_n - \frac{R_n}{R_{n-1}} \Theta_{n-1} Q_{n-1} f_{n-1} \\ &\quad + R_n \Theta_{n-1} f_{n-2} - A_{n+1} + Q_n A_n - R_n A_{n-1} = 0. \end{aligned}$$

Ce qui, par suite de l'identité,

$$f_n - Q_{n-1} f_{n-1} + R_{n-1} f_{n-2} = 0,$$

se réduit à

$$A_{n+1} - Q_n A_n + R_n A_{n-1} = 0.$$

Une démonstration analogue s'appliquerait aux polynomes B.

13. Supposons maintenant que l'on ait déterminé trois suites de polynomes Θ_n, Ω_n et Q_n par les relations (9) et (13), puis deux suites de polynomes φ_n et f_n par les relations (7); qu'enfin, pour deux valeurs consécutives de l'indice, on ait

$$A_i = A_{i-1} = 0 \quad \text{et} \quad B_i = B_{i-1} = 0.$$

Il résulte du lemme précédent que l'on a également

$$A_{i+1} = A_{i+2} = A_{i+3} = \ldots = 0$$

et

$$B_{i+1} = B_{i+2} = B_{i+3} = \ldots = 0,$$

et, par suite, les polynomes φ_n et f_n satisfont aux équations (8).

Or, en éliminant Ω_n, on en déduit

$$W(f'_n\varphi_n - \varphi'_n f_n) = -2V\varphi_n f_n + \Theta_n(\varphi_n f_{n-1} - f_n\varphi_{n-1}) - Uf_n^2;$$

ce que l'on peut écrire

$$Uf_n^2 + 2V\varphi_n f_n - W(\varphi'_n f_n - f'_n\varphi_n) = \Theta_n(\varphi_n f_{n-1} - f_n\varphi_{n-1}),$$

et, $(\varphi_n f_{n-1} - f_n\varphi_{n-1})$ étant une constante en vertu des relations (7), on voit que le second membre est un polynome du degré μ, et, par suite, la fraction $\frac{\varphi_n}{f_n}$ est une réduite de la série z.

14. Ainsi toute la question est ramenée à déterminer par les identités (9) et (13) les polynomes Q_n, Θ_n et Ω_n.

Si l'on met en évidence leurs coefficients inconnus, en égalant à zéro les multiplicateurs des puissances de x, on obtiendra un certain nombre d'équations qui permettront de déterminer les coefficients de Q_n, Ω_{n+1}, Θ_{n+1} au moyen des coefficients de Ω_n, Θ_n et Θ_{n-1}.

IV.

15. Comme application, je considérerai d'abord le cas le plus simple, à savoir : celui où les fonctions Θ_n sont des constantes et où $\mu = 0$. C'est ce qui a lieu si W est au plus du second degré et si V est au plus du premier degré.

Comme Θ_n est une constante et que R_n, jusqu'à présent, est resté arbitraire, je poserai

$$\Theta_n = R_n,$$

et les équations (12) et (13) deviendront alors

$$\Omega_{n+1} + \Omega_n = -Q_n, \tag{15}$$

$$\Omega_n^2 - V^2 - R_n = WS_n, \tag{16}$$

et, ayant déterminé les polynomes entiers qui satisfont à ces équations, on aura les relations

$$\left\{\begin{aligned} &f_{n+1} - Q_n f_n + R_n f_{n-1} = 0,\\ &\varphi_{n+1} - Q_n\varphi_n + R_n\varphi_{n-1} = 0;\end{aligned}\right. \tag{7}$$

$$\left\{\begin{aligned} &Wf'_n = (\Omega_n - V)f_n + R_n f_{n-1},\\ &W\varphi'_n = (\Omega_n + V)\varphi_n + R_n\varphi_{n-1} + Uf_n;\end{aligned}\right. \tag{8}$$

en outre, f_n satisfait à l'équation différentielle

$$Wy'' + (2V + W')y' - (\Omega'_n - V' + S_n)y = 0,$$

où le coefficient de y est nécessairement une constante.

16. Considérons, par exemple, la fonction $z = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ qui satisfait à l'équation différentielle

$$(x^2 - 1)z' = 2x,$$

on a ici

$$W = x^2 - 1, \quad V = 0 \quad \text{et} \quad U = 2x.$$

Le polynome Ω_n, dont le terme du degré le plus élevé est le premier terme du développement de $n\frac{x^2-1}{x}$, est de la forme

$$nx + \alpha_n,$$

l'identité

$$(nx + \alpha_n)^2 - R_n = (x^2 - 1)S_n$$

donne

$$\alpha_n = 0, \quad R_n = n^2, \quad S_n = n^2;$$

d'où, en vertu de l'équation (15),

$$Q_n = -(2n+1)x;$$

puis les relations

$$f_{n+1} - (2n+1)xf_n + n^2 f_{n-1} = 0,$$

$$\varphi_{n+1} + (2n+1)x\varphi_n + n^2\varphi_{n-1} = 0;$$

$$(x^2 - 1)f'_n = nxf_n + n^2 f_{n-1},$$

$$(x^2 - 1)\varphi'_n = nx\varphi_n + n^2\varphi_{n-1} + 2xf_n;$$

d'où l'on déduirait aisément les relations connues entre les polynomes X_n de Legendre.

L'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait f_n est, d'ailleurs,

$$(x^2-1)y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0.$$

17. Comme second exemple, je choisirai la fonction

$$z = e^x x^{-\alpha} \int_x^\infty e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx,$$

qui satisfait à l'équation différentielle

$$xz' = (x-\alpha)z - 1;$$

son développement suivant les puissances décroissantes de x est, d'ailleurs, la série

$$\frac{1}{x} + \frac{\alpha-1}{x^2} + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{x^3} + \ldots,$$

qui, si elle ne se termine pas, est toujours divergente, quelle que soit la valeur donnée à x.

On a ici

$$W = x, \qquad V = \frac{x}{2} - \frac{\alpha}{2}, \qquad U = -1.$$

Le terme du degré le plus élevé de Ω_n étant le premier terme du développement de $V + \frac{nW}{x}$, on peut poser

$$\Omega_n = \frac{x}{2} + \beta_n.$$

L'équation différentielle à laquelle satisfait f_n est

$$xy'' + (x+1-\alpha)y' - S_n y = 0;$$

d'où résulte évidemment $S_n = n$.

L'identité

$$S_n W = nx = \left(\frac{x}{2} + \beta_n\right)^2 - \left(\frac{x}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)^2 - R_n$$

donne alors

$$\beta_n = n - \frac{\alpha}{2} \qquad \text{et} \qquad R_n = n(n-\alpha);$$

d'où

$$Q_n = -x - \beta_n - \beta_{n+1} = -x + \alpha - 2n - 1,$$

et les formules suivantes :

$$f_{n+1} = -(x+2n+1-\alpha)f_n - n(n-\alpha)f_{n-1},$$
$$\varphi_{n+1} = -(x+2n+1-\alpha)\varphi_n - n(n-\alpha)\varphi_{n-1};$$

ou plutôt si l'on change les signes des deux termes des réduites de rang impair (ce qui est permis, puisque cela ne change pas la valeur de la réduite),

$$(17) \qquad \left\{ \begin{aligned} f_{n+1} &= (x+2n+1-\alpha)f_n - n(n-\alpha)f_{n-1}, \\ \varphi_{n+1} &= (x+2n+1-\alpha)\varphi_n - n(n-\alpha)\varphi_{n-1}. \end{aligned} \right.$$

Un calcul direct donne d'ailleurs les valeurs suivantes pour les termes des premières réduites,

$$f_0 = 1, \qquad f_1 = x + 1 - \alpha, \qquad f_2 = x^2 + 2(2-\alpha)x + (2-\alpha)(1-\alpha)$$

et

$$\varphi_0 = 0, \qquad \varphi_1 = 1, \qquad \varphi_2 = x + 3 - \alpha;$$

en sorte que les formules précédentes permettent de calculer facilement, par voie récurrente, les valeurs de f_n et de φ_n.

18. En partant de l'équation différentielle

$$(18) \qquad xy'' + (x+1-\alpha)y' - ny = 0,$$

à laquelle satisfait le polynome f_n, on trouve aisément

$$f_n = x^n + n(n-\alpha)x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-\alpha)(n-\alpha-1)x^{n-2} + \ldots$$
$$+ (n-\alpha)(n-\alpha-1)\ldots(1-\alpha).$$

Une deuxième solution de l'équation (18) est donnée (n° 3) par la fonction

$$u_n = e^{-2\int \frac{V}{W}dx}(zf_n - \varphi_n) = f_n \int_x^\infty e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx - x^\alpha e^{-x}\varphi_n;$$

il est facile de trouver une autre expression de u_n.

En effet, en dérivant n fois l'équation (18), il vient

$$xy^{(n+2)} + (x+n+1-\alpha)y^{(n+1)} = 0;$$

d'où l'on voit que $y^{(n+1)}$ est égal, à une constante près, à $\dfrac{e^{-x}}{x^{n+1-\alpha}}$.

Par suite, on a, K désignant une constante et $F(x)$ un polynome entier,

$$y = F(x) + K\int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^n\,dz}{z^{n+1-\alpha}}.$$

La fonction u_n est en particulier donnée par cette formule, et, comme elle s'évanouit quand on donne à x une valeur positive infiniment croissante, on a simplement

$$u_n = f_n\int_x^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx - x^\alpha e^{-x}\varphi_n = K\int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^n\,dz}{z^{n+1-\alpha}}.$$

Si l'on suppose x et n constants (et je supposerai x positif, en sorte que les intégrales contenues dans l'égalité précédente sont toujours finies, quel que soit α), K est une fonction de α bien déterminée.

Pour en trouver la valeur, je supposerai que l'on fait tendre x vers zéro et que α a une valeur positive; de l'égalité précédente, on déduit alors

$$f_n(0)\,\Gamma(\alpha) = K\Gamma(\alpha),$$

d'où

$$K = (1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha)$$

et, par suite,

$$f_n\int_x^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx - x^\alpha e^{-x}\varphi_n = (1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha)\int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^n\,dz}{z^{n+1-\alpha}}.$$

19. On tire de là

$$\int_x^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx = e^{-x}x^\alpha\frac{\varphi_n}{f_n} + \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha)}{f_n}\int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^n\,dz}{z^{n+1-\alpha}};$$

l'intégrale contenue dans le second membre a une valeur finie, car elle a une valeur plus petite que l'intégrale

$$\int_x^\infty e^{-z}z^{\alpha-1}\,dx;$$

il serait même facile de démontrer qu'elle tend vers zéro quand n augmente indéfiniment.

On a, d'ailleurs,

$$\frac{f_n}{(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha)} = 1 + \frac{n}{1}\,\frac{x}{1-\alpha} + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{x^2}{(1-\alpha)(2-\alpha)} + \ldots;$$

quel que soit le nombre α, les termes de ce développement finiront par être tous du même signe, et, comme leur degré par rapport à n va toujours en croissant, on voit que la valeur absolue de la série croîtra indéfiniment avec le nombre n.

Le coefficient

$$\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\ldots(n-\alpha)}{f_n}$$

a ainsi pour limite zéro, et l'on a

$$\int_x^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx = e^{-x}x^\alpha \lim\frac{\varphi_n}{f_n}.$$

Les réduites $\dfrac{\varphi_n}{f_n}$, quoique provenant de la réduction en fractions continues d'une série divergente, fournissent donc, avec une approximation indéfinie, la valeur de l'intégrale $\int_x^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx$, pourvu que x ait une valeur positive.

20. Soit, par exemple, à calculer l'intégrale

$$\int_a^\infty e^{-t^2}dt;$$

en posant $t = \sqrt{z}$, elle devient

$$\frac{1}{2}\int_{a^2}^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{x}},$$

dont la valeur approximative, en prenant seulement la réduite $\dfrac{\varphi_1}{f_1}$, est

$$\frac{ae^{-a^2}}{2a^2+1}.$$

Faisant $a = 3$, on trouve, comme valeur approchée,

$$\frac{3e^{-9}}{19} = 0{,}000\,019\,54,$$

dont les trois premiers chiffres significatifs sont exacts.

21. Les formules précédentes permettent de calculer aisément les valeurs de la fonction de Prym,

$$eQ(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1}\,dx.$$

Que l'on désigne, en effet, par $F_0(\alpha)$, $F_1(\alpha)$, $F_2(\alpha)$, ..., $\Phi_0(\alpha)$, $\Phi_1(\alpha)$, $\Phi_2(\alpha)$, ... deux suites de polynomes liés entre eux par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
F_{n+1}(\alpha) &= (2n+2-\alpha)F_n(\alpha) - n(n-\alpha)F_{n-1}(\alpha),\\
\Phi_{n+1}(\alpha) &= (2n+2-\alpha)\Phi_n(\alpha) - n(n-\alpha)\Phi_{n-1}(\alpha);
\end{aligned}$$

avec les valeurs initiales

$$\begin{aligned}
F_0(\alpha) &= 1, \qquad & F_1(\alpha) &= 2-\alpha,\\
\Phi_0(\alpha) &= 0, \qquad & \Phi_1(\alpha) &= 1;
\end{aligned}$$

il résulte des formules précédentes que l'on a

$$eQ(\alpha) = \lim \frac{\Phi_n(\alpha)}{F_n(\alpha)}.$$

Soit, par exemple, $x = 1$.

On obtiendra successivement, pour les valeurs approximatives de $eQ(0)$, les valeurs suivantes :

$$\frac{4}{7},\quad \frac{20}{34},\quad \frac{124}{209},\quad \frac{920}{1546},\quad \frac{7940}{13327},\quad \ldots,$$

qui vont en croissant et en restant inférieures à la valeur cherchée.

Il est facile d'obtenir d'autres suites de nombres allant constamment en diminuant et ayant cette valeur pour limite; on trouve en effet les expressions suivantes des réduites du nombre $eQ(-1)$:

$$0,\quad \frac{1}{3},\quad \frac{5}{13},\quad \frac{29}{73},\quad \frac{201}{501},\quad \frac{1631}{4051}.$$

De la formule connue

$$Q(0) = 1 - Q(-1)$$

on déduit que les fractions

$$1,\quad \frac{2}{3},\quad \frac{8}{13},\quad \frac{44}{73},\quad \frac{300}{501},\quad \frac{2420}{4051}$$

ont pour limite $Q(0)$.

Ces fractions sont plus simples et convergent plus rapidement que les fractions déterminées plus haut; elles vont d'ailleurs toujours en décroissant.

En particulier, on a

$$\frac{2420}{4051} = 0{,}5973\ldots$$

et

$$\frac{7940}{13327} = 0{,}5958\ldots;$$

ces deux fractions comprenant la valeur de $eQ(0)$, on a, avec une erreur de moins de $\frac{1}{1000}$,

$$eQ(0) = 0{,}5965.$$

Le développement en série donne (§ *Compendium de Schlömilch*, t. II, p. 266) :

$$eQ(0) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} - \frac{2}{2.3.4} + \frac{4}{2.3.4.5} - \frac{14}{2.3.4.5.6} + \frac{38}{2.3.4.5.6.7}.$$

La convergence est sensiblement moins rapide que celle des réduites.

V.

22. Pour les applications qui suivent, afin de simplifier les formules, je prendrai le nombre A_n, qui était resté arbitraire, égal à l'unité.

Les relations qui existent entre les termes des réduites et les polynomes Q_n, Θ_n et Ω_n deviennent alors

$$(\mathrm{A})\qquad \left\{\begin{aligned}
&Uf_n^2 + 2V\varphi_n f_n - W(\varphi_n' f_n - f_n'\varphi_n) = \Theta_n,\\
&\varphi_{n+1} f_n - f_{n+1}\varphi_n = 1,\\
&f_{n+1} - Q_n f_n + f_{n-1} = 0,\\
&\varphi_{n+1} - Q_n\varphi_n + \varphi_{n-1} = 0,\\
&Wf_n' = (\Omega_n - V)f_n + \Theta_n f_{n-1},\\
&W\varphi_n' = (\Omega_n + V)\varphi_n + \Theta_n\varphi_{n-1} + Uf_n;
\end{aligned}\right.$$

et les identités qui déterminent les polynomes Q_n, Θ_n et Ω_n,

$$(19)\qquad Q_n(\Omega_{n+1} - \Omega_n) + \Theta_{n+1} - \Theta_{n-1} = WQ_n',$$

$$(20)\qquad \Omega_{n+1} + \Omega_n = -Q_n\Theta_n;$$

on peut y joindre la relation

$$(21)\qquad \Omega_n^2 - V^2 - \Theta_n\Theta_{n-1} = WS_n,$$

où S_n désigne un polynome entier.

L'équation différentielle à laquelle satisfait f_n est d'ailleurs

$$\begin{aligned} W\Theta_n y'' &+ [(2V + W) - W\Theta_n']y' \\ &- [\Theta_n S_n + \Theta_n(\Omega_n' - V') - \Theta_n'(\Omega_n - V)]y = 0. \end{aligned}$$

23. Pour fixer les idées, je supposerai que le développement de z commence par un terme qui soit au moins du degré de $\frac{1}{x}$.

Pour le dénominateur de la réduite de rang zéro, je prendrai l'unité, en sorte que l'on aura $f_0 = 1$ et que φ_0 sera l'ensemble des termes entiers de z (lequel pourra se réduire à zéro).

Je considérerai les deux quantités

$$\frac{-1}{0} \quad \text{et} \quad \frac{z}{-1}$$

comme constituant deux réduites précédentes, en posant

$$f_{-1} = 0, \qquad \varphi_{-1} = -1$$

et

$$f_{-2} = -1, \qquad \varphi_{-2} = z.$$

Il est facile de voir, en effet, qu'en posant

$$\Theta_0 = U + 2V\varphi_0 - W\varphi_0', \qquad \Theta_{-1} = 0, \qquad \Omega_0 = V, \qquad \Omega_{-1} = -V,$$

toutes les relations du tableau (A) qui existent entre les réduites consécutives sont satisfaites.

On aura donc

$$\Theta_{-1} = 0, \qquad \Theta_0 = U + 2V\varphi_0 - W\varphi_0'$$

et

$$\Omega_0 = V.$$

24. Soit, comme exemple, la fonction

$$z = \sqrt{x^4 + 2\lambda x^2 + 1}\int_x^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 2\lambda x^2 + 1}},$$

qui satisfait à l'équation différentielle du premier ordre

$$(x^4 + 2\lambda x^2 + 1)z' = 2(x^3 + \lambda x)z - (x^4 + 2\lambda x^2 + 1);$$

on a ici

$$W = x^4 + 2\lambda x^2 + 1, \qquad V = x^3 + \lambda x, \qquad U = -(x^4 + 2\lambda x^2 + 1).$$

Je remarquerai tout d'abord que, z étant une fonction impaire de x, les polynomes φ_n et f_n sont des fonctions paires ou impaires de la variable, et que le produit $\varphi_n f_n$ est une fonction impaire.

Il en résulte que Θ_n est une fonction paire, et l'on peut poser

$$\Theta_n = a_n x^2 + b_n;$$

Ω_n est une fonction impaire dont le terme de degré le plus élevé est le premier terme du développement de

$$V + \frac{nW}{x} = x^3 + \lambda x + \frac{n}{x}(x^4 + 2\lambda x^2 + 1);$$

on peut donc poser

$$\Omega_n = (n+1)x^3 + \alpha_n x;$$

enfin Q_n, qui est une fonction impaire, sera de la forme $A_n x$.

Portons ces valeurs dans les identités (19) et (20); en égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de x, on obtiendra les formules suivantes :

$$A_n = -\frac{2n+3}{a_n},$$

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= -\alpha_n + (2n+3)\frac{b_n}{a_n}, \\ b_{n+1} &= b_{n-1} - \frac{2n+3}{a_n}, \\ a_{n+1} &= a_{n-1} - \frac{2n+3}{a_n}(2\lambda + \alpha_n - \alpha_{n+1}, \end{aligned}\right.$$

dont les trois dernières permettent de calculer de proche en proche, et par voie récurrente, les nombres α_i, a_i et b_i.

La première donne les relations suivantes entre les réduites consécutives :

$$f_{n+1} + \frac{2n+3}{a_n}xf_n + f_{n-1} = 0,$$

$$\varphi_{n+1} + \frac{2n+3}{a_n}x\varphi_n + \varphi_{n-1} = 0.$$

En exprimant que

$$[(n+1)x^3 + \alpha_n x]^2 - (x^3 + \lambda x)^2 - (a_n x^2 + b_n)(a_{n-1}x^2 + b_{n-1})$$

est exactement divisible par $x^4 + 2\lambda x^2 + 1$, on obtient encore les relations

$$(23)\qquad \begin{cases} a_n a_{n-1} - b_n b_{n-1} = 2(n+1)\alpha_n = 2\lambda(n+1)^2, \\ a_n b_{n-1} + b_n a_{n-1} + 2\lambda b_n b_{n-1} = \alpha_n^2 - \lambda^2 - n(n+2); \end{cases}$$

et l'on trouve la valeur suivante du quotient :

$$S_n = n(n+2)x^2 + 2(n+1)\alpha_n - a_n a_{n-1} - 2\lambda(n+1)^2.$$

25. La partie entière du développement de z étant simplement x, on a pour valeurs des premières réduites

$$f_0 = 1, \qquad \varphi_0 = x, \qquad f_{-1} = 0, \qquad \varphi_{-1} = -1,$$

puis

$$\Theta_{-1} = 0, \qquad \Theta_0 = -2\lambda x^2 - 2, \qquad \Omega_0 = x^2 + \lambda x,$$

d'où les valeurs initiales suivantes

$$\alpha_0 = \lambda, \qquad a_{-1} = 0, \qquad b_{-1} = 0, \qquad a_0 = -2\lambda, \qquad b_0 = -2,$$

d'où, au moyen des formules (22), on déduit successivement les valeurs des coefficients α_i, a_i et b_i, à savoir

$$\alpha_1 = -\lambda + \frac{3}{\lambda}, \quad \ldots,$$

$$a_1 = 6 - \frac{9}{2\lambda^2}, \quad \ldots,$$

$$b_1 = \frac{3}{2\lambda}, \quad \ldots.$$

Les relations (23) fournissent des moyens faciles de vérification.

26. Soit encore à déterminer les réduites de la fonction z dont le développement, suivant les puissances décroissantes de x, satisfait à l'équation différentielle

$$x^3 z' = 2(x^2 + px + q)z + rx + s.$$

On a ici

$$W = x^3, \qquad V = x^2 + px + q, \qquad U = rx + s;$$

on peut poser

$$\Omega_n = (n+1)x^2 + \alpha_n x + \beta_n,$$
$$\Theta_n = a_n x + b_n,$$
$$Q_n = A_n x + B_n.$$

Cela posé, des identités (19) et (20) on déduit

$$(A_n x + B_n)[x^2 + (\alpha_{n+1} - \alpha_n)x + \beta_{n+1} - \beta_n] \\ + (a_{n+1} - a_n)x + b_{n+1} - b_n = A_n x^3$$

et

$$(2n+3)x^2 + (\alpha_{n+1} + \alpha_n)x + \beta_{n+1} + \beta_n = -(a_n x + b_n)(A_n x + B_n);$$

d'où les relations suivantes

$$(24)\qquad \begin{cases} \alpha_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2}\alpha_n + \dfrac{2n+3}{2n+4}\,\dfrac{b_n}{a_n}, \\[2mm] \beta_{n+1} = -\beta_n - (2n+3)(\alpha_{n+1} - \alpha_n)\dfrac{b_n}{a_n}, \\[2mm] a_{n+1} = a_{n-1} + \dfrac{2n+3}{a_n}(\beta_{n+1} - \beta_n) - \dfrac{2n+3}{a_n}(\alpha_{n+1} - \alpha)^2, \\[2mm] b_{n+1} = b_{n-1} - \dfrac{2n+3}{a_n}(\alpha_{n+1} - \alpha_n)(\beta_{n+1} - \beta_n), \end{cases}$$

qui permettront de calculer, par voie de récurrence, les nombres α_i, β_i et a_i, b_i.

On aura, d'ailleurs,

$$Q_n = \frac{2n+3}{a_n}(-x + \alpha_{n+1} - \alpha_n),$$

d'où l'on déduira successivement les valeurs des réduites par les formules

$$f_{n+1} = Q_n f_n - f_{n-1},$$
$$\varphi_{n+1} = Q_n \varphi_n - \varphi_{n-1}.$$

27. Le polynome

$$[(n+1)x^2 + \alpha_n x + \beta_n]^2 - (x^2 + px + q)^2 - (a_n x + b_n)(a_{n-1}x + b_{n-1})$$

devant être divisible par x^3, on a encore ces identités

$$(25)\qquad \begin{cases} a_n a_{n-1} = \alpha_n^2 + 2(n+1)\beta_n - p^2 - 2q, \\ a_n b_{n-1} + b_n a_{n-1} = 2\alpha_n \beta_n - 2pq, \\ b_n b_{n-1} = \beta_n^2 - q^2, \end{cases}$$

qui peuvent être considérées comme un système d'intégrales premières des équations aux différences finies (24) et qui peuvent servir, soit comme vérification des calculs, soit pour déterminer les coefficients a_i et b_i.

On a d'ailleurs, puisque le développement de z ne renferme pas de partie entière,

$$f_0 = 1, \qquad \varphi_0 = 0;$$

par suite,

$$\Omega_0 = \mathrm{V} = x^2 + px + q$$

et

$$\Theta_0 = \mathrm{U} = rx + s.$$

On a donc les valeurs initiales suivantes :

$$a_{-1} = 0, \qquad b_{-1} = 0, \qquad a_0 = r, \qquad b_0 = s, \qquad \alpha_0 = p, \qquad \beta_0 = q;$$

d'où l'on déduit, par voie de récurrence, la suite des nombres qui déterminent les polynomes Q_n.

28. Ayant

$$\begin{aligned}[(n+1)x^2 + \alpha_n x + \beta_n]^2 - (x^2 + px + q)^2 - (a_n x + b_n)(a_{n-1}x + b_n)\\ = x^3[n(n+2)x + 2(n+1)\alpha_n - 2p],\end{aligned}$$

on en déduit

$$\mathrm{S}_n = n(n+2)x + 2(n+1)\alpha_n - 2p.$$

Dans le cas où il y a surapproximation, Θ_n doit se réduire à une constante; on a donc

$$a_n = 0,$$

et l'équation différentielle à laquelle satisfait f_n devient

$$x^3 y'' + (5x^2 + 2px + 2q)y' - [n(n+4)x + (2n+3)\alpha_n - 3p] = 0.$$

Réciproquement, si l'on détermine la quantité α_n, de telle sorte que l'équation précédente ait pour solution un polynome entier f_n, on peut déterminer les quantités r et s, de telle sorte que le dénominateur de la $n^{\text{ième}}$ réduite de z soit f_n.

29 Comme dernière application, je considérerai la fonction

$$z = (x^3 + 3gx + h)^{\frac{2\mu}{3}} \int_x^\infty \frac{dx}{(x^3 + 3gx + h)^{\frac{2\mu}{3}}},$$

qui satisfait à l'équation différentielle

$$(x^3 + 3gx + h)z' = 2\mu(x^2 + g)z - (x^3 + 3gx + h).$$

On a, dans ce cas,

$$\mathrm{W} = x^3 + 3gx + h, \qquad \mathrm{V} = \mu(x^2 + g) \quad \text{et} \quad \mathrm{U} = -(x^3 + 3gx + h),$$

et l'on peut poser

$$\begin{aligned}\Omega_n &= (n+\mu)x^2 + \alpha_n x + \beta_n,\\ \Theta_n &= a_n x + b_n,\\ \mathrm{Q}_n &= \mathrm{A}_n x + \mathrm{B}_n.\end{aligned}$$

Substituant ces valeurs dans les relations (19) et (20), on obtient les égalités suivantes, qui doivent être identiquement satisfaites,

$$\begin{aligned}(\mathrm{A}_n x + \mathrm{B}_n)[x^2 + (\alpha_{n+1} - \alpha_n)x + (\beta_{n+1} - \beta_n)]\\ + (a_{n+1} - a_{n-1})x + b_{n+1} - b_n = \mathrm{A}_n(x^3 + 3gx + h),\\ (2n + 2\mu + 1)x^2\\ + (\alpha_{n+1} + \alpha_n)x + \beta_{n+1} + \beta_n = -(\mathrm{A}_n x + \mathrm{B}_n)(a_n x + b_n),\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\mathrm{Q}_n = -\frac{2n + 2\mu + 1}{a_n}(x + \alpha_n - \alpha_{n+1}),$$

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned}\alpha_{n+1} &= \frac{n+\mu}{n+\mu+1}\alpha_n + \frac{2n+2\mu+1}{2n+2\mu+2}\frac{b_n}{a_n},\\ \beta_{n+1} &= -\beta_n - (2n+2\mu+1)(\alpha_{n+1} - \alpha_n)\frac{b_n}{a_n},\\ a_{n+1} &= a_{n-1} + \frac{2n+2\mu+1}{a_n}(\beta_{n+1} - \beta_n - 3g) - \frac{2n+2\mu+1}{a_n}(\alpha_{n+1} - \alpha_n)^2,\\ b_{n+1} &= b_{n-1} - \frac{2n+2\mu+1}{a_n}(\beta_{n+1} - \beta_n)(\alpha_{n+1} - \alpha_n) - \frac{2n+2\mu+1}{a_n}h.\end{aligned}\right.$$

Ces relations permettent de calculer successivement les nombres a_i, b_i, α_i, β_i et par suite les quotients incomplets Q_i.

On a d'ailleurs

$$\Theta_{-1} = 0, \qquad \Omega_0 = \mu(x^2 + g),$$

et, comme la partie entière du développement de r est $\dfrac{x}{2\mu - 1}$,

$$\begin{aligned}f_{-1} &= 0, \qquad \varphi_{-1} = -1,\\ f_0 &= 1, \qquad \varphi_0 = \frac{x}{2\mu - 1};\end{aligned}$$

d'où

$$\Theta_0 = \mathrm{U} + 2\mathrm{V}\varphi_0 - \mathrm{W}\varphi_0' = \frac{2\mu}{1 - 2\mu}(2gx + h).$$

et par suite les valeurs initiales suivantes :

$$a_{-1} = 0, \quad b_{-1} = 0, \quad a_0 = \frac{4\mu g}{1-2\mu}, \quad b_0 = \frac{2\mu h}{1-2\mu}, \quad \alpha_0 = 0, \quad \beta_0 = \mu g;$$

d'où l'on déduira successivement, au moyen des formules (26), les valeurs de

$$a_1, \ a_2, \ \ldots; \quad b_1, \ b_2, \ \ldots; \quad \alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots; \quad \beta_1, \ \beta_2, \ \ldots.$$

30. On obtient un autre système de formules qui permet également de calculer a_n et b_n et que l'on peut considérer comme un système d'intégrales premières des équations aux différences finies (26).

Il s'obtient en exprimant que le polynome

$$\Omega_n^2 - V^2 - \Theta_n\Theta_{n-1} = [(n+\mu)x^2 + \alpha_n x + \beta_n]^2 - \mu^2(x^2+g)^2 - (a_n x + a_{n-1})(b_n x + b_{n-1}$$

est exactement divisible par

$$W = x^3 + 3gx + h.$$

De là résultent les relations suivantes :

$$(27) \quad \begin{cases} a_n a_{n-1} = \alpha_n^2 + 2(n+\mu)\beta_n - 2g\mu^2 - 3gn(n+2\mu), \\ a_n b_{n-1} + b_n a_{n-1} = 2\alpha_n\beta_n - 6g(n+\mu)\alpha_n - hn(n+2\mu), \\ b_n b_{n-1} = \beta_n^2 - 2h(n+\mu)\alpha_n - \mu^2 g^2. \end{cases}$$

Il est important de remarquer que l'on a ainsi trois relations pour déterminer a_n et b_n; d'où cette conséquence que, si l'on pose

$$\frac{b_n}{a_n} = \lambda,$$

λ est une racine d'une équation du second degré de la forme

$$P\lambda^2 + 2Q\lambda + R = 0,$$

où P, Q, R sont des fonctions rationnelles de g, h, α_n, β_n, ces deux dernières quantités étant elles-mêmes des fonctions rationnelles de g et de h.

L'autre racine de l'équation est évidemment la valeur de $\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}$.

Il résulte de là, en particulier, que l'expression

$$Q^2 - PR$$

est le carré d'une fonction rationnelle de g et de h.

Mais c'est un point que je me réserve de traiter plus tard en essayant, du moins dans des cas particuliers, d'intégrer les systèmes d'équations aux différences finies (27) et (28).

VI.

31. Les formules précédentes permettent, pour une valeur donnée de x, de calculer de la façon la plus simple les valeurs des réduites d'une fonction z qui satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre dont les coefficients sont rationnels.

Au point de vue du calcul numérique, la solution peut être regardée comme complète; mais, si l'on veut déterminer effectivement par des expressions analytiques les valeurs des coefficients des quotients incomplets, on est conduit à intégrer un système d'équations aux différences ordinaires dans lequel le nombre des quantités inconnues est d'autant plus grand que le degré du polynome Θ_n est plus élevé.

L'intégration de ces équations semble, en général, présenter d'assez grandes difficultés; nous savons, en effet, que, dans un cas particulier relativement simple étudié par Jacobi et par Borchardt (à savoir celui où z est l'inverse de la racine carrée d'un polynome entier), l'intégration dépend de la théorie des fonctions elliptiques et des fonctions abéliennes.

FIN DU TOME II.

TABLE DES MATIÈRES.

GÉOMÉTRIE.

FIN DE LA TABLE DU TOME II.

Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS,
26680 Quai des Grands-Augustins, 55.